Sistemas de ecuaciones

1.- Sistemas y soluciones

Ejemplos:

1.- Encontrar tres números enteros positivos que sumen 78. Escribir, con palabras o con símbolos, las posibilidades de elección que hay para el primer número, para el segundo y para el tercero.

Llamamos a esos tres números incógnita x , y , z . Hay muchas posibilidades. El primer número puede ser casi cualquiera (la única limitación es que no nos pasemos de 78), por ejemplo el 20. El 2º número también puede ser cualquiera (con tal de que sigamos son llegar a 78), por ejemplo el 30, pero ahora el tercero tiene que valor forzosamente $20 + 30 + z = 78 \rightarrow z = 78 - 20 - 30 = 28$.

2.- Encontrar tres enteros positivos que sumen 78, sabiendo que el primer número es el doble que el segundo. Una vez elegido el primer número, ¿cuántas posibilidades hay para el segundo? ¿Y para el tercero?

Ahora sabemos de entrada que $x = 2y$, o bien que $y = x / 2$. Podemos seguir dándole un valor cualquiera a x (con las mismas limitaciones que antes: no vale $x = 100$), por ejemplo, $x = 40$, pero ahora ya el valor de y es obligatoriamente $y = 40 / 2 = 20$. Y la z también tiene que valer forzosamente lo que falte hasta 78: $40 + 20 + z = 78 \rightarrow z = 78 - 40 - 20 = 18$

3.- Encontrar tres enteros positivos que sumen 78, sabiendo que el primer número es el doble que el segundo y que el tercero es tres unidades mayor que el primero.

En este tercer supuesto, nos limitan aún más el margen de maniobra, puesto que imponen otra condición más sobre los números. Si ahora le damos al primero un valor arbitrario ($x = 20$, por ejemplo), lo más probable es que no se cumplan todos los requisitos. Veámoslo: si $x = 20$, entonces $y = 10$, $z = 23$ y resulta que $20 + 10 + 23 = 53$ y no 78.
Podemos escribir las condiciones del problema en forma de ecuación:
1ª: $x + y + z = 78$ 2ª: $x = 2y$ 3ª: $z = x + 3$

Como $x = 2y$, la 3ª ecuación se puede escribir así: $z = 2y + 3$

Y en la 1ª ecuación ahora queda todo en función de y : $2y + y + 2y + 3 = 78$
Resolvemos esta ecuación: $5y + 3 = 78 \rightarrow 5y = 75 \rightarrow y = 75 / 5 = 15$
Y los números buscados tienen que ser $x = 2 . 15 = 30$, $y = 15$, $z = 30 + 3 = 33$
Efectivamente, $30 + 15 + 33 = 78$.

4.- Encontrar tres enteros positivos que sumen 78, sabiendo que el primer número es el doble que el segundo y que el tercero es cinco unidades mayor que el primero.

Procedemos como en el apartado anterior:
1ª ecuación: $x + y + z = 78$ *2ª:* $x = 2y$ *3ª:* $z = x + 5$
En la 3ª ecuación se puede sustituir x *por* $2y$ *y quedará* $z = 2y + 5$
Por tanto, en la 1ª ecuación, se sustituyen las incógnitas x , z *por sus expresiones en función de la* y *:* $2y + y + 2y + 5 = 78 \rightarrow 5y + 5 = 78 \rightarrow 5y = 73 \rightarrow y = 73/5$*, que no es un número entero, por lo que el problema así planteado no tiene solución.*

2.- Métodos de resolución

Ejemplos:

1.- Resuelve, por el método de sustitución, el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$$

Despejamos en la 2ª ecuación la incógnita y : 5 x - 7 = y
Sustituimos en la 1ª ecuación, escribiendo 5 x - 7 en lugar de y :
2 x - 3 . (5 x - 7) = -5
Así ya tenemos una ecuación en la que sólo aparece la incógnita x.
Resolvemos esta ecuación: 2 x - 15 x + 21 = - 5 → - 13 x = - 26 → x = 26 / 13 = 2
Llevando ese valor de la x a la 2ª ecuación: 10 - y = 7 → 10 - 7 = y → y = 3
La solución es: x = 2 , y = 3

2.- Resuelve el sistema anterior por el método de igualación:

Despejamos la misma incógnita en cada una de las ecuaciones. Va a ser algo más cómodo despejar la y, pero también se podría hacer con la x.

en la 1ª ecuación: 2x + 5 = 3 y → $y = \dfrac{2x+5}{3}$

En la 2ª ecuación: 5 x - 7 = y

Ahora igualamos ambas expresiones: $\dfrac{2x+5}{3}$ *= 5 x - 7 → 2 x + 5 = 3 . (5 x - 7) →*

→ 2 x + 5 = 15 x - 21 → 5 + 21 = 15 x - 2 x → 26 = 13 x → x = 26 / 13 = 2

Calculamos la y utilizando la 2ª ecuación: y = 5 x - 7 = 5 . 2 - 7 = 10 - 7 = 3

Sale la misma solución, claro.

3.- Resuelve el sistema anterior por el método de reducción:

Hay que multiplicar alguna de las ecuaciones por algún número, de forma que los coeficientes de una misma incógnita coincidan.
Vamos a multiplicar la 2ª ecuación por -3, con lo que esa 2ª ecuación ahora va a ser
(-3) . (5 x - y) = (-3) . 7 → - 15 x + 3 y = - 21
Ya tenemos la incógnita y con un coeficiente de 3, el mismo pero con signo distinto que su coeficiente en la 1ª ecuación. Ahora sumamos la 1ª ecuación y la 2ª multiplicada por (-3):

$$
\begin{array}{r}
2x - 3y = -5 \\
-15x + 3y = -21 \\
\hline
-13x \qquad = -26
\end{array}
$$

Con lo que ya podemos averiguar el valor de x:

$-13x = -26 \rightarrow 13x = 26 \rightarrow x = 26 / 13 = 2.$

El valor de y puede calcularse sustituyendo x = 2 en la 2ª ecuación (tal y como está desde el principio):

$5x - y = 7 \rightarrow 5 . 2 - y = 7 \rightarrow 10 - y = 7 \rightarrow 10 - 7 = y \rightarrow y = 3$

3.- Problemas

Ejemplos:

1.- Un vendedor ambulante vende bocadillos grandes, a 1 i cada uno, y pequeños, a 0,60 i . Cierto día recaudó 22,80 i por la venta de 30 bocadillos. ¿Cuántos eran grandes?

Llamamos x al nº de bocadillos grandes que ha vendido.
Llamamos y al nº de bocadillos pequeños que ha vendido.

Como en total, ese día, vendió 30 bocadillos, debe ser $x + y = 30$

Por la venta de bocadillos grandes recaudó 1 i multiplicado por el número de bocadillos de ese precio: $1 . x$
Por la venta de los pequeños obtuvo $0{,}60 . y$

Como en total recaudó 22,80 i , debe ser $1 . x + 0{,}60 . y = 22{,}80$

Así que el sistema a resolver es
$$\left\{\begin{array}{r} x + y = 30 \\ 1 . x + 0{,}60 . y = 22{,}80 \end{array}\right.$$

Lo haremos por sustitución; despejamos la y en la primera ecuación: $y = 30 - x$.

Sustituimos en la segunda ecuación: $1 . x + 0{,}60 . (30 - x) = 22{,}80$

Operamos: $1 . x + 18 - 0{,}60 . x = 22{,}80$. *Despejamos:*
$1 . x - 0{,}60 . x = 22{,}80 - 18 \rightarrow 0{,}40 . x = 4{,}80 \rightarrow x = 4{,}80 / 0{,}40 = 12$
Como $y = 30 - x$ *, resulta que* $y = 30 - 12 = 18$.

Así que vendió 12 bocadillos grandes y 18 pequeños.

Comprobamos esta solución: (a) total de bocadillos vendidos 12 + 18 = 30, correcto.
(b) total recaudado 12 . 1 + 18 . 0,60 = 12 + 10,80 = 22,80 i , correcto.

2.- En una reunión de jóvenes hay 25 chicas más que chicos. Salen de la reunión 10 chicas y 10 chicos y, ahora, queda doble número de chicas que de chicos. ¿Cuántos chicos y chicas había en la reunión?

Respuesta:

Llamamos x *al número de chicas que había inicialmente en la reunión;* y *al número de chicos.*

Inicialmente hay 25 chicas más que chicos: $x = y + 25$.
Salen de la reunión 10 chicas y 10 chicos, por lo que ahora sólo hay $x - 10$ *chicas, mientras que el número de chicos es de* $y - 10$. *Y ahora el número de chicas es el doble que el de chicos, es decir,* $x - 10 = 2 \,.\, (y - 10)$.

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x = y + 25 \\ x - 10 = 2 - (y - 10) \end{cases}$

Sustituyendo la expresión de la x *de la primera ecuación en la segunda se llega a:*
$y + 25 - 10 = 2 \,.\, (y - 10) \rightarrow y + 25 - 10 = 2y - 20 \rightarrow 25 - 10 + 20 = 2y - y \rightarrow$
$\rightarrow 35 = y \rightarrow y = 35$
Y, por tanto, como $x = y + 25$, *resulta que* $x = 35 + 25 = 60$

Había, al principio, 60 chicas y 35 chicos.

Comprobación: (a) al principio había 25 chicas más que chicos; efectivamente, 60 - 35 = 25. (b) se retiran 10 de cada sexo, por lo que ahora quedarán 60 - 10 = 50 chicas y 35 - 10 = 25 chicos; en efecto, el número restante de chicas (50) es el doble que el de chicos (25).