

EJERCICIOS (1 punto cada uno) (EN ESTE EXAMEN NO SE PUEDEN UTILIZAR DECIMALES)

1.- Dada la sucesión de término general $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, halla el valor de $(a_2 - a_3)^2$

2.- Halla los términos b_3 , b_4 y b_5 de la sucesión definida por recurrencia:

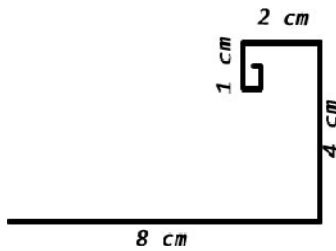
$$b_1 = 2 \quad b_2 = -2 \quad \text{y para } n \geq 3, \quad b_n = b_{n-2} - 3b_{n-1}$$

3.- El término central de una progresión aritmética de 21 términos es 20. ¿Cuál es el valor de la suma de los términos de la citada progresión?

4.- Intercala entre 3 y 5 dos números para obtener una progresión aritmética de cuatro términos.

5.- En una progresión aritmética, $a_5 = 10$ y $a_9 = 12$,

a) Halla a_1 b) Calcula la suma de los 121 primeros términos.



6.- En la figura de la izquierda aparecen los primeros tramos de una espiral cuadrada infinita. Halla su longitud.

7.- a) Da la definición por recurrencia de la sucesión:

$$2, 3, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{21}{8}, \dots$$

b) Da el término general de la sucesión:

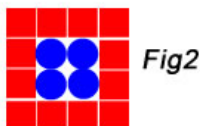
$$\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}, \dots$$

PROBLEMA (3 puntos) Observa las siguientes figuras formadas por círculos y cuadrados.

a) Dibuja la figura 4

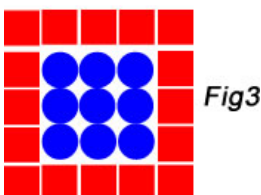


b) ¿Cuál sería el término general de la sucesión formada por los círculos? ¿Es una progresión? Justifica.



c) ¿Cuál sería el término general de la sucesión dada por los cuadrados? ¿Sería una progresión?. Justifica.

d) ¿De cuántos círculos y de cuántos cuadrados estaría formada la figura 20?



e) ¿Cuántos círculos contendría una figura con 164 cuadrados? ¿Qué lugar ocuparía esta figura?

SOLUCIÓN

EJERCICIO 1

$$a_2 = \frac{(-1)^2}{2+1} = \frac{1}{3} \quad a_3 = \frac{(-1)^3}{3+1} = -\frac{1}{4} \Rightarrow (a_2 - a_3)^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{49}{144}$$

EJERCICIO 2

$$b_1 = 2; \quad b_2 = -2; \quad b_3 = b_1 - 3b_2 = 2 - 3(-2) = 8; \quad b_4 = b_2 - 3b_3 = -2 - 3 \cdot 8 = -26; \quad b_5 = b_3 - 3b_4 = 8 - 3(-26) = 86$$

EJERCICIO 3

$$a_1 + a_{21} = 2a_{11} = 40 \Rightarrow S_{21} = \frac{21(a_1 + a_{21})}{2} = \frac{21 \cdot 40}{2} = 420$$

EJERCICIO 4

$$3 \quad \odot \quad \odot \quad 5 \Rightarrow 5 - 3 = 2 \Rightarrow d = \frac{2}{3}$$
$$a_1 = 3 \quad a_2 = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3} \quad a_3 = \frac{11}{3} + \frac{2}{3} = \frac{13}{3} \quad a_4 = \frac{13}{3} + \frac{2}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

EJERCICIO 5

$$a_5 = 10 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 = 12 \Rightarrow a_9 = a_5 + 4d \Rightarrow 12 = 10 + 4d \Rightarrow d = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{a) } a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 10 = a_1 + 4 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 8$$

$$\text{b) } a_{121} = a_1 + 120d = 8 + 120 \cdot \frac{1}{2} = 68 \Rightarrow S_{121} = \frac{121 \cdot (8 + 68)}{2} = 4598$$

EJERCICIO 6

Se trata de la suma de infinitos términos de una PG con $r = 1/2$, luego $S_\infty = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = 16$

EJERCICIO 7

$$\text{a) } a_1 = 2 \quad a_2 = 3 \quad \text{Para } n \geq 3, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \quad \text{b) } b_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

PROBLEMA

- a) Hay que dibujar 16 círculos rodeados de 20 cuadrados.
Para resolver los siguientes apartados observamos lo siguiente:

	Fig1	Fig2	Fig3	Fig4	
Círculos	1	4	9	16	b) Sucesión de término general $a_n = n^2$
Cuadrados	8	12	16	20	c) Progresión aritmética con $d = 4$ y $a_1 = 8$

- d) La figura 20 constaría de $20^2 = 400$ círculos y de $8 + (20-1) \cdot 4 = 8 + 76 = 84$ cuadrados.
- e) $164 = 8 + 4(n - 1) = 8 + 4n - 4 = 4n + 4 = 164$, de donde $n = 40$ (Fig 40) y contendría 1600 círculos.