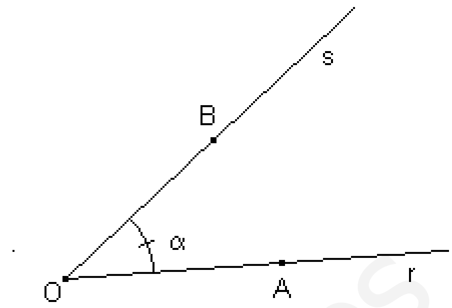
ÁNGULOS Y SU MEDIDA.

Llamamos **ángulo** $\angle(r,s)$ a la región del plano limitada por dos semirectas ordenadas (r,s) que tienen un origen común O, que llamamos vértice del ángulo.



Notación:
Sean $A \in r$, $B \in s$
El ángulo α sol representar-se $\alpha = \angle AOB$
Observa que el vértice ocupa el centro.

Al ángulo formado por dos semirectas que forman una recta se llama **ángulo llano**.
El ángulo mitad de un ángulo llano se llama **recto**.

Dos ángulos son **complementarios** si suman un recto.

Dos ángulos son **suplementarios** si suman un llamo.

Medidas de ángulos.

Se utilizan diversos sistemas de medidas de ángulos. Los más utilizados son:
a) El sistema sexagesimal.
b) El radián.

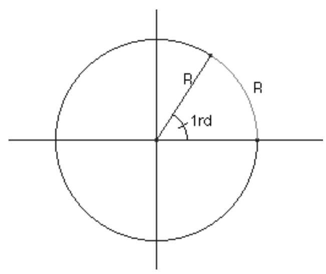
a) **Sistema sexagesimal**.
Se llama **grado sexagesimal** a cada una de las partes del resultado de dividir la circunferencia en 360 partes iguales.
Los divisores del grado son: $1^{\circ} = 60'$ $\quad 1' = 60''$

Así, el ángulo de 15 grados, 20 minutos y 40 segundos se expresa de la siguiente forma: 15º20’40”

Este sistema es el más utilizado.

b) **El radián**.

Definimos **radián**, como el arco de circunferencia que mide lo mismo que el radio.



Debido a la proporcionalidad de la circunferencia y el radio, el ángulo medido en radianes es independiente de la circunferencia elegida.

Equivalencia entre las medidas sexagesimales y radianes es:

$360^o \equiv 2\pi$ radianes o bien: $180^o \equiv \pi$ radianes

Uso de la calculadora científica

Las calculadores científicas pueden trabajar con los tres sistemas de medidas angulares: sexagesimales, centesimales y radianes.
Los modos de la calculadora son los siguientes:
Sexagesimales DEG
Centesimales GRA
Radianes RAD.
La tecla para introducir grados minutos y segundos sexagesimales es $\boxed{^o\,'\,''}$

Ejemplo:
Para introducir 30º15'45" haremos:

30	º ' "	15	º ' "	45	º ' "	El resultado es	30.2625

Para ver cuantos grados, minutos y segundos son 30,2625º efectuaremos:

30.2625	SHIFT	º ' "	El resultado es	30º15'45"

Ejercicio de autoaprendizaje
Con ayuda de calculadora, calcula cuanto vale un radián en medidas sexagesimales:

Para trabajar en medidas sexagesimales, la calculadora tiene que estar en modo DEG.

La razón de proporcionalidad de las dos medidas es $\dfrac{360^o}{2\pi \text{ rd}}$

$$1\text{rd} \cdot \frac{360^o}{2\pi \text{ rd}} = 57{,}2957795^o$$

Con ayuda de la calculadora:

1	×	360	:	(	2	×	π	)	=	SHIFT	º ' "	El resultado es:	57º17'48.81"

Ejercicios propuestos

1. Con ayuda de calculadora (o sin calculadora), pasa las siguientes medidas a sexagesimales:

a) $\frac{3\pi}{2}$rd b) 2'5 rd c) $\frac{3}{4}$rd d) $\frac{\pi}{5}$rd

2. Con ayuda de calculadora (o sin calculadora), pasa a medidas en radianes las siguientes medidas:

a) 60º b) 45º c) 30º d) 25º15' e) 31º12'45"

Operaciones con ángulos:
Suma de ángulos y multiplicación de un ángulo por un número

Ejercicios de autoaprendizaje

a) Calcula 30º15’45” + 47º50’25” =
Se suman las unidades homogéneas
30º15’45” + 47º50’25” = 77º65’70” = 78º 6’10”

Con ayuda de la calculadora

30	º ' "	15	º ' "	45	º ' "	+	47	º ' "	50	º ' "	25	º ' "	=	SHIFT	º ' "

El resultado es 78º6’10”

b) Calcula 3015’45” $\times 3 =$
Multiplicamos cada una de las unidades por 3:
30º15’45” $\times 3 =$ 90º45’135” = 90º47’15”

Con ayuda de la calculadora:

30	º ' "	15	º ' "	45	º ' "	$\times$	3	=	SHIFT	º ' "

El resultado es: 90º47’15”

Ejercicio propuesto

3. Calcula:

a) $35º15'35'' + 25º52'37'' =$

b) $25º25'32'' + 72º15'55'' =$

c) $45º13'25'' - 25º23'5'' =$

d) $42º - 15º24'35'' =$

e) $3(23º35'45'') =$

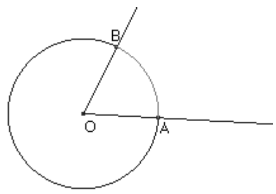
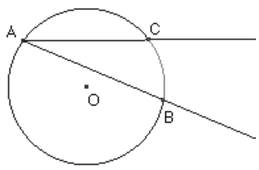
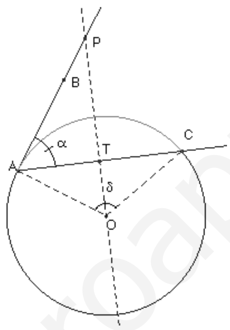
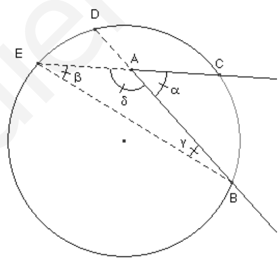
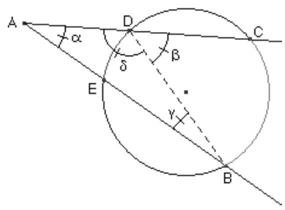
f) $5(45º24'35'') =$

g) $\dfrac{35º23'45''}{3} =$

h) $\dfrac{72º15'34''}{2} =$

i) $\dfrac{75º15'17''}{5} =$

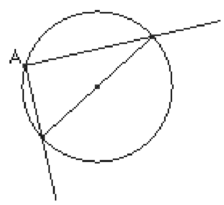
Ángulos de la circunferencia.

Ángulo	Definición		Medida
Central	Se llama **ángulo central** ∠AOB, al ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados contienen radios. El conjunto del puntos de la circunferencia interiores al ángulo se llama arco de la circunferencia.		El ángulo central mide lo mismo que el arco que abarca.
Inscrito	Se llama **ángulo inscrito** ∠BAC, al ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia, y los lados son dos cuerdas de la misma.		El ángulo inscrito de una circunferencia, mide la mitad del arco que abarca.
Semiinscrito	Se llama **ángulo semiinscrito** ∠BAC, al ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferen-cia, un lado es una cuerda y el otro lado es tangente a la circunferencia.		El ángulo semiins-crito mide la mitad del arco de circunferencia que abarca.
interior	Se llama **ángulo interior** ∠BAC, al ángulo cuyo vértice es un punto interior de la circunferencia.		El ángulo interior mide la semisuma de los arcos que abarca.
exterior	Se llama **ángulo exterior** ∠BAC, al ángulo cuyo vértice es un punto exterior a la circunferencia, y los lados son cuerdas o rectas tangentes de la circunferencia.		El ángulo exterior, mide la semidiferencia de los arcos que abarca.

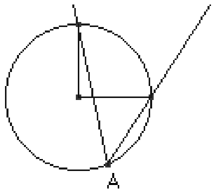
Ejercicios propuestos

4. Calcula el valor del ángulo A, indicando en cada caso el tipo de ángulo. (Los polígonos de las figuras son regulares):

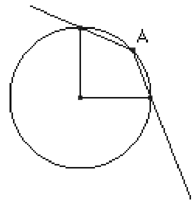
a)



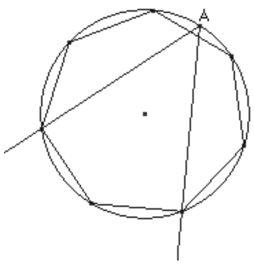
b)



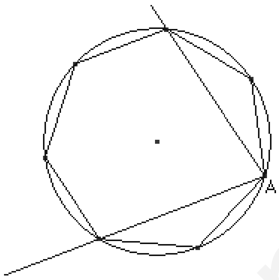
c)



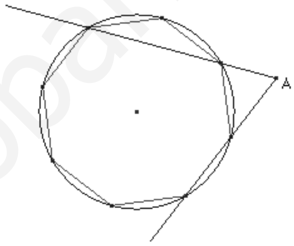
d)



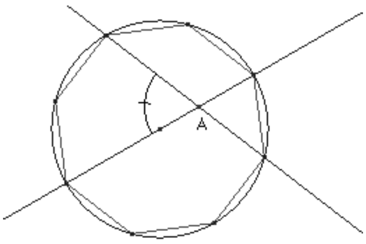
e)



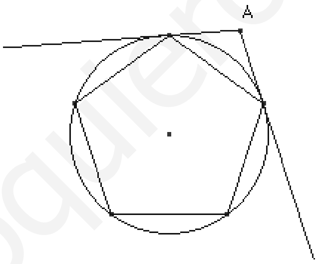
f)



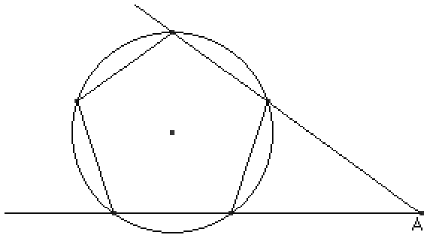
g)



h)

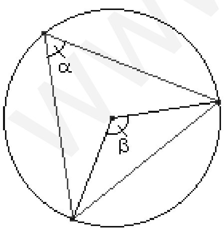


y)

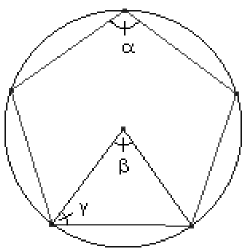


5. Calcula en cada caso el ángulo α, β, γ. (Todos los polígonos son regulares).

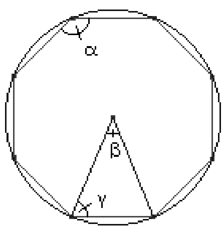
a)



b)

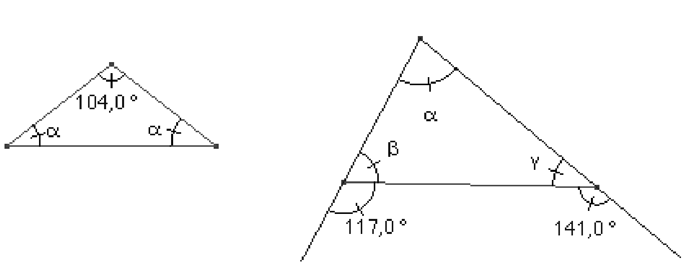


c)

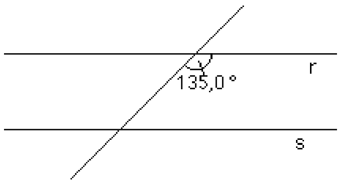


6. Calcula los ángulos α, β, γ.

a) b) c)



7. Las rectas r, s de la figura son paralelas. Determina todos los ángulos.



Problemas

1. Determina dos ángulos suplementarios que es diferencien en 42º.

2. Determina dos ángulos complementarios sabiendo que un es siete veces más grande que el otro.

3. Determina dos ángulos complementarios que se diferencian en 15º.

4. Las medidas de los ángulos de un triángulo son proporcionales a 2, 4, 6. Calcúlalos.

5. Las medidas de les ángulos de un triángulo son proporcionales a 3, 4, 8. Calcúlalos.