

PARA EMPEZAR...

▼ El arte cósmico

Vamos a practicar el “arte cósmico”: Si a 16 veces la cosa le sumamos 35, obtenemos el mismo resultado que si multiplicamos 3 por la cosa y por la cosa.

- Expresa algebraicamente (al estilo actual) este enunciado y averigua, tanteando, cuánto vale “la cosa”.

A la cosa vamos a llamarla x . Entonces:

— “Si a 16 veces la cosa le sumamos 35” equivale a $16 \cdot x + 35$.

— “Obtenemos el mismo resultado que” equivale a =.

— “Si multiplicamos 3 por la cosa y por la cosa” equivale a $3 \cdot x \cdot x$.

Uniando las tres frases, tenemos que:

$$16x + 35 = 3xx = 3x^2$$

Si utilizamos una calculadora y vamos probando números, podemos llegar a descubrir que las soluciones son 7 y $\frac{-5}{3}$.

▼ Traducción al lenguaje algebraico

- Y ahora, sin recurrir a “la cosa”, asigna a cada enunciado de la izquierda la expresión que le corresponde (a la derecha).

I. Un número entero, el anterior y el siguiente.

$$a) n + (n + 1) + (n + 2) = 90$$

II. Dos números pares consecutivos.

$$b) n, n - 1, n + 1$$

III. La suma de tres enteros consecutivos es 90.

$$c) x - y = 5; x + 1 = 2(y + 1)$$

IV. Las edades de dos hermanos difieren en 5 años.

El año próximo, el mayor tendrá el doble de años que el menor.

$$d) 2n, 2n + 2$$

Cuando hayas acabado, vuelve a poner las expresiones algebraicas correspondientes a los enunciados de la izquierda, pero tapando, previamente, la columna de la derecha.

I. → b)

II. → d)

III. → a)

IV. → c)

- Traduce al lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

- La mitad de un número.
- El triple de un número.
- La cuarta parte de un número.
- El 35% de una cantidad.
- El triple de un número más dos unidades.
- La mitad del resultado de sumarle al triple de un número dos unidades.

a) $\frac{x}{2}$

b) $3x$

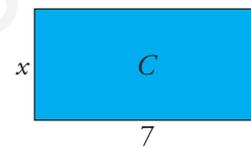
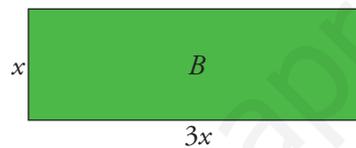
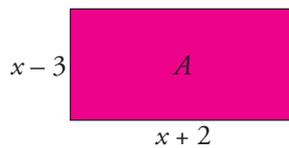
c) $\frac{x}{4}$

d) $0,35x$

e) $3x + 2$

f) $\frac{3x + 2}{2}$

- Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:



A: $P = 2 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (x + 2) = 4x - 2$

$A = (x - 3) \cdot (x + 2) = x^2 - x - 6$

B: $P = 2 \cdot x + 2 \cdot 3x = 8x$

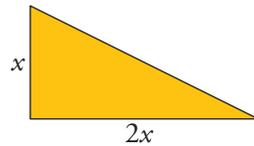
$A = x \cdot 3x = 3x^2$

C: $P = 2 \cdot x + 2 \cdot 7 = 2x + 14$

$A = x \cdot 7 = 7x$

1 Describe mediante una expresión algebraica los enunciados siguientes:

- El doble de un número menos su tercera parte.
- El doble del resultado de sumarle tres unidades a un número.
- El área de este triángulo es 36 cm^2 .



d) Gasté en un traje $\frac{3}{5}$ de lo que tenía y 60 € en dos camisas. Me queda la mitad de lo que tenía.

- a) $2x - \frac{1}{3}x$ b) $2(x + 3)$ c) $\frac{2x \cdot x}{2} = 36$ d) $x - \left(\frac{3}{5}x + 60\right) = \frac{1}{2}x$

PÁGINA 79

1 ¿Cuál es el grado de cada uno de los siguientes monomios?:

a) $-5xy^2z^3$

b) $11xy^2$

c) -12

a) Su grado es 6.

b) Su grado es 3.

c) Su grado es 0.

2 Efectúa las siguientes sumas de monomios:

a) $5x + 3x^2 - 11x + 8x - x^2 + 7x$

b) $6x^2y - 13x^2y + 3x^2y - x^2y$

c) $2x - 5x^2 + 3x + 11y + 2x^3$

d) $3yz^3 + y^3z - 2z^3y + 5zy^3$

a) $9x + 2x^2$

b) $-5x^2y$

c) $5x - 5x^2 + 2x^3 + 11y$

d) $yz^3 + 6y^3z$

3 Efectúa los siguientes productos de monomios:

a) $(3x) \cdot (5x^2)$

b) $(-3x^2) \cdot (4x^3)$

c) $\left(\frac{2}{3}x^3\right) \cdot (-6x)$

d) $\left(\frac{2}{9}x^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}x^3\right)$

e) $(7xy^2) \cdot (2y)$

f) $(5xyz) \cdot (-3x^2z)$

a) $15x^3$

b) $-12x^5$

c) $-4x^4$

d) $-\frac{2}{15}x^5$

e) $14xy^3$

f) $-15x^3yz^2$

4 Escribe dos monomios semejantes a cada uno de los siguientes:

a) $-5ab^2c^3$

b) $6x^3$

c) x

d) 7

Respuesta abierta.

Ejemplo:

a) $10ab^2c^3, 2ab^2c^3$

b) $x^3, -3x^3$

c) $15x, -4x$

d) $4, 103$

PÁGINA 80

1 Di el grado de cada uno de estos polinomios:

a) $x^6 - 3x^4 + 2x^2 + 3$

b) $5x^2 + x^4 - 3x^2 - 2x^4 + x^3$

c) $x^3 + 3x^2 - 2x^3 + x + x^3 - 2$

a) Su grado es 6.

b) $-x^4 + x^3 + 2x^2$. Su grado es 4.

c) $3x^2 + x - 2$. Su grado es 2.

2 Sean $P = 5x^3 - 2x + 1$ y $Q = x^4 - 2x^2 + 2x - 2$.

Halla $P + Q$ y $P - Q$.

$$\begin{array}{r} 5x^3 \quad - 2x + 1 \\ -x^4 \quad - 2x^2 + 2x - 2 \\ \hline -x^4 + 5x^3 - 2x^2 \quad - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^3 \quad - 2x + 1 \\ x^4 \quad + 2x^2 - 2x + 2 \\ \hline x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x + 3 \end{array}$$

3 Halla los productos siguientes y di de qué grado son:

a) $2x(x^2 + 3x - 1)$

c) $-2(-3x^3 - x)$

e) $-7x^5(2x^2 - 3x - 1)$

g) $4x^2(3 - 5x + x^3)$

i) $-x^3(-3x + 2x^2)$

a) $2x^3 + 6x^2 - 2x$

Su grado es 3.

c) $6x^3 + 2x$

Su grado es 3.

e) $-14x^7 + 21x^6 + 7x^5$

Su grado es 7.

g) $12x^2 - 20x^3 + 4x^5 = 4x^5 - 20x^3 + 12x$

Su grado es 5.

i) $3x^4 - 2x^5 = -2x^5 + 3x^4$

Su grado es 5.

b) $2x^2(3x^2 - 4x + 6)$

d) $5(x^2 + x - 1)$

f) $-7x(2x^3 - 3x^2 + x)$

h) $8x^2(x^2 + 3)$

j) $-4x[x + (3x)^2 - 2]$

b) $6x^4 - 8x^3 + 12x^2$

Su grado es 4.

d) $5x^2 + 5x - 5$

Su grado es 2.

f) $-14x^4 + 21x^3 - 7x^2$

Su grado es 4.

h) $8x^4 + 24x^2$

Su grado es 4.

j) $-4x^2 - 36x^3 + 8x = -36x^3 - 4x^2 + 8x$

Su grado es 3.

PÁGINA 81

4 Siendo $P = 4x^2 + 3$, $Q = 5x^2 - 3x + 7$ y $R = 5x - 8$, calcula:

a) $P \cdot Q$

b) $P \cdot R$

c) $Q \cdot R$

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad \begin{array}{r} 4x^2 \quad + 3 \\ 5x^2 - 3x + 7 \\ \hline 28x^2 \quad + 21 \\ -12x^3 \quad - 9x \\ 20x^4 \quad + 15x^2 \\ \hline 20x^4 - 12x^3 + 43x^2 - 9x + 21 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b)} \quad \begin{array}{r} 4x^2 \quad + 3 \\ 5x - 8 \\ \hline -32x^2 \quad - 24 \\ 20x^3 \quad + 15x \\ \hline 20x^3 - 32x^2 + 15x - 24 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c)} \quad \begin{array}{r} 5x^2 - 3x + 7 \\ 5x - 8 \\ \hline -40x^2 + 24x - 56 \\ 25x^3 - 15x^2 + 35x \\ \hline 25x^3 - 55x^2 + 59x - 56 \end{array} \end{array}$$

5 Opera y simplifica la expresión resultante:

a) $x(5x^2 + 3x - 1) - 2x^2(x - 2) + 12x^2$

b) $5(x - 3) + 2(y + 4) - \frac{7}{3}(y - 2x + 3) - 8$

c) $15 \cdot \left[\frac{2(x - 3)}{3} - \frac{4(y - x)}{5} + \frac{x + 2}{15} - 7 \right]$

d) $(x^2 - 2x + 7)(5x^3 + 3) - (2x^5 - 3x^3 - 2x + 1)$

a) $5x^3 + 3x^2 - x - 2x^3 + 4x^2 + 12x^2 = 3x^3 + 19x^2 - x$

b) $5x - 15 + 2y + 8 - \frac{7}{3}y + \frac{14}{3}x - 7 - 8 = \frac{29}{3}x - \frac{1}{3}y - 22$

c) $10(x - 3) - 12(y - x) + (x + 2) - 105 = 10x - 30 - 12y + 12x + x + 2 - 105 =$
 $= 23x - 12y - 133$

d) $5x^5 + 3x^2 - 10x^4 - 6x + 35x^3 + 21 - 2x^5 + 3x^3 + 2x - 1 =$
 $= 3x^5 - 10x^4 + 38x^3 - 4x + 20$

6 Extrae factor común en cada expresión:

a) $5x^2 - 15x^3 + 25x^4$

b) $\frac{x^4}{3} - \frac{x}{9} - \frac{1}{15}$

c) $2x^3y^5 - 3x^2y^4 + 2x^7y^2 + 7x^3y^3$

d) $2x^2y - 5x^3y(2y - 3)$

e) $2(x - 3) + 3(x - 3) - 5(x - 3)$

f) $2xy^2 - 6x^2y^3 + 4xy^3$

g) $\frac{(x^2 - 3)}{2}(y - 1) - \frac{7}{2}(y - 1)$

a) $5x^2(1 - 3x + 5x^2)$

b) $\frac{1}{3}\left(x^4 - \frac{x}{3} - \frac{1}{5}\right)$

c) $x^2y^2(2xy^3 - 3y^2 + 2x^5 + 7xy)$

d) $x^2y(2 - 10xy + 15x)$

e) $(x - 3)(2 + 3 - 5) = (x - 3) \cdot 0 = 0$

f) $2xy^2(1 - 3xy + 2y)$

g) $(y - 1)\left(\frac{x^2 - 3 - 7}{2}\right) = (y - 1)\left(\frac{x^2}{2} - 5\right)$

PÁGINA 82

1 Desarrolla los siguientes cuadrados:

a) $(x + 4)^2$

b) $(2x - 5)^2$

c) $(1 - 6x)^2$

d) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$

e) $\left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$

f) $(ax + b)^2$

a) $x^2 + 16 + 8x$

b) $4x^2 + 25 - 20x$

c) $1 + 36x^2 - 12x$

d) $\frac{x^2}{4} + \frac{9}{16} + \frac{3x}{4} = \frac{1}{16}(4x^2 + 9 + 12x)$

e) $4x^4 + \frac{1}{4} - 2x^2 = \frac{1}{4}(16x^4 + 1 - 8x^2)$

f) $a^2x^2 + b^2 + 2abx$

2 Efectúa los siguientes productos:

a) $(x + 1)(x - 1)$

b) $(2x + 3)(2x - 3)$

c) $\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)$

d) $(ax + b)(ax - b)$

a) $x^2 - 1$

b) $4x^2 - 9$

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{1}{4}$

d) $a^2x^2 - b^2$

PÁGINA 83

3 Expresa en forma de producto.

a) $4x^2 - 25$

b) $x^2 + 16 + 8x$

c) $x^2 + 2x + 1$

d) $9x^2 + 6x + 1$

e) $4x^2 + 25 - 20x$

f) $\frac{x^2}{4} + x + 1$

a) $(2x + 5)(2x - 5)$

b) $(x + 4)^2$

c) $(x + 1)^2$

d) $(3x + 1)^2$

e) $(2x - 5)^2$

f) $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$

4 Simplifica las expresiones siguientes:

a) $(x - 2)(x + 2) - (x^2 + 4)$

b) $(3x - 1)^2 - (3x + 1)^2$

c) $2(x - 5)^2 - (2x^2 + 3x + 50)$

d) $(5x - 4)(2x + 3) - 5$

e) $3(x^2 + 5) - (x^2 + 40)$

f) $(x + 3)^2 - [x^2 + (x - 3)^2]$

a) $x^2 - 4 - x^2 - 4 = -8$

b) $(9x^2 - 6x + 1) - (9x + 6x + 1) = 9x^2 - 6x + 1 - 9x^2 - 6x - 1 = -12x$

c) $2(x^2 - 10x + 25) - (2x^2 + 3x + 50) = 2x^2 - 20x + 50 - 2x^2 - 3x - 50 = -23x$

d) $10x^2 + 15x - 8x - 12 - 5 = 10x^2 + 7x - 17$

e) $3x^2 + 15 - x^2 - 40 = 2x^2 - 25$

f) $(x^2 + 6x + 9) - [x^2 + (x^2 - 6x + 9)] = x^2 + 6x + 9 - x^2 - x^2 + 6x - 9 = -x^2 + 12x$

5 Multiplica y simplifica el resultado:

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} - \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$ por 8

b) $x + \frac{2x - 3}{9} + \frac{x - 1}{3} - \frac{12x + 4}{9}$ por 9

c) $\frac{(2x - 4)^2}{8} - \frac{x(x + 1)}{2} - 5$ por 8

a) $4x + 2x + x - 6x - 2 = x - 2$

b) $9x + 2x - 3 + 3(x - 1) - (12x + 4) = 9x + 2x - 3 + 3x - 3 - 12x - 4 = 2x - 10$

c) $(2x - 4)^2 - 4x(x + 1) - 40 = (4x^2 - 16x + 16) - 4x^2 - 4x - 40 =$
 $= 4x^2 - 16x + 16 - 4x^2 - 4x - 40 = -20x - 24$

PÁGINA 85

1 Simplifica las fracciones siguientes. Para ello, saca factor común cuando convenga:

a) $\frac{15x^2}{5x^2(x-3)}$

b) $\frac{3(x-1)^2}{9(x-1)}$

c) $\frac{3x^2 - 9x^3}{15x^3 - 3x^4}$

d) $\frac{9(x+1) - 3(x+1)}{2(x+1)}$

e) $\frac{5x^2(x-3)^2(x+3)}{15x(x-3)}$

f) $\frac{x(3x^3 - x^2)}{(3x-1)x^3}$

a) $\frac{3}{x-3}$

b) $\frac{x-1}{3}$

c) $\frac{3x^2(1-3x)}{3x^3(5-x)} = \frac{1-3x}{x(5-x)} = \frac{-3x+1}{-x^2+5x}$

d) $\frac{(x+1)(9-3)}{2(x+1)} = \frac{6(x+1)}{2(x+1)} = 3$

e) $\frac{x(x-3)(x+3)}{3} = \frac{x(x^2-9)}{3} = \frac{x^3-9x}{3}$

f) $\frac{x \cdot x^2(3x-1)}{(3x-1)x^3} = \frac{x^3(3x-1)}{(3x-1)x^3} = 1$

2 Opera y simplifica.

a) $\frac{2}{x} + \frac{3}{2x} + \frac{x-2}{x}$

b) $\frac{3}{x+1} - \frac{2x^2+8x}{x^2+x} - 4x$

c) $\frac{2}{x^2-9} - \frac{7x}{x-3} + 3$

d) $\frac{5x^3+15x^2}{x+3} - \frac{10x^3+15x^2}{5x^2} + 2x$

a) $\frac{4}{2x} + \frac{3}{2x} + \frac{2(x-2)}{2x} = \frac{7+2x-4}{2x} = \frac{2x+3}{2x}$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{3}{x+1} - \frac{2x^2+8x}{x(x+1)} - 4x &= \frac{3x}{x(x+1)} - \frac{2x^2+8x}{x(x+1)} - \frac{4x \cdot x(x+1)}{x(x+1)} = \\ &= \frac{3x - 2x^2 - 8x - 4x^3 - 4x^2}{x(x+1)} = \frac{-4x^3 - 6x^2 - 5x}{x(x+1)} = \\ &= \frac{-x(4x^2 + 6x + 5)}{x(x+1)} = \frac{-4x^2 - 6x - 5}{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{2}{(x+3)(x-3)} - \frac{7x}{x-3} + 3 &= \frac{2}{(x+3)(x-3)} - \frac{7x(x+3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{3(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \\ &= \frac{2 - 7x^2 - 21x + 3x^2 - 27}{(x+3)(x-3)} = \frac{-4x^2 - 21x - 25}{(x+3)(x-3)} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \frac{5x^2(x+3)}{x+3} - \frac{5x^2(2x+3)}{5x^2} + 2x = 5x^2 - (2x+3) + 2x = 5x^2 - 2x - 3 + 2x = 5x^2 - 3$$

3 Efectúa las siguientes operaciones y simplifica. Ten en cuenta las identidades notables:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 1}{x} : (x - 1)$$

$$\text{b) } \frac{x(x - 2)}{x} : \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

$$\text{c) } \frac{x^2 - 2x + 1}{x} : \frac{x - 1}{x}$$

$$\text{d) } 6x^2 \cdot \frac{x - 3}{x^3}$$

$$\text{e) } \frac{3x - 3}{x^2} \cdot \frac{x(x + 1)}{x^2 - 1}$$

$$\text{f) } \frac{2x}{x - 1} : \frac{4x^2}{2x - 2}$$

$$\text{g) } \frac{x + 5}{10} \cdot \frac{5}{(x + 5)^2}$$

$$\text{h) } \frac{2x^2}{3x} \cdot \frac{6x}{4x^3}$$

$$\text{i) } \frac{4x - 3}{2x} \cdot \frac{4x^2}{8x - 6}$$

$$\text{j) } \frac{3x - 3}{x^2} \cdot \frac{3x}{18(x - 1)}$$

$$\text{a) } \frac{(x + 1)(x - 1)}{x} : (x - 1) = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x} \cdot \frac{1}{x - 1} = \frac{x + 1}{x}$$

$$\text{b) } \frac{x(x - 2)}{x} : \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)} = \frac{x(x - 2)}{x} \cdot \frac{x + 2}{(x + 2)(x - 2)} = 1$$

$$\text{c) } \frac{(x - 1)^2}{x} : \frac{x - 1}{x} = \frac{(x - 1)^2}{x} \cdot \frac{x}{x - 1} = x - 1$$

$$\text{d) } \frac{6x^2(x - 3)}{x^3} = \frac{6(x - 3)}{x} = \frac{6x - 18}{x}$$

$$\text{e) } \frac{3(x - 1)}{x^2} \cdot \frac{x(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{3}{x}$$

$$\text{f) } \frac{2x}{x - 1} : \frac{(2x)^2}{2(x - 1)} = \frac{2x}{x - 1} \cdot \frac{2(x - 1)}{(2x)^2} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

$$\text{g) } \frac{5(x + 5)}{10(x + 5)^2} = \frac{1}{2(x + 5)}$$

$$\text{h) } \frac{12x^3}{12x^4} = \frac{1}{x}$$

$$\text{i) } \frac{4x - 3}{2x} \cdot \frac{(2x)^2}{2(4x - 3)} = \frac{2x}{2} = x$$

$$\text{j) } \frac{3(x - 1)}{x^2} \cdot \frac{3x}{18(x - 1)} = \frac{9x}{18x^2} = \frac{1}{2x}$$

4 Opera y simplifica.

$$\text{a) } \frac{6x^2}{4x^2 - 9} : \left(\frac{5x}{2x - 3} + \frac{5x}{2x + 3} \right)$$

$$\text{b) } \frac{x^2}{5x^2 - 25} - \frac{1}{5} - \frac{x^3 + x^2}{(x + 1)(5x^2 - 25)}$$

$$\text{a) } \frac{6x^2}{(2x + 3)(2x - 3)} : \frac{5x(2x + 3) + 5x(2x - 3)}{(2x + 3)(2x - 3)} =$$

$$= \frac{6x^2}{(2x + 3)(2x - 3)} \cdot \frac{(2x + 3)(2x - 3)}{5x(2x + 3 + 2x - 3)} = \frac{6x^2}{5x \cdot 4x} = \frac{6x^2}{20x^2} = \frac{3}{10}$$

$$\text{b) } \frac{5(x + 1)x^2}{5(x + 1)(5x^2 - 25)} - \frac{(x + 1)(5x^2 - 25)}{5(x + 1)(5x^2 - 25)} - \frac{5(x^3 + x^2)}{5(x + 1)(5x^2 - 25)} =$$

$$= \frac{5x^2(x + 1) - (x + 1)(5x^2 - 25) - 5x^2(x + 1)}{5(x + 1)(5x^2 - 25)} = \frac{5x^2 - 5x^2 + 25 - 5x^2}{5(5x^2 - 25)} =$$

$$= \frac{-5x^2 + 25}{5(5x^2 - 25)} = -\frac{1}{5}$$

■ Expresa y calcula

Traducción a lenguaje algebraico

1 ▼▼▼ Asocia a cada enunciado una de las expresiones algebraicas que aparecen debajo:

- a) El cuadrado de un número menos su doble.
- b) El 80% de un número.
- c) Un número impar.
- d) Los dos tercios de un número más cinco unidades.

$$\frac{2}{3}x + 5; \quad x^2 - 2x; \quad 0,8x; \quad 2x + 1$$

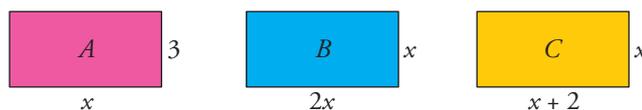
- a) El cuadrado de un número menos su doble $\rightarrow x^2 - 2x$
- b) El 80% de un número $\rightarrow 0,8x$
- c) Un número impar $\rightarrow 2x + 1$
- d) Los $\frac{2}{3}$ de un número más 5 unidades $\rightarrow \frac{2}{3}x + 5$

2 ▼▼▼ Expresa en lenguaje algebraico empleando una sola incógnita.

- a) El triple de un número menos dos.
- b) El producto de dos números consecutivos.
- c) El cuadrado de un número más su mitad.
- d) La suma de un número con otro diez unidades mayor.

- a) El triple de un número menos dos: $3x - 2$.
- b) El producto de dos números consecutivos: $x(x + 1)$.
- c) El cuadrado de un número más su mitad: $x^2 + \frac{x}{2}$.
- d) La suma de un número con otro diez unidades mayor: $x + (x + 10)$.

3 ▼▼▼ Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:



$$A \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + 3) = 2x + 6 \\ \text{Área} = 3x \end{cases}$$

$$B \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(2x + x) = 6x \\ \text{Área} = 2x \cdot x = 2x^2 \end{cases}$$

$$C \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + 2 + x) = 4x + 4 \\ \text{Área} = (x + 2)x = x^2 + 2x \end{cases}$$

4 ▼▼▼ Traduce a lenguaje algebraico utilizando dos incógnitas.

- a) La suma de los cuadrados de dos números.
- b) El cuadrado de la diferencia de dos números.
- c) La mitad del producto de dos números.
- d) La semisuma de dos números.

- a) La suma de los cuadrados de dos números: $x^2 + y^2$.
- b) El cuadrado de la diferencia de dos números: $(x - y)^2$.
- c) La mitad del producto de dos números: $\frac{x \cdot y}{2}$.
- d) La semisuma de dos números: $\frac{x + y}{2}$.

5 ▼▼▼ Si x e y son las edades actuales de dos hermanos, expresa los siguientes enunciados utilizando ambas incógnitas:

- a) La suma de las edades que tenían hace 5 años.
- b) El producto de las edades que tendrán dentro de 6 años.
- c) La diferencia entre la edad del mayor y la mitad de la del menor.

a) La suma de las edades que tenían hace 5 años:

$$(x - 5) + (y - 5) = x + y - 10$$

b) El producto de las edades que tendrán dentro de 6 años:

$$(x + 6)(y + 6) = xy + 6x + 6y + 36$$

c) La diferencia entre la edad del mayor y la mitad del menor:

$$x - \frac{y}{2} \text{ si la edad del mayor es } x$$

$$y - \frac{x}{2} \text{ si la edad del mayor es } y$$

Monomios

6 ▼▼▼ Indica el grado de cada uno de los siguientes monomios y di cuáles son semejantes:

a) $-5xy$

b) $(-7x)^3$

c) $8x$

d) $(xy)^2$

e) $\frac{2}{3}x^2y^2$

f) $\frac{4}{5}x^3$

g) $\frac{-3yx}{5}$

h) $\frac{1}{2}x^2$

a) Grado 2.

b) Grado 3.

c) Grado 1.

d) Grado 4.

e) Grado 4.

f) Grado 3.

g) Grado 2.

h) Grado 2.

Son semejantes: a) y g); b) y f); d) y e).

7 $\nabla\nabla\nabla$ Calcula el valor numérico de los monomios del ejercicio anterior para $x = -1$ e $y = 3$.

$$a) -5 \cdot (-1) \cdot 3 = 15$$

$$b) [-7 \cdot (-1)]^3 = 343$$

$$c) 8(-1) = -8$$

$$d) [(-1) \cdot 3]^2 = 9$$

$$e) \frac{2}{3}(-1)^2 \cdot 3^2 = 6$$

$$f) \frac{4}{5}(-1)^3 = -\frac{4}{5}$$

$$g) \frac{-3 \cdot 3(-1)}{5} = \frac{9}{5}$$

$$h) \frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}$$

8 $\nabla\nabla\nabla$ Efectúa.

$$a) 5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2$$

$$b) 2x + 7y - 3x + y - x^2$$

$$c) x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2$$

$$a) 5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2 = 6x^2 - 4x + 2$$

$$b) 2x + 7y - 3x + y - x^2 = -x^2 - x + 8y$$

$$c) x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2 = x^2y^2 - 2x^2y - 4xy^2$$

9 $\nabla\nabla\nabla$ Efectúa los siguientes productos de monomios:

$$a) (6x^2)(-3x)$$

$$b) (2xy^2)(4x^2y)$$

$$c) \left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right)$$

$$d) \left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right)$$

$$a) 6x^2(-3x) = -18x^3$$

$$b) (2xy^2)(4x^2y) = 8x^3y^3$$

$$c) \left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right) = \frac{3}{8}x^6$$

$$d) \left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right) = \frac{3}{8}x^2yz$$

Polinomios

10 $\nabla\nabla\nabla$ Simplifica las siguientes expresiones:

$$a) (2x^3 - 5x + 3) - (2x^3 - x^2 + 1)$$

$$b) 5x - (3x + 8) - (2x^2 - 3x)$$

¿Cuál es el grado de cada polinomio?

$$a) 2x^3 - 5x + 3 - 2x^3 + x^2 - 1 = x^2 - 5x + 2 \rightarrow \text{Grado 2.}$$

$$b) 5x - 3x - 8 - 2x^2 + 3x = -2x^2 + 5x - 8 \rightarrow \text{Grado 2.}$$

11 $\nabla\nabla\nabla$ Considera estos polinomios:

$$A = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$$

$$B = 2x^4 + x^3 - 2x + 4$$

$$C = -x^3 + 3x^2 - 7x$$

Halla: $A + B$; $A - C$; $A - B + C$

$$A + B = 3x^3 - 5x^2 + x - 1 + 2x^4 + x^3 - 2x + 4 = 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 3$$

$$A - C = (3x^3 - 5x^2 + x - 1) - (-x^3 + 3x^2 - 7x) =$$

$$= 3x^3 - 5x^2 + x - 1 + x^3 - 3x^2 + 7x = 4x^3 - 8x^2 + 8x - 1$$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

$$\begin{aligned}
 A - B + C &= (3x^3 - 5x^2 + x - 1) - (2x^4 + x^3 - 2x + 4) + (-x^3 + 3x^2 - 7x) = \\
 &= 3x^3 - 5x^2 + x - 1 - 2x^4 - x^3 + 2x - 4 - x^3 + 3x^2 - 7x = \\
 &= -2x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 5
 \end{aligned}$$

12 ▼▼▼ Efectúa, reduce y di cuál es el grado del polinomio resultante.

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1)$

b) $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x$

c) $\frac{1}{3}x^2\left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x - 9\right)$

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1) = x^3 - 5x - 3x^3 - 6x^2 - 7x^2 - 7 =$
 $= -2x^3 - 13x^2 - 5x - 7 \rightarrow$ Grado 3.

b) $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x = -15x^3 + 5x^2 - 2x^2 + 3x^3 - 6x =$
 $= -12x^3 + 3x^2 - 6x \rightarrow$ Grado 3.

c) $\frac{1}{3}x^2\left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x - 9\right) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 \rightarrow$ Grado 4.

PÁGINA 87

13 ▽▽▽ Opera y simplifica.

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2)$

b) $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3)$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12)$

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 3 - x^2 + 2x = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

b) $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3) = x^4 - x^3 - 5x^3 + 5x^2 + 3x^2 - 3x - x^4 + 3x =$
 $= -6x^3 + 8x^2$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12) = 3x^3 - 6x^2 + 10x^2 - 20x + x - 2 =$
 $= 3x^3 + 4x^2 - 19x - 2$

14 ▽▽▽ Extrae factor común.

a) $12x^3 - 8x^2 - 4x$

b) $-3x^3 + x - x^2$

c) $2xy^2 - 4x^2y + x^2y^2$

d) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x$

a) $12x^3 - 8x^2 - 4x = 4x(3x^2 - 2x - 1)$

b) $-3x^3 + x - x^2 = x(-3x^2 + 1 - x)$

c) $2xy^2 - 4x^2y + x^2y^2 = xy(2y - 4x + xy)$

d) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x = \frac{1}{3}x(2x + x^2 - 5)$

Identidades notables

15 ▽▽▽ Desarrolla estas expresiones:

a) $(x + 6)^2$

b) $(7 - x)^2$

c) $(3x - 2)^2$

d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

e) $(x - 2y)^2$

f) $\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2$

a) $(x + 6)^2 = x^2 + 36 + 12x$

b) $(7 - x)^2 = 49 + x^2 - 14x$

c) $(3x - 2)^2 = 9x^2 + 4 - 12x$

d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4} + x$

e) $(x - 2y)^2 = x^2 + 4y^2 - 4xy$

f) $\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2 = \frac{4}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - \frac{4}{15}xy$

16 ▼▼▼ Efectúa estos productos:

a) $(x + 7)(x - 7)$

b) $(3 + x)(3 - x)$

c) $(3 + 4x)(3 - 4x)$

d) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

e) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

f) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

a) $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$

b) $(3 + x)(3 - x) = 9 - x^2$

c) $(3 + 4x)(3 - 4x) = 9 - 16x^2$

d) $(x^2 + 1)(x^2 - 1) = x^4 - 1$

e) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{4}x^2 - 1$

f) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$

17 ▼▼▼ Simplifica todo lo posible estas expresiones:

a) $(x + 3)(x - 3) - (x + 3)^2$

b) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 - 9$

c) $3x(x + 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1)$

d) $(x^2 + 2)(x^2 - 2) - (x^2 - 1)^2$

a) $(x + 3)(x - 3) - (x + 3)^2 = x^2 - 9 - (x^2 + 9 + 6x) = 6x - 18$

b) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 - 9 = 4x^2 + 9 + 12x - (4x^2 + 9 - 12x) - 9 =$
 $= 4x^2 + 9 + 12x - 4x^2 - 9 + 12x - 9 = -9$

c) $3x(x + 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1) = 3x(x^2 + 1 + 2x) - (4x^2 - 1) =$
 $= 3x^3 + 3x + 6x^2 - 4x^2 + 1 = 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

d) $(x^2 + 2)(x^2 - 2) - (x^2 - 1)^2 = x^4 - 4 - (x^4 + 1 - 2x^2) = x^4 - 4 - x^4 - 1 + 2x^2 =$
 $= 2x^2 - 5$

18 ▼▼▼ Transforma en diferencia de cuadrados.

a) $(2x + 7)(2x - 7)$

b) $(4x - 1)(4x + 1)$

c) $(x^2 + x)(x^2 - x)$

d) $(1 - 5x)(1 + 5x)$

a) $(2x + 7)(2x - 7) = 4x^2 - 49$

b) $(4x - 1)(4x + 1) = 16x^2 - 1$

c) $(x^2 + x)(x^2 - x) = x^4 - x^2$

d) $(1 - 5x)(1 + 5x) = 1 - 25x^2$

19 ▼▼▼ Completa con el término que falta para que cada expresión sea el cuadrado de una suma o el de una diferencia:

a) $x^2 + \dots + 4x$

b) $x^2 + \dots - 10x$

c) $x^2 + 9 + \dots$

d) $x^2 + 16 - \dots$

a) $x^2 + 4 + 4x$

b) $x^2 + 25 - 10x$

c) $x^2 + 9 + 6x$

d) $x^2 + 16 + 8x$

Fracciones algebraicas

20 ▼▼▼ Simplifica estas fracciones algebraicas:

$$a) \frac{9x}{12x^2}$$

$$b) \frac{x(x+1)}{5(x+1)}$$

$$c) \frac{x^2(x+2)}{2x^3}$$

$$a) \frac{9x}{12x^2} = \frac{3}{4x}$$

$$b) \frac{x(x+1)}{5(x+1)} = \frac{x}{5}$$

$$c) \frac{x^2(x+2)}{2x^3} = \frac{x+2}{2x}$$

21 ▼▼▼ Simplifica las siguientes fracciones algebraicas. Para ello, saca factor común:

$$a) \frac{x^2 - 4x}{x^2}$$

$$b) \frac{3x}{x^2 + 2x}$$

$$c) \frac{3x + 3}{(x + 1)^2}$$

$$d) \frac{2x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2}$$

$$e) \frac{8x^3 - 4x^2}{(2x - 1)^2}$$

$$f) \frac{5x^3 + 5x}{x^4 + x^2}$$

$$a) \frac{x^2 - 4x}{x^2} = \frac{x(x - 4)}{x^2} = \frac{x - 4}{x}$$

$$b) \frac{3x}{x^2 + 2x} = \frac{3x}{x(x + 2)} = \frac{3}{x + 2}$$

$$c) \frac{3x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{3(x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{3}{x + 1}$$

$$d) \frac{2x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2} = \frac{2x(x + 2)}{x^2(x + 2)} = \frac{2}{x}$$

$$e) \frac{8x^3 - 4x^2}{(2x - 1)^2} = \frac{4x^2(2x - 1)}{(2x - 1)^2} = \frac{4x^2}{2x - 1}$$

$$f) \frac{5x^3 + 5x}{x^4 + x^2} = \frac{5x(x^2 + 1)}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{5}{x}$$

22 ▼▼▼ Efectúa.

$$a) \frac{1}{6x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{2x^3}$$

$$b) \frac{2}{x} + \frac{x-1}{x-7}$$

$$c) \frac{2}{x} - \frac{3}{x-4} + \frac{x+1}{x-4}$$

$$d) \frac{2x}{x-3} - \frac{x-1}{x+3}$$

$$e) \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$$

$$f) \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2+x} + 2$$

$$a) \frac{1}{6x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{2x^3} = \frac{x^2 + 2x - 3}{6x^3}$$

$$b) \frac{2}{x} + \frac{x-1}{x-7} = \frac{2(x-7) + x(x-1)}{x(x-7)} = \frac{2x - 14 + x^2 - x}{x^2 - 7x} = \frac{x^2 + x - 14}{x^2 - 7x}$$

$$c) \frac{2}{x} - \frac{3}{x-4} + \frac{x+1}{x-4} = \frac{2(x-4) - 3x + x(x+1)}{x(x-4)} = \frac{2x - 8 - 3x + x^2 + x}{x(x-4)} = \frac{x^2 - 8}{x^2 - 4x}$$

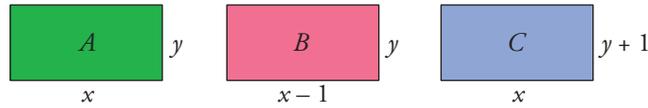
$$d) \frac{2x}{x-3} - \frac{x-1}{x+3} = \frac{2(x+3) - (x-1)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x + 6 - (x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 9} = \frac{2x + 6 - x^2 + 4x - 3}{x^2 - 9} = \frac{-x^2 + 6x + 3}{x^2 - 9}$$

$$e) \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2} + \frac{x}{4} = \frac{12 + 2(x-1) + x(x-1)}{4(x-1)} = \frac{12 + 2x - 2 + x^2 - x}{4(x-1)} = \frac{x^2 + x + 10}{4(x-1)}$$

$$f) \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2+x} + 2 = \frac{3(x+1) - 1 + 2x(x+1)}{x(x+1)} = \frac{3x + 3 - 1 + 2x^2 + 2x}{x(x+1)} = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x(x+1)}$$

■ **Aplica lo aprendido**

23 ▼▼▼ Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:



$$A \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + y) = 2x + 2y \\ \text{Área} = xy \end{cases}$$

$$B \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x - 1 + y) = 2x + 2y - 2 \\ \text{Área} = (x - 1)y = xy - y \end{cases}$$

$$C \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + y + 1) = 2x + 2y + 2 \\ \text{Área} = x(y + 1) = xy + x \end{cases}$$

24 ▼▼▼ Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia, como en el ejemplo.

• $x^2 + 25 + 10x = x^2 + 5^2 + 2 \cdot 5x = (x + 5)^2$

a) $x^2 + 49 - 14x$

b) $x^2 + 1 - 2x$

c) $4x^2 + 1 + 4x$

d) $x^2 + 12x + 36$

a) $x^2 + 49 - 14x = (x - 7)^2$

b) $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2$

c) $(4x^2 + 1 + 4x) = (2x + 1)^2$

d) $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

25 ▼▼▼ Extrae factor común como en el ejemplo.

• $3x(x + 1) - x^2(x + 1) + (x + 1)(x^2 - 2) = (x + 1)[3x - x^2 + x^2 - 2] = (x + 1)(3x - 2)$

a) $2x(x - 2) + x^2(x - 2) - 3(x - 2)$

b) $x^2(x + 1) - x^2(x + 2) + 2x^2(x - 3)$

c) $3x^2(x + 3) - 6x(x + 3)$

a) $2x(x - 2) + x^2(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(2x + x^2 - 3)$

b) $x^2(x + 1) - x^2(x + 2) + 2x^2(x - 3) = x^2[x + 1 - (x + 2) + 2(x - 3)] = x^2(2x - 7)$

c) $3x^2(x + 3) - 6x(x + 3) = x(x + 3)(3x - 6)$

26 ▼▼▼ Reduce las siguientes expresiones:

$$\text{a) } 6 \left(\frac{5x-4}{6} + \frac{2x-3}{2} - \frac{x-1}{3} \right)$$

$$\text{b) } 12 \left(\frac{x+6}{3} - \frac{x+1}{2} + \frac{3x-1}{4} \right)$$

$$\text{c) } 30 \left[\frac{x(x-2)}{15} - \frac{(x+1)^2}{6} + \frac{1}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{a) } 6 \left(\frac{5x-4}{6} + \frac{2x-3}{2} - \frac{x-1}{3} \right) &= 5x-4 + 3(2x-3) - 2(x-1) = \\ &= 5x-4 + 6x-9 - 2x+1 = 9x-12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 12 \left(\frac{x+6}{3} - \frac{x+1}{2} + \frac{3x-1}{4} \right) &= 4(x+6) - 6(x+1) + 3(3x-1) = \\ &= 4x+24 - 6x-6 + 9x-3 = 7x+15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 30 \left[\frac{x(x-2)}{15} - \frac{(x+1)^2}{6} + \frac{1}{2} \right] &= 2x(x-2) - 5(x^2+1+2x) + 15 = \\ &= 2x^2 - 4x - 5x^2 - 5 - 10x + 15 = -3x^2 - 14x + 10 \end{aligned}$$

27 ▼▼▼ Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica el resultado.

$$\text{a) } \frac{3+x}{8} - \frac{5-x}{6} - \frac{x+1}{12}$$

$$\text{b) } \frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{3}(x+1) + \frac{1}{6}$$

$$\text{c) } \frac{(2x-5)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{6}$$

$$\text{d) } \frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x+2)}{4} - \frac{(3x+2)^2}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{3+x}{8} - \frac{5-x}{6} - \frac{x+1}{12} &= 24 \left(\frac{3+x}{8} - \frac{5-x}{6} - \frac{x+1}{12} \right) = 3(3+x) - 4(5-x) - 2(x+1) = \\ &= 9 + 3x - 20 + 4x - 2x - 2 = 5x - 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{3}(x+1) + \frac{1}{6} &= 12 \left(\frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{3}(x+1) + \frac{1}{6} \right) = \\ &= 3 \cdot 3(x-1) - 4(x+1) + 2 = 9x - 9 - 4x - 4 + 2 = 5x - 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{(2x-5)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{6} &= 18 \left(\frac{(2x-5)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{6} \right) = 2(4x^2 + 25 - 20x) = \\ &= -3(x^2 + 1 + 2x) = 8x^2 + 50 - 40x - 3x^2 - 3 - 6x = \\ &= 5x^2 - 46x + 47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x+2)}{4} - \frac{(3x+2)^2}{8} &= 8 \left(\frac{x^2-3x}{2} + \frac{x^2+2x}{4} - \frac{9x^2+4+12x}{8} \right) = \\
 &= 4(x^2-3x) + 2(x^2+2x) - (9x^2+4+12x) = \\
 &= 4x^2-12x+2x^2+4x-9x^2-4-12x = \\
 &= -3x^2-20x-4
 \end{aligned}$$

28 ▽▽▽ Expresa como el cuadrado de una suma o una diferencia o como diferencia de cuadrados.

a) $x^2 + 9 - 6x$

b) $4x^2 + 1 + 4x$

c) $4x^2 - 9$

d) $9x^2 - 12x + 4$

e) $16x^2 - 1$

f) $16x^2 + 40x + 25$

a) $x^2 + 9 - 6x = (x-3)^2$

b) $4x^2 + 1 + 4x = (2x+1)^2$

c) $4x^2 - 9 = (2x+3)(2x-3)$

d) $9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$

e) $16x^2 - 1 = (4x+1)(4x-1)$

f) $16x^2 + 40x + 25 = (4x+5)^2$

29 ▽▽▽ Transforma en producto como en el ejemplo.

• $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$

a) $x^3 - 4x$

b) $4x^3 - 4x^2 + x$

c) $x^4 - x^2$

d) $3x^4 - 24x^3 + 48x^2$

a) $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$

b) $4x^3 - 4x^2 + x = x(4x^2 - 4x + 1) = x(2x-1)^2$

c) $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x+1)(x-1)$

d) $3x^4 - 24x^3 + 48x^2 = 3x^2(x^2 - 8x + 16) = 3x^2(x-4)^2$

30 ▽▽▽ Simplifica. Para ello, transforma en producto el numerador y el denominador.

a) $\frac{2x+4}{3x^2+6x}$

b) $\frac{x+1}{x^2-1}$

c) $\frac{x-2}{x^2+4-4x}$

d) $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$

e) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

f) $\frac{x^3+2x^2+x}{3x+3}$

a) $\frac{2x+4}{3x^2+6x} = \frac{2(x+2)}{3x(x+2)} = \frac{2}{3x}$

b) $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$

c) $\frac{x-2}{x^2+4-4x} = \frac{x-2}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2}$

d) $\frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x}{x+3}$

e) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{x-2}{x+2}$

f) $\frac{x^3+2x^2+x}{3x+3} = \frac{x(x^2+2x+1)}{3(x+1)} = \frac{x(x+1)^2}{3(x+1)} = \frac{x(x+1)}{3}$

31 ▼▼▼ Opera, y simplifica si es posible.

$$a) \frac{x}{x+1} \cdot \frac{3}{x^2}$$

$$b) \frac{3x+2}{x-1} : \frac{x+1}{x}$$

$$c) \frac{3}{(x-1)^2} : \frac{2}{x-1}$$

$$d) (x+1) : \frac{x^2-1}{2}$$

$$a) \frac{x}{x+1} \cdot \frac{3}{x^2} = \frac{3x}{(x+1)x^2} = \frac{3}{(x+1)x}$$

$$b) \frac{3x+2}{x-1} : \frac{x+1}{x} = \frac{x(3x+2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x^2+2x}{x^2-1}$$

$$c) \frac{3}{(x-1)^2} : \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-1)}{2(x-1)^2} = \frac{3}{2(x-1)}$$

$$d) (x+1) : \frac{x^2-1}{2} = \frac{2(x+1)}{x^2-1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x-1}$$

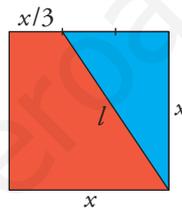
■ Resuelve problemas

32 ▼▼▼ Expresa algebraicamente:

a) El área del triángulo azul.

b) El área del trapecio rojo.

c) La longitud l .



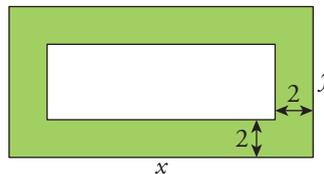
☞ Quizá te sea útil recordar el teorema de Pitágoras.

$$a) \frac{(2x/3) \cdot x}{2} = \frac{1}{3}x^2$$

$$b) \frac{(x + x/3) \cdot x}{2} = \frac{2}{3}x^2$$

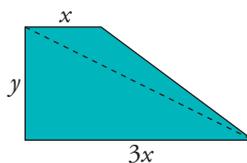
$$c) l = \sqrt{x^2 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{9}x^2}$$

33 ▼▼▼ Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada.



$$A = xy - (x-4)(y-4) = xy - (xy - 4x - 4y + 16) = 4x + 4y - 16$$

34 ▼▼▼ Expresa algebraicamente el área y la diagonal mayor de este trapecio:

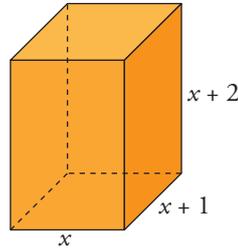


$$\text{Área} = \frac{(3x+x)y}{2} = 2xy$$

$$\text{Diagonal: } \sqrt{y^2 + (3x)^2}$$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

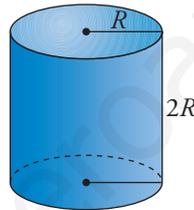
- 35** ▼▼▼ Expresa algebraicamente el área total y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son tres números consecutivos.



$$\begin{aligned} \text{Área: } 2[(x+1)(x+2) + x(x+1) + x(x+2)] &= 2(x^2 + 3x + 2 + x^2 + x + x^2 + 2x) = \\ &= 2(3x^2 + 6x + 2) = 6x^2 + 12x + 4 \end{aligned}$$

$$\text{Volumen: } x(x+1)(x+2) = x(x^2 + 3x + 2) = x^3 + 3x^2 + 2x$$

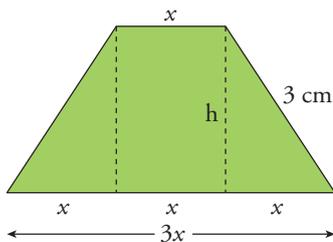
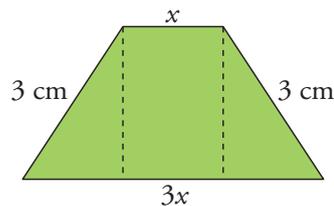
- 36** ▼▼▼ Expresa algebraicamente el área total y el volumen de un cilindro cuya altura mide el doble del radio de la base.



$$\text{Área: } 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$$

$$\text{Volumen: } \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$

- 37** ▼▼▼ Expresa algebraicamente el área de este trapecio isósceles:



$$\text{Altura: } h = \sqrt{9 - x^2}$$

$$\text{Área: } \frac{(3x + x) \sqrt{9 - x^2}}{2} = 2x \sqrt{9 - x^2}$$

■ Problemas “+”

38 ▼▼▼ ¡Adivina el número secreto!

Piensa un número cualquiera, multiplícalo por 2, réstale 10, réstale el número pensado, súmale 3 y dime el resultado.

Razona por qué obtengo el número secreto sumando 7 al resultado que me des.

Llamamos x al número pensado.

Multiplícalo por 2: $2x$

Réstale 10: $2x - 10$

Réstale el número pensado: $2x - 10 - x = x - 10$

Súmale 3: $x - 10 + 3 \rightarrow x - 7$

Si al resultado le sumo 7, obtengo x .

39 ▼▼▼ Piensa un número, súmale 7, multiplica el resultado por 2, resta 4, divide por 2 y dime el resultado. ¿Cómo puedo saber el número que has pensado?

Llamamos x al número pensado.

Le sumamos 7: $x + 7$

Multiplícamos por 2: $2x + 14$

Restamos 4: $2x + 10$

Dividimos por 2: $x + 5$

Si restamos 5 al resultado, obtenemos x .

40 ▼▼▼ Utiliza el lenguaje algebraico para demostrar que los siguientes enunciados son verdaderos:

- La suma de tres números enteros consecutivos es igual al triple del segundo.
- Si al cuadrado de un número impar le restas 1, obtienes siempre un múltiplo de 4.
- Si al cuadrado de un número le resto el producto del número anterior por el número posterior, el resultado es siempre igual a 1.

a) Tres números consecutivos son x , $x + 1$ y $x + 2$.

$$\text{Sumamos: } x + x + 1 + x + 2 = 3x + 3 = 3(x + 1)$$

Obtenemos el triple del segundo.

b) Un número impar es $2x + 1$.

$$\text{Su cuadrado: } (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

Le restamos 1: $4x^2 + 4x = 4(x^2 + x)$. Obtenemos un múltiplo de 4.

$$\text{c) } x^2 - (x + 1)(x - 1) = x^2 - (x^2 - 1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$$

- 41** ▼▼▼ Piensa en tres números consecutivos. Resta al cuadrado del mayor el cuadrado del menor. Divide el resultado por el del medio. ¡Obtienes siempre 4!

Justifícalo utilizando el lenguaje algebraico.

Tres números consecutivos son x ; $x + 1$; $x + 2$

$$(x + 2)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4$$

$$\frac{4x + 4}{x + 1} = \frac{4(x + 1)}{x + 1} = 4$$

- 42** ▼▼▼ Observa:

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

¿Cuál será el valor de $1 + 3 + 5 + \dots + 19$? ¿Y de $1 + 3 + 5 + \dots + n$?

Expresa con palabras esta propiedad y demuéstrela.

$1 + 3 + 5 + \dots + 19$ es la suma de los 10 primeros términos de la progresión 1, 3, 5, 7...

$$a_n = 2n - 1$$

$$S_{10} = \frac{1 + 19}{2} \cdot 10 = 100 = 10^2$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + n \rightarrow S_n = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = n^2$$

La suma de los n primeros números impares es igual a n^2 .

- 43** ▼▼▼ Observa la expresión:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Completa con palabras: “El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero más...”.

Demuéstrala.

El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero, más el triple del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

Demostración:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

■ Reflexiona sobre la teoría

44 ▼▼▼ ¿Cuándo se dice que un número es raíz de un polinomio?

Comprueba si 3 es raíz de alguno de estos polinomios:

$$P = x^3 - 2x^2 + x - 12$$

$$Q = x^3 - 5x^2 - 7x$$

$$R = (x^4 - 5x + 10)(x - 3)$$

¿Es 0 raíz de alguno de los polinomios anteriores?

Cuando al sustituir x por ese número, el valor del polinomio es 0.

$$P = 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 - 12 = 27 - 18 + 3 - 12 = 0 \rightarrow 3 \text{ es raíz de } P.$$

$$Q = 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 = 27 - 45 - 21 \neq 0 \rightarrow 3 \text{ no es raíz de } Q.$$

$$R = (3^4 - 5 \cdot 3^3 + 10)(3 - 3) = 0 \rightarrow 3 \text{ es raíz de } R.$$

45 ▼▼▼ ¿Cuál debe ser el valor de k para que -2 sea raíz del polinomio $x^3 - 5x^2 - 7x + k$? Justifica tu respuesta.

Para que -2 sea raíz de ese polinomio, al dar a x ese valor el polinomio debe ser igual a 0. Por tanto:

$$(-2)^3 - 5(-2)^2 - 7(-2) + k = 0 \rightarrow -8 - 20 + 14 + k = 0 \rightarrow k = 14$$

46 ▼▼▼ ¿Cuál es el resultado de multiplicar una fracción por su inversa?

Compruébalo con $\frac{x}{x+2}$ y su inversa.

El producto de una fracción por su inversa es igual a 1.

$$\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x} = \frac{x(x+2)}{(x+2)x} = 1$$

47 ▼▼▼ a) Simplifica la expresión $(a+1)^2 - (a-1)^2$.

b) Halla, sin utilizar la calculadora, el valor de: $2501^2 - 2499^2$

$$a) (a+1)^2 - (a-1)^2 = (a^2 + 1 + 2a) - (a^2 + 1 - 2a) = a^2 + 1 + 2a - a^2 - 1 + 2a = 4a$$

$$b) 2501^2 - 2499^2 = 4 \cdot 2500 = 10\,000$$

48 ▼▼▼ Averigua cuál debe ser el valor de a , en cada caso, para que las dos expresiones sean idénticas:

$$a) (3x+a)(3x-a) + 7 \text{ y } 9x^2 - 18 \quad b) (x-a)^2 + 2xa - 46 \text{ y } x^2 + 18$$

$$a) (3x+a)(3x-a) + 7 = 9x^2 - a^2 + 7$$

$$\text{Si } 9x^2 - a^2 + 7 = 9x^2 - 18 \rightarrow -a^2 + 7 = -18 \rightarrow a^2 = 25 \begin{cases} a = 5 \\ a = -5 \end{cases}$$

$$b) (x-a)^2 + 2xa - 46 = x^2 + a^2 - 2xa + 2xa - 46 = x^2 + a^2 - 46$$

$$\text{Si } x^2 + a^2 - 46 = x^2 + 18 \rightarrow a^2 - 46 = 18 \rightarrow a^2 = 64 \begin{cases} a = 8 \\ a = -8 \end{cases}$$

49 ▼▼▼ ¿Cuáles de las siguientes expresiones es una identidad? Justifícalo.

a) $\sqrt{9x^2} = 3x$

b) $x(x + 1) = x^2 + 1$

c) $(x - 5)^2 = x^2 - 25$

a) Es una identidad: $\sqrt{9x^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2} = 3x$

b) y c) no son identidades.

50 ▼▼▼ Expresa con palabras cada una de las siguientes relaciones:

a) $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

b) $x(x + 1) = x^2 + x$

c) $x^2 \geq 0$

a) La raíz del cociente de dos números es igual al cociente de las raíces de esos números.

b) El producto de un número por el que le sigue es igual al cuadrado de ese número más él mismo.

c) El cuadrado de un número cualquiera es siempre mayor o igual que 0.

▼ Utiliza tu ingenio

De lógica

Cinco atletas comentan a su entrenador el resultado de la última carrera:

CARMEN: Esta vez he llegado delante de Amaya.

AMAYA: Tina ha llegado detrás de Rosa.

TINA: Rosa no ha ganado.

ROSA: Carmen ha llegado la cuarta.

LUISA: Hoy hacía un día estupendo para correr.

¿Cuál ha sido el orden de llegada?

Utilizaremos una tabla para ir resumiendo la información:

— Carmen ha llegado la cuarta.

1. ^a	2. ^a	3. ^a	4. ^a	5. ^a
			Carmen	

— Esta vez he llegado delante de Amaya.

1. ^a	2. ^a	3. ^a	4. ^a	5. ^a
			Carmen	Amaya

— Tina ha llegado detrás de Rosa.

— Rosa no ha ganado.

1. ^a	2. ^a	3. ^a	4. ^a	5. ^a
	Rosa	Tina	Carmen	Amaya

Por tanto:

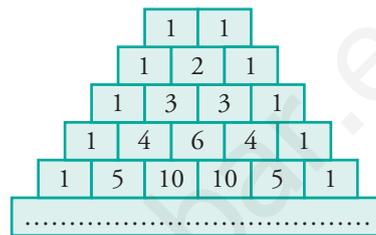
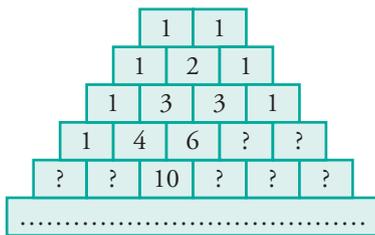
1. ^a	2. ^a	3. ^a	4. ^a	5. ^a
Luisa	Rosa	Tina	Carmen	Amaya

▼ **Investiga**

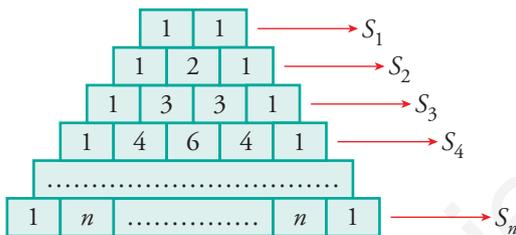
Un triángulo curioso

Esta colección de números que se abre indefinidamente hacia abajo tiene multitud de regularidades curiosas, pero, antes que nada, averigua cómo se construye.

¿Podrías completar las casillas vacías?



- Suma los números de cada fila y completa la tabla:

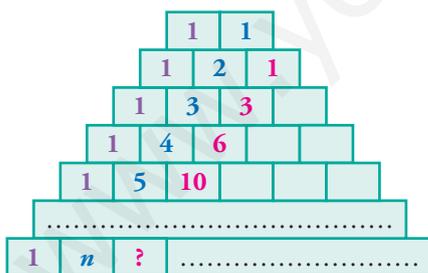


S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	...	S_n
2	4	8			...	

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	...	S_n
2	4	8	16	32	...	2^n

Escribe una expresión algebraica para calcular la suma de los términos de la fila enésima, S_n .

- Fíjate en estas tres escaleras de números:



Observa que:

$$3 = 1 + 2$$

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$10 = \dots$$

¿Cuál es el tercer número de la 6.^a fila?

1	6	?
---	---	---

¿Y el de la número 20 (vigésima)?

1	20	?
---	----	---

Escribe una expresión algebraica para la tercera casilla de la enésima fila:

1	n	?
---	---	---

Los números de la tercera escalera coinciden con las sucesivas sumas de los primeros números naturales.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 2 = 3$$

$$a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\text{Así: } a_{20} = 1 + 2 + \dots + 20 = \frac{(1 + 20) \cdot 20}{2} = 210$$

$$\text{Y, por fin: } a_n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}$$