UNIDAD 7. Sucesiones y progresiones

ACTIVIDADES PAG. 122

ACTIVIDADES

1. Escribe los seis primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = n + 3$ b) $a_n = n^2 - 1$ c) $a_n = 4 \cdot n + 2$ d) $a_n = 7 \cdot n + 1$

2. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia:

a) $a_1 = 4$, $a_n = a_{n-1} + 4$

b) $a_1 = -5$, $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 10$

3. Calcula el término general de las siguientes sucesiones:

a) 4, 7, 10, 13... b) 3, 7, 11, 15... c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$...

1.

a) 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9

b) 0 , 3 , 8 , 15 , 24 , 35

c) 6, 10, 14, 18, 22, 26

d) 8, 15, 22, 29, 36, 43

2.

a) 4 , 8 , 12 , 16

b) - 5 , - 5 , – 5 , - 5

3.

a) 3 n + 1

b) 4 n – 1

c) $\frac{1}{n}$

ACTIVIDADES PAG. 123

ACTIVIDADES

4. Calcula la diferencia, el término general, a_{12} y a_{40} de la siguiente progresión aritmética: –3, –1, 1, 3, 5...

5. Una progresión aritmética consta de 50 términos y su último término es 188. Si la diferencia es 4, calcula el primer término.

6. Dada la progresión aritmética 120, 117, 114, 111..., ¿qué término es el –3?

7. El primer término de una progresión aritmética es 7, la diferencia es 5 y su último término es 6682. ¿Cuántos términos tiene la progresión?

4.

a) $\boxed{d = 2}$,

$$a_n = -3 + 2(n-1) = 2n - 5 \Rightarrow \boxed{a_n = 2n - 5}$$

$$a_{12} = 2{\cdot}12 - 5 = 24 - 5 \Rightarrow \boxed{a_{12} = 19}$$

$$a_{40} = 2{\cdot}40 - 5 = 80 - 5 \Rightarrow \boxed{a_{40} = 75}$$

5.

$$n = 50 \,,\, a_n = 188 \,,\, d = 4$$

$$a_n = a_1 + (n-1){\cdot}d \Rightarrow a_1 = a_n - (n-1){\cdot}d \Rightarrow a_1 = 188 - 49{\cdot}4 \Rightarrow a_1 = 188 - 196 \Rightarrow \boxed{a_1 = -8}$$

6.

d = -3 , $a_1 = 120$, $a_n = -3$

$$-3 = 120 + (n-1)\cdot(-3) \Rightarrow -3 = 120 - 3n + 3 \Rightarrow 3n = 126 \Rightarrow \boxed{n = 42}$$

Solución: el término a_{42}

7.

d = 5, $a_1 = 7$, $a_n = 6682$

$$6682 = 7 + (n-1)\cdot 5 \Rightarrow 6675 = 5\cdot(n-1) \Rightarrow 1335 = n - 1 \Rightarrow \boxed{n = 1336}$$

Solución: 1336 términos

ACTIVIDADES PAG. 124

ACTIVIDADES

8. Interpola cinco medios aritméticos entre los números –10 y 26.
9. Interpola cuatro medios aritméticos entre los números –50 y –70.
10. Interpola tres medios aritméticos entre los números $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$.
11. Interpola cuatro medios aritméticos entre los números $\sqrt{3}$ y $21\sqrt{3}$.
12. Interpola cuatro medios aritméticos entre los números $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ y $4\sqrt{2}$.

8.

Construimos la siguiente progresión: $-10 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_6 , 26$

n = 7 , $a_1 = -10$, $a_7 = 26$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{26-(-10)}{7-1} \Rightarrow d = \frac{36}{6} \Rightarrow \boxed{d = 6}$$

Solución: Los números buscados son: - 4 , 2 , 8 , 14 , 20

9.

Construimos la siguiente progresión: $-50 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , -70$

n = 6, $a_1 = -50$, $a_7 = -70$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{-70-(-50)}{6-1} \Rightarrow d = \frac{-20}{5} \Rightarrow \boxed{d = -4}$$

Solución: Los números buscados son: -54 , -58 , -62 , -66

10.

Construimos la siguiente progresión: $\frac{1}{2} , a_2 , a_3 , a_4 , \frac{3}{2}$

n = 5, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{3}{2}$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{5-1} \Rightarrow d = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{d = \frac{1}{4}}$$

Solución: Los números buscados son: $\frac{3}{4}$, 1 , $\frac{5}{4}$

11.

Construimos la siguiente progresión: $\sqrt{3}\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,a_4\,,\,a_5\,,\,21\sqrt{3}$

$$\mathrm{n}=6\,,\;a_1=\sqrt{3}\,,\;a_6=21\sqrt{3}$$

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d\Rightarrow d=\frac{a_n-a_1}{n-1}\Rightarrow d=\frac{21\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6-1}=\frac{20\sqrt{3}}{5}=4\sqrt{3}\Rightarrow\boxed{d=4\sqrt{3}}$$

Solución: Los números buscados son: $5\sqrt{3}\,,\,9\sqrt{3}\,,\,13\sqrt{3}\,,\,17\sqrt{3}$

12.

Construimos la siguiente progresión: $\frac{2}{3}\sqrt{2}\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,a_4\,,\,a_5\,,\,4\sqrt{2}$

$$\mathrm{n}=6\,,\;a_1=\frac{2}{3}\sqrt{2}\,,\;a_6=4\sqrt{2}$$

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d\Rightarrow d=\frac{a_n-a_1}{n-1}\Rightarrow d=\frac{4\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{2}}{6-1}=\frac{\frac{10}{3}\sqrt{2}}{5}=\frac{2}{3}\sqrt{2}\Rightarrow\boxed{d=\frac{2}{3}\sqrt{2}}$$

Solución: Los números buscados son: $\frac{4}{3}\sqrt{2}\,,\,2\sqrt{2}\,,\,\frac{8}{3}\sqrt{2}\,,\,\frac{10}{3}\sqrt{2}$

ACTIVIDADES PAG. 125

ACTIVIDADES

13. Calcula la suma de los 20 términos de la progresión aritmética 4, ..., 118. Calcula la diferencia.

14. Dada la progresión aritmética 3, 8, 13, ..., 123 de 25 términos, calcula la expresión del término general y la suma de los 25 términos. ¿Qué término de la progresión es el número 68?

15. La suma de las edades de seis hermanos es de 57 años. Si la edad del mayor es 8 veces la edad del menor más 1 y las edades están en progresión aritmética, ¿cuántos años tiene cada hermano?

13.

$$a_1=4\,,\,a_{20}=118\,,\,n=20$$

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}\Rightarrow S_n=\frac{(4+118)\cdot 20}{2}\Rightarrow\boxed{S_n=1220}$$

$$a_{20}=a_1+19\cdot d\Rightarrow d=\frac{a_{20}-a_1}{19}\Rightarrow d=\frac{118-4}{19}=6\Rightarrow\boxed{d=6}$$

14.

$$a_1=3\,,\,a_{25}=123\,,\,n=25\,,\,\mathrm{d}=5$$

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d\Rightarrow a_n=3+(n-1)\cdot 5\Rightarrow\boxed{a_n=5n-2}$$

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}\Rightarrow S_n=\frac{(3+123)\cdot 25}{2}\Rightarrow\boxed{S_n=1575}$$

$$a_n=68\Rightarrow 5n-2=68\Rightarrow 5n=70\Rightarrow\boxed{n=14}\,.$$

El término a_{14} de la progresión es el número 68

15.
Como la suma de los seis hermanos es 57 tenemos:

$$S_6 = 57 \Rightarrow \frac{(a_1+a_6)\cdot 6}{2} = 57 \Rightarrow a_1 + a_6 = 19$$

Como la edad del mayor es 8 veces la del menor más uno tenemos:

$$a_6 = 8a_1 + 1 \implies a_1 + (8a_1 + 1) = 19 \Rightarrow 9a_1 = 18 \implies a_1 = 2 \implies a_6 = 17$$

Como $a_6 = a_1 + 5d \implies 17 = 2 + 5d \implies 15 = 5d \implies d = 3$

Solución: Las edades de los hermanos son: 2, 5, 8, 11, 14 y 17 años.

ACTIVIDADES PAG. 126

ACTIVIDADES

16. Calcula el término general de las siguientes progresiones:

a) 4, 20, 100, 500... b) 9, 36, 144, 576...

17. Calcula a_1 de una progresión geométrica sabiendo que $a_6 = 15\,552$ y $a_5 = 2\,592$.

18. De una progresión geométrica conocemos $a_3 = 16$ y $a_7 = 1$. Calcula r.

16.
a) $4\cdot 5^{n-1}$
b) $9\cdot 4^{n-1}$

17.

$$r = \frac{a_6}{a_5} \Rightarrow r = \frac{15552}{2592} \Rightarrow \boxed{r = 6}$$

$$a_n = a_1\cdot r^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1\cdot 6^4 \Rightarrow a_1 = \frac{a_5}{6^4} \Rightarrow a_1 = \frac{2592}{1296} \Rightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

18.

$$a_7 = a_1\cdot r^6 \Rightarrow \boxed{1 = a_1\cdot r^6}$$

$$a_3 = a_1\cdot r^2 \Rightarrow \boxed{16 = a_1\cdot r^2}$$

Dividiendo la primera expresión entre la segunda tenemos:

$$\frac{a_1\cdot r^2}{a_1\cdot r^6} = \frac{16}{1} \Rightarrow \frac{1}{r^4} = 16 \Rightarrow \frac{1}{16} = r^4 \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{2}}$$

ACTIVIDADES PAG. 127

ACTIVIDADES

19. Calcula la suma de los siete primeros términos de la progresión geométrica siguiente: 2, 8, 32...

20. De una progresión geométrica se sabe que su razón $r = \frac{1}{2}$ y que $a_1 = 32$. Calcula la suma de sus seis primeros términos.

21. Calcula la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que $a_1 = 1024$, $r = \frac{1}{2}$

19.

$$n = 7,\quad r = \frac{8}{2} \Rightarrow \boxed{r = 4}$$

$$S_7 = \frac{a_1 \cdot \left(r^7 - 1\right)}{r - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{2 \cdot \left(4^7 - 1\right)}{4 - 1} \Rightarrow \boxed{S_7 = 10922}$$

20.

$$r = \frac{1}{2}\ ,\ a_1 = 32$$

$$S_6 = \frac{a_1 \cdot \left(r^6 - 1\right)}{r - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{32 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{32 \cdot \left(\frac{1}{64} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_6 = -64 \cdot \left(\frac{1}{64} - 1\right)$$

$$\Rightarrow S_6 = -1 + 64 \Rightarrow \boxed{S_6 = 63}$$

21.

$$a_1 = 1024 = 2^{10} \Rightarrow a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 1024 \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{2^{10}}{2^9} \Rightarrow a_{10} = 2$$

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 1024}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-1023}{-\frac{1}{2}} = 2046$$

ACTIVIDADES PAG. 128

ACTIVIDADES

22. Calcula la suma de los infinitos términos de la siguiente progresión geométrica:

a) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\ldots$ b) $81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}\ldots$

22.

a) $a_1 = 4\ ,\ r = \frac{1}{2}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \Rightarrow S_\infty = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{S_\infty = 8}$$

b) $a_1 = 81\ ,\ r = \frac{1}{3}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \Rightarrow S_\infty = \frac{81}{1 - \frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{243}{2}}$$

ACTIVIDADES PAG. 129

ACTIVIDADES

23. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos puros utilizando sumas de progresiones geométricas:

a) 0'222... b) 0'121212... c) 3'606060...

24. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos mixtos utilizando sumas de progresiones geométricas:

a) 0'5121212... b) 4'2333... c) 72'5666...

23.

a)

$$N = 0'222\ldots = 0'2 + 0'02 + 0'002 + \ldots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{2}{10}$, $r = \frac{1}{10}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2}{9}}$$

b)

$$N = 0'1212\ldots = 0'12 + 0'0012 + \ldots = \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{12}{100}$, $r = \frac{1}{100}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{12}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \Rightarrow \boxed{N = \frac{4}{33}}$$

c)

$$N = 3'606060\ldots = 3 + 0'60 + 0'0060 + \ldots = 3 + \frac{60}{100} + \frac{60}{10000} + \ldots$$

Se trata de la suma de 3 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{60}{100}$, $r = \frac{1}{100}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{60}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{60}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{60}{99} = \frac{20}{33}$$

$$N = 3 + \frac{20}{33} = \frac{99+20}{33} \Rightarrow \boxed{N = \frac{119}{33}}$$

24.

a)

$$N = 0'5121212\ldots = 0'5 + 0'012 + 0'00012 + \ldots = 0'5 + \frac{12}{1000} + \frac{12}{100000} + \ldots$$

Se trata de la suma de 0’5 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{12}{1000}$, $r = \frac{1}{100}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{12}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{12}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{12}{990} = \frac{2}{165}$$

$$N = 0'5 + \frac{2}{165} = \frac{1}{2} + \frac{2}{165} = \frac{165+4}{330} \Rightarrow \boxed{N = \frac{169}{330}}$$

b)

$$N = 4'2333\ldots = 4'2 + 0'03 + 0'003 + \ldots = 4'2 + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$$

Se trata de la suma de 4’2 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{3}{100}$, $r = \frac{1}{10}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

$$N = 4'2 + \frac{1}{30} = \frac{42}{10} + \frac{1}{30} = \frac{126+1}{30} \Rightarrow \boxed{N = \frac{127}{30}}$$

c)

$$N = 72'5666\ldots = 72'5 + 0'06 + 0'006 + \cdots = 72'5 + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ \ldots$$

Se trata de la suma de 72’5 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{6}{100}$, $r = \frac{1}{10}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{6}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

$$N = 72'5 + \frac{1}{15} = \frac{725}{10} + \frac{1}{15} = \frac{2175+2}{30} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2177}{30}}$$

Desafío matemático

El interés compuesto

Supongamos que una persona tiene ahorrado cierta cantidad de dinero, por ejemplo, 5 000 euros, y como no quiere que se deprecie, lo deposita en un banco que le da un interés del 4% (r) anual. Eso significa que al cabo de un año (t), esa persona obtiene un beneficio de $i = 5000 \cdot \frac{4}{100} = 200$ euros. Si mantiene el depósito durante 5 años, obtiene un beneficio total de $200 \cdot 5 = 1\,000$ euros. En este tipo de depósito los beneficios obtenidos no producen nuevos intereses. Estamos ante un caso de interés simple ya estudiado en la unidad 3.

$$\text{interés} = \text{Capital} \cdot \frac{r}{100} \cdot t$$

Sin embargo, lo que suele ocurrir es que los intereses que se producen, pasen a formar parte del capital, con lo que también producirán intereses en el futuro; este tipo de depósitos son a interés compuesto.

Si llamamos C_0 a la imposición inicial, C_1 al capital que obtiene al cabo de 1 año, …, C_n al capital que tenemos al cabo de n años, al r por uno anual, obtenemos la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
&n = 0,\ C_0\\
&n = 1,\ C_1 = C_0 + C_0 \cdot r = C_0 \cdot (1 + r)\\
&n = 2,\ C_2 = C_1 + C_1 \cdot r = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2\\
&\dots\quad C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \cdot r = C_0 \cdot (1 + r)^n
\end{aligned}$$

1. Un accionista deposita en el banco 6 000 euros el 31 de diciembre de 2010 a un interés del 6'25% anual. Si los intereses producidos se incorporan al depósito, calcula el capital que se encontrará en el depósito el 1 de enero de 2015.

2. Si realizamos el razonamiento en semestres, siendo r el tanto por uno anual y r_s el tanto por uno semestral, al cabo de un año hemos obtenido $C_0 \cdot (1 + r_s)^2$, que tiene que coincidir con la inversión al r anual.

$$C_0 \cdot (1 + r_s)^2 = C_0 \cdot (1 + r) \Rightarrow (1 + r_s)^2 = (1 + r) \Rightarrow (1 + r_s) = (1 + r)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow r_s = (1 + r)^{\frac{1}{2}} - 1$$

Calcula una fórmula equivalente a la anterior cuando la unidad de tiempo es cuatrimestral (r_c el tanto por uno cuatrimestral), trimestral (r_t el tanto por uno trimestral), mensual (r_m el tanto por uno mensual) y diaria (r_d el tanto por uno diario).

3. Si nuestro banco nos oferta depositar los 6 000 euros al 20% anual:

a) Calcula el tanto por uno anual de interés.

b) Calcula el tanto por ciento de interés semestral que nos ofrece.

c) Calcula el capital obtenido al cabo de 3 años.

1. Se trata de aplicar la fórmula $C_n = C_0 \cdot (1+r)^n$

En nuestro caso, han trascurrido 4 años, luego $n = 4$, $C_0 = 6000$, $r = 0'0625$
El capital que se encontrará en el depósito el 1 de enero de 2015 será:

$$C_4 = 6000 \cdot (1 + 0´0625)^4 = 7646´57$$

2. Si realizamos el razonamiento en cuatrimestres, siendo *r* el tanto por uno anual y r_c el tanto por uno cuatrimestral, al cabo de una año hemos obtenido :

$C_0 \cdot (1+r_c)^3$, que tiene que coincidir con la inversión al *r* anual.

$$C_0.(1+r_c)^3 = C_0 \cdot (1+r) \Rightarrow (1+r_c)^3 = (1+r) \Rightarrow 1 + r_c = (1+r)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$
$$r_c = (1+r)^{\frac{1}{3}} - 1$$

- Si realizamos el razonamiento en trimestres, siendo *r* el tanto por uno anual y r_t el tanto por uno trimestral, al cabo de una año hemos obtenido :

$C_0 \cdot (1+r_t)^4$, que tiene que coincidir con la inversión al *r* anual.

$$C_0.(1+r_t)^4 = C_0 \cdot (1+r) \Rightarrow (1+r_t)^4 = (1+r) \Rightarrow 1 + r_t = (1+r)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow$$
$$r_t = (1+r)^{\frac{1}{4}} - 1$$

- Si realizamos el razonamiento mensual, siendo r el tanto por uno anual y r_m el tanto por uno mensual, al cabo de una año hemos obtenido:

$C_0 \cdot (1+r_m)^{12}$, que tiene que coincidir con la inversión al r anual.

$$C_0.(1+r_m)^{12} = C_0 \cdot (1+r) \Rightarrow (1+r_m)^{12} = (1+r) \Rightarrow 1 + r_m = (1+r)^{\frac{1}{12}} \Rightarrow$$
$$r_m = (1+r)^{\frac{1}{12}} - 1$$

- Si realizamos el razonamiento diario, siendo *r* el tanto por uno anual y r_d el tanto por uno diario, al cabo de una año hemos obtenido:

$C_0 \cdot (1+r_d)^{365}$, que tiene que coincidir con la inversión al *r* anual.

$$C_0 \cdot (1+r_d)^{365} = C_0 \cdot (1+r) \Rightarrow (1+r_d)^{365} = (1+r) \Rightarrow 1 + r_d = (1+r)^{365} \Rightarrow$$
$$r_d = (1+r)^{365} - 1$$

3.

a) $r = 20\% = 0´20$

b) $r_s = (1+r)^{\frac{1}{2}} - 1 = (1+0´2)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0´0954 \cong 954\ \%$

c) $C_3 = C_0 \cdot (1+r)^3 = 6000 \cdot (1+0´2)^3 = 10368$

ACTIVIDADES FINALES PAG. 132

EJERCICIOS

Progresiones aritméticas

○ **25.** Escribe los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $\frac{2n}{n+1}$ c) $4n + 30$

b) $\frac{5n-1}{3}$ d) $\frac{1}{n+1}$

○ **26.** Dada la progresión 6, 11, 16, 21... calcula su término a_{50}.

○ **27.** Indica cuál de las siguientes progresiones es aritmética:

a) 7, 12, 17, 22...

b) 1, 4, 9, 16, 25, 36...

c) 3, 6, 12, 24, 48, 96...

○ **28.** Dadas las siguientes progresiones aritméticas, calcula su diferencia y la expresión de su término general:

a) –3, –1, 1, 3... c) 5, 9, 13, 17...

b) 7, 8, 9... d) 2, 5, 8...

○ **29.** Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) 8, 11, 14, 17... c) 2, 6, 10, 14, 18...

b) 0, 3, 8, 15, 24... d) 5, 11, 17, 23, 29...

○ **30.** Indica si las siguientes progresiones aritméticas son crecientes o decrecientes y señala cuál es la diferencia de la progresión:

a) 2, 5, 8, 11, 14... b) 238, 233, 228, 223, 218...

○ **31.** Indica si las siguientes progresiones aritméticas son crecientes o decrecientes y señala cuál es la diferencia de la progresión:

a) 5, $\frac{11}{2}$, 6, $\frac{13}{2}$, 7... 7 b) 7, $\frac{20}{3}$, $\frac{19}{3}$, 6...

◐ **32.** Sabemos que el primer término de una progresión aritmética es 4 y la diferencia de la progresión es 6. Calcula su término vigésimo.

◐ **33.** El primer término de una progresión aritmética de once términos es 8 y el último término es 13. Calcula la diferencia de la progresión y su término noveno.

● **34.** Interpola nueve términos en progresión aritmética entre 8 y 28.

● **35.** Interpola cinco medios aritméticos entre 1 y 5.

● **36.** Interpola cuatro medios aritméticos entre 6 y 26.

◐ **37.** Calcula la suma de los 10 primeros múltiplos de 6.

● **38.** Interpola cinco medios aritméticos entre 2 y 11.

● **39.** Encuentra tres números entre 3 y 6 que estén en progresión aritmética.

◐ **40.** Suma los diez términos de una progresión aritmética de la que conocemos $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_3 = \frac{7}{6}$.

● **41.** Calcula el valor de n para que las siguientes expresiones constituyan tres términos consecutivos de una progresión aritmética:

$$2n - 1,\ 3n,\ n^2 + 1$$

● **42.** Calcula el valor de n para que las siguientes expresiones constituyan tres términos consecutivos de una progresión aritmética:

$$2n - 1,\ n^2 - 1,\ 4n - 1$$

Forma la progresión que resulta.

● **43.** Considera las siguientes expresiones polinómicas:

$$n^2 - 4n + 1,\ n^2 - 2n + 2,\ n^2 + 3$$

¿Constituyen las expresiones anteriores una progresión aritmética? Si así fuera, y suponiendo que $n^2 - 4n + 1$ fuera el primer término, calcula el término octavo de dicha progresión.

◐ **44.** De una progresión aritmética sabemos que $a_7 = 45$ y $a_8 = 52$. Calcula la suma de sus 50 primeros términos.

◐ **45.** Suma todos los múltiplos de 7 comprendidos entre 100 y 200.

● **46.** La suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética es 65 y la suma de los 20 primeros términos es 230. Calcula la diferencia y los términos primero y quinto de la progresión.

◐ **47.** Calcula la suma de los primeros 500 números.

◐ **48.** Calcula la suma de los 200 primeros números impares.

● **49.** De una progresión aritmética sabemos que la suma de los términos segundo y séptimo es $\frac{73}{2}$ y la suma de los términos tercero y quinto es $\frac{65}{2}$. Calcula los siete primeros términos de dicha progresión.

● **50.** La suma de los elementos primero y séptimo de una progresión aritmética de siete términos vale 9. Si el quinto término es $\frac{11}{2}$, calcula el valor del sexto término.

25.

a) $1,\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{5}{3}$

b) $\frac{4}{3},\ 3,\ \frac{14}{3},\ \frac{19}{3},\ 8$

c) 34, 38, 42, 46, 50

d) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6}$

26.
Se trata de una progresión aritmética donde $a_1 = 6$, d = 5

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow a_{50} = a_1 + 49\cdot d \Rightarrow a_{50} = 6 + 49\cdot 5 \Rightarrow a_{50} = 6 + 245 \Rightarrow \boxed{a_{50} = 251}$$

27.
Sólo la *a*)

28.
a) d = 2 , $a_n = -5 + 2n$
b) d = 1 , $a_n = 6 + n$
c) d = 4 , $a_n = 1 + 4n$
d) d = 3 , $a_n = -1 + 3n$

29.
a) $a_n = 5 + 3n$
b) $a_n = n^2 - 1$
c) $a_n = -2 + 4n$
d) $a_n = -1 + 6n$

30.
a) Creciente, d = 3
b) Decreciente, d = - 5

31.
a) Creciente , $d = \frac{1}{2}$
b) Decreciente , $d = -\frac{1}{3}$

32.
$a_1 = 4$, d = 6

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow a_{20} = a_1 + 19\cdot d \Rightarrow a_{20} = 4 + 19\cdot 6 \Rightarrow \boxed{a_{20} = 118}$$

33.
$a_1 = 8$, n = 11 , $a_{11} = 13$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow a_{11} = a_1 + 10\cdot d \Rightarrow 13 = 8 + 10\cdot d \Rightarrow \boxed{d = \frac{1}{2}}$$

$$a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow a_9 = 8 + 8\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a_9 = 12}$$

34.
Construimos la siguiente progresión: $8 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_6 , a_7 , a_8 , a_9 , a_{10} , 28$

n = 11 , $a_1 = 8$, $a_{11} = 28$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{28-8}{11-1} \Rightarrow d = \frac{20}{10} \Rightarrow \boxed{d=2}$$

Solución: Los números buscados son:

10 , 12 , 14 , 16 , 18 , 20 , 22 , 24 , 26

35.

Construimos la siguiente progresión: $1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_6 , 5$

n = 7 , $a_1 = 1$, $a_7 = 5$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{5-1}{7-1} \Rightarrow d = \frac{4}{6} \Rightarrow \boxed{d = \frac{2}{3}}$$

Solución. Los números buscados son:

$$\frac{5}{3} , \frac{7}{3} , \frac{9}{3} = 3 , \frac{11}{3} , \frac{13}{3}$$

36.

Construimos la siguiente progresión: $6 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , 26$

n = 6 , $a_1 = 6$, $a_6 = 26$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{26-6}{6-1} \Rightarrow d = \frac{20}{5} \Rightarrow \boxed{d=4}$$

Solución: Los números buscados son: 10, 14, 18, 22

37.

$d = 6$, $a_1 = 6$

Se trata de una progresión aritmética.

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})}{2}\cdot 10 \Rightarrow S_{10} = \frac{(6+60)}{2}\cdot 10 \Rightarrow \boxed{S_{10} = 330}$$

38.

Construimos la siguiente progresión: $2 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_6 , 11$

n = 7 , $a_1 = 2$, $a_7 = 11$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{11-2}{7-1} \Rightarrow d = \frac{9}{6} \Rightarrow \boxed{d = \frac{3}{2}}$$

Solución: Los números buscados son: $\frac{7}{2} , \frac{10}{2} = 5 , \frac{13}{2} , \frac{16}{2} = 8 , \frac{19}{2}$

39.

Construimos la siguiente progresión: $3 , a_2 , a_3 , a_4 , 6$

n = 5 , $a_1 = 3$, $a_5 = 6$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{6-3}{5-1} \Rightarrow \boxed{d = \frac{3}{4}}$$

Solución: Los números buscados son: $\frac{15}{4} , \frac{18}{4} , \frac{21}{4}$

40.

$$a_1=\frac{1}{2}\ ,\ a_3=\frac{7}{6}$$

$$a_3=a_1+2d\Rightarrow\frac{7}{6}=\frac{1}{2}+2d\Rightarrow\boxed{d=\frac{1}{3}}\ ,$$

$$a_{10}=a_1+9d\Rightarrow a_{10}=\frac{1}{2}+9\cdot\frac{1}{3}\Rightarrow\boxed{a_{10}=\frac{7}{2}}$$

$$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot10\Rightarrow S_{10}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{7}{2}}{2}\cdot10\Rightarrow\boxed{S_{10}=20}$$

41.

Por ser los términos de una progresión aritmética

$$\left.\begin{array}{l}2n-1+d=3n\Rightarrow d=n+1\\3n+d=n^2+1\Rightarrow d=n^2-3n+1\end{array}\right\}\Rightarrow n+1=n^2-3n+1\Rightarrow n^2-3n+1-n-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2-4n=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{n=0}\\\boxed{n=4}\end{cases}$$

Solución:

Si n = 0 , la progresión es -1 , 0 , 1

Si n = 4, la progresión es 7, 12, 17

42.

Por ser los términos de una progresión aritmética

$$2n-1+d=n^2-1\Longrightarrow d=n^2-2n$$

$$n^2-1+d=4n-1\Longrightarrow d=-n^2+4n$$

$$n^2-2n=-n^2+4n\Longrightarrow 2n^2-6n=0\Longrightarrow\begin{cases}n=0\\n=3\end{cases}$$

Solución:

Si n = 0 , la progresión es -1 , -1 , -1

Si n = 3 , la progresión es 5 , 8 , 11

43.

Para que constituyan una progresión aritmética se ha de verificar que la diferencia d entre los términos de la progresión sea la misma

$$\left.\begin{array}{l}n^2-4n+1+d=n^2-2n+2\Rightarrow\boxed{d=2n+1}\\n^2-2n+2+d=n^2+3\Rightarrow\boxed{d=2n+1}\end{array}\right\}$$

Por lo tanto, constituyen una progresión aritmética

$$a_8=a_1+(n-1)\cdot d\Rightarrow a_8=n^2-4n+1+(n-1)\cdot(2n+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_8=n^2-4n+1+2n^2+n-2n-1\Rightarrow\boxed{a_8=3n^2-5n}$$

44.

$$d = a_8 - a_7 \Rightarrow d = 52 - 45 \Rightarrow \boxed{d = 7}$$

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50})}{2} \cdot 50$$

Necesitamos conocer a_1 y a_{50}

$$a_7 = 45 \Rightarrow a_1 + 6d = 45 \Rightarrow a_1 = 45 - 6d \Rightarrow a_1 = 45 - 42 \Rightarrow \boxed{a_1 = 3}$$

$$a_{50} = a_1 + 49d \Rightarrow a_{50} = 3 + 49 \cdot 7 \Rightarrow a_{50} = 3 + 343 \Rightarrow \boxed{a_{50} = 346}$$

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50})}{2} \cdot 50 \Rightarrow S_{50} = \frac{(3 + 346)}{2} \cdot 50 \Rightarrow \boxed{S_{50} = 8725}$$

45.

Se trata de una progresión aritmética en la que:

$$a_1 = 7 \cdot 15 = 105 \;\; ; \;\; a_{14} = 7 \cdot 28 = 196$$

$$S_{14} = \frac{(a_1 + a_{14})}{2} \cdot 14 \Rightarrow S_{14} = \frac{(105 + 196)}{2} \cdot 14 \Rightarrow \boxed{S_{14} = 2107}$$

46.

$$S_{10} = 65 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_{10})}{2} \cdot 10 = 65 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 13 \Rightarrow a_1 + (a_1 + 9d) = 13 \Rightarrow 2a_1 + 9d = 13$$

$$S_{20} = 230 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_{20})}{2} \cdot 20 = 230 \Rightarrow a_1 + a_{20} = 23 \Rightarrow a_1 + (a_1 + 19d) = 23 \Rightarrow 2a_1 + 19d = 23$$

$$\begin{cases} -\cancel{2a_1} - \;\; 9d = -13 \\ \;\;\cancel{2a_1} + 19d = 23 \end{cases}$$

$$10d = 10 \Rightarrow \boxed{d = 1}$$

$$2a_1 + 9d = 13 \Rightarrow 2a_1 = 13 - 9d \Rightarrow 2a_1 = 13 - 9 \Rightarrow 2a_1 = 4 \Rightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow a_5 = 2 + 4 \Rightarrow \boxed{a_5 = 6}$$

47.

Se trata de una progresión aritmética en la que d = 1, $a_1 = 1$

El último término es $a_{500} = 500$

$$S_{500} = \frac{(a_1 + a_{500})}{2} \cdot 500 = \frac{(1 + 500)}{2} \cdot 500 = 125250$$

48.

Se trata de una progresión aritmética en la que d = 2 , $a_1 = 1$

El último término es $a_{200} = a_1 + 199 \cdot d \Rightarrow a_{200} = 1 + 199 \cdot 2 \Rightarrow a_{200} = 399$

$$S_{200} = \frac{(a_1 + a_{200})}{2} \cdot 200 \Rightarrow S_{200} = \frac{(1 + 399)}{2} \cdot 200 \Rightarrow \boxed{S_{500} = 40000}$$

49.

$$\begin{cases} a_2 + a_7 = \dfrac{73}{2} \\ a_3 + a_5 = \dfrac{65}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + d + a_1 + 6d = \dfrac{73}{2} \\ a_1 + 2d + a_1 + 4d = \dfrac{65}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 7d = \dfrac{73}{2} \\ 2a_1 + 6d = \dfrac{65}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{2a_1} + 7d = \dfrac{73}{2} \\ -\cancel{2a_1} - 6d = -\dfrac{65}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{d = 4}$$

$$2a_1 + 7d = \frac{73}{2} \Rightarrow 2a_1 = \frac{73}{2} - 28 \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{17}{4}}$$

$$a_2 = \frac{33}{4},\ a_3 = \frac{49}{4},\ a_4 = \frac{65}{4},\ a_5 = \frac{81}{4},\ a_6 = \frac{97}{4},\ a_7 = \frac{113}{4}$$

50.

$$\begin{cases} a_1 + a_7 = 9 \\ a_5 = \dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 6d = 9 \\ a_1 + 4d = \dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 6d = 9 \\ a_1 + 4d = \dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{2a_1} + 6d = 9 \\ -\cancel{2a_1} - 8d = -11 \end{cases}$$

$$-2d = -2 \Rightarrow \boxed{d = 1}$$

$$a_1 + 4d = \frac{11}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{11}{2} - 4 \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{3}{2}}$$

$$a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow a_6 = \frac{3}{2} + 5 \Rightarrow \boxed{a_6 = \frac{13}{2}}$$

51. De una progresión aritmética sabemos que el segundo término es 7 y el octavo es 47. Calcula el valor de la diferencia, el primer término y el término vigésimo primero.

52. Consideremos la progresión aritmética siguiente:

$$-3, -\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}...$$

La suma de sus n primeros términos es 63. ¿De cuántos términos estamos hablando? Calcula el término noveno de dicha progresión.

53. Calcula tres números que están en progresión aritmética sabiendo que su suma es 48 y la diferencia del tercero y el primero es dos veces el segundo.

54. Calcula la suma de los múltiplos de 7 de tres cifras.

55. Calcula la suma de los n primeros números impares.

56. La suma de los 30 primeros términos de una progresión aritmética es 1 415 y el sexto término es $\frac{56}{3}$. Calcula la diferencia y el primer término.

57. La siguiente progresión aritmética 3, 7, 11... consta de 50 términos. Calcula su suma.

58. La suma de los términos que ocupan los lugares pares de una progresión aritmética es $\frac{413}{3}$ y la suma de los términos que ocupan los lugares impares es $\frac{472}{3}$.

Calcula el número de términos de la sucesión, sabiendo que este es un número impar. Calcula también el término central de la sucesión.

59. El primer término de una progresión aritmética es 0'2 y su último término es 4'4. Si la suma de sus n primeros términos es 34'5, con n finito, calcula cuánto vale el término a_7.

60. De una progresión aritmética sabemos que la suma de a_3 y a_4 es 4 y que el término a_{11} excede en 2 unidades al término a_8. Calcula la suma de sus primeros 12 términos.

61. Encuentra tres números en progresión aritmética sabiendo que su suma es 2 y su producto es $-\frac{8}{9}$.

62. Escribe todos los términos de una progresión aritmética formada por ocho términos, sabiendo que su suma es 21 y que el séptimo término es cinco veces el término cuarto.

63. Sabemos que la suma de tres términos consecutivos de una progresión aritmética es 9 y que su producto es –48. Calcula dichos números.

64. Calcula la suma de los 20 primeros números impares, excepto los múltiplos de 5.

Progresiones geométricas

65. Indica cuál de las siguientes progresiones es una progresión geométrica y, en este caso, indica su razón:

a) $\frac{1}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}, 2, 2\sqrt{10}, 20...$

b) $ab,\ 2a^2b,\ 4a^3b,\ 8a^4b...$

c) $8ax,\ 16a^2x,\ 24a^4x^2,\ 32a^5x^4...$

d) $5a,\ 10a^2b,\ 15a^2b,\ 20a^3b...$

66. Dadas las siguientes progresiones geométricas calcula la razón de cada una de ellas:

a) 2, 6, 18, 54...

b) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{32}...$

c) $\sqrt{2},\ 4,\ 8\sqrt{2},\ 32...$

d) $x,\ \sqrt{2},\ \frac{2}{x},\ \frac{2\sqrt{2}}{x^2}...$

67. Calcula el décimo término de las progresiones del ejercicio anterior.

68. Dada las siguientes progresiones geométricas, di cuál es el término a_{10} correspondiente:

a) 4, 12, 36, 108...

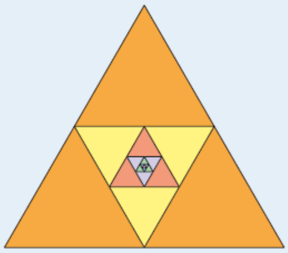
b) 3, 15, 75, 375, 1875...

c) $7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}...$

69. Escribe una progresión geométrica creciente y otra decreciente.

70. De una progresión geométrica conocemos $a_2 = 3$ y $a_4 = \frac{27}{4}$. Calcula a_6.

71. En un triángulo equilátero de $3\sqrt[4]{3}$ cm de lado unimos los puntos medios de los lados obteniendo otro triángulo equilátero. Si repetimos la operación indefinidamente obtenemos una sucesión de triángulos encajados. Calcula la suma de las áreas de dichos triángulos.



72. De una progresión geométrica sabemos que su razón es 25 y su quinto término es 12 500. Calcula el primer término de dicha sucesión.

73. De una progresión geométrica conocemos $a_3 = 12$ y $a_7 = 192$. Calcula su razón y su décimo término.

51.

$$\begin{cases} a_2 = 7 \Rightarrow a_1 + d = 7 \\ a_8 = 47 \Rightarrow a_1 + 7d = 47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{a_1} - d = -7 \\ \cancel{a_1} + 7d = 47 \end{cases}$$

$$6d = 40 \Rightarrow d = \frac{20}{3}$$

$$a_1 = 7 - d \Rightarrow a_1 = 7 - \frac{20}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

$$a_{21} = a_1 + 20d \Rightarrow a_{21} = \frac{1}{3} + \frac{400}{3} \Rightarrow a_{21} = \frac{401}{3}$$

52.

$$a_1 = -3\ ,\ d = 0 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{d = \frac{3}{2}}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_n = -3 + \frac{3}{2}(n-1) \Rightarrow \boxed{a_n = -\frac{9}{2} + \frac{3}{2}n}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow 63 = \frac{-3 - \frac{9}{2} + \frac{3}{2}n}{2} \cdot n \Rightarrow n^2 - 5n - 84 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 12 \\ n = -7 \end{cases}$$

La respuesta n = - 7 no tiene sentido.

$$a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow a_9 = -3 + 8 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{a_9 = 9}$$

Solución: estamos hablando de 9 términos, $\boxed{a_9 = 9}$

53.

Sean a_1 , $a_1 + d$, $a_1 + 2d$ los números buscados.

Como su suma es 48 $\Rightarrow$ $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 48 \Rightarrow 3a_1 + 3d = 48 \Rightarrow a_1 + d = 16$

El tercero menos el primero es dos veces el segundo

$\Rightarrow (a_1 + 2d) - a_1 = 2(a_1 + d) \Rightarrow 2d = 2a_1 + 2d \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$, $\boxed{d = 16}$

Solución : Los números son : 0 , 16 , 32

54.

$a_1 = 105$, $a_1 = 7 \cdot 15$,

994 = 7 · 142 $\Rightarrow$ la progresión tiene 142 – 14 = 128 términos $\Rightarrow$ $\boxed{n = 128}$

El último término de la sucesión es $\boxed{a_{128} = 994}$

$$S_{128} = \frac{a_1 + a_{128}}{2} \cdot 128 = \frac{105 + 994}{2} \cdot 128 = 70336$$

55.

$a_1 = 1$, d = 2

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow \boxed{a_n = 2n - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n \Rightarrow \boxed{S_n = n^2}$$

56.

$$S_{30}=\frac{a_1+a_{30}}{2}\cdot 30\Rightarrow 1415=(a_1+a_{30})\cdot 15\Rightarrow a_1+a_{30}=\frac{283}{3}\Rightarrow a_1+a_1+29d=\frac{283}{3}\Rightarrow$$

$$2a_1+29d=\frac{283}{3}$$

$$a_6=\frac{56}{3}\Rightarrow a_1+5d=\frac{56}{3}\Rightarrow -2a_1-10d=-\frac{112}{3}$$

$$\begin{cases}\cancel{2a_1}+29d=\dfrac{283}{3}\\ -\cancel{2a_1}-10d=-\dfrac{112}{3}\end{cases}$$

$$19d=\frac{171}{3}\Rightarrow 19d=57\Rightarrow \boxed{d=3}$$

$$a_1+5d=\frac{56}{3}\Rightarrow a_1=\frac{56}{3}-15\Rightarrow \boxed{a_1=\frac{11}{3}}$$

57.

$a_1=3$, d = 4

$$a_{50}=a_1+49d\Rightarrow a_{50}=3+49\cdot 4\Rightarrow \boxed{a_{50}=199}$$

$$S_{50}=\frac{a_1+a_{50}}{2}\cdot 50\Rightarrow S_{50}=\frac{3+199}{2}\cdot 50\Rightarrow \boxed{S_{50}=5050}$$

58.

Tenemos que $S_n=\frac{413}{3}+\frac{472}{3}\Rightarrow S_n=295$

Sea a_c el término central $\Rightarrow a_c=\frac{472}{3}-\frac{413}{3}\Longrightarrow a_c=\frac{59}{3}$

$$a_c+a_c=a_1+a_n\Rightarrow 2\cdot\frac{59}{3}=a_1+a_n\Rightarrow a_1+a_n=\frac{118}{3}$$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n\Rightarrow 295=\frac{\frac{118}{3}}{2}\cdot n\Rightarrow \boxed{n=15}$$

Solución: La sucesión tiene 15 términos y el término central es $\frac{59}{3}$

59.

$a_1=0'2$, $a_n=4'4$

$$S_n=34'5\Rightarrow \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=34'5\Rightarrow (a_1+a_n)\cdot n=69\Rightarrow 4'6\cdot n=69\Rightarrow \boxed{n=15}$$

$$a_{15}=4'4\Rightarrow a_1+14d=4'4\Rightarrow 14d=4'4-a_1\Rightarrow d=\frac{4'2}{14}\Rightarrow \boxed{d=0'3}$$

$$a_7=a_1+6d\Rightarrow a_7=0'2+6\cdot 0'3\Rightarrow \boxed{a_7=2}$$

60.

$$\begin{cases} a_3 + a_4 = 4 \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 3d = 4 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 4 \\ a_{11} = a_8 + 2 \Rightarrow a_1 + 10d - \left(a_1 + 7d\right) = 2 \Rightarrow 3d = 2 \Rightarrow \boxed{d = \dfrac{2}{3}} \end{cases}$$

$$2a_1 + 5d = 4 \Rightarrow 2a_1 + \frac{10}{3} = 4 \Rightarrow 2a_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{1}{3}}$$

$$a_{12} = a_1 + 11d \Rightarrow a_{12} = \frac{1}{3} + \frac{22}{3} \Rightarrow \boxed{a_{12} = \frac{23}{3}}$$

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 \Rightarrow S_{12} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{23}{3}}{2} \cdot 12 \Rightarrow \boxed{S_{12} = 48}$$

61.

Sean los números buscados: $a_1 - d$, a_1 , $a_1 + d$

$$\sum = 2 \Rightarrow a_1 - d + a_1 + a_1 + d = 2 \Rightarrow 3a_1 = 2 \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{2}{3}}$$

$$P = -\frac{8}{9} \Rightarrow \left(a_1 - d\right) \cdot a_1 \cdot \left(a_1 + d\right) = -\frac{8}{9} \Rightarrow \frac{4}{9} - d^2 = -\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow d^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow \boxed{d = \pm\frac{4}{3}}$$

Solución: En cualquiera de los dos casos los números buscados son: $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2$

62.

$$\left.\begin{array}{l} S_8 = 21 \Rightarrow \dfrac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = 21 \Rightarrow a_1 + a_1 + 7d = \dfrac{21}{4} \Rightarrow 2a_1 + 7d = \dfrac{21}{4} \Rightarrow 8a_1 = 21 - 28d \\ a_7 = 5a_4 \Rightarrow a_1 + 6d = 5 \cdot \left(a_1 + 3d\right) \Rightarrow 4a_1 + 9d = 0 \Rightarrow 8a_1 = -18d \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$21 - 28d = -18d \Rightarrow 21 = 10d \Rightarrow \boxed{d = \frac{21}{10}}$$

$$a_1 = -\frac{9}{4} \cdot \frac{21}{10} \Rightarrow \boxed{a_1 = -\frac{189}{40}}$$

$$a_2 = -\frac{21}{8}, a_3 = -\frac{21}{40},\ a_4 = \frac{63}{40}, a_5 = \frac{147}{40},\ a_6 = \frac{231}{40},\ a_7 = \frac{63}{8},\ a_8 = \frac{399}{40}$$

63.

$$\sum = 9 \Rightarrow a_1 - d + a_1 + a_1 + d = 9 \Rightarrow 3a_1 = 9 \Rightarrow \boxed{a_1 = 3}$$

$$P = -48 \Rightarrow \left(a_1 - d\right) \cdot a_1 \cdot \left(a_1 + d\right) = -48 \Rightarrow 9 - d^2 = -16 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow \boxed{d = \pm 5}$$

Solución: En cualquiera de los dos casos los números buscados son : - 2 , 3 , 8

64.

Tenemos que calcular la suma de los 20 primeros números impares S_{20}, menos los múltiplos de 5 comprendidos entre ellos. Si llamamos $\left\langle \dot{5} \right\rangle = \left\{5, 15, 25, 35\right\}$ a dichos números y $\sum\langle\dot{5}\rangle$ a su suma, tenemos que calcular S_{20} - $\sum\langle\dot{5}\rangle$

Para calcular S_{20} nos damos cuenta que d = 2 , $a_1 = 1$,

$$a_{20} = a_1 + 19d \Rightarrow a_{20} = 1 + 19\cdot 2 \Rightarrow \boxed{a_{20} = 39}$$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2}\cdot 20 \Rightarrow \boxed{S_{20} = 400}$$

$$\sum\langle\dot{5}\rangle = 5 + 15 + 25 + 35 \Rightarrow \boxed{\sum\langle\dot{5}\rangle = 80}$$

$$S_{20} - \sum\langle\dot{5}\rangle = 400 - 80 \Rightarrow \boxed{S_{20} - \sum\langle\dot{5}\rangle = 320}$$

65.

a) Sí es una progresión geométrica de razón r = $\sqrt{10}$

b) Si es una progresión geométrica de razón r = $2a$

c) No es una progresión geométrica

d) No es una progresión geométrica

66.

a) r = 3

b) r = $\frac{3}{4}$

c) r = $2\sqrt{2}$

d) r = $\frac{\sqrt{2}}{x}$

67.

a) $a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = 2\cdot 3^9 \Rightarrow a_{10} = 39366$

b) $a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9 \Rightarrow a_{10} = \frac{3^8}{2^{17}}$

c) $a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = \sqrt{2}\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^9 \Rightarrow a_{10} = 2^{14}$

d) $a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = x\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^9 \Rightarrow a_{10} = \frac{16\sqrt{2}}{x^8}$

68.

a) r = 3 , $a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = 4\cdot 3^9$

b) r = 5 , $a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = 3\cdot 5^9$

c) r = $\frac{1}{2}$, $a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = 7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9$

69.

Creciente: 2, 6, 18, 54,...

Decreciente : 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, . . .

70.

$$a_2 = 3 \;,\; a_4 = \frac{27}{4} \;,$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 = (a_1 \cdot r) \cdot r^2 \Rightarrow a_4 = a_2 \cdot r^2 \Rightarrow \frac{27}{4} = 3 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \boxed{r = \frac{3}{2}}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{r} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{3/2} \Rightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 \Rightarrow a_6 = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 \Rightarrow \boxed{a_6 = \frac{3^5}{2^4}}$$

Si $r = -\frac{3}{2} \Rightarrow a_1 = -2,\; a_6 = -\frac{3^5}{2^4}$

71.

Se trata de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, cuyo primer término es el área del triángulo inicial y la razón es $r = \frac{1}{4}$. Sea x la longitud del lado del triángulo.

$$A_1 = \frac{base.altura}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x}{2} \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}}$$

La sucesión de las áreas es la siguiente: $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}, \frac{x^2\sqrt{3}}{16}, \frac{x^2\sqrt{3}}{64}, \ldots$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{3}\; cm^2$$

En nuestro caso: $S_\infty = \frac{\left(3\sqrt[4]{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{3} = 9\; cm^2$

72.

$$r = 25 \;,\; a_5 = 12500$$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow a_1 = \frac{a_5}{r^4} \Rightarrow a_1 = \frac{12500}{25^4} \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{4}{125}}$$

73.

$$a_3 = 12 \;,\; a_7 = 192$$

$$\begin{cases} a_7 = 192 \Rightarrow a_1 \cdot r^6 = 192 \\ a_3 = 12 \Rightarrow a_1 \cdot r^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 \cdot r^6}{a_1 \cdot r^2} = \frac{192}{12} \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow \boxed{r = 2}$$

$$a_1 \cdot r^2 = 12 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{r^2} \Rightarrow a_1 = \frac{12}{2^2} \Rightarrow \boxed{a_1 = 3}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = 3 \cdot 2^9 = 1536$$

○ **74.** Calcula la suma de los términos que aparecen en las siguientes progresiones geométricas:

a) 3, 9, 27, 81, 243

b) $\frac{1}{4}$, 1, 4, 16, 64

c) 0'25, 1'25, 6'25, 31'25

d) $x - 3y$, $2x - 6y$, $4x - 12y$, $8x - 24y$, $16x - 48y$

◐ **75.** El noveno término de una progresión geométrica es 1 280 y su razón es 2. Calcula a_5 y la suma S_5 de dichos términos.

◐ **76.** Calcula tres números que se encuentren en progresión geométrica sabiendo que su producto es 3 375 y su suma es 65.

● **77.** La suma de los términos tercero y cuarto de una progresión geométrica es 180. Si sumamos los términos quinto y sexto resulta 45. Calcula la suma de los seis primeros términos de la progresión.

◐ **78.** Queremos calcular el segundo término de una progresión geométrica de la que sabemos que su razón es 3 y su quinto término es 567.

● **79.** Dada una progresión geométrica, sabemos que el término segundo es dos veces la razón y el cociente entre el cuarto término y el tercero es 3. Calcula la suma de los seis primeros términos de dicha progresión.

● **80.** Calcula la fracción generatriz de las siguientes expresiones decimales periódicas puras utilizando sumas de progresiones geométricas:

a) $0'\overset{\frown}{2}$ b) $0'\overset{\frown}{18}$ c) $0'\overset{\frown}{27}$ d) $0'\overset{\frown}{36}$

○ **81.** Calcula la suma de las siguientes progresiones formadas por infinitos términos:

a) $27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

b) $0'07 + 0'007 + 0'0007 + 0'00007 + \dots$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{16}{9} + \dots$

d) $2'15 + 1'075 + 0'5375 + 0'26875 + \dots$

○ **82.** Suma los términos de la siguiente progresión geométrica de infinitos términos:

$$\frac{125}{2},\ 25,\ 10,\ 4,\ \frac{8}{5}\dots$$

● **83.** Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos mixtos utilizando sumas de progresiones geométricas:

a) $0'2\overset{\frown}{6}$ b) $1'1\overset{\frown}{6}$ c) $0'41\overset{\frown}{6}$ d) $0'22\overset{\frown}{72}$

● **84.** Calcula la fracción generatriz de $6'\overset{\frown}{2}$ y de $2'5\overset{\frown}{4}$ utilizando sumas de progresiones geométricas.

● **85.** Calcula la fracción generatriz de 5'2121212121... utilizando sumas de progresiones geométricas.

◐ **86.** La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 256. Calcula el octavo término sabiendo que el segundo término es 64.

● **87.** Interpola entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{9}{4}x^3$ dos medios geométricos proporcionales.

○ **88.** Calcula la suma de las cinco primeras potencias de 3.

PROBLEMAS

◐ **89.** Calcula tres números que se encuentren en progresión geométrica, sabiendo que su suma es 84 y su producto es 13 824.

◐ **90.** Sean tres números tales que el segundo es 14 unidades mayor que el primero y el tercero es 42 unidades mayor que el segundo. Calcula dichos números sabiendo que se encuentran en progresión geométrica.

● **91.** Un chico cuenta una historia a tres amigos, los cuales a los cinco minutos ya se lo han contado a otros 3 amigos cada uno. Si se repite la misma operación indefinidamente, ¿cuánto tiempo tardarán en saber el secreto en un instituto de 1 093 alumnos?

74.

a) r = 3 , $S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \dfrac{243 \cdot 3 - 3}{3-1} \Rightarrow S_5 = \dfrac{243 \cdot 3 - 3}{3-1} \Rightarrow \boxed{S_5 = 363}$

b) $r = 4$, $S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \dfrac{a_5 \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \dfrac{64 \cdot 4 - \frac{1}{4}}{4-1} \Rightarrow \boxed{S_5 = \dfrac{341}{4}}$

c) r = 5 , $S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \frac{31'25 \cdot 5 - 0'25}{5-1} \Rightarrow \boxed{S_5 = 39}$

d) r = 2 , $S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \frac{(16x - 48y) \cdot 2 - (x - 3y)}{2-1} \Rightarrow \boxed{S_5 = 31x - 93y}$

75.

r = 2

$a_9 = 1280 \Rightarrow a_1 \cdot r^8 = 1280 \Rightarrow a_1 = \frac{1280}{r^8} \Rightarrow a_1 = \frac{1280}{2^8} \Rightarrow \boxed{a_1 = 5}$

$a_5 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow a_5 = 5 \cdot 2^4 \Rightarrow \boxed{a_5 = 80}$

$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \frac{80 \cdot 2 - 5}{2-1} \Rightarrow \boxed{S_5 = 155}$

76.

Sean $\frac{a_1}{r}, a_1, a_1 \cdot r$ los números buscados

$P = 3375 \Rightarrow a_1^3 = 3375 \Rightarrow \boxed{a_1 = 15}$

$S = 65 \Rightarrow \frac{a_1}{r} + a_1 + a_1 \cdot r = 65 \Rightarrow a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 = 65r \Rightarrow 15 + 15r + 15r^2 - 65r = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15r^2 - 50r + 15 = 0 \Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{3} \\ r = 3 \end{cases}$

Solución: Los números buscados son: 5 , 15 , 45

77.

$$\left. \begin{array}{l} a_3 + a_4 = 180 \Rightarrow a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 = 180 \Rightarrow a_1 r^2 (1 + r) = 180 \\ a_5 + a_6 = 45 \Rightarrow a_1 \cdot r^4 + a_1 \cdot r^5 = 45 \Rightarrow a_1 r^4 (1 + r) = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{a_1} r^2 \cancel{(1+r)}}{\cancel{a_1} r^4 \cancel{(1+r)}} = \frac{180}{45} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = 4 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{2}}$$

Sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones obtenemos $\boxed{a_1 = 480}$

$a_6 = a_1 \cdot r^5 \Rightarrow a_6 = \frac{480}{2^5} \Rightarrow \boxed{a_6 = 15}$

$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_6 = \frac{15 \cdot \frac{1}{2} - 480}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow \boxed{S_6 = 945}$

78.

r = 3

$a_5 = 567 \Rightarrow a_1 \cdot r^4 = 567 \Rightarrow a_1 = \frac{567}{r^4} \Rightarrow a_1 = \frac{567}{81} \Rightarrow \boxed{a_1 = 7}$

Solución : $a_2 = a_1 \cdot r \Rightarrow \boxed{a_2 = 21}$

79.

$$a_2 = 2r \Rightarrow a_1 \cdot r = 2r \Rightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = 3 \Longrightarrow \frac{a_1 \cdot r^3}{a_1 \cdot r^2} = 3 \Longrightarrow r = 3$$

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 \Rightarrow a_6 = 2 \cdot 3^5 \Rightarrow \boxed{a_6 = 486}$$

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_6 = \frac{486 \cdot 3 - 2}{3-1} \Rightarrow \boxed{S_6 = 728}$$

80.

a)

$$N = 0'222\ldots = 0'2 + 0'02 + 0'002 + \ldots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{2}{10}$, $r = \frac{1}{10}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{2}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2}{9}}$$

b)

$$N = 0'1818\ldots = 0'18 + 0'0018 + \ldots = \frac{18}{100} + \frac{18}{10000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{18}{100}$, $r = \frac{1}{100}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{18}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{18}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{18}{99} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2}{11}}$$

c)

$$N = 0'2727\ldots = 0'27 + 0'0027 + \ldots = \frac{27}{100} + \frac{27}{10000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{27}{100}$, $r = \frac{1}{100}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{27}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{27}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{27}{99} \Rightarrow \boxed{N = \frac{3}{11}}$$

d)

$$N = 0'3636\ldots = 0'36 + 0'0036 + \ldots = \frac{36}{100} + \frac{36}{10000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{36}{100}$, $r = \frac{1}{100}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{36}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{36}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{36}{99} \Rightarrow \boxed{N = \frac{4}{11}}$$

81.

a) $a_1 = 27$, $r = \frac{1}{3}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow S_\infty = \frac{27}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{81}{2}}$$

b) $a_1 = \frac{7}{100}$, $r = \frac{1}{10}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow S_\infty = \frac{\frac{7}{100}}{1-\frac{1}{100}} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{7}{99}}$$

c) $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow S_\infty = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{2}{\sqrt{3}}} \Rightarrow S_\infty = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{3}{2\left(\sqrt{3}-2\right)}}$$

d) $a_1 = 2'15$, $r = \frac{1}{2}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow S_\infty = \frac{2'15}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_\infty = \frac{2'15}{0'5} \Rightarrow \boxed{S_\infty = 4'3}$$

82.

$r = \frac{2}{5}$, $a_1 = \frac{125}{2}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow S_\infty = \frac{\frac{125}{2}}{1-\frac{2}{5}} \Rightarrow\Rightarrow S_\infty = \frac{\frac{125}{2}}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{625}{6}}$$

83.

a) $N = 0'2666\ldots = 0'2 + 0'06 + 0'006 + \ldots = 0'2 + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots$

Se trata de la suma de 0'2 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{6}{100}$, $r = \frac{1}{10}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{6}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{15} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{1}{15}}$$

$$N = 0'2 + \frac{1}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{3+1}{15} \Rightarrow \boxed{N = \frac{4}{15}}$$

b) $N = 1'1666\ldots = 1'1 + 0'06 + 0'006 + \ldots = 1'1 + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots$

Se trata de la suma de 1'1 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{6}{100}$, $r = \frac{1}{10}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{6}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{15} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{1}{15}}$$

$$N = 1'1 + \frac{1}{15} = \frac{11}{10} + \frac{1}{15} = \frac{33+2}{30} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6} \qquad \boxed{N = \frac{7}{6}}$$

c) $N = 0'41666\ldots = 0'41 + 0'006 + 0'0006 + \ldots = 0'41 + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} + \ldots$

Se trata de la suma de 0'41 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{6}{1000}$, $r = \frac{1}{10}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{6}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{1000}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{150} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{1}{150}}$$

$$N = 0'41 + \frac{1}{150} = \frac{41}{100} + \frac{1}{150} = \frac{125}{300} \Rightarrow \boxed{N = \frac{5}{12}}$$

d) $N = 0'227272\ldots = 0'22 + 0'0072 + 0'000072 + \ldots = 0'22 + \frac{72}{10000} + \frac{72}{1000000} + \ldots$ Se trata de la suma de 0'22 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{72}{10000}$, $r = \frac{1}{100}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{72}{10000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{72}{10000}}{\frac{99}{100}} = \frac{2}{275} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{2}{275}}$$

$$N = 0'22 + \frac{2}{275} = \frac{22}{100} + \frac{2}{275} \Rightarrow \boxed{N = \frac{5}{22}}$$

84.

a)

$$6'\widehat{2} = 6'222\ldots = 6 + 0'222\ldots$$

$$N = 0'222\ldots = 0'2 + 0'02 + 0'002 + \ldots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{2}{10}$, $r = \frac{1}{10}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2}{9}}$$

$$6'\widehat{2} = 6 + \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{6'\widehat{2} = \frac{56}{9}}$$

b)

$$2'5\widehat{4} = 2'5444\ldots = 2'5 + 0'0444\ldots$$

$$N = 0'0444\ldots = 0'04 + 0'004 + \ldots = \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{4}{100}$, $r = \frac{1}{10}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{4}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{4}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{45} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2}{45}}$$

$$2'5\widehat{4} = 2'5 + \frac{2}{45} = \frac{25}{10} + \frac{2}{45} \Rightarrow \boxed{2'5\widehat{4} = \frac{229}{90}}$$

85.

$$5'212121\ldots. = 5 + 0'21 + 0'0021 + \cdots$$

$$N = 0'2121\ldots = 0'21 + 0'0021 + \ldots = \frac{21}{100} + \frac{21}{10000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{21}{100}$, $r = \frac{1}{100}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{21}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{21}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{21}{99} \Rightarrow \boxed{N = \frac{7}{33}}$$

$$5'212121\ldots. = 5 + 0'21 + 0'0021 + \cdots = 5 + \frac{7}{33} = \frac{172}{33}$$

86.

$$a_2 = 64 \Rightarrow a_1 \cdot r = 64 \Rightarrow a_1 = \frac{64}{r}$$

$$S_\infty = 256 \Rightarrow \frac{a_1}{1-r} = 256 \Rightarrow \frac{64}{r} = 256(1-r) \Rightarrow 256r^2 - 256r + 64 = 0 \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{2}}$$

$$a_1 = \frac{64}{r} \Rightarrow \boxed{a_1 = 128}$$

$$a_8 = a_1 \cdot r^7 \Rightarrow a_8 = \frac{128}{2^7} \Rightarrow \boxed{a_8 = 1}$$

87.

Construimos la siguiente progresión: $\frac{2}{3}$, a_2 , a_3 , $\frac{9}{4}x^3$

n = 4 , $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{9}{4}x^3$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{a_4}{a_1}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{\frac{9}{4}x^3}{\frac{2}{3}}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{27x^3}{8}} \Rightarrow \boxed{r = \frac{3x}{2}}$$

Solución: los números buscados son: x , $\frac{3}{2}x^2$

88.

Se trata de una progresión geométrica en la que $r = 3$, $a_1 = 3$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow a_5 = 3 \cdot 3^4 \Rightarrow a_5 = 243$$

$$S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \frac{243 \cdot 3 - 3}{3-1} = 363$$

89.

$$P = 13824 \Rightarrow \frac{a_1}{r} \cdot a_1 \cdot a_1 r = 13824 \Rightarrow a_1^3 = 13824 \Rightarrow \boxed{a_1 = 24}$$

$$S = 84 \Rightarrow \frac{a_1}{r} + a_1 + a_1 r = 84 \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ r = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Solución: los números buscados son: 12, 24, 48

90.

Sean a_1, a_2 , a_3 los números buscados.

$$\left.\begin{cases} a_2 = 14 + a_1 \Rightarrow a_2 \cdot r = 14 \cdot r + a_1 \cdot r \\ a_3 = 42 + a_2 \Rightarrow a_2 \cdot r = 42 + a_2 \end{cases}\right. \Rightarrow 14r + a_1 r = 42 + a_1 r \Rightarrow 14r = 42 \Rightarrow \boxed{r = 3}$$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= 14 + a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot r \Rightarrow a_2 = 3a_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 14 + a_1 = 3a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 7}$$

Solución: los números buscados son: 7 , 21 , 63

91.

Se trata de una progresión geométrica de n términos en la que :

$a_1 = 1 = 3^0$, r = 3

La progresión es: $1, 3, 3^2, 3^3 ...$

La suma de los términos de la progresión es 1093.

$$S_n = 1093 \Rightarrow \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = 1093 \Rightarrow \frac{a_n \cdot 3 - 1}{3-1} = 1093$$

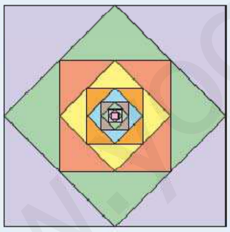
$$\Rightarrow a_n = 729 \Rightarrow a_1 \cdot r^n = 729 \Rightarrow 3^n = 3^6 \Rightarrow \boxed{n=6}$$

La progresión consta de los términos: $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$

Solución: Al cabo de 5 ·6 = 30 minutos saben la historia los 1093 alumnos del instituto.

92. Una célula se duplica al cabo de 5 min, volviéndose a duplicar cada una de las células resultantes cada 5 min y así indefinidamente. ¿Cuánto tiempo se tardará en obtener 2 048 células?

93. Dado un cuadrado de $\sqrt{2}$ cm de lado, inscribimos dentro de él otro cuadrado formado al unir los puntos medios de sus lados. A continuación unimos los puntos medios del segundo cuadrado, construyendo así un tercer cuadrado. Repetimos la operación indefinidamente. Calcula la suma de las áreas de todos los cuadrados así construidos.



94. Calcula la longitud de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que su suma es 48 y que se encuentran en progresión aritmética.

95. En un campamento de verano hay 7 niños. Al año siguiente acuden al mismo campamento 10 niños más y cada año acuden 10 niños nuevos.
En el campamento de al lado sólo hay 2 niños, pero el segundo año llegan 4 niños nuevos. El tercer año se matriculan los mismos niños que había el año anterior y se incorporan niños nuevos, exactamente el doble de los que se incorporaron nuevos el año anterior, y así sucesivamente, de tal forma que cada año los niños nuevos son el doble de los que se incorporaron nuevos el año anterior. Calcula cuántos niños hay en cada campamento al cabo de 9 años.

96. Un señor hace cuatro apuestas en las carreras de caballos. En la primera apuesta gana 100 €. Si en cada apuesta duplica el valor de la anterior y gana consecutivamente las cuatro primeras apuestas ¿cuánto gana en la cuarta apuesta? Si en la quinta apuesta juega todas las ganancias anteriores y las pierde, ¿cuánto perdió al final?

92.

Se trata de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1$, r = 2,

$$a_n = 2048 \Rightarrow a_1 \cdot r^n = 2048 \Rightarrow 2^n = 2048 \Rightarrow 2^n = 2^{11} \Rightarrow n = 11$$

En la duplicación número 11, se obtienen las 2048 células. Como cada duplicación tarda 5 minutos, el tiempo empleado es 5·11= 55 minutos

93.

Se trata de la suma de las áreas de los infinitos cuadrados que se forman de la manera indicada.

Sea l_1 el lado del cuadrado inicial y A_1 el área correspondiente; l_2 el lado del segundo cuadrado y A_2 el área correspondiente, y así sucesivamente.
La progresión de las áreas es la siguiente:

$$A_1 = l_1^2$$
$$A_2 = l_2^2 = \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}l_1^2$$
$$A_3 = l_3^2 = \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}l_2^2 = \frac{1}{4}l_1^2 = \frac{1}{2^2}l_1^2$$
$$A_4 = l_4^2 = \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}l_3^2 = \frac{1}{8}l_1^2 = \frac{1}{2^3}l_1^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = \frac{1}{2^{n-1}}l_1^2$$

Las áreas forman una progresión geométrica en la que $a_1 = l_1^2$, $r = \frac{1}{2}$

Su suma es: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{l_1^2}{1-\frac{1}{2}} = 2l_1^2$

En nuestro caso, $S_\infty = 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{S_\infty = 4 \quad cm^2}$

94.
Sean $a-d$, a, $a+d$ las longitudes de los lados del triángulo rectángulo
Por el Teorema de Pitágoras sabemos que:

$$\left(a+d\right)^2 = \left(a-d\right)^2 + a^2 \Rightarrow \boxed{d = \frac{a}{4}}$$
$$S = 48 \Rightarrow 3a = 48 \Rightarrow \boxed{a = 16} \Rightarrow d = 4$$

Solución: las medidas de los dos catetos son 12 cm y 16 cm y , la hipotenusa mide 20 cm

95.
Leyendo cuidadosamente el enunciado tenemos:
"*En un campamento de verano hay 7 niños. Al año siguiente acuden al mismo campamento 10 niños más y cada año acuden 10 niños nuevos.*

En este caso tenemos una progresión aritmética de 9 términos, en la que $a_1 = 7$, d = 10, n = 9
Tenemos que calcular el término a_9.

$$a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow a_9 = 7 + 8\cdot 10 \Rightarrow \boxed{a_9 = 87}$$

La progresión es la siguiente : 7 , 17 , 27 , 37 , ... , 87

En el campamento de al lado sólo hay 2 niños, pero al cabo de un año llegan 4 nuevos niños. Al año siguiente se matriculan en el campamento los mismos niños que había el año anterior a los que además se incorporan el doble de los que se incorporaron nuevos el año anterior, y así sucesivamente. Calcula cuántos niños hay en cada campamento al cabo de 9 años."

En el primer año son $a_1 = 2$ niños

En el segundo año son $a_2 = a_1 + 2^2 = 2 + 2^2$ niños

En el tercer año son $a_3 = a_2 + 2^3 = a_3 = 2 + 2^2 + 2^3$ niños

....

En el noveno año son $a_9 = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9$ niños

$$2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9 = \frac{2^9 \cdot 2 - 2}{2 - 1} = 1022 \Rightarrow \boxed{a_9 = 1022}$$

Solución: Al cabo de nueve años en el primer campamento hay 87 niños y en el segundo campamento 1022 niños.

96.

Apuesta	Gana	Pierde
Primera	100 €	**0**
Segunda	200 €	**0**
Tercera	400 €	**0**
Cuarta	**800 €**	**0**
Quinta	**0 €**	**800 + 400 + 200 + 100** = 1500 €

AUTOEVALUACIÓN PAG. 135

AUTOEVALUACIÓN

1. De una progresión aritmética se sabe que $a_5 = 2$ y $a_8 = 8$. Con estos datos calcula a_{51}.

2. Interpola cinco medios aritméticos entre 3 y 27.

3. Una persona compra un coche a plazos. El primer mes paga 360 €, el segundo mes 390 €, el tercer mes 420 € y así sucesivamente. Si el último mes pagó 930 €, ¿cuántos meses estuvo pagando el coche?

4. Un niño que está jugando en la playa ha dispuesto en línea recta seis conchas separadas entre sí 2 m. Intenta llenar de agua las seis conchas cogiendo el agua del mar y llevándola entre sus manos. Si en cada viaje solo puede coger el agua necesaria para llenar una concha y suponiendo que no se le caiga, ¿cuántos metros tendrá que caminar si la primera concha está a 15 m de la orilla? Supón que el niño inicia sus viajes desde la orilla.

5. Calcula la suma de los n primeros números pares.

6. De una progresión geométrica se conocen $a_2 = 39$ y $a_4 = 6591$. Calcula a_1, a_3 y la suma de los cuatro términos de la progresión.

7. Interpola tres medios geométricos entre $\frac{2}{5}$ y 10.

8. El volumen de un prisma de base rectangular es 1 728 m³. Calcula la medida de sus aristas sabiendo que están en progresión geométrica y que su suma vale 63 m.

9. Calcula la fracción generatriz de $3,\overset{\frown}{46}$ utilizando sumas de progresiones geométricas.

10. Un niño decide coleccionar canicas y su padre le regala un día 1 canica, al día siguiente 3 canicas y el siguiente día le da 9 canicas, y así sucesivamente ¿Cuántas canicas tendrá el niño al cabo de 10 días?

Sucesiones y progresiones 135

1.

$$\left.\begin{array}{l} a_5 = 2 \Rightarrow a_1 + 4d = 2 \\ a_8 = 8 \Rightarrow a_1 + 7d = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow 3d = 6 \Rightarrow \boxed{d = 2} \Rightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$a_{51} = a_1 + 50d \Rightarrow a_{51} = -6 + 50 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{a_{51} = 94}$$

2.

Construimos la siguiente progresión: $3, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, 27$

$n = 7$, $a_1 = 3$, $a_7 = 27$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{27-3}{7-1} \Rightarrow d = 4$$

Solución: Los números buscados son: 7 , 11 , 15 , 19 , 23

3.

Se trata de una progresión aritmética: 360, 390, 420 ..., 930 en la que $a_1 = 360$, d = 30 .Tenemos que calcular el número n de términos.

$$a_n = 930 \Rightarrow a_1 + (n-1)\cdot d = 930 \Rightarrow 360 + (n-1)\cdot 30 = 930 \Rightarrow \boxed{n = 20}$$

Solución: Tardó 20 meses en pagar el coche.

4.

Para llenar de agua las cinco primeras conchas, todos los trayectos que hace son de ida y vuelta.

Sean a_1 el trayecto de ida desde la orilla a la 1ª concha y a_5 el trayecto desde la orilla a la 5ª concha.

$$a_1 = 15 \text{ m} \text{ y } a_5 = 15 + 2\cdot 4 = 23 \text{ m}$$

Como el trayecto es de ida y vuelta:

$$S_5 = 2\cdot\frac{(a_1 + a_5)\cdot 5}{2} \Rightarrow S_5 = (a_1 + a_5)\cdot 5 \Rightarrow S_5 = \left[15 + (15 + 2\cdot 4)\right]\cdot 5 \Rightarrow S_5 = 190$$

Para llenar la sexta concha sólo hace el camino de ida (desde la orilla hasta la 6ª concha)

$$a_6 = 15 + 2\cdot 5 = 25 \text{ m}$$

Solución: Recorre 190 + 25 =215 m

5.

Se trata de calcular la suma de los n primeros números pares:

$$S_n = 2 + 4 + 6 + \ldots$$

Tenemos una progresión aritmética en la que $a_1 = 2$, d = 2 ,

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow a_n = 2 + (n-1)\cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \Rightarrow S_n = \frac{2+2n}{2}\cdot n \Rightarrow S_n = \frac{2\cdot(1+n)}{2}\cdot n \Rightarrow \boxed{S_n = n\cdot(n+1)}$$

6.

$$\left.\begin{array}{l} a_1\cdot r = 39 \\ a_1\cdot r^3 = 6591 \end{array}\right\} \Rightarrow r^2 = 169 \Rightarrow r = 13$$

Si $r = 13 \Rightarrow a_1 = 3 \Rightarrow a_3 = a_1\cdot r^2 \Rightarrow a_3 = 3\cdot 13^2 \Rightarrow a_3 = 507$

$$S_4 = \frac{a_1 + a_4}{2}\cdot 4 \Rightarrow S_4 = \frac{3 + 6591}{2}\cdot 4 \Rightarrow \boxed{S_4 = 13188}$$

7.

Construimos la siguiente progresión: $\frac{2}{5}\ , a_2\ , a_3\ , a_4\ , 10$

$n=5\ ,\ a_1=\frac{2}{5},\ a_5=10$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{a_5}{a_1}} = \sqrt[4]{25} \Rightarrow r = \sqrt{5}$$

Solución: los números buscados son: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 2 , $2\sqrt{5}$

8.

Sean $\frac{a}{r}, a, ar$ las medidas de las aristas del prisma.

$$V = 1728 \Rightarrow \frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = 1728 \Rightarrow a^3 = 1728 \Rightarrow a = 12$$

$$S = 63 \Rightarrow \frac{a}{r} + a + ar = 63 \Rightarrow a + ar + ar^2 = 63r \Rightarrow 12r^2 - 51r + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$4r^2 - 17r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{17 \pm \sqrt{289-64}}{8} \Rightarrow r = 4$$

Solución: Las medidas son 3 m , 12 m y 48 m
Si consideramos la solución $r = \frac{1}{4}$ la solución sería la misma.

9.

$$N = 3'4646\ldots = 3 + 0'46 + 0'0046 + \ldots = 3 + \frac{46}{100} + \frac{46}{10000} + \ldots$$

Se trata de la suma de 3 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{46}{100}$, $r = \frac{1}{100}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{46}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{46}{100}}{\frac{99}{100}} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{46}{99}}$$

$$N = 3 + \frac{46}{99} = \frac{343}{99}$$

10.

Se trata de la suma de los miembros de la siguiente progresión geométrica:

$$1, 3, 3^2, \ldots, 3^9$$

Los datos son: $a_1 = 1$, $a_{10} = 3^9$, r = 3

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_{10} = \frac{3^9 \cdot 3 - 1}{3-1} \Rightarrow \boxed{S_{10} = 29524}$$