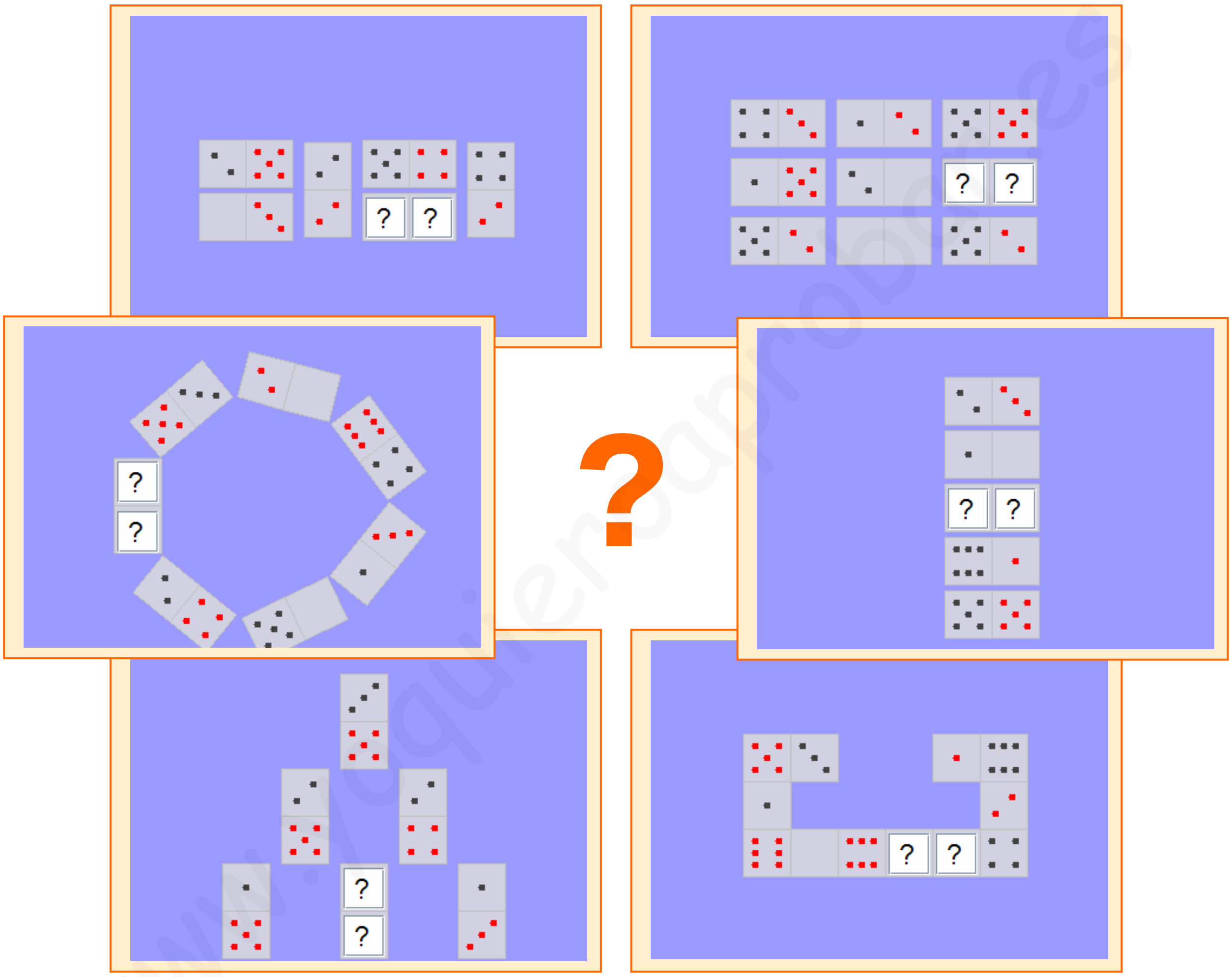
5 Progresiones

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer una sucesión de números.
- Reconocer y distinguir las progresiones aritméticas y geométricas.
- Calcular él término general de una progresión aritmética y geométrica.
- Hallar la suma de los términos de una progresión aritmética finita y geométrica finita o infinita.
- Hallar el producto de los términos de una progresión geométrica finita.
- Resolver problemas con la ayuda de las progresiones.
- Resolver problemas de interés compuesto.

Antes de empezar



Para empezar, te propongo un juego sencillo, se trata de averiguar la ficha de dominó que falta en cada caso.

1. Sucesiones

Definición.

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números reales:

$$\mathbf{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots}$$

Cada elemento de la sucesión se llama **término** de la sucesión. Para designarlos se emplean subíndices.

Los términos de las sucesiones se pueden determinar a partir de cierto criterio, este criterio se denomina **regla de formación**.

Término general

El **término general** de una sucesión es el que ocupa un lugar cualquiera, **n**, de la misma, se escribe $\mathbf{a_n}$

- Hay sucesiones cuyo término general es una expresión algebraica, que nos permite saber cualquier término de la sucesión sabiendo el lugar que ocupa, **n**.
- En otras, cada término se obtiene a partir de los anteriores, se dice que están dadas en forma recurrente. Una **relación de recurrencia** es una expresión algebraica, que expresa el término **n** en función de los anteriores.

4, 7, 10, 13,...

Primer término: $a_1=4$
Segundo término: $a_2=7$
Tercer término: $a_3=10$
Cuarto término: $a_4=13$

Cada término se obtiene del anterior sumándole 3.

$a_2 = a_1 + 3 = 4 + 3 = 7$
$a_3 = a_2 + 3 = 7 + 3 = 10$
$a_4 = a_3 + 3 = 10 + 3 = 13$

4, 8, 12, 16,...

Cada término se obtiene multiplicando el lugar que ocupa por 4

$a_1 = 1\cdot 4 = 4$ $\quad a_2 = 2\cdot 4 = 8$
$a_3 = 3\cdot 4 = 12$ $\quad a_4 = 4\cdot 4 = 16$

EJERCICIOS resueltos

1. El primer término de una sucesión es 4, escribe los cuatro primeros términos de ella si: "Cada término es igual al anterior más el lugar que ocupa":

   Sol: $a_1 = 4 \quad a_2 = 4+2 = 6 \quad a_3 = 6+3 = 9 \quad a_4 = 9+4 = 13$

2. Escribe la regla de formación de la siguiente sucesión: 3, 8, 13, 18,...

   Sol: *"Cada término es igual al anterior más 5"*

3. Escribe los cinco primeros términos de la sucesión formada por los cuadrados de los números naturales a partir del 1.

   Sol: $a_1 = 1 \quad a_2 = 2^2 = 4 \quad a_3 = 3^2 = 9 \quad a_4 = 4^2 = 16 \quad a_5 = 5^2 = 25$

4. Calcula los 4 primeros términos de la sucesión de término general: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

   Sol: $a_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \quad a_2 = \dfrac{2}{1+2} = \dfrac{2}{3} \quad a_3 = \dfrac{3}{1+3} = \dfrac{3}{4} \quad a_4 = \dfrac{4}{1+4} = \dfrac{4}{5}$

5. Escribe los 5 primeros términos de una sucesión cuya regla de formación es: *"Cada término es la suma de los dos anteriores"* $a_1 = 3$ y $a_2 = 7$

   Sol: $a_1 = 3 \quad a_2 = 7 \quad a_3 = 3+7 = 10 \quad a_4 = 7+10 = 17 \quad a_5 = 10+17 = 27$

6. Escribe el término general de estas sucesiones:

   a) 2, 3, 4, 5, 6, ... Sol: $a_n = 1+n$ b) 2, 4, 8, 16, 32, ... Sol: $a_n = 2^n$

2. Progresiones Aritméticas

Definición

Una **progresión aritmética** es una sucesión en que cada término (menos el primero) se obtiene sumando al anterior una cantidad fija **d**, llamada **diferencia** de la progresión.

- Si **d>0** los números cada vez son mayores, se dice que la progresión es **creciente**.
- Si **d<0** los números cada vez son menores, se dice que la progresión es **decreciente**

2, 4, 6, 8, … → d=2
d>0 CRECIENTE

7, 5, 3, 1, … → d=-2
d<0 DECRECIENTE

Para obtener la diferencia basta restar dos términos consecutivos.

Término general

En una progresión aritmética cada término es igual al anterior más la diferencia. Observa:

$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2\cdot d$
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2\cdot d + d = a_1 + 3\cdot d$
$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3\cdot d + d = a_1 + 4\cdot d$

y siguiendo así sucesivamente, se llega a:

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

El **término general** de una **progresión aritmética** es:

$$\boxed{\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}}$$

donde $\mathbf{a_1}$ es el primer término y **d** la diferencia.

3, 5, 7, 9, 11, …

$a_1=3 \quad d=2$

$\mathbf{a_n = 3 + (n-1)\cdot 2}$

Así por ejemplo:
$a_{10} = 3 + 9\cdot 2 = 21$
$a_{100} = 3 + 99\cdot 2 = 201$

Suma de n términos

En una progresión aritmética finita de n términos, la suma de términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de ellos:

$$a_1+a_n = a_2+a_{n-1} = a_3+a_{n-2} = \dots$$

A partir de esta propiedad se obtiene que la suma $S_n = a_1+a_2+\dots\dots+a_n$ de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$\boxed{S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n}$$

2, 4, 6, 8, 10, 12

$2+12=14$
$4+10=14$
$6+8=14$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{2+12}{2}\cdot 6 = 42$$

EJERCICIOS resueltos

7. Determina la diferencia de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $1, 4, 7, 10, 13 ....$ Sol: $d = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$
$d = 13 - 10 = 10 - 7 = 7 - 4 = 4 - 1 = 3$

b) $8, 6, 4, 2, 0, ...$ Sol: $d = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$
$d = 0 - 2 = 2 - 4 = 4 - 6 = 6 - 8 = -2$

c) $2, 6, 10, 14, 18, ...$ Sol: $d = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$
$d = 18 - 14 = 14 - 10 = 10 - 6 = 6 - 2 = 4$

8. Escribe el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $4, 6, 8, 10, ...$ Sol: $a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1)\cdot 2 = 2n + 2$

b) $3, -1, -5, -9, ...$ Sol: $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)\cdot(-4) = -4n + 7$

c) $5, 8, 11, 14, ...$ Sol: $a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)\cdot 3 = 3n + 2$

9. Calcular la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética: $2, 4, 6, 8, 10, ...$

Sol:
$$a_{10} = a_1 + (10-1)d = 2 + 9\cdot 2 = 20$$
$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{2+20}{2}\cdot 10 = 11\cdot 10 = 110$$

10. Calcular la suma de los 20 primeros términos de la progresión aritmética: $3, 7, 11, 15, 19, ...$

Sol:
$$a_{20} = a_1 + (20-1)d = 3 + 19\cdot 2 = 41$$
$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{3+41}{2}\cdot 20 = 22\cdot 20 = 440$$

11. El primer término de una progresión aritmética de diferencia 5 es 4 y el último término es 499.Halla la suma de todos ellos.

$$a_1 = 4 \quad d = 5 \rightarrow 4, 9, 14, 19, ...$$

Hay que calcular el número de términos

Sol: $a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 499 = 4 + (n-1)\cdot 5 = 5n - 1$

$$5n = 500 \rightarrow n = 100$$
$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{4+499}{2}\cdot 100 = \frac{503}{2}100 = 25150$$

3. Progresiones Geométricas

Definición

3, 6, 12, 24, 48, …

razon=2

$$r=\frac{6}{3}=\frac{12}{6}=\frac{24}{12}=\frac{48}{24}=2$$

Una **progresión geométrica** es una sucesión en que cada término (menos el primero) se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad fija **r**, llamada **razón** de la progresión.

La razón se obtiene al hacer el cociente entre dos términos consecutivos:

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\ldots\frac{a_n}{a_{n-1}}=r}$$

Término General

1, 3, 9, 27, 81, …

$r=3 \quad a_1=1$

$$\mathbf{a_n = 3^{n-1}}$$

En una progresión geométrica cada término es igual al anterior por la razón. Observa:

$a_2 = a_1 \cdot r \qquad a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 = a_1 \cdot r^3$

y siguiendo así sucesivamente, se llega a:

El **término general** de una **progresión geométrica** cuyo primer término es $\mathbf{a_1}$ y la razón es **r** es

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Suma de n términos

$1, 2, 4, 8, 16, 32 \qquad r=2 \;;\; n=6$

$$S=\frac{a_n\cdot r-1}{r-1}=\frac{32\cdot 2-1}{2-1}=\frac{63}{1}=63$$

$$S=\frac{a_1\cdot(r^n-1)}{r-1}=\frac{1\cdot(2^6-1)}{2-1}=\frac{63}{1}=63$$

La **suma** de los **n primeros términos** de una **progresión geométrica** de razón **r** es:

$$\boxed{S=\frac{a_n\cdot r-1}{r-1}} \quad \text{ó bien} \quad \boxed{S=\frac{a_1\cdot(r^n-1)}{r-1}}$$

Suma de todos los términos

$16, 8, 4, 2, 1, \ldots\ldots; \qquad r=\frac{1}{2}$

$$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{16}{1-\frac{1}{2}}=\frac{16}{\frac{1}{2}}=32$$

La **suma** de los **infinitos términos** de una **progresión geométrica** de razón **r,** es:

$$\boxed{S=\frac{a_1}{1-r}}$$

Producto de n términos

1, 2, 4, 8, 16, 32

$1\cdot 32=32$

$2\cdot 16=32$

$4\cdot 8=32$

$$P=\sqrt{(1\cdot 32)^6}=\sqrt{2^{30}}=2^{15}$$

En una progresión geométrica el producto de los términos equidistantes de los extremos es igual al producto de ellos: $a_1\cdot a_n = a_2\cdot a_{n-1} = a_3\cdot a_{n-2} = \ldots$

A partir de esta propiedad se obtiene que el producto de los **n primeros términos** de una **progresión geométrica** es:

$$\boxed{P=\sqrt{(a_1\cdot a_n)^n}}$$

EJERCICIOS resueltos

12. Determina la razón de las siguientes progresiones geométricas:

a) $1, 2, 4, 8, 16....$ Sol: $r = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$

$r = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$

b) $81, 27, 9, 3, 1, ...$ Sol: $r = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$

$r = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{9}{27} = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$

13. Escribe el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) $4, 12, 36, 108, ...$ Sol: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$

b) $8, 16, 32, 64, ...$ Sol: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 8 \cdot 2^{n-1} = 2^3 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+2}$

14. Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica: $1, 2, 4, 8, 16, ...$

Sol: $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow S = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{1024 - 1}{1} = 1023$

15. Calcula la suma de los términos de una progresión geométrica finita de primer término 1, razón 3 y último término 243:

Sol: $a_1 = 1$; $a_n = 243$; $r = 3 \rightarrow S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \cdot n = \frac{243 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = \frac{728}{2} = 364$

16. Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica: $8, 4, 2, 1, ...$

Sol: $a_1 = 8$; $r = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$

17. Calcula el producto de los 8 primeros términos de la progresión geométrica: $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, ...$

Sol:

$a_1 = \frac{1}{8}$; $r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = 2$; $a_8 = \frac{1}{8} 2^7 = 2^4 = 16$

$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_8)^8} = \sqrt{\left(\frac{1}{8} \cdot 16\right)^8} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16$

4. Aplicaciones

Interpolación

Interpolar significa colocar otros números entre dos dados. Dados dos números a y b,

- **Interpolar n medios diferenciales** entre a y b es encontrar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números de forma que a, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, b formen una progresión **aritmética**.
- **Interpolar n medios proporcionales** entre a y b es encontrar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números de forma que a, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, b formen una progresión **geométrica**.

Interpolar 4 medios diferenciales entre 4 y 44.

$4, x_1, x_2, x_3, x_4, 44$

Progresión aritmética

$44=4+(6-1)\cdot d \rightarrow 40=5d \rightarrow \mathbf{d=8}$

4, 12, 20, 28, 36, 44

Interpolar 2 medios geométricos entre 3 y 24.

$3, x_1, x_2, 44$

Progresión geométrica

$24=3\cdot r^3 \rightarrow 8=r^3 \rightarrow \mathbf{r=2}$

3, 6, 12, 24

Interés Compuesto

Si al invertir un capital durante un periodo de tiempo, t, a un rédito, r%, no se retiran los intereses al finalizar el periodo de inversión sino que se añaden al capital decimos que es un **interés compuesto**.

El capital final $\mathbf{C_f}$ obtenido al invertir un Capital **C**, al rédito **r %**, durante **t** años, a **interés compuesto** viene dado por la fórmula:

$$C_f = C_0 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

Si el tiempo viene dado en meses o días, basta sustituir r por el rédito mensual o diario y t por el nº de meses o días.

¿En cuánto se convierten 2000 € al 4% anual durante 5 años?

$$C_f = C_0 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

$$C_f = 1000 \cdot \left(1+\frac{4}{100}\right)^5 = 1216,65\ €$$

Resolución de problemas

Observa algunos ejemplos de problemas resueltos con progresiones.

EJEMPLO 1

Encuentra la fracción generatriz de $0,\widehat{2}$

✓ SOLUCIÓN

$$0,\widehat{2} = 0,2+0,02+0,002+\ldots = \frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\ldots$$

Es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término 0,2 y razón 0,1.

$$S = \frac{0,2}{1-0,1} = \frac{0,2}{0,9} = \frac{2}{9}$$

EJEMPLO 2

Una persona da limosna durante 17 días, cada día da 1€ más que el anterior; el primer día dio 10€ y el último 26€, ¿cuánto ha dado en total?.

✓ SOLUCIÓN

Las cantidades dadas 10, 11, 12, …., 26 forman una progresión aritmética de primer término 10 y diferencia 1.

El total es la suma de los 17 términos:

$$S = \frac{10+26}{2}\cdot 17 = 306\ €$$

EJERCICIOS resueltos

18. Interpola 3 medios aritméticos entre 4 y 29

$$5, x_1, x_2, x_3, 29$$

Sol: $29 = 5 + (5-1)\cdot d \rightarrow 24 = 4d \rightarrow d = 6$

$x_1 = 5 + 6 = 11 \quad x_2 = 11 + 6 = 17 \quad x_3 = 11 + 6 = 17$

19. Interpola 4 medios geométricos entre 1 y 243:

$$2, x_1, x_2, x_3, x_4, 486$$

Sol: $486 = 2\cdot r^5 \rightarrow 243 = 2\cdot r^5 \rightarrow r = 3$

$x_1 = 2\cdot 3 = 6 \quad x_2 = 6\cdot 3 = 18 \quad x_3 = 18\cdot 3 = 54 \quad x_4 = 54\cdot 3 = 162$

20. Calcular el capital obtenido invirtiendo 2000 € al 3 % de interés compuesto anual durante 5 años.

Sol: $C_f = C_0\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = 2000\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^5 = 2318,55\ €$

21. Un árbol de rápido crecimiento multiplica su altura por 1'2 cada año. Si al comenzar el año medía 0'75 m,¿qué altura tendrá dentro de 8 años?

Sol: $a_1 = 0'75\ ;\ a_2 = 0'75\cdot 1'2\ ;\ a_3 = 0'75\cdot 1'2^2 ...... \rightarrow a_8 = 0'75\cdot 1'2^8 = 3'22\ \text{m}$

22. Lanzamos una pelota a lo largo de un pasillo. En cada bote que da avanza una distancia igual a la mitad de la distancia anterior. Si al octavo bote cae en un foso de tierra y se para ¿qué distancia habrá recorrido si antes del primer bote ha recorrido 2 m?

$$a_1 = 2\ ;\ a_2 = 1;\ a_3 = \frac{1}{2};\ a_4 = \frac{1}{4}, ...;\ a_8 = \frac{1}{64}$$

Sol: La distancia que ha recorrido es la suma de todas

$$S = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} = \frac{2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1\right)}{\frac{1}{2}-1} = \frac{2\left(\frac{1}{256}-1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{2\,\frac{(-255)}{256}}{-\frac{1}{2}} = \frac{2\cdot 255\cdot 2}{256} = \frac{255}{64} = 3'98\,\text{m}$$

Para practicar

1. Completa las sucesiones con los términos que faltan:

a) $3, 7, 11, 15, \_\_, \_\_, ...$

b) $3, 6, 12, 24, \_\_, \_\_, ...$

c) $32, 16, 8, 4, \_\_, \_\_, ...$

d) $5, 10, 17, 26, \_\_, \_\_, ...$

2. Calcula los 4 primeros términos de la sucesión de término general:

a) $a_n = n + 5$

b) $a_n = 2^{n-1}$

c) $a_n = \sqrt[n+1]{n+2}$

d) $a_n = 5n$

3. Calcula el término general de las sucesiones:

a) $1, 2, 3, 4, 5, ...$

b) $1, 4, 9, 16, 25, ...$

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ...$

d) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ...$

4. Halla el término 100 de la sucesión de término general:

a) $a_n = 3n + 2$

b) $a_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

5. Averigua la ley de recurrencia de cada una de las sucesiones:

a) $3, 7, 10, 17, 27, ...$

b) $3, 6, 12, 24, 48, ...$

c) $3, 7, 11, 15, 19, ...$

d) $9, 3, 6, -3, 9, ...$

6. Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.

a) $4, 7, 10, 13, 16, ...$

b) $1, 3, 5, 7, 9, ...$

c) $7, 11, 15, 19, 23, ...$

d) $3, 4, 5, 6, 7, ...$

7. Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas.

a) $4, 8, 16, 32, 64, ...$

b) $1, 3, 9, 27, 81, ...$

c) $16, 8, 4, 2, 1, ...$

d) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, \dfrac{16}{81}, ...$

8. Calcula la diferencia de una progresión aritmética si se conocen:

a) $a_{10} = 30$ y $a_1 = -6$

b) $a_{30} = 95$ y $a_{20} = 45$

9. Calcula la razón de una progresión geométrica si se conoce

a) $a_9 = 80$ y $a_8 = 16$

b) $a_{10} = 40$ y $a_7 = 5$

10. Calcula el primer término de una progresión aritmética si se conoce:

a) $a_{20} = 34$ y $d = 7$

b) $a_{31} = 13$ y $d = 3$

11. Calcula el primer término de una progresión geométrica si se conoce:

a) $a_7 = 320$ y $r = 2$

b) $a_6 = 915$ y $r = 3$

12. Calcula el número de términos de una progresión aritmética finita si el primero es 100 el último 420 y la diferencia es 4.

13. Calcula la suma de los primeros 101 términos de la progresión: $1, 4, 7, 17, 20, \ldots.$

14. Calcula la suma de los múltiplos de 3 menores de 1000 y mayores que 100

15. Calcula la suma de los primeros 8 términos de la progresión: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots.$

16. Calcula el producto de los primeros 8 términos de la progresión: $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots.$

17. Calcula la suma de los infinitos términos de la progresión: $16, 8, 4, 2, 1, \ldots.$

18. Calcula el producto de los primeros 10 términos de la progresión $16, 8, 4, 2, 1, \ldots.$

19. Depositamos 6000 € al 5 % de interés compuesto anual. ¿Cuánto dinero tendré después de 3 años?

20. Determina el capital que con un interés compuesto del 5% anual, produce 200 € en 4 años.

21. Halla el capital obtenido invirtiendo 100 € al 3 % de interés compuesto anual durante 4 años?

22. Interpola 6 términos entre 1 y 10 para que formen una progresión aritmética.

23. Interpola 3 términos entre 1 y 16 para que formen una progresión geométrica

24. En un examen la primera pregunta valía dos puntos y cada una de las siguientes valía tres puntos más que la anterior. Si en total hay 50 preguntas, ¿cuántos puntos vale el examen?

25. El número inicial de moscas de una población es de 50 y cada tres días el número de moscas se duplica, ¿cuántas moscas habrá a los 30 días?

26. Escribe la fracción generatriz de $1'\hat{2}$, utilizando la suma de una progresión.

27. En una progresión geométrica el término sexto vale 64 y el cuarto es 16. Halla el término general.

28. Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética, si el más pequeño mide 40º ¿cuál es la medida de los otros dos?

Para saber más

La sucesión de Fibonacci

Una de las sucesiones más conocidas es la **sucesión de Fibonacci**.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ….

La sucesión es la solución al problema que se plantea en su obra ***Liber abaci***

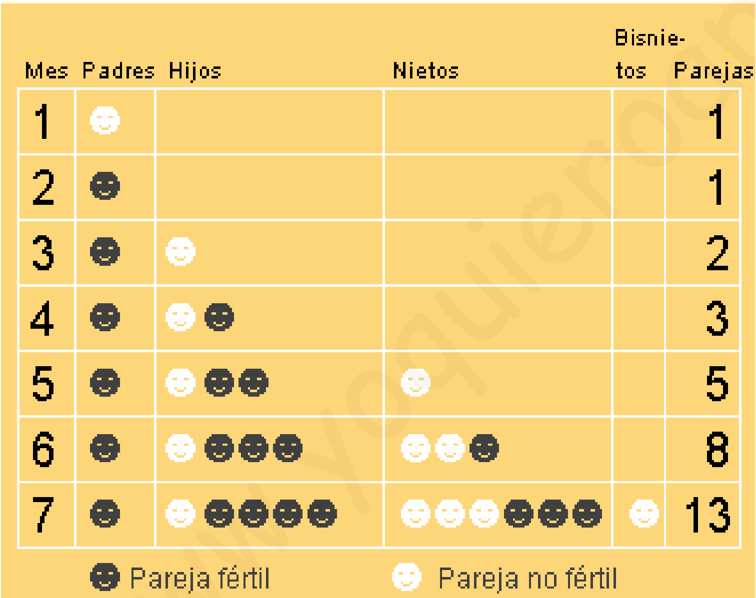
Fórmula de recurrencia:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Término General:

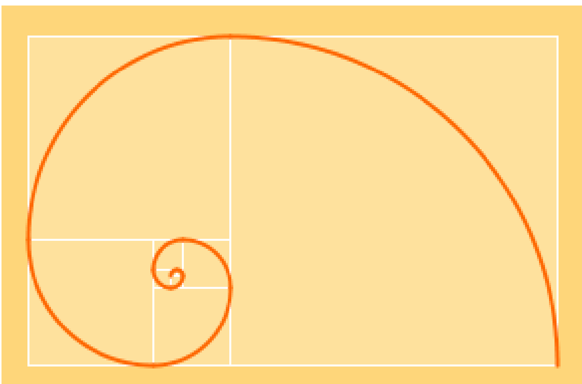
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil. Cada vez engendra una pareja de conejos que, a su vez, tras ser fértiles engendran cada mes una pareja de conejos.¿Cuántas parejas habrá después de un número determinado de meses?



Leonardo de Pisa (Fibonacci) 1170-1250

Espiral de Fibonacci



Número de oro:

Si dividimos cada número por el anterior la sucesión de cocientes se acerca al número de oro:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Recuerda lo más importante

Sucesión:
Es un conjunto de infinitos números dados de forma ordenada.

Término de una Sucesión:
Cada uno de los números que forman la sucesión..

Sucesión decreciente:
Es aquella en que cada término es menor que ela anterior.

Sucesión creciente:
Es aquella en que cada término es mayor que el anterior.

Progresión Aritmética
Es aquella sucesión en que cada término es igual al anterior más una cantidad constante llamada diferencia de la progresión.

Término general $a_n = a_1 + (n-1)d$

Términos equidistantes de los extremos

$$a_n + a_1 = a_{n-1} + a_2 = a_{n-2} + a_2 = \ldots$$

Suma de n téminos $S = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$

Progresión Geométrica
Es aquella sucesión en que cada término es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante llamada razón de la progresión.

Término general $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Suma de n términos $S = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$

$$S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

Suma de los infinitos términos

$$S = \frac{a_1}{1-r} \qquad -1 < r < 1$$

Términos equidistantes de los extremos $a_n \cdot a_1 = a_{n-1} \cdot a_2 = a_{n-2} \cdot a_2 = \ldots$

Producto de n téminos $P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

Interpolación
Dados números a y b, interpolar n medios (diferenciales ó geométricos) entre a y b es encontrar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números de forma que $a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b$ formen una progresión (aritmética ó geométrica)

Interés Compuesto
El capital final C_f obtenido al invertir un Capital C, al rédito r %, durante t años, a interés compuesto viene dado por la fórmula: $C_f = C_0 \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^t$

Autoevaluación

1. Escribe el término 95 de la sucesión: $\frac{10}{3}, \frac{11}{4}, \frac{12}{5}, \frac{13}{6}, ...$

2. Escribe el término general de la sucesión: $-4, -7, -10, -13, ...$

3. Escribe el término general de la sucesión: $1, 2, 4, 8, ...$

4. Escribe el término 6 de la sucesión: $1, 4, 16, 64, ...$

5. Halla la suma de todos los términos de la progresión: $8, 4, 2, 1, ...$

6. Halla la suma de los 100 primeros términos de la progresión: $1, 4, 7, 10, ...$

7. Halla el producto de los 8 primeros términos de la progresión: $4096, 512, 64, 8, ...$

8. Cuánto dinero me devolverá el banco si hago una imposición de 3000 € aplazo fijo durante 5 años al 3% de interés compuesto anual.

9. Calcula la suma de todos los múltiplos de 3 de tres cifras.

10. El padre de Juan decide guardar un euro el día que Juan cumple un año. Irá duplicando la cantidad en todos los cumpleaños de su hijo. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado el día que cumpla 13 años?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) 19 y 23 b) 48 y 96
c) 2 y 1 d) 37 y 50

2. a) $6, 7, 8, 9, \ldots$ b) $1, 2, 4, 8, \ldots$
c) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{6}, \ldots$
d) $5, 10, 15, 20, \ldots$

3. a) $a_n = n$ b) $a_n = n^2$
c) $a_n = \frac{1}{n}$ d) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

4. a) $a_{100} = 302$ b) $a_n = \frac{201}{99}$
c) $a_n = \frac{1}{101}$

5. a) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ b) $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$
c) $a_{n+1} = a_n + 4$ d)
$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

6. a) $a_n = 3n + 1$ b) $a_n = 2n - 1$
c) $a_n = 4n + 3$ d) $a_n = n + 2$

7. a) $a_n = 2^{n+1}$ b) $a_n = 3^{n-1}$
c) $a_n = 2^{5-n}$ d) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

8. a) 4 b) 5

9. a) 5 b) 2

10. a) -99 b) -77

11. a) 5 b) 5

12. 81

13. 15100

14. 165150

15. 511

16. 16

17. 32

18. 1/32

19. 6945´75

20. 928´05

21. 112´55

22. $\frac{16}{7}, \frac{25}{7}, \frac{34}{7}, \frac{43}{7}, \frac{52}{7}, \frac{61}{7}$

23. 2, 4, 8

24. 3775

25. 16000

26. 11/9

27. $a_n = 2^n$

28. 60 y80

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 104/97

2. $a_n = -1 - 3n$

3. $a_n = 2^{n-1}$

4. 1024

5. 16

6. 14950

7. 4096

8. 3477’82

9. 165150

10. 8191

No olvides enviar las actividades al tutor