¿Cómo se suman y se restan números enteros?

Es más fácil verlo con algunos ejemplos que explicarlo con palabras.

Ejemplo 1:

$8+3-7+5-4$

a) Sumo los números positivos: $8+3+5=16$
b) Sumo los números negativos: $7+4=11$
c) Luego se resta: $16-11=5$ (observa que el resultado es, en este caso, positivo).
Por cierto: $16-11=-11+16=5$

Ejemplo 2:

$-6+5-4+8-9$

a) Sumo los números positivos: $5+8=13$
b) Sumo los números negativos: $6+4+9=19$
c) Luego se resta: $13-19=-6$ (observa que el resultado es ahora negativo porque 19 es mayor que 13).
Por cierto: $13-19=-19+13=-6$

Los matemáticos de verdad lo hacen en una sola línea, dando un par de pasos, separados por el signo igual:

$8+3-7+5-4=16-11=5$

$-6+5-4+8-9=13-19=-6$

¡Y así es como nos debemos de acostumbrar a hacerlo a partir de ahora!

Hay otra forma de hacer las operaciones anteriores: se procede operando siempre de izquierda a derecha. Fíjate:

Ejemplo 1:

$8+3-7+5-4=11-7+5-4=$

$=4+5-4=9-4=5$

Ejemplo 2:

$-6+5-4+8-9=-1-4+8-9=$

$=-5+8-9=3-9=-6$

Elige la forma que más te guste. Son equivalentes. ¡Pero no te equivoques nunca! ☺

¿Y si hay paréntesis?

Pues se hace primero la operación que hay entre paréntesis y luego se procede como antes. Veamos otro par de ejemplos.

Ejemplo 3:

$9-(2-7+3)+(-2+6)=$

$=9-(-2)+(4)=9+2+4=15$

Ejemplo 4:

$12+(8-15)-(5+8)=$

$=12+(-7)-(13)=12-7-13=12-20=-8$

Observa que un **menos** delante de un paréntesis cambia el signo de "lo que hay dentro" del mismo. Sin embargo, un **más** delante del paréntesis deja "lo que hay dentro" del mismo tal y como estaba.

Hay otra forma de hacerlo y tiene que ver con lo que se ha dicho en el párrafo anterior. Se puede suprimir directamente cualquier paréntesis teniendo en cuenta que:

- ✓ Si está precedido del signo **más** los signos interiores no varían.
- ✓ Si está precedido del signo **menos** se cambian los signos interiores.

Ejemplo 3:

$9-(2-7+3)+(-2+6)=$

$=9-2+7-3-2+6=22-7=15$

Ejemplo 4:

$12+(8-15)-(5+8)=$

$=12+8-15-5-8=20-28=-8$

Elige la forma que más te guste. Son equivalentes. Pero te digo lo mismo que antes: ¡no te equivoques nunca! ☺

Veamos, finalmente, otro ejemplo más un poco más largo. Ahora con corchetes:

Ejemplo 5:

$[10-(14-21)]-[5-(17-11+6)]=$

$=[10-(-7)]-[5-(23-11)]=[10+7]-[5-12]=17-[-7]=17+7=24$

¡Despacito y buena letra! Así llegarás lejos

¿Cómo se multiplican y se dividen números enteros?

El producto o multiplicación se notará con un punto ($\cdot$). A veces incluso no se pone nada. Por ejemplo: $2(3+5)=2\cdot 8=16$. Para denotar la división se utilizan dos puntos ($:$). Pero antes de nada recordemos la **regla de los signos**:

Multiplicación		División	
Regla	**Ejemplo**	**Regla**	**Ejemplo**
$(+)\cdot(+)=+$	$2\cdot 5=10$	$(+):(+)=+$	$24:6=4$
$(-)\cdot(-)=+$	$-3\cdot(-4)=12$	$(-):(-)=+$	$-36:(-9)=4$
$(+)\cdot(-)=-$	$6\cdot(-5)=-30$	$(+):(-)=-$	$18:(-3)=-6$
$(-)\cdot(+)=-$	$-9\cdot 4=-36$	$(-):(+)=-$	$(-12):4=-3$
Observa que, si no es necesario, no se escribe el paréntesis. Además, a los números positivos no es necesario ponerles delante el signo $+$. ¡Esta propiedad se conoce como **economía del lenguaje matemático**!			

Ambas operaciones con frecuencia aparecen mezcladas. En este caso se efectúan **de izquierda a derecha** teniendo en cuenta las reglas anteriores:

Ejemplo 6:

$(-2)\cdot(-5)\cdot 4:2\cdot(-3)=$

$=10\cdot 4:2\cdot(-3)=40:2\cdot(-3)=20\cdot(-3)=-60$

Ejemplo 7:

$3\cdot(-4)\cdot(-1):(-2)\cdot(-7)=$

$=-12\cdot(-1):(-2)\cdot(-7)=12:(-2)\cdot(-7)=$

$=(-6)\cdot(-7)=42$

Operaciones combinadas

Normalmente, las cuatro operaciones anteriores (suma, resta, multiplicación y división), aparecen combinadas. Para no equivocarte debes seguir siempre, y ordenadamente, esta **jerarquía**:

1. Corchetes y paréntesis.
2. Multiplicaciones y divisiones.
3. Sumas y restas.

Hay que tener en cuenta que las operaciones del mismo nivel (multiplicaciones y divisiones por un lado, y sumas y restas por otro) se realizan siempre **de izquierda a derecha**.

Ejemplo 8:

$(-2)\cdot(5-9)+6\cdot(3-5)=$

[primero los paréntesis]

$=(-2)\cdot(-4)+6\cdot(-2)=$

[ahora las multiplicaciones]

$=8+(-12)=8-12=-4$

[al final hemos realizado las sumas y restas]

Ejemplo 9:

$5+28:(-7)-(-6)\cdot[23-5\cdot(9-4)]=$

$=5+28:(-7)-(-6)\cdot[23-5\cdot 5]=$

$=5+28:(-7)—6\cdot[23-25]=$

$=5+28:(-7)-(-6)\cdot(-2)=$

$=5+(-4)-12=5-4-12=5-16=-11$

¿Que las operaciones son un poco más largas? No pasa nada. Con paciencia y sin prisa, siguiendo la jerarquía, todo debe de salir bien. Insisto: no tengas prisa y acabarás antes. ☺

Ejemplo 10:

$5\cdot(10-2\cdot 3)+[9\cdot 2-8\cdot 3-(1+6\cdot 4-5)+3\cdot 8]-3\cdot(1+2)=$

$=5\cdot(10-6)+[18-24-(1+24-5)+24]-3\cdot 3=5\cdot 4+[18-24-20+24]-3\cdot 3=$

$=20+(-2)-9=20-2-9=20-11=9$

Introducción

Para operar con fracciones se sigue el mismo método que para operar con números enteros. Es decir, hay que respetar una jerarquía. Recordémosla:

1. Corchetes y paréntesis.
2. Multiplicaciones y divisiones.
3. Sumas y restas.

Hay que tener en cuenta que las operaciones del mismo nivel (multiplicaciones y divisiones por un lado, y sumas y restas por otro) se realizan siempre de izquierda a derecha.

Para poder hacer operaciones combinadas con fracciones debemos aprender primero a sumar y a restar y, luego, a multiplicar y a dividir. Para sumar y restar es fundamental saber cuando dos fracciones son equivalentes y cómo se reducen fracciones a común denominador. Vamos pues a ello.

Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes cuando expresan la misma cantidad. Por ejemplo $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ representan la misma cantidad pues $2:5=4:10=0,4$. Para saber si dos fracciones son equivalentes basta comprobar que forman una proporción, es decir:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

De este modo observamos que $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ son equivalentes porque $2\cdot 10=4\cdot 5$.

Hay una propiedad importante de las fracciones:

Si se multiplican o se dividen el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número, se obtiene una fracción equivalente a la dada. Es decir:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot k}{b\cdot k}\ ;\ \frac{a}{b}=\frac{a:k}{b:k}$$

Observa que de la fracción $\frac{2}{5}$ se puede obtener la fracción equivalente $\frac{4}{10}$ multiplicando el numerador y el denominador por 2.

Observa también que, por ejemplo, dividiendo el numerador y el denominador de la fracción $\frac{12}{18}$ entre 6, se obtiene la fracción $\frac{2}{3}$. Este proceso se conoce con el nombre de *simplificación de fracciones*. Una fracción que no se puede simplificar se llama *fracción irreducible*. Si el número entre el que dividimos el numerador y el denominador es el máximo común divisor de ambos estaremos seguros de que la fracción que se obtiene es la irreducible. Por ejemplo, en el caso anterior, si dividimos numerador y denominador de la fracción $\frac{12}{18}$ entre 3 se obtiene la fracción $\frac{4}{6}$, que es una fracción equivalente a la anterior, pero no es la fracción irreducible pues podemos volver a aplicar el proceso con esta última dividiendo numerador y denominador entre 2.

Reducción de fracciones a común denominador

Para poder comparar fracciones sin necesidad de dividir podemos hacer que transformar las fracciones dadas en otras equivalentes que tenga el mismo denominador. Así sabremos cuál es la mayor y la menor simplemente comparando los denominadores. Para reducir fracciones a común denominador se recurre al mínimo común múltiplo de los denominadores. Lo veremos mejor con un ejemplo.

Imaginemos que nos dan las fracciones $\frac{3}{8}, \frac{5}{6}, \frac{4}{9}, \frac{7}{12}$ y que nos piden hallar otras cuatro fracciones equivalentes a las anteriores, pero todas ellas con el mismo denominador. Se procede de la siguiente manera.

- Elegimos como denominador común el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\left.\begin{array}{l} 8=2^3 \\ 6=2\cdot 3 \\ 9=3^2 \\ 12=2^2\cdot 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{mcm}(8,\ 6,\ 9,\ 12)=2^3\cdot 3^2=72$$

- En cada fracción, multiplicamos numerador y denominador por el mismo número, el adecuado para obtener 72 en el denominador. El número adecuado se obtiene dividiendo el mínimo común múltiplo entre el denominador de cada fracción:

$$72:8=9\Rightarrow \frac{3}{8}=\frac{3\cdot 9}{8\cdot 9}=\frac{27}{72}\ ,\ 72:6=12\Rightarrow \frac{5}{6}=\frac{5\cdot 12}{6\cdot 12}=\frac{60}{72}$$
$$72:9=8\Rightarrow \frac{4}{9}=\frac{4\cdot 8}{9\cdot 8}=\frac{36}{72}\ ,\ 72:12=6\Rightarrow \frac{7}{12}=\frac{7\cdot 6}{12\cdot 6}=\frac{42}{72}$$

Ya hemos reducido las cuatro fracciones a común denominador. Observa ahora que estas últimas son muy sencillas de ordenar:

$$\frac{27}{72}<\frac{36}{72}<\frac{42}{72}<\frac{60}{72}$$

Así pues las cuatro fracciones del principio, ordenadas de mayor a menor serían:

$$\frac{3}{8}<\frac{4}{9}<\frac{7}{12}<\frac{5}{6}$$

Suma y resta de fracciones

Para sumar o restar fracciones, las reducimos previamente a común denominador. Si alguno de los sumandos es un número entero, los transformamos en una fracción con denominador uno: $a=\frac{a}{1}$.

Ejemplo 1

✓ $\frac{3}{10}+\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\left[\text{mcm}(10,\ 5,\ 4)=20\right]=\frac{6}{20}+\frac{16}{20}-\frac{15}{20}=\frac{6+16-15}{20}=\frac{7}{20}$

✓ $\frac{2}{3}-4+\frac{5}{6}-\frac{7}{4}=\frac{2}{3}-\frac{4}{1}+\frac{5}{6}-\frac{7}{4}=\frac{8}{12}-\frac{48}{12}+\frac{10}{12}-\frac{21}{12}=\frac{8-48+10-21}{12}=\frac{-51}{12}=-\frac{17}{4}$

Observa como en este último caso hemos simplificado el resultado hasta la fracción irreducible.

Si en la operación con sumas y restas aparecen paréntesis hay dos formas de proceder primero a eliminarlo según la jerarquía:

- Se efectúan primero las operaciones que haya entre paréntesis y luego se hacen las sumas y restas.
- Si el paréntesis va precedido de un signo “más” se puede eliminar sin más, de tal manera que los signos del interior del paréntesis no varían. Si el paréntesis va precedido de un signo “menos”, el paréntesis se suprime, pero en este caso los signos interiores se transforman: el “más” se convierte en “menos” y el “menos” en “más”. Recuerda que restar es sumar opuestos.

Ejemplo 2

✓ $$\frac{3}{5}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)=\frac{3}{5}-\left(\frac{5}{20}-\frac{2}{20}\right)=\frac{3}{5}-\frac{3}{20}=\frac{12}{20}-\frac{3}{20}=\frac{9}{20}$$

Observa que hemos utilizado la primera de las opciones anteriores: hemos hecho primero la operación que va entre paréntesis y finalmente se ha efectuado la resta.

Hagamos ahora la misma operación pero utilizando la segunda opción.

✓ $$\frac{3}{5}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)=\frac{3}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{10}=\frac{12}{20}-\frac{5}{20}+\frac{2}{20}=\frac{12-5+2}{20}=\frac{9}{20}$$

Observa que, al estar el paréntesis precedido del signo “menos” los signos del interior varían: el “más” se convierte en “menos”, y el “menos” se convierte en “más”.

Puedes elegir la opción que prefieras aunque la segunda es muy útil pues hemos de hacer el mínimo común múltiplo una sola vez.

Ejemplo 3

✓ $$\left(1-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{7}{15}\right)=\frac{1}{1}-\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{7}{15}=\frac{15}{15}-\frac{10}{15}-\frac{12}{15}+\frac{5}{15}+\frac{3}{15}-\frac{7}{15}=$$
$$=\frac{15-10-12+5+3-7}{15}=\frac{-6}{15}=-\frac{2}{5}$$

✓ $$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left[\frac{7}{12}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\right]=\frac{2}{3}-\frac{1}{5}-\left[\frac{7}{12}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right]=\frac{2}{3}-\frac{1}{5}-\frac{7}{12}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=$$
$$=\frac{40}{60}-\frac{12}{60}-\frac{35}{60}+\frac{20}{60}+\frac{12}{60}=\frac{40-12-35+20+12}{60}=\frac{25}{60}=\frac{5}{12}$$

✓ $$\left[1-\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\right]-\left[\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)\right]=\left[1-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right]-\left[\frac{5}{12}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{1}-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\frac{5}{12}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}=$$
$$=\frac{24}{24}-\frac{16}{24}-\frac{18}{24}-\frac{10}{24}+\frac{8}{24}-\frac{3}{24}=\frac{24-16-18-10+8-3}{24}=\frac{-15}{24}=-\frac{5}{8}$$

✓ $$\left[\frac{4}{3}-\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{6}\right)\right]-\left[\frac{2}{5}-\left(\frac{7}{8}-\frac{5}{6}\right)\right]=\left[\frac{4}{3}-\frac{3}{8}+\frac{1}{6}\right]-\left[\frac{2}{5}-\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right]=\frac{4}{3}-\frac{3}{8}+\frac{1}{6}-\frac{2}{5}+\frac{7}{8}-\frac{5}{6}=$$
$$\frac{160}{120}-\frac{45}{120}+\frac{20}{120}-\frac{48}{120}+\frac{105}{120}-\frac{100}{120}=\frac{160-45+20-48+105-100}{120}=\frac{92}{120}=\frac{23}{30}$$

Observa cómo, siempre que se puede, se simplifica el resultado hasta la fracción irreducible. Observa también que, si el resultado es negativo, da igual escribir el “menos” en el numerador o delante de la fracción: $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$.

Multiplicación y división de fracciones

Multiplicación de fracciones

El resultado de multiplicar dos fracciones es otra fracción, cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

En ocasiones ni siquiera se escribe el "puntito" (que significa "por"). Es decir, la multiplicación a veces se denota simplemente por yuxtaposición (busca el verbo yuxtaponer en el diccionario), siempre que no haya lugar a error.

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Por ejemplo para multiplicar las fracciones $\frac{4}{5}$ y $-\frac{10}{3}$, hacemos:

$$\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)=-\frac{4\cdot 10}{5\cdot 3}=-\frac{40}{15}=-\frac{8}{3}$$

Observa que cuando se multiplica por un número negativo, éste se pone entre paréntesis. Esto es para no confundir el producto con una resta. Observa también que se ha aplicado la regla de los signos: un positivo por un negativo da resultado negativo ("más" por "menos" igual a "menos").

División de fracciones

Para dividir dos fracción se multiplican los términos cruzados.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

A veces la división $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ también se escribe así: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$. O sea, que también podemos escribir:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Observa que el numerador del resultado es el producto de los "extremos" y el denominador del resultado es el producto de los "medios".

Veamos un par de ejemplos:

$$\frac{4}{7}:\frac{2}{5}=\frac{4\cdot 5}{7\cdot 2}=\frac{20}{14}\ ;\ \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{4}{9}}=-\frac{7\cdot 9}{3\cdot 4}=-\frac{63}{12}=-\frac{21}{4}$$

Observa que en la segunda división se ha vuelto a aplicar la regla de los signos: "más" entre "menos" igual a "menos".

Fracción inversa

Es bueno saber que dos fracciones son *inversas* cuando su producto es igual a 1. Toda fracción distinta de cero tiene inversa. La inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, pues $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$.

Muchas veces se escribe $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$ que se lee "la inversa de a partido por b es b partido por a". O sea que el exponente "menos uno", en matemáticas significa hacer inversos.

Por ejemplo, la fracción inversa de $\frac{5}{12}$ es $\frac{12}{5}$, ya que $\frac{5}{12}\cdot\frac{12}{5}=\frac{5\cdot 12}{12\cdot 5}=\frac{60}{60}=1$. Otro ejemplo más: la fracción inversa de $\frac{1}{3}$ es $\frac{3}{1}=3$ ya que $\frac{1}{3}\cdot 3=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1}=\frac{1\cdot 3}{3\cdot 1}=\frac{3}{3}=1$.

En matemáticas, dividir no es otra cosa que multiplicar por la fracción inversa. Observa:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{-1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

De ahí viene lo de multiplicar los términos en cruz.

Operaciones combinadas con fracciones

A veces la suma y resta se combinan con la multiplicación y la división. Siguiendo la jerarquía de las operaciones y con un poco de cuidado no es muy difícil hacer operaciones combinadas. Veamos unos cuantos ejemplos.

Ejemplo 4

$$\frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)$$

Primero el paréntesis.

$$\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{12}$$

Y luego el producto,

$$\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{12}=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$$

Ejemplo 5

$$\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{7}{10}-\frac{1}{2}\right)$$

Ya sabes, primero el paréntesis, luego el producto y, finalmente, la resta:

$$\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{7}{10}-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{7}{10}-\frac{5}{10}\right)=\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{10}=\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{5}-\frac{3}{20}=\frac{8}{20}-\frac{3}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

Observa la importancia de simplificar en los pasos intermedios. En vez de hacer la multiplicación $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{10}$ se ha simplificado la fracción $\frac{2}{10}$, obteniendo $\frac{1}{5}$ y se ha efectuado el producto $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}$, cuyo resultado es más sencillo que el producto inicial. **Es muy conveniente y aconsejable acostumbrarse a simplificar en los pasos intermedios.**

Ejemplo 6

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{8}\right)\cdot\left[\frac{5}{3}:\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]$$

Aquí hay que tener cuidado. Primero realizamos el paréntesis que hay dentro del corchete. Podemos aprovechar e ir haciendo también, al mismo tiempo, el primer paréntesis. Luego se hace la división que hay dentro del corchete y, finalmente, el producto. Observa:

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{8}\right)\cdot\left[\frac{5}{3}:\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]=\left(\frac{6}{8}-\frac{7}{8}\right)\cdot\left[\frac{5}{3}:\left(\frac{8}{12}-\frac{3}{12}\right)\right]=\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left[\frac{5}{3}:\frac{5}{12}\right]=\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{60}{15}\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot 4=\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{4}{1}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$$

Recuerda que la división se hace multiplicando los términos en cruz. Hemos vuelto a simplificar en un paso intermedio y hemos multiplicado $\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot 4$, en vez de hacer $\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{60}{15}\right)$ porque, como puedes ver, el resultado de multiplicar por 4 queda mucho más sencillo que el resultado de multiplicar por $\frac{60}{15}$. Como siempre, hay que simplificar el resultado.

Ejemplo 7

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\frac{3}{5}-\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]$$

Ya no explicaré los pasos a dar. Descúbrelo y convéncete de que lo entiendes.

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\frac{3}{5}-\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]=\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)\cdot\left[\frac{3}{5}-\left(\frac{10}{12}-\frac{9}{12}\right):\left(\frac{8}{12}-\frac{3}{12}\right)\right]=\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{3}{5}-\frac{1}{12}:\frac{5}{12}\right]=$$

$$\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{3}{5}-\frac{12}{60}\right]=\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\right]=\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

Ejemplo 8

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{5}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{4}{3}}=\frac{\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)\cdot\frac{3}{5}}{\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{4}{3}}=\frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}=\frac{\frac{15}{30}}{\frac{12}{12}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

En este último ejemplo la división ahora se da en forma también de fracción. Observa que la operación del numerador se hace por un lado y la del denominador por otro. Se simplifican los pasos intermedios y, finalmente, se efectúa la división.

Potencias, raíces cuadradas y fracciones

Definición de potencia y de raíz cuadrada de una fracción

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\ ;\ \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Por ejemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}\ ;\ \left(-\frac{3}{4}\right)^3=-\frac{3^3}{4^3}=-\frac{27}{64}\ ;\ \sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

Observa que, en el segundo ejemplo, como la base es negativa y el exponente es impar el resultado es negativo.

Las propiedades de las potencias de números enteros se conservan con los números fraccionarios. Estas propiedades se traducen en reglas de uso práctico. No solamente hay que memorizarlas sino que hay que entender su justificación. Así las usarás de manera más eficaz. Debajo de cada propiedad se ha escrito entre comillas su "traducción al castellano". Cada una de ellas se ilustra con un ejemplo.

Potencia de un producto

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

"potencia de un producto es igual al producto de las potencias"

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{1^2}{5^2}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{25}=\frac{4}{225}$$

Potencia de un cociente

$$\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n:\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

"potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias"

$$\left(\frac{3}{2}:\frac{4}{3}\right)^3=\left(\frac{3}{2}\right)^3:\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{3^3}{2^3}:\frac{4^3}{3^3}=\frac{27}{8}:\frac{64}{27}=\frac{27\cdot 27}{8\cdot 64}=\frac{729}{512}$$

También se puede hacer así:

$$\left(\frac{3}{2}:\frac{4}{3}\right)^3=\left(\frac{9}{8}\right)^3=\frac{9^3}{8^3}=\frac{729}{512}$$

Producto de potencias de la misma base

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

"producto de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes"

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\left(-\frac{2}{3}\right)^5=-\frac{2^5}{3^5}=-\frac{32}{243}$$

Cociente de potencias de la misma base

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n:\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}\quad ;\quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

"cociente de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes"

$$\left(\frac{3}{5}\right)^8:\left(\frac{3}{5}\right)^6=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3^2}{5^2}=\frac{9}{25}$$

Potencia de una potencia

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$$

"potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes"

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1^6}{2^6}=\frac{1}{64}$$

Potencias de exponente negativo

Recuerda que el inverso de una fracción lo escribíamos así: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$. Pues bien este es el primer exponente negativo que debes aprender. Y no olvides que exponente "menos uno" significa "inverso de".

En general

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Esta igualdad somos capaces de *demostrarla*. Observa:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{-1\cdot n}=\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right]^n=\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Lo único que hemos hecho es descomponer $-n$ como $-1\cdot n$ y luego aplicar la propiedad anterior (potencia de una potencia). Por cierto, las propiedades hay que saber aplicarlas, no solamente de manera directa (de izquierda a derecha) sino también al contrario (de derecha a izquierda).

Por ejemplo: $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{5^3}{2^3}=\frac{125}{8}$

Potencias de exponente cero

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$$

Esta propiedad también la podemos demostrar:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0=\left(\frac{a}{b}\right)^{n-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^n=\left(\frac{a\cdot b}{b\cdot a}\right)^n=1^n=1$$

Haz un esfuerzo e intenta explicar qué se ha utilizado en cada uno de los pasos.

Operaciones combinadas con potencias

Al operar es posible que también aparezca alguna la raíz cuadrada de alguna fracción, o alguna expresión elevada a un número. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 9

$$\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)^2:\left(1-\frac{7}{2}\cdot\sqrt{\frac{9}{49}}\right)^3=$$

$$=\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)^2:\left(1-\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{7}\right)^3=\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)^2:\left(1-\frac{3}{2}\right)^3=\left(\frac{9}{12}-\frac{8}{12}\right)^2:\left(\frac{2}{2}-\frac{3}{2}\right)^3=$$

$$=\left(\frac{1}{12}\right)^2:\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1^2}{12^2}:\left(-\frac{1^3}{2^3}\right)=\frac{1}{144}:\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{8}{144}=-\frac{1}{18}$$

Ejemplo 10

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2:\left(1+\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{7}{16}}-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}+1\right)^2=$$

$$=\frac{3^2}{2^2}:\left(1+\sqrt{\frac{2}{16}+\frac{7}{16}}-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}\right)^2=\frac{9}{4}:\left(1+\sqrt{\frac{9}{16}}-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{9}{4}:\left(1+\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1^2}{3^2}=\frac{9}{4}:\left(\frac{4}{4}+\frac{3}{4}-\frac{6}{4}\right)\cdot\frac{1}{9}=\frac{9}{4}:\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}=\frac{36}{4}\cdot\frac{1}{9}=9\cdot\frac{1}{9}=\frac{9}{9}=1$$

Ecuaciones de primer grado

Definición, elementos y solución de la ecuación de primer grado

Una *ecuación de primer grado* es una igualdad del tipo

$$\boxed{ax=b}$$

donde a y b son números reales conocidos, con $a\neq 0$. Al número desconocido x se le llama *incógnita*. A veces, al igual que cuando se trabaja con polinomios, a los números a y b se le llaman *coeficientes de la ecuación de primer grado*. Al número b también se le llama *término independiente*. Al sustituir la incógnita x por su valor se ha de verificar la igualdad. Claramente la incógnita ha de tomar el valor

$$\boxed{x=\frac{b}{a}}$$

ya que

$$ax=a\frac{b}{a}=\frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}}=b$$

Observa que la división $\frac{b}{a}$ se puede llevar a cabo porque hemos supuesto que $a\neq 0$.

En realidad, para despejar x, lo que hemos hecho es dividir ambos miembros de la igualdad entre a:

$$ax=b\Rightarrow\frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}}=\frac{b}{a}\Rightarrow x=\frac{b}{a}$$

Esta propiedad se aprende, no con demasiada corrección, con la siguiente frase: *"lo que está multiplicando pasa al otro miembro dividiendo"*. En este caso, como a multiplica a x, pasa al otro miembro dividiendo, con lo que $x=\frac{b}{a}$.

Sin embargo hay que tener cuidado con la técnica anterior, y tener en cuenta que en realidad la propiedad que se aplica es: *"si se dividen los dos miembros de una igualdad entre un mismo número distinto de cero, la igualdad no varía"*. Esta propiedad de las igualdades es, de hecho, la misma que esta otra: *"si se multiplican los dos miembros de una igualdad por un mismo número, la igualdad no varía"*. Observa y verás:

$$ax=b\Rightarrow\frac{1}{a}\cdot ax=\frac{1}{a}\cdot b\Rightarrow\frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}}=\frac{b}{a}\Rightarrow x=\frac{b}{a}$$

Acabamos pues de recordar que dividir entre un número a distinto de cero es lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{a}$.

Ejemplo 1

La solución de la ecuación de primer grado $3x=-4$ es $x=\frac{-4}{3}=-\frac{4}{3}$, ya que $3\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{12}{3}=-4$, con lo que se verifica la igualdad inicial. Observa que, realmente, tal y como se ha comentado anteriormente, para despejar la incógnita x, se han dividido los dos miembros de la igualdad entre 3:

$$3x=-4\Rightarrow\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\frac{-4}{3}\Rightarrow x=-\frac{4}{3}$$

Como conclusión, decir que para resolver cualquier ecuación de primer grado, debemos llegar, mediante un proceso o una serie de pasos, a la igualdad $ax=b$ ya que, en este momento, tendremos la solución: $x=\frac{b}{a}$.

Procedimiento para resolver una ecuación de primer grado

Una ecuación de primer grado no aparece habitualmente en la forma $ax=b$, sino que se presenta como una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que pueden aparecer corchetes, paréntesis y fracciones. Por ejemplo:

$$\frac{2x}{3}-3\frac{x-1}{4}+x-5=\frac{5(x-3)}{6}-\frac{x-3\left[x+1-2(x+6)\right]}{2}-3(x+2)$$

Recordemos que la expresión que se encuentra a la izquierda de la igualdad recibe el nombre de *primer miembro de la ecuación* y que la expresión que está a la derecha de la igualdad se llama *segundo miembro de la ecuación*.

Los pasos para resolver una ecuación cualquiera de primer grado son los siguientes:

1. ***Eliminar los corchetes y paréntesis***.
2. ***Eliminar los denominadores***. Para ello se multiplican todos y cada uno de los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
3. ***Trasponer términos***. Lo que se quiere decir con esto es que debemos presentar los términos en los que aparece la incógnita en uno de los miembros de la igualdad, y los términos que no tienen incógnita en el otro miembro de la igualdad. Para ello aplicamos la siguiente y conocida propiedad de las igualdades:
   "Si se suma o se resta la misma cantidad a los dos miembros de una igualdad, la igualdad no varía."
4. ***Reducir términos semejantes***. Una vez realizada la trasposición de términos podremos sumar y restar todos los términos de ambos miembros pues serán todos semejantes. De este modo la ecuación aparecerá ya de la forma $ax=b$.
5. ***Despejar la incógnita***. Una vez despejada la incógnita es conveniente simplificarla, caso de que sea posible.

Ilustraremos este proceso con varios ejemplos.

Ejemplo 2

$$2x-4+5x-3+6=7x+1-2-4+4x-5$$

Esta ecuación no tiene ni corchetes, ni paréntesis y además tampoco aparecen fracciones en ella. Por tanto nos podemos saltar los pasos 1 y 2, y comenzar directamente con el paso 3, es decir, con la trasposición de términos. Para ello vamos a presentar los términos con la incógnita en el primer miembro y los términos sin incógnita en el segundo. Observa que sumando 4, sumando 3 y restando 6 en ambos miembros de la igualdad, tenemos:

$$2x-\cancel{4}+5x-\cancel{3}+\cancel{6}+\cancel{4}+\cancel{3}-\cancel{6}=7x+1-2-4+4x-5+4+3-6\ ;$$

$$2x+5x=7x+1-2-4+4x-5+4+3-6$$

Ahora, si restamos $7x$ y $4x$ en ambos miembros de la igualdad obtenemos:

$$2x+5x-7x-4x=\cancel{7x}+1-2-4+\cancel{4x}-5+4+3-6-\cancel{7x}-\cancel{4x}\ ;$$

$$2x+5x-7x-4x=1-2-4-5+4+3-6$$

La trasposición de términos se aprende con frecuencia mediante la siguiente regla: *"lo que está sumando pasa al otro miembro restando, y lo que está restando pasa al otro miembro sumando"*. Observa que como 4 y 3 estaban restando en el primer miembro, pasan al segundo sumando, y que como 6 estaba sumando en el primer miembro, pasa al segundo miembro restando. De igual modo, como $7x$ y $4x$ estaban sumando en el segundo miembro sumando, pasan al primero restando. No olvides sin embargo que, para ser precisos, esta regla práctica es consecuencia de la propiedad de las igualdades descrita anteriormente:

"Si se suma o se resta la misma cantidad a los dos miembros de una igualdad, la igualdad no varía."

Ahora reducimos términos semejantes y despejamos la incógnita:

$$-4x=-9\Rightarrow x=\frac{-9}{-4}\Rightarrow x=\frac{9}{4}$$

Ejemplo 3

$$\frac{2x-1}{3}+3x-\frac{x-2}{9}=1-\frac{3x+2}{6}$$

Esta ecuación no tiene ni corchetes ni paréntesis, con lo que podemos ir directamente al paso número 2. Para eliminar los denominadores, multiplicaremos todos los términos por el mínimo común múltiplo de ellos. En este caso $\text{mcm}(3,\ 9,\ 6)=18$. Entonces:

$$18\cdot\frac{2x-1}{3}+18\cdot 3x-18\cdot\frac{x-2}{9}=18\cdot 1-18\cdot\frac{3x+2}{6}\ ;$$

$$6(2x-1)+54x-2(x-2)=18-3(3x+2)$$

Observa que lo que hemos hecho es dividir el mínimo común múltiplo (en este caso 18) entre cada uno de los denominadores, utilizando la siguiente propiedad de las fracciones:

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{c}\cdot b$$

En nuestro caso, fíjate lo que se ha hecho en el primer término: $18\cdot\frac{2x-1}{3}=\frac{18}{3}\cdot(2x-1)=6(2x-1)$

Se ha transformado de este modo la ecuación con denominares en una ecuación sin ellos, aunque ahora tenemos paréntesis. Pero estos se eliminan fácilmente:

$$12x-6+54x-(2x-4)=18-(9x+6)\ ;$$

$$12x-6+54x-2x+4=18-9x-6$$

En este paso hay que tener especial cuidado con los signos. Recuerda que un menos delante de un paréntesis cambiará de signo todo lo que va tras él, ya que restar un polinomio es sumar el opuesto del mismo.

Ahora sólo queda trasponer términos, reducir términos semejantes y despejar la incógnita que, aunque parece mucho, es lo más sencillo en el proceso de resolución de una ecuación de primer grado.

$$12x+54x-2x+9x=18-6+6-4\Rightarrow 73x=14\Rightarrow x=\frac{14}{73}$$

Ejemplo 4

$$2\frac{x+1}{5}-\frac{1-3x}{3}=\frac{4x-1}{6}3+2\frac{x}{15}$$

En este caso, parece que no hay paréntesis, pero sí que los hay ya que, por ejemplo $2\frac{x+1}{5}=\frac{2(x+1)}{5}=\frac{2x+2}{5}$. Así que lo primer que haremos es efectuar estos productos y dejar la ecuación solamente con denominadores:

$$\frac{2x+2}{5}-\frac{1-3x}{3}=\frac{12x-3}{6}+\frac{2x}{15}$$

Ahora multiplicamos por 30, que es el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$6(2x+2)-10(1-3x)=5(12x-3)+2\cdot 2x\Rightarrow 12x+12-10+30x=60x-15+4x$$

Por último trasponemos términos, reducimos términos semejantes y despejamos la incógnita:

$$12x+30x-60x-4x=-15-12+10\Rightarrow -22x=-17\Rightarrow x=\frac{-17}{-22}\Rightarrow x=\frac{17}{22}$$

Ejemplo 5

$$\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{4}\right)-5\frac{2x-3}{3}=x\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{x-1}{4}$$

Eliminemos paréntesis:

$$\frac{2x-2}{6}-\frac{2}{12}-\frac{10x-15}{3}=x-\frac{2x}{3}+\frac{x-1}{4}$$

Eliminemos denominadores multiplicando por el mínimo común múltiplo, que es 12:

$$2(2x-2)-1\cdot 2-4(10x-15)=12x-4\cdot 2x+3(x-1)\Rightarrow 4x-4-2-40x+60=12x-8x+3x-3$$

Trasponemos términos, reducimos términos semejantes y despejamos la incógnita:

$$4x-40x-12x+8x-3x=-3+4+2-60\Rightarrow -43x=-57\Rightarrow x=\frac{-57}{-43}\Rightarrow x=\frac{57}{43}$$

Ejemplo 6

Vamos a finalizar resolviendo la ecuación de primer grado con que se abría esta sección. Observa que no se explican como antes los pasos que se van dando. Debes de identificar cada uno de ellos.

$$\frac{2x}{3}-3\frac{x-1}{4}+x-5=\frac{5(x-3)}{6}-\frac{x-3\left[x+1-2(x+6)\right]}{2}-3(x+2)\ ;$$

$$\frac{2x}{3}-\frac{3x-3}{4}+x-5=\frac{5x-15}{6}-\frac{x-3\left[x+1-2x-12\right]}{2}-3x-6\ ;$$

$$\frac{2x}{3}-\frac{3x-3}{4}+x-5=\frac{5x-15}{6}-\frac{x-3x-3+6x+36}{2}-3x-6\ ;$$

$$\frac{2x}{3}-\frac{3x-3}{4}+x-5=\frac{5x-15}{6}-\frac{4x+33}{2}-3x-6\ ;$$

$$4\cdot 2x-3(3x-3)+12x-12\cdot 5=2(5x-15)-6(4x+33)-12\cdot 3x-12\cdot 6\ ;$$

$$8x-9x+9+12x-60=10x-30-24x-198-36x-72\ ;$$

$$8x-9x+12x-10x+24x+36x=-30-198-72-9+60\ ;$$

$$61x=-249\ ;$$

$$x=-\frac{249}{61}$$

Ecuaciones de segundo grado

Definición y elementos de la ecuación de segundo grado

Una *ecuación de segundo grado* es una igualdad del tipo:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

donde a, b y c son números reales conocidos con $a\neq 0$, y reciben el nombre de *coeficientes* de la ecuación de segundo grado. Al igual que en el caso de las ecuaciones de primer grado, al número desconocido x se le llama *incógnita*.

Ecuaciones de segundo grado incompletas

- **Caso 1**: $b=0$

En este caso la ecuación de segundo grado toma la forma:

$$\boxed{ax^2+c=0}$$

Para resolverlas se despeja x^2 y luego se extrae la raíz cuadrada para despejar finalmente la incógnita x. Hay que tener en cuenta que:

- ✓ Si el radicando es mayor que cero obtendremos dos soluciones, la raíz cuadrada con signo positivo y la raíz cuadrada con signo negativo.
- ✓ Si el radicando es cero la solución es $x=0$.
- ✓ Si el radicando es negativo la ecuación de segundo grado no tiene soluciones reales.

Nota: el *radicando* de una raíz es "aquello que se encuentra dentro de la raíz".

Ejemplo 7

$$3x^2-24=0$$

Despejamos x^2:

$$3x^2=24\Rightarrow x^2=\frac{24}{3}\Rightarrow x^2=8$$

Extraemos la raíz cuadrad de 8. Como 8 es positivo tenemos dos soluciones:

$$x=\sqrt{8}=\begin{cases}x_1=+\sqrt{8}\\ x_2=-\sqrt{8}\end{cases}$$

Observa que, cuando la ecuación de segundo grado, tiene dos soluciones, éstas se denotan con subíndices: x_1, x_2.

Ejemplo 8

$$6x^2+12=0$$

Despejamos x^2:

$$6x^2=-12\Rightarrow x^2=-\frac{12}{6}\Rightarrow x^2=-2$$

Al intentar extraer la raíz cuadrada de -2, observamos que no podemos hacerlo porque -2 es negativo:

$x=\sqrt{-2}$ (no existe, pues no hay ningún número cuyo cuadrado sea -2)

Así pues, en este caso la ecuación no tiene soluciones reales.

- **Caso 2**: $c=0$

En este caso la ecuación de segundo grado toma la forma:

$$\boxed{ax^2+bx=0}$$

El proceso de resolución consiste en extraer factor común la incógnita x pues ésta aparece en ambos términos. Una de las soluciones siempre es $x_1=0$. La otra solución se obtiene de igualar a cero el otro factor y de resolver la correspondiente ecuación de primer grado.

Veámoslo:

$$ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ ax+b=0 \Rightarrow ax=-b \Rightarrow x_2=-\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Ejemplo 9

$$3x^2-18x=0$$

Sacamos x factor común:

$$x(3x-18)=0$$

Una solución es $x_1=0$. La otra se obtiene de igualar a cero el factor $3x-18$:

$$x(3x-18)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ 3x-18=0 \Rightarrow 3x=18 \Rightarrow x=\dfrac{18}{3} \Rightarrow x_2=6 \end{cases}$$

Ecuación de segundo grado. Caso general

En este caso vamos a suponer que los tres coeficientes a, b y c son todos distintos de cero. Este caso es el más general y la ecuación de segundo grado queda, en su forma reducida, así:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

La solución se obtiene de sustituir los coeficientes a, b y c en la siguiente fórmula:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Observa que el símbolo $\pm$ indica que, para obtener las dos posibles soluciones, hay que sumar por un lado y restar por otro:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ; \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo 10

$$3x^2-5x-2=0$$

En este caso $a=3$, $b=-5$ y $c=-2$. Sustituyendo en la fórmula anterior:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot(-2)}}{2\cdot3}=\frac{5\pm\sqrt{25-(-24)}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{5\pm7}{6}=\begin{cases} x_1=\dfrac{5+7}{6} \Rightarrow x_1=2 \\ x_2=\dfrac{5-7}{2} \Rightarrow x_2=-1 \end{cases}$$

A la expresión b^2-4ac, situada en el interior de la raíz de la fórmula que proporciona las soluciones, se le llama *discriminante* de la ecuación de segundo grado. Pueden ocurrir tres cosas:

- Si el discriminante es mayor que cero ($b^2-4ac>0$) la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones reales (véase el ejemplo anterior).
- Si el discriminante es igual a cero ($b^2-4ac=0$) la ecuación de segundo grado tiene una única solución, que se suele llamar solución doble. Esta solución se obtiene mediante la expresión:

$$x=\frac{-b}{2a}$$

  Es fácil ver la demostración:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}=\frac{-b\pm 0}{2a}=\frac{-b}{2a}$$

- Si el discriminante es menor que cero ($b^2-4ac<0$) la ecuación de segundo grado no tiene soluciones reales. La razón es, de nuevo, la no existencia de raíces cuadradas de números negativos en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 11

$$4x^2-12x+9=0$$

Ahora tenemos que $a=4$, $b=-12$ y $c=9$. Por tanto el discriminante es:

$$b^2-4ac=(-12)^2-4\cdot4\cdot9=144-144=0$$

Como el discriminante es menor que cero, la solución de la ecuación de segundo grado es única. Ésta es:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-12)}{2\cdot4}=\frac{12}{8}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

Procedimiento para resolver una ecuación de segundo grado

Al igual que en el caso de las ecuaciones de primer grado, una ecuación de primer grado no suele aparecer en su forma reducida, tal y como se ha tratado en el apartado anterior, sino que se presenta como una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que pueden aparecer corchetes, paréntesis y fracciones. Por ejemplo:

$$\frac{3(x^2-4x+1)}{2}-5\frac{x+3-x^2}{3}=x-\frac{-2x^2-2(x+2)}{4}-8$$

Los pasos para resolver una ecuación de segundo grado son muy similares a los que se seguían para resolver ecuaciones de primer grado:

1. ***Eliminar los corchetes y paréntesis***.
2. ***Eliminar los denominadores***. Para ello se multiplican todos y cada uno de los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
3. ***Colocar todos los términos en el primer miembro.*** De este modo en el segundo miembro aparecerá un cero.
4. ***Reducir términos semejantes***. Una vez realizada la trasposición de términos podremos sumar y restar todos los términos de ambos miembros pues serán todos semejantes. De este modo la ecuación aparecerá ya en su forma reducida más general $ax^2+bx+c=0$, o bien se presentará en una de sus dos formas incompletas: $ax^2+c=0$, $ax^2+bx=0$.
5. ***Despejar la incógnita***. Para ello procederemos como ya se ha explicado en el caso de que la ecuación de segundo grado sea incompleta. Si la ecuación se presenta en su forma reducida más general se aplicará la fórmula ya conocida para despejar la incógnita:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Veamos a continuación algunos ejemplos de resolución de ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo 12

$$2\left(3x^2+5x\right)=2-x$$

Esta ecuación no tiene denominadores así que bastará eliminar el paréntesis y colocar todos los términos en el primer miembro de la ecuación:

$$2\left(3x^2+5x\right)=2-x\Rightarrow 6x^2+10x=2-x\Rightarrow 6x^2+10x-2+x=0\Rightarrow 6x^2+11x-2=0$$

Los coeficientes son $a=6$, $b=11$ y $c=-2$. Entonces:

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\cdot 6\cdot(-2)}}{2\cdot 6}=\frac{-11\pm\sqrt{121+48}}{12}=\frac{-11\pm\sqrt{169}}{12}=\frac{-11\pm 13}{12}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-11+13}{12}\Rightarrow x_1=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}\\ x_2=\dfrac{-11-13}{12}\Rightarrow x_2=-2\end{cases}$$

Ejemplo 13

$$\frac{5x}{4}-\frac{x^2}{12}-\frac{5}{3}=\frac{3x}{8}$$

Esta ecuación de segundo grado no tiene paréntesis, pero sí que aparecen denominadores. Multiplicamos todos los términos por el mínimo común múltiplo de los mismos, que es 24.

$$24\frac{5x}{4}-24\frac{x^2}{12}-24\frac{5}{3}=24\frac{3x}{8}\Rightarrow 6\cdot 5x-2\cdot x^2-8\cdot 5=3\cdot 3x\Rightarrow 30x-2x^2-40=9x$$

Ahora colocamos todos los términos en el primer miembro y reducimos términos semejantes:

$$30x-2x^2-40-9x=0\Rightarrow -2x^2+21x-40=0$$

Los coeficientes ahora son $a=-2$, $b=21$ y $c=-40$. Por tanto:

$$x=\frac{-21\pm\sqrt{21^2-4\cdot(-2)\cdot(-40)}}{2\cdot(-2)}=\frac{-21\pm\sqrt{441-320}}{-4}=\frac{-21\pm\sqrt{121}}{-4}=\frac{-21\pm 11}{-4}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-21+11}{-4}\Rightarrow x_1=\dfrac{-10}{-4}=\dfrac{5}{2}\\ x_2=\dfrac{-21-11}{-4}\Rightarrow x_2=8\end{cases}$$

Ejemplo 14

$$(2x-5)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$$

En esta ecuación, para eliminar los paréntesis, tenemos que aplicar la propiedad distributiva ("todos por todos"):

$$2x\cdot x-2x\cdot\frac{3}{2}-5x+5\cdot\frac{3}{2}=0\Rightarrow 2x^2-3x-5x+\frac{15}{2}=0$$

Eliminamos denominadores multiplicando todos los términos por 2, reducimos términos semejantes y despejamos:

$$2\cdot 2x^2-2\cdot 3x-2\cdot 5x+2\cdot\frac{15}{2}=2\cdot 0\Rightarrow 4x^2-6x-10x+15=0\Rightarrow 4x^2-16x+15=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 4\cdot 15}}{2\cdot 4}=\frac{16\pm\sqrt{256-240}}{8}=\frac{16\pm\sqrt{16}}{8}=\frac{16\pm 4}{8}=\begin{cases}x_1=\dfrac{16+4}{8}\Rightarrow x_1=\dfrac{20}{8}=\dfrac{5}{2}\\ x_2=\dfrac{16-4}{8}\Rightarrow x_2=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Ejemplo 15

Resolvamos ahora la ecuación que se ponía como ejemplo al principio de este apartado.

$$\frac{3\left(x^2-4x+1\right)}{2}-5\frac{x+3-x^2}{3}=x-\frac{-2x^2-2\left(x+2\right)}{4}-8$$

Eliminamos paréntesis:

$$\frac{3x^2-12x+3}{2}-\frac{5x+15-5x^2}{3}=x-\frac{-2x^2-2x-4}{4}-8$$

Eliminamos denominadores. Para ello multiplicamos por 12 cada uno de los términos de la ecuación:

$$12\frac{3x^2-12x+3}{2}-12\frac{5x+15-5x^2}{3}=12x-12\frac{-2x^2-2x-4}{4}-12\cdot 8\ ;$$

$$6\left(3x^2-12x+3\right)-4\left(5x+15-5x^2\right)=12x-3\left(-2x^2-2x-4\right)-96\ ;$$

$$18x^2-72x+18-20x-60+20x^2=12x+6x^2+6x+12-96$$

Colocamos todos los términos en el primer miembro y reducimos términos semejantes:

$$18x^2-72x+18-20x-60+20x^2-12x-6x^2-6x-12+96=0\ ;$$

$$32x^2-110x+42=0$$

Antes de obtener el valor de x mediante nuestra fórmula haremos algo muy importante. Si los coeficientes tienen un divisor común se pueden dividir todos los términos entre este divisor común, quedando una ecuación de segundo grado equivalente a la anterior, pero con la diferencia de que los coeficientes serán más pequeños y, por tanto, más fácil operar con ellos a la hora de aplicar la fórmula mediante la que obtenemos x.

Los coeficientes de nuestra ecuación tienen un divisor común: el 2. Así, dividiendo entre 2 cada uno de los términos obtenemos esta otra ecuación:

$$16x^2-55x+21=0$$

Los coeficientes de esta ecuación son $a=16$, $b=-55$ y $c=21$ (más fáciles de tratar que los de la ecuación anterior). De este modo:

$$x=\frac{55\pm\sqrt{(-55)^2-4\cdot 16\cdot 21}}{2\cdot 16}=\frac{55\pm\sqrt{3025-1344}}{32}=\frac{55\pm\sqrt{1681}}{32}=\frac{55\pm 41}{32}=\begin{cases} x_1=\dfrac{55+41}{32}=\dfrac{96}{32}\Rightarrow x_1=3 \\ x_2=\dfrac{55-41}{32}=\dfrac{14}{32}\Rightarrow x_2=\dfrac{7}{16}\end{cases}$$

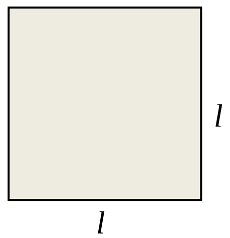
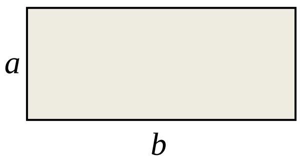
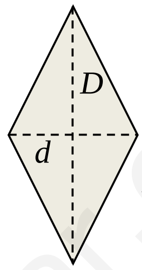
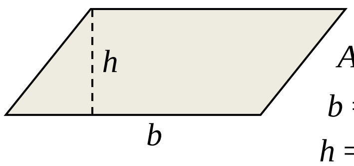
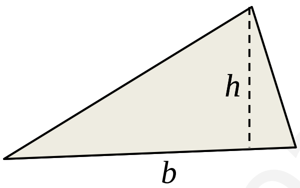
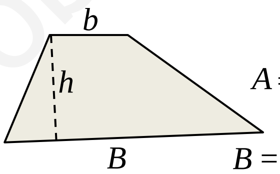
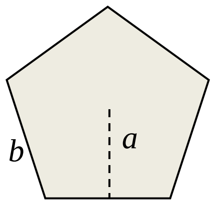
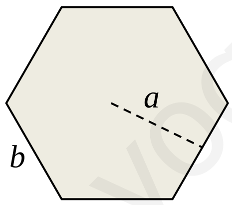
Nota final: la importancia de separar adecuadamente un paso del siguiente

Habrás observado que, cada vez que “damos un paso” sobre una ecuación, ya sea de primer o de segundo grado, para obtener otra ecuación equivalente, pero un poco más sencilla pues hemos conseguido suprimir paréntesis, o hemos eliminado denominadores, o bien se han reducido términos semejantes, etcétera, se ha separado la ecuación anterior de la siguiente o bien mediante el símbolo $\Rightarrow$ (que se traduce por “implica” o por “entonces”), o bien simplemente por un punto y coma (;). Ambas formas son adecuadas y son las que habitualmente se utilizan. También comentar que, ya sea mediante el punto y coma o mediante el símbolo $\Rightarrow$, cada paso se puede separar del siguiente escribiéndolo en renglones distintos, o uno a continuación de otro. Ambas formas son correctas también. Aunque al principio quizás sea conveniente escribir cada paso en un renglón distinto, pues así es posible que veas cada acción con más claridad. En estos apuntes se ha hecho de ambas formas, como habrás podido comprobar.

Área de figuras planas

Tendremos en cuenta que, en cada caso, llamaremos A al área o superficie de cada una de las figuras planas.

Polígonos

Cuadrado	Rectángulo	Rombo
 $A = l^2$ l = lado	 $A = b \cdot a$ b = base a = altura	 $A = \frac{D \cdot d}{2}$ D = diagonal mayor d = diagonal menor
Romboide o paralelogramo	**Triángulo**	**Trapecio**
 $A = b \cdot h$ b = base h = altura	 $A = \frac{b \cdot h}{2}$ b = base h = altura	 $A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$ B = base mayor b = base menor
Polígono regular: pentágono, hexágono, octógono, etc.		
 	Llamemos P al perímetro y n al número de lados de cada polígono regular. Entonces $P = b \cdot n$ y $A = \frac{P \cdot a}{2}$ b = lado	

Ejercicio resuelto

Calcula el área de un pentágono regular cuyo lado mide 6 cm si el radio de la circunferencia circunscrita es de 5 cm.

Solución

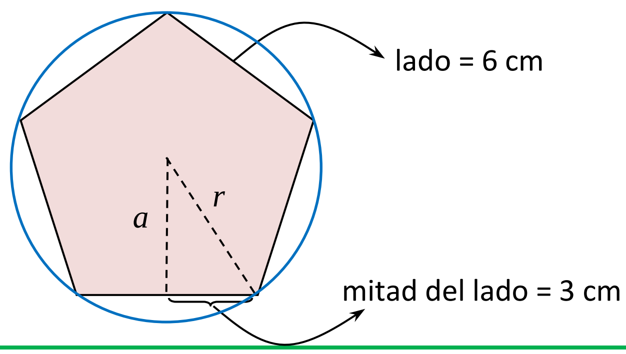
La apotema a forma un triángulo rectángulo con el radio r y la mitad del lado. Por tanto podemos aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud, es decir:

$$r^2 = 3^2 + a^2 \Rightarrow a^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4\,\text{cm}$$

Así, el área es:

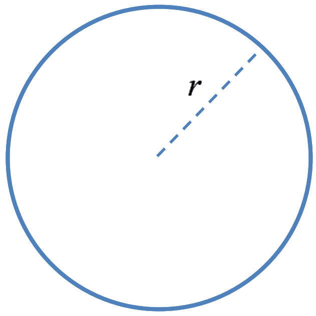
$$A = \frac{(6 \cdot 5) \cdot 4}{2} = 60\,\text{cm}^2$$



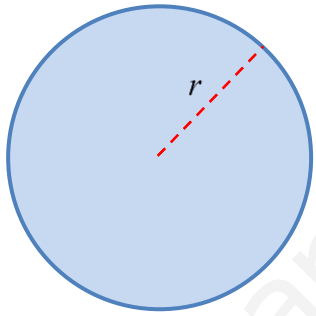
Figuras circulares

Seguiremos llamando A al área o superficie de cada figura circular. También denotaremos con L a la longitud de la figura circular correspondiente.

Circunferencia y círculo

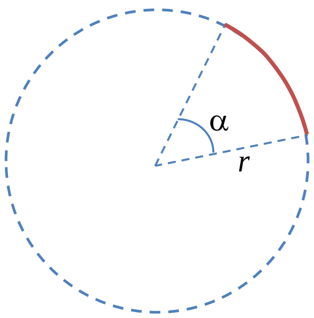


$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

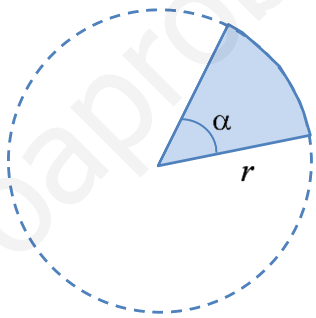


$$A = \pi \cdot r^2$$

Arco de circunferencia y sector circular

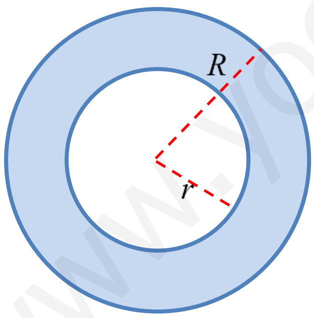


$$L = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^o}$$



$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^o}$$

Corona circular



R es el radio de la circunferencia mayor

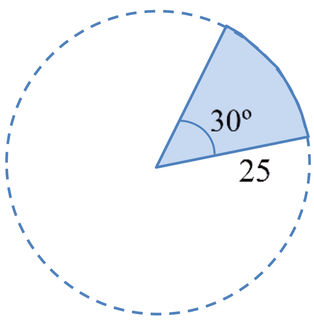
r es el radio de la circunferencia menor

$$A = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

Ejercicio resuelto

En un circuito de carreras completamente circular, de 25 m de radio, hay que trazar un arco de circunferencia con un ángulo de 30^o y pintar el sector circular correspondiente. Calcula la longitud del arco de la circunferencia y el área del sector circular.

Solución



La longitud del arco de circunferencia es:

$$L = 2\pi \cdot 25 \cdot \frac{30^o}{360^o} = 13{,}09\,\text{m}$$

El área del sector circular mide:

$$A = \pi \cdot 25^2 \cdot \frac{30^o}{360^o} = 163{,}62\,\text{m}^2$$