Probabilidad. Sucesos.

Contenido

1. Tipos de Sucesos

En la naturaleza podemos distinguir entre tres tipos de sucesos según la certeza o no de que ocurra siempre lo mismo:

- *Sucesos deterministas*: son aquellos en los que conocidas las condiciones iniciales sabemos seguro lo que va a ocurrir. *Ejemplo*: los sucesos físicos que se rigen por las leyes físicas (si tiramos una piedra esta caerá)
- *Sucesos aleatorios o probabilísticos:* cuando aun conociendo las condiciones iniciales no podemos fijar el resultado. *Ejemplo:* lanzamiento de un dado
- *Sucesos cuasialeatorios:* son sucesos deterministas, pero un pequeño cambio de las condiciones iniciales modifica totalmente el resultado, por lo que se tratan de forma probabilística. *Ejemplo:* el estudio de la climatología.

2. Estudios de sucesos aleatorios

Los sucesos aleatorios se estudian a partir de la probabilidad. La probabilidad de un suceso dado nos indica la posibilidad o no de que ocurra dicho suceso u otro.

La probabilidad de que ocurra un suceso A se denota como p(A), y se cumple que $0\leq p(A) \leq 1$.

Según el tipo de suceso podemos obtener su probabilidad de diferentes métodos:

1) *Probabilidad experimental:* consiste en realizar el suceso un nº muy grande de veces, anotando cuantas veces ocurre el suceso y cuantas veces realizamos el experimento. La probabilidad experimental del suceso será igual al cociente entre el número de veces que ha ocurrido el suceso y el número de veces realizado el experimento:

   $P(A)=\frac{f_a}{N}$ siendo: f_a el número de veces que ocurre el suceso A

   . N el de veces que realizamos en experimento

2) *Probabilidad clásica o de Laplace:* sólo se puede usar cuando se sabe que los sucesos elementales del experimento son equiprobables, es decir con misma probabilidad. La probabilidad de que ocurra un suceso A a partir de la probabilidad clásica es:

   $$P(A)=\frac{n^o\ de\ sucesos\ elementales\ del\ suceso\ A}{n^o\ total\ de\ sucesos}$$

   Ejemplo: lanzamos un dado, calcular la probabilidad de que salga un número primo → A={2,3,5} $P(A)=\frac{3}{6}=0,5$

3) *Subjetiva:* hay muchas veces donde no podemos asignar las probabilidad de un suceso ni de forma experimental ni por la probabilidad clásica. Por ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que gane España la Eurocopa?. Cuando tenemos que asignar una probabilidad a estas sucesos la probabilidad es subjetiva, es decir depende de la persona que se la asigne, si bien ha de cumplir unos requisitos como:

   - La probabilidad del suceso menor o igual que 1.
   - La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales es 1.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

En este tema estudiaremos sólo la probabilidad clásica, si bien es importante conocer las otras dos.

Veamos un ejemplo donde aparecen las dos primeras formas de calcular la probabilidad.

***Ejemplo**:* Calcular la probabilidad de que al lanzar 2 monedas salga 1 cara, 2 caras o ninguna. Hacerlo por la probabilidad clásica y experimental si lanzamos las monedas 10000 veces y obtenemos los siguientes resultados:

0 caras → 2434

1 cara → 5078

2 Caras → 2488

a) Por probabilidad experimental:

$P(0\text{ caras})=\dfrac{2434}{10000}=0{,}2434$

$P(1\text{ cara})=\dfrac{5078}{10000}=0{,}5078$

$P(2\text{ caras})=\dfrac{2488}{10000}=0{,}2488$

b) Por probabilidad clásica. Busquemos sucesos equiprobables:

E={cc,cx,xc,xx}

$P(0\text{ caras})=\dfrac{1}{4}=0{,}25$

$P(1\text{ cara})=\dfrac{2}{4}=0{,}5$

$P(2\text{ caras})=\dfrac{1}{4}=0{,}25$

3. Espacio Muestral. Distintos tipos de sucesos.

Al lanzar un dado puede ocurrir 6 casos distintos, que salgan 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Cada uno de los casos se llama suceso elemental, siendo el espacio muestral el conjunto de todos los sucesos. E={1, 2, 3, 4, 5, 6}

Defínción: Suceso elemental es cada uno de los posibles sucesos simples que pueden ocurrir en el experimento aleatorio.

Defínción: Espacio muestral es el conjunto de todos los sucesos elementales. Se suele denotar con la letra E.

Otros sucesos que pueden ocurrir al lanzar un dado es la unión de varios sucesos elementales, por ejemplo A={par}={2,4,6}, B={múltiplo de 3}={$\dot{3}$}={3,6}

Definición: un suceso es cualquier subconjunto del espacio muestral E. Se suelen denotar con letras mayúsculas: A, B, C… Hay dos sucesos importantes:

- El suceso vacio, ∅ o suceso imposible → p(∅)=0
- El propio espacio muestral, o suceso seguro → p(E)=1

4. Relaciones entre sucesos.

Unión de dos sucesos A y B: es el conjunto de elementos formados por aquellos que están en A **o** en B:

$A \cup B=\{x: x \in A \text{ o } x \in B\}$

Ejemplos:

1) lanzamos un dado tal que dos sucesos:
   - A={impar}={1,3,5}
   - B={primo}={2,3,5}

   $A \cup B=\{1,2,3,5\}$

2) Sacamos una carta de la baraja española:
   - A={oros}={1o,2o,3o,4o,5o,6o,7o,10o,11o,12o}
   - B={figuras}={10o,11o,12o,10c, 11c, 12c, 10b, 11b, 12b, 10e, 11e,12e}

   A∪B={1o,2o,3o,4o,5o,6o,7o,10o,11o,12o,10c,11c,12c,10b,11b,12b,10e,11e,12e}

Intersección de dos sucesos A y B: es el conjunto formado por aquellos elementos que están en A **y** en B.

$A \cap B=\{x: x \in A \text{ y } x \in B\}$

Ejemplos:

1) lanzamos un dado tal que dos sucesos:
   - A={par}={2, 4, 6}
   - B={primo}={2,3,5}

   $A \cap B=\{2\}$

2) Sacamos una carta de la baraja española:
   - A={oros}={1o,2o,3o,4o,5o,6o,7o,10o,11o,12o}
   - B={figuras}={10o,11o,12o,10c, 11c, 12c, 10b, 11b, 12b, 10e, 11e,12e}

   A∩B={10o,11o,12o}

Suceso contrario de A: es otro suceso que se denomina como A', A^c o $\bar{A}$ y es el conjunto de los elementos del espacio muestral, E, que no están en A.

$A'=\{x \in E: x \notin A\}$

Ejemplo:

lanzamos un dado A={par}={2, 4, 6}→A'={impar}={1,3,5}

Definición: dos sucesos son incompatibles si no tiene ningún elemento en común, un ejemplo de sucesos incompatibles son los sucesos contrarios. Es decir A y B incompatible → $A \cap B=\emptyset$

Ejemplo: lanzamos un dado A={par}={2,4,6}, B={1,3}son sucesos incompatibles.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 1 pag 245: Una bolsa tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Extraemos una bola.

a) ¿cuál es el espacio muestral?
b) A="obtener numero primo", B="múltiplo de 3". Escribe los sucesos, A, B A',B' A∪B, A∩B, A∪A' y A∩A'

Solución:

a) E={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
b) A={2,3,5,7}; B={3,6,9}; A'={1,4,6,8,9,10}, B'={1,2,4,5,7,8,10}, A∪B={2,3,5,6,7,9}, A∩B={3}, A∪A=E, A∩A'=∅

Ejercicio 2 pag 245: Lanzamos dos veces una moneda

a) Escribe todos los sucesos elementales
b) Escribir S={la primera sale cara}
c) Escribir suceso incompatible con S

Solución:

a) Podemos entender el experimento de dos formas:
   1) Ver el número de caras E={0 caras, 1 cara, 2caras}. No son equiprobables
   2) Distintas situaciones (importa el orden). E={cc,cx,xc,xx}. Son equiprobables
b) S={cx,cc}
c) A={salen dos caras}={cc}

Ejercicios

1. Pag 247
   a) p(figura)=12/40=3/10
   b) p(bastos o espada)=p(B∪E)=20/40
   c) p(oros o rey)=p(O∪R)=13/40

2. pag247
   a) p(impar)=5/10=0,5
   b) p(mayor que 5)=4/10=0,4
   c) p(no sea el 7)=9/10=0,9

3. pag 247
   a) p(roja)=5/12
   b) p(no sea blanca)=8/12

4. pag247

   E={11,12,13,14,15,16,21,22,23,24,25,26,31,32,33,34,35,36,41,42,43,44,45,46,61,62,63,64,65,66}

   p(suma 4)=6/36

   a) p(suma 2)=1/36
   b) p(suma 3)=2/36
   c) p(suma 7)=6/36
   d) p(suma 11)=2/36
   e) p(suma mayor que 5)=26/36

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

5. Relación entre probabilidades

Podemos relacionar las probabilidades de un suceso y la de su contrario. Se cumple así la siguiente relación:

$$p(A')=1-p(A) \quad \text{o} \quad p(A)=1-p(A')$$

Esta propiedad puede ser muy útil, pues a veces es más fácil calcular la probabilidad del suceso contrario que la del suceso

Ejemplo: Hallar la probabilidad de que al lanzar tres monedas se obtengan al menos una cara.

Es mucha más fácil si pensamos la probabilidad de que no salga ninguna cara, suceso contrario. Tenemos que hay 8 posibilidades (variación con repetición de 2 elementos de 3 en 3→ 2^3) y sólo uno en el que salgan todas cruces

A={al menos una cara}

$p(A)=1-p(A')=1-1/8=7/8$

Ejercicio: se encarga la impresión en una imprenta en la que de cada 1000 folios se estropean 12. Hallar la probabilidad de que elegido un folio al azar:

a) Este mal impreso
b) Este correctamente impreso

Solución

a) A={mal impreso}, aplicamos probabilidad experimental $p(A)=12/1000=0{,}012$
b) A'={bien impreso} $p(A')=1-P(A)=0{,}988$

Si A y B son dos sucesos de un mismo experimento aleatorio, la probabilidad de la unión y de la intersección se relacionan de la siguiente forma:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B) \quad \text{o} \quad p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)$$

Si son sucesos incompatibles, recordad que entonces $p(A\cap B)=0$, se cumple que $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.

Ejemplo: en un quiosco de cada 10 personas que van a comprar se cumple que 5 compran un periódico, 3 una revista y 1 de ellos compra revista y periódico. Calcular la probabilidad de:

a) Que compren periódico, que compre revista
b) Que compren periódico y revista
c) Que compren periódico o revista

Solución:

a) R={revista} → $p(R)=0{,}3$; P={periódico}→$p(P)=0{,}5$
b) $R\cap P$={revista y periódico}→ $p(R\cap P)=0{,}1$
c) $R\cup P$={revista o periódico}→ $p(R\cup P)=p(P)+p(R)-p(R\cap P)=0{,}5+0{,}3-0{,}1=0{,}7$

Si tenemos varios conjuntos la probabilidad de la unión de 3 o más conjuntos esta se calcula de la siguiente forma:

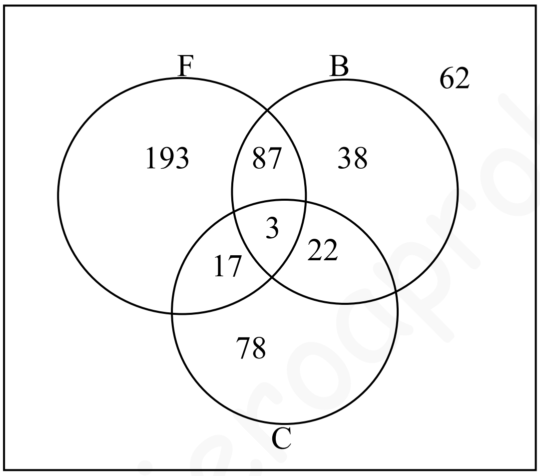
$$p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)-p(A\cap C)-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Muchas veces cuando hay más de dos sucesos para calcular las probabilidades lo mejor es hacer un dibujo donde se muestren los distintos conjuntos, las intersecciones, etc.

***Ejemplo*:** en el instituto de 500 personas se cumple que el número de alumnos que juega al futbol son 300, que juegan al baloncesto 150, que hacen ciclismo 120, que juegan futbol y baloncesto son 90, al futbol y ciclismo 20, baloncesto y ciclismo 25, y por fin que practican los tres deportes 3. Calcular:

a) La probabilidad de que elegido al azar un alumno no haga ningún deporte
b) La probabilidad de que elegido al azar un alumno no juegue al baloncesto
c) La probabilidad de que elegido al azar un alumno juegue al baloncesto o al futbol
d) La probabilidad de que elegido al azar un alumno practiquen algún deporte



Solución

F={ futbol}, B={baloncesto}, C={ciclismo}

a) S={ningún deporte}=F'∩B'∩C' → $p(F'\cap B'\cap C')=\frac{62}{500}$

b) B'={no juegue al baloncesto}→ $p(B')=1-p(B)=1-\frac{150}{500}$

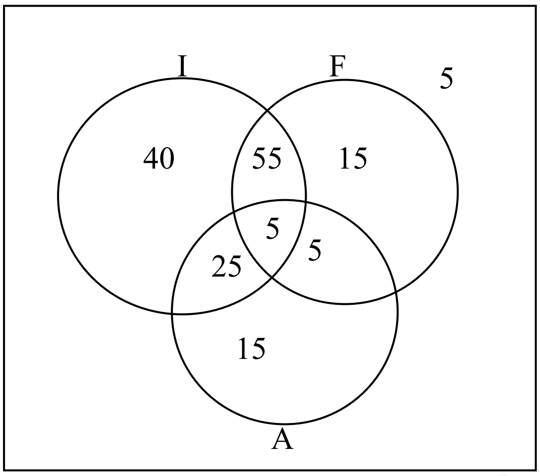
c) B∪F={baloncesto o futbol}→$p(B\cup F)=p(B)+p(F)-p(B\cap F)=\frac{150}{500}+\frac{300}{500}-\frac{90}{500}=$ $=\frac{360}{500}$

d) F∪B∪C={algún deporte}→ $p(F\cup B\cup C)=1-p(\text{ningún deporte})=1-\frac{62}{500}=\frac{438}{500}$

Problema: de un grupo de 165 diplomáticos, 125 hablan inglés, 80 francés, 50 alemán, 60 hablan ingles y francés, 30 inglés y alemán, 10 francés y alemán y 5 los tres idiomas. Calcular la probabilidad de:

a) Al dirigirte a uno de ellos en francés o alemán te entienda
b) Que hable inglés y francés pero no alemán
c) Que no hable francés
d) Que hable Francés y no inglés

Solución



a) $p(F \cup A) = p(F) + p(A) - p(F \cap A) = \frac{80}{165} + \frac{50}{165} - \frac{10}{165} = \frac{120}{165}$

b) $p(F \cap I \cap A') = \frac{55}{165}$

c) $p(F') = 1 - p(F) = 1 - \frac{80}{165} = \frac{85}{165}$

d) $p(F \cap I') = \frac{20}{165}$

Ejercicios:

1) Tenemos una baraja española. a) Calcular la probabilidad de que al sacar una carta sea copas o figura. b) De que sea oros o par o figura

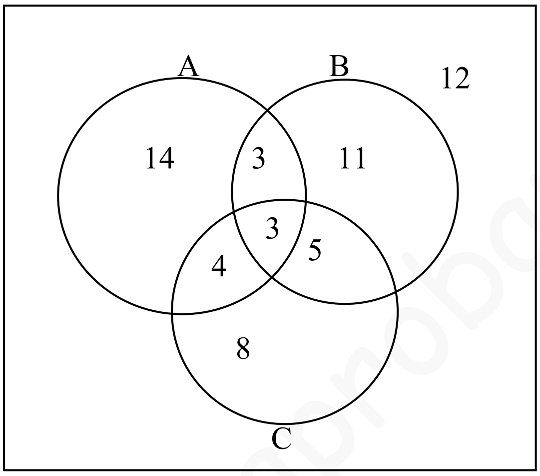
a) A={copas},B={figura} → $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{10}{40} + \frac{12}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$

b) A={oros}, B={pares}, C={figura} →
$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C) =$
$= \frac{10}{40} + \frac{20}{40} + \frac{12}{40} - \frac{5}{40} - \frac{3}{40} - \frac{8}{40} + \frac{2}{40} = \frac{28}{40}$

2) Se sabe que la probabilidad de aprobar matemáticas es de 0,45, de aprobar lengua del 0,4, y de aprobar alguna de las dos del 0,7. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar ambas materias?

a) p(M)=0,45; p(L)=0,4; $p(L \cup M) = 0{,}7$ → ¿$p(L \cap M)$?
$p(L \cap M) = p(L) + p(M) - p(L \cup M) = 0{,}15$

3) En un grupo de 60 personas, 24 leen la revista A; 22 la B; 20 la C; 6 leen la A y la B; 7 leen la A y la C; 8 leen la B y la C y finalmente 3 leen las tres publicaciones. Calcular la probabilidad de que elegida una persona al azar:
   a) No lea ninguna publicación
   b) Lea solo la revista A
   c) Lea al menos una de las 3
   d) Lean la A o la B



a) $p(A'\cap B'\cap C')=\frac{12}{60}$

b) $p(A\cap B'\cap C')=\frac{14}{60}$

c) $p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)-p(A\cap C)-$
$p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)=1-p(A'\cap B'\cap C')=1-\frac{12}{60}=\frac{48}{60}$

d) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{24}{60}+\frac{22}{60}-\frac{6}{60}=\frac{40}{60}$

6. Probabilidad condicionada

Estudiemos un ejemplo para entender el significado de la probabilidad condicionada.

La encuesta sobre el agrado del futbol en la TV según los sexos entre alumnos de 14-18 años es el siguiente:

	A: Varones	A': Mujeres	
B=agrada el futbol	145	42	187
B'=no agrada el futbol	51	96	147
	196	138	334

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Considerar los sucesos:

- A=Ser varón; A'=ser mujer
- B=gusta futbol; B'=no gusta

Calculemos las siguientes probabilidades:

p(A)=$\frac{196}{334}$; p(B)=$\frac{187}{334}$; p(A∩B)=$\frac{145}{334}$

Pero ahora centrémonos en las siguientes probabilidades:

- Probabilidad de que siendo varón(A) le guste el futbol(B)→p(B/A)=$\frac{145}{196}$
- Probabilidad que siendo varón(A) no le guste el futbol(B')→p(B'/A)=$\frac{51}{196}$
- Probabilidad de que siendo mujer(A') le guste el futbol(B)→p(B/A')=$\frac{42}{138}$
- Probabilidad de que siendo mujer(A') no guste futbol(B')→p(A'/B')=$\frac{96}{138}$
- Probabilidad de que gustándole el futbol(B) sea varón(A)→p(A/B)= $\frac{145}{187}$
- Probabilidad de que gustándole el futbol(B) sea mujer(A')→p(A'/B)= $\frac{42}{187}$

Definición: sea un experimento aleatorio en el que hay dos sucesos A y B. Se llama probabilidad condicionada del suceso B respecto al suceso A, y se denota como p(B/A) a la probabilidad de que ocurre el suceso B sabiendo que es A.

Se puede calcular a partir de las **tablas de contingencia,** como las vista en el apartado anterior o a partir de esta fórmula:

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)} \text{ siempre que } p(A)\neq 0$$

Veamos la fórmula en el ejemplo anterior del futbol y hombre en los siguientes casos:

- Probabilidad de que siendo varón(A) le guste el futbol(B):

  $$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{\frac{145}{334}}{\frac{196}{334}}=\frac{145}{196}$$

- Probabilidad que siendo varón(A) no le guste el futbol(B'):

  $$p(B'/A)=\frac{p(A\cap B')}{p(A)}=\frac{\frac{51}{334}}{\frac{196}{334}}$$

- Probabilidad de que gustándole el futbol(B) sea mujer(A')

$$p(A'/B)=\frac{p(B\cap A')}{p(B)}=\frac{\frac{42}{334}}{\frac{187}{334}}=\frac{42}{187}$$

Ejercicios:

1) Extraemos una carta de una baraja española. Calcular la probabilidad de que la carta sea rey de oros, sabiendo que la carta extraída es una figura.

a) Por tabla de contingencia

	A: figura	A': no figura	
B=rey de oros	1	0	1
B'=no rey de oros	11	28	39
	12	28	40

A={figura}
B={rey de oros}

$p(B/A)=\frac{1}{12}$

b) Por la formula:

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{40}}{\frac{12}{40}}=\frac{1}{12}$$

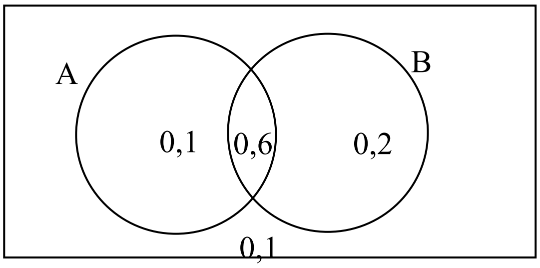
2) Los resultados de 4º de ESO muestra que la probabilidad de aprobar la asignatura de matemáticas es de 0,8 y lengua es de 0,7. Además la probabilidad de aprobar ambas es de 0,6. Se coge un alumno al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe sólo lengua?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las dos?
c. Se sabe que ha aprobado lengua. ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado mates?
d. Se sabe que ha suspendido mates. ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado lengua?

A={aprobar lengua}→ $p(A)=0{,}7$

B={aprobar mates}→ $p(B)=0{,}8$

$p(A\cap B)=0{,}6$



a) $p(A\cap B')=0{,}1$

b) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0{,}7+0{,}8-0{,}6=0{,}9$

c) $p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{0{,}6}{0{,}7}=0{,}86$

d) $p(A/B')=\frac{p(A\cap B')}{p(B')}=\frac{0{,}1}{1-0{,}8}=0{,}5$

7. Probabilidad mediante árbol

7.1 Probabilidad sucesos independientes

Definición: dos sucesos A_1 y A_2 son independientes si la probabilidad de que ocurra el proceso A_2 no depende de que haya ocurrido antes A_1 o no.

La probabilidad de que ocurran A_1 y A_2, es decir la intersección de ambas, es el igual al producto de las dos probabilidades

$P(A_1 \cap A_2)=p(A_1) \cdot p(A_2)$ *en sucesos independientes*

Ejemplo: Extraemos una carta y miramos el palo, y la volvemos a introducir. Extraemos otra carta y volvemos a mirar el palo. a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos cartas sean de oros?. b) ¿y la primera de oros y la segunda de copas?

Está claro que son sucesos independientes, ya que al volver a introducir la carta el palo de la segunda extracción no depende del palo de la primera.

a) A_1={primera oro}$\rightarrow$ $p(A_1)=0{,}25$
   A_2={segunda oro}$\rightarrow$$p(A_2)=0{,}25$
   p(1ª oro y 2ª oro)=$p(A_1 \cap A_2)=0{,}25 \cdot 0{,}25=0{,}0625$
b) A_1={1ª oro}$\rightarrow$ $p(A_1)=0{,}25$
   A_2={segunda copa}$\rightarrow$$p(A_2)=0{,}25$
   p(1ª oro y 2ª copa)=$p(A_1 \cap A_2)=0{,}25 \cdot 0{,}25=0{,}0625$

7.2 Probabilidad sucesos

Definición: dos sucesos A_1 y A_2 son dependientes si la probabilidad de que ocurra el suceso A_2 depende de que haya ocurrido antes o no A_1.

La probabilidad de que ocurra A_1 y A_2, es decir la intersección, es igual al producto de la probabilidad del primero por la probabilidad del segundo tal que antes haya ocurrido el primero (probabilidad condicionada).

$P(A_1 \cap A_2)=p(A_1) \cdot p(A_2/A_1)$ *en sucesos dependientes*

Ejemplo: Extraemos una carta y después otra sin reemplazar la primera. a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos cartas sean de oros?. b) ¿y la primera de oros y la segunda de copas?

Está claro que son sucesos dependientes, ya que al no volver a introducir la carta el palo de la segunda extracción depende del palo de la primera.

a) A_1={primera oro}$\rightarrow$ $p(A_1)=0{,}25$
   A_2={segunda oro}$\rightarrow$$p(A_2/A_1)=9/39=0{,}23$
   p(1ª oro y 2ª oro)=$p(A_1 \cap A_2)=0{,}25 \cdot 0{,}23=0{,}0575$
b) A_1={1ª oro}$\rightarrow$ $p(A_1)=0{,}25$
   A_2={segunda copa}$\rightarrow$$p(A_2/A_1)=10/39=0{,}256$
   p(1ª oro y 2ª copa)=$p(A_1 \cap A_2)=0{,}25 \cdot 0{,}256=0{,}0641$

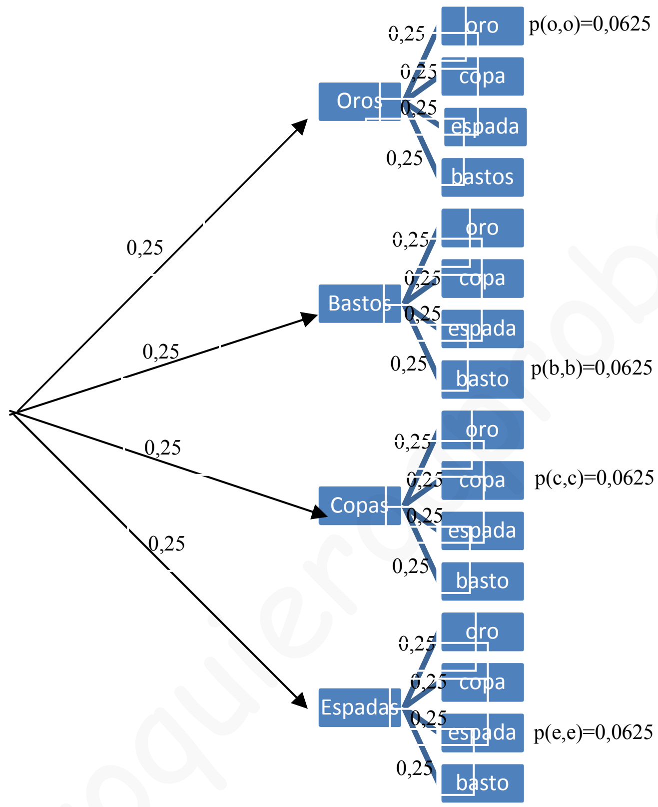
 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

7.3 Probabilidad mediante árbol

Se utiliza para calcular la probabilidad cuando para llegar a un suceso dado se llega a partir de distintos pasos o niveles y puede ocurrir por diferentes caminos. Se utiliza tanto cuando los sucesos son independientes como dependientes.

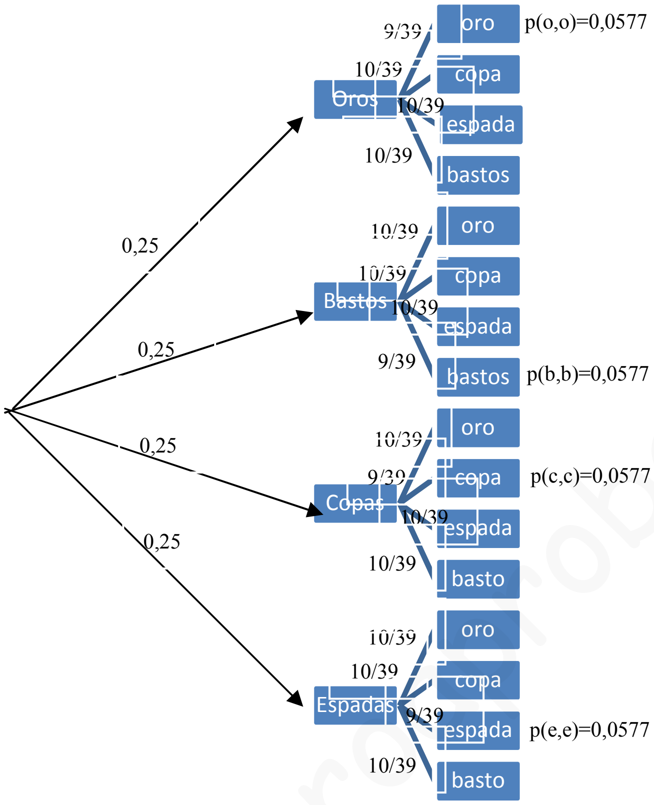
La probabilidad será igual a la suma de las probabilidades de los diferentes caminos.

Ejemplo: Calcular la probabilidad de que al extraer dos cartas de una baraja española con reemplazamiento sean del mismo palo:



p(sacar dos cartas mimo palo)=p(o,o)+p(b,b)+p(c,c)+p(e,e)=0,0625·4=0,25

Ejemplo: Calcular la probabilidad de que al extraer dos cartas de una baraja española sin reemplazamiento sean del mismo palo:



p(sacar dos cartas mimo palo)=p(o,o)+p(b,b)+p(c,c)+p(e,e)=0,0577·4=0,23

Ejercicios pag 254:

18. Tenemos una bolsa con las letras S, S, N, I. I, O. Sacamos dos letras ¿Cuál es la probabilidad de escribir con ellas la palabra Si?.

Es un caso claro de estudio en forma de árbol. Para formar la palabra si dos opciones:

1) Primero sacamos la S con una probabilidad $p(S_1)=2/6$ (2 bolas de 6), y luego la I con una probabilidad de $p(I_2/S_1)=2/5$ (2 bolas de las 5 las 5 que quedan). Luego $p(S_1 \cap I_2)=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}=0{,}133$

2) Primero sacamos la I con una probabilidad de $p(I_1)=2/6$ (2 bolas de 6), y luego la S con probabilidad de $p(S_2/I_1)=2/5$ (2 bolas de las 5 que quedan). Luego se cumple que $p(I_1 \cap S_2)=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}=0{,}133$

   Luego se cumple p(formar SI)= $p(S_1 \cap I_2)+p(I_1 \cap S_2)=0{,}267$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

19. En una clase hay 17 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos alumnos de esa clase. Calcular la probabilidad de que sean

a) Los dos chicos

b) Dos chicas

c) Un chico y una chica

a) Para que sean dos chicos ha de cumplirse:
   - el primero sea chico → $p(O_1)=17/35$
   - el 2º sea chico también siendo el primero chico → $p(O_2/O_1)=16/34$

   $p(2\text{ chicos})= p(O_1)\cdot p(O_2/O_1)=0{,}23$

b) Dos chicas:
   - 1ª chica → $p(A_1)=18/35$
   - 2ª chica también siendo la 1ª chica → $p(A_2/A_1)=17/34$

   $p(2\text{ chicas})= p(A_1)\cdot p(A_2/A_1)=0{,}26$

c) Un chico y una chica: dos posibilidades:
   1. 1º Chico y 2ª chica: $p(O_1\cap A_2)=p(O_1)\cdot P(A_2/O_1)=\frac{17}{35}\cdot\frac{18}{34}=0{,}26$
   2. 1ª Chica y 2º chico: $p(A_1\cap O_2)=p(A_1)\cdot P(O_2/A_1)=\frac{18}{35}\cdot\frac{17}{34}=0{,}26$

   $p(\text{chico y chica})= p(O_1\cap A_2)+ p(A_1\cap O_2)=0{,}52$

20. En un laboratorio se somete un nuevo medicamento a tres controles. La probabilidad de pasar el primero es de 0,89, la de pasar el 2º 0,93 y por último la de pasar el último es de 0,85. ¿cuál es la probabilidad de pasar los tres controles?

Son sucesos independientes, es decir pasar el 2º no depende de haber pasado el 1º, etc: $p(P_1\cap P_2\cap P_3)= p(P_1)\cdot p(P_2)\cdot p(P_3)=0{,}89\cdot 0{,}93\cdot 0{,}85=0{,}703545$

21. Calcular la probabilidad de elegir al azar una de estas bolsas y extraer de ella un sola bola. En la primera bolsa hay 6 bolas y 3 blancas, en la 2ª bolsa hay 6 bolas y 4 son blancas, y en la 3ª son 6 bolas y 5 blancas

Es un caso claro de probabilidad por diagrama de árbol, pues tenemos tres caminos para obtener la bola deseada:

1. Eligiendo primero el primer saco con probabilidad de $p(S_1)=1/3$, y luego en este saco sacar la blanca $p(B/S_1)=3/6$ → $p(S_1\cap B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}=0{,}167$
2. Eligiendo primero el 2º saco con probabilidad de $p(S_2)=1/3$, y luego en este saco sacar la blanca $p(B/S_2)=4/6$ → $p(S_2\cap B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}=0{,}222$
3. Eligiendo primero el 3er saco con probabilidad de $p(S_3)=1/3$, y luego en este saco sacar la blanca $p(B/S_3)=5/6$ → $p(S_3\cap B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}=0{,}278$

   $p(B)= p(B/S_1)+ p(B/S_2)+ p(B/S_3)=0{,}667$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

22. Si tiramos dos dados cual es laprobabilidad de:

a) Los dos la misma puntuación

b) Obtener un 6 en alguno de ellos

c) Obtener en uno de ellos mayor puntuación que en el otro

Son 2 sucesos independientes los resultados de los dos dados

a) Parecido al visto en la teoría con las cartas
$p(1_1\cap 1_2)= p(2_1\cap 2_2)= p(3_1\cap 3_2)= p(4_1\cap 4_2)= p(5_1\cap 5_2)= p(6_1\cap 6_2)=1/6\cdot 1/6$
$p(\text{misma})=p(1_1\cap 1_2)+p(2_1\cap 2_2)+p(3_1\cap 3_2)+p(4_1\cap 4_2)+p(5_1\cap 5_2)+ +p(1_1\cap 1_2)=1/6$

b) Obtener un 6 en alguno de ellos: tres opciones que salga en la primera tirada, en la segunda o que salga en las dos:

$p(6_1)\cdot p(\text{no } 6_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=0{,}14$

$p(\text{no } 6_2)\cdot p(6_1)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=0{,}14$

$p(6_1)\cdot p(6_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=0{,}028$

p(un 6 al menos)=0,308

c) Es el suceso contrario de que salgan en los dados los mismos resultados→ p(uno mas puntación que otro)=1-p(mismo valor los dos)=1-1/6=5/6=0,83

24. Javier tiene en su monedero 4 monedas de cinco céntimos, 3 de veinte y 2 de un euro. Saca dos monedas al azar ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

a) Que las dos sean de 5 céntimos

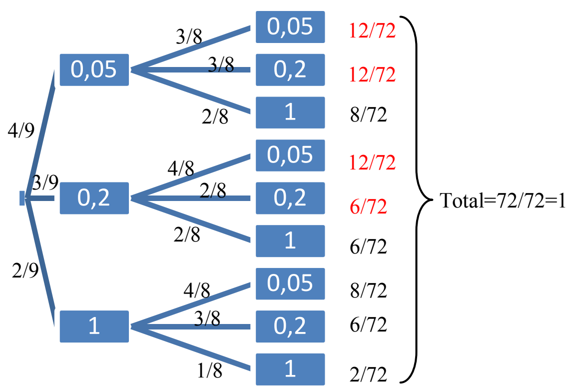
b) Que ninguna sea de un euro

c) Que saque 1,20€

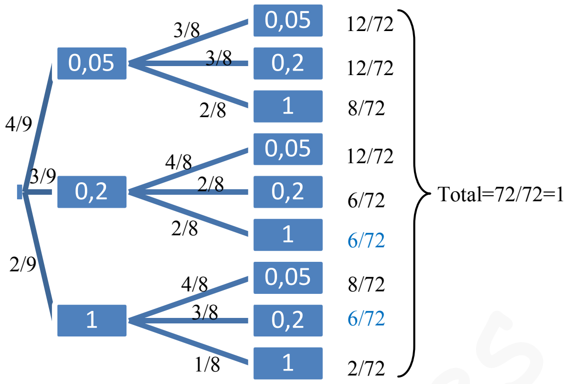
Son sucesos dependientes, ya que no hay reemplazamiento:

a) $P(0{,}05_1\cap 0{,}05_2)=p(0{,}05_1)\cdot p(0{,}05_2/0{,}05_1)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=0{,}167$

b) Por diagrama árbol: p(ninguna euro)=12/72+12/72+12/72+6/72=42/72=0,58



c) Por diagrama de árbol:



p(1,2€)=6/72+6/72=12/72=1/6=0,167

25. En una bolsa hay 4 bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones. Calcular la probabilidad de que el número formado por las tres bolas sea de 121, suponiendo:

a) la bola se reintegra en la bolsa

b) la bola no se devuelve a la bolsa

a) Las probabilidades en cada extracción son independientes de las anteriores al haber reemplazamiento → $p(121)=p(1)\cdot p(2)\cdot p(1)=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{8}=0{,}125$

b) $p(121)=p(1_1)\cdot p(2_2/1_1)\cdot p(1_3/1_1\cap 2_2)=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=0{,}167$

26. Un jugador de baloncesto suele acertar al 75% de sus tiros desde el tiro personal. Si acierta el primer tiro, puede tirar de nuevo. Calcular la probabilidad de haga:

a) Haga dos puntos

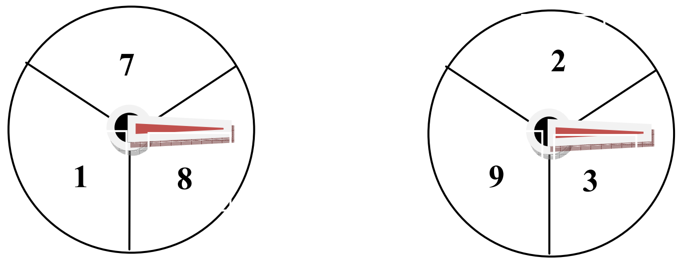
b) Haga un punto

c) No haga ningún punto

P(meter)=0,75; p(fallar)=0,25

a) p(2 puntos)=p(mete el primero)·p(mete el segundo)=0,75·0,75=0,5625
b) p(1 punto)=p(mete el 1º)·p(falla el 2º)=0,75·0,25=0,1875
c) p(ninguno)=p(falla 1º)=0,25

30. Se hace girar la flecha en cada una de estas ruletas, y gana quien consiga una puntuación más alta. Calcular la probabilidad de que gane A y de que gane B

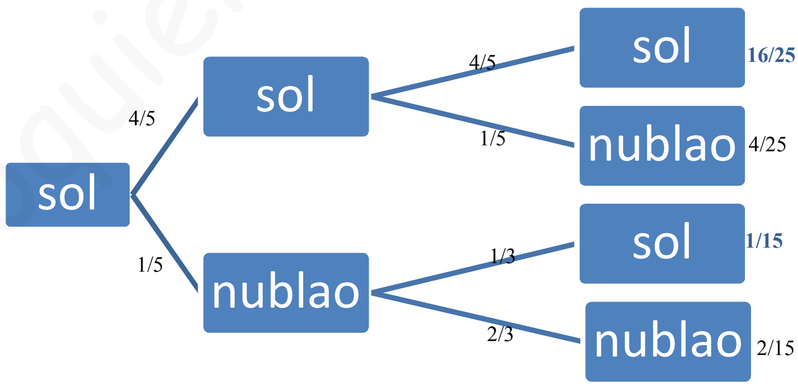


Son sucesos independientes lo que ocurra en cada una de las ruletas. Además como los tres números de la ruleta abarcan mismo ángulo central son equiprobables.

$$P(\text{gane}A)=P(8_A)\cdot p(2_B \cup 3_B)+ P(7_A)\cdot p(2_B \cup 3_B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}=0{,}44$$

P(gane B)=1-p(ganeA)=0,56.

33. Se sabe que si hoy hace sol, la probabilidad de que mañana también lo haga es de 4/5. Pero si está nublado, la probabilidad de que lo siga estando es de 2/3. Si hoy es viernes y hace sol, ¿Cuál es la probabilidad de que el domingo haga sol?



p(sol domingo)=16/25+1/15=0,71

Ejercicio: En una clase de 100 personas 52 son hombres. Se sabe que de los 52 hombres 43 diestros y de las 48 mujeres son 44 diestras. Escribe la tabla de contingencia. Calcula la probabilidad de que elegido una persona al azar :

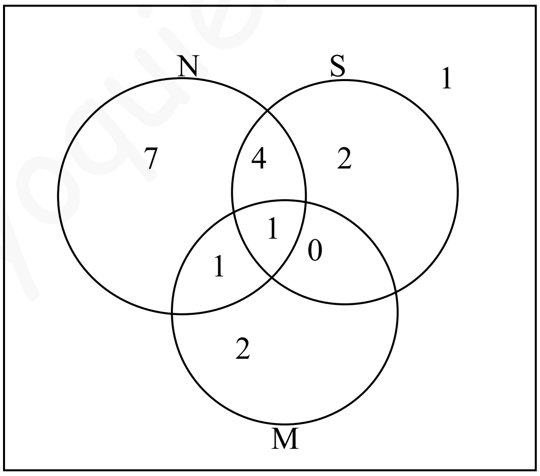
a) sea diestro
b) sea zurdo sabiendo que es hombre
c) sea diestra sabiendo que es mujer
d) sea mujer sabiendo que es zurd@
e) sea hombre sabiendo que es diestr@

	B=Diestro	**B'=Zurdo**	**TOTAL**
A=Hombre	43	9	52
A'=Mujer	44	4	48
TOTAL	87	13	100

a) Diestro → p(B)=87/100=0,87
b) Zurdo sabiendo que es hombre → p(B'/A)=9/52
c) Diestro sabiendo que es mujer → p(B/A')=44/48
d) Sea mujer sabiendo que es zurd@ → p(A'/B')=4/13
e) Sea hombre sabiendo que es diestr@ → p(A/B)=43/87

Ejercicio: En la clase de 4º E.S.O. B (18 alumnos) se sabe que 13 alumnos han hecho la preinscripción para hacer bachillerato para ciencias naturales, 7 para ciencias sociales, 4 para módulos de grado medio, 5 alumnos lo han hecho para bachillerato de ciencias sociales y de ciencias naturales, 2 para bachillerato de ciencias naturales y modulo, 1 para bachillerato de ciencias sociales y modulo, y 1 para los tres. Si se coge a un alumno al azar calcular la probabilidad de que:

a) Halla hecho la preinscripción en bachillerato
b) No halla hecho la preinscripción en el modulo y si en bachillerato de ciencias sociales
c) Se halla matriculado sólo en módulos.
d) No halla hecho ninguna preinscripción



a) p(N∪S)=p(N)+p(S)-p(N∩S)= $\frac{13}{18}+\frac{7}{18}-\frac{5}{18}=\frac{15}{18}=\frac{5}{9}=0{,}56$

b) p(M'∩S)= $\frac{6}{18}=\frac{1}{3}=0{,}33$

c) p(M∩S'∩N')= $\frac{2}{18}=\frac{1}{9}=0{,}11$

d) p(M'∩S'∩N')= $\frac{1}{18}=0{,}056$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)