EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1 Halla el valor de *x* para que las siguientes fracciones sean equivalentes.

a) $\dfrac{15}{3} = \dfrac{x}{4}$ **b)** $\dfrac{2}{x} = \dfrac{8}{20}$

a) $15 \cdot 4 = 3 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{60}{3} = 20$

b) $2 \cdot 20 = x \cdot 8 \Rightarrow x = \dfrac{40}{8} = 5$

1.2 Expresa estas fracciones con el mismo denominador.

a) $\dfrac{3}{5}, \dfrac{11}{15}$ y $\dfrac{13}{20}$ **b)** $\dfrac{7}{9}, \dfrac{3}{12}$ y $\dfrac{6}{18}$

a) $\dfrac{3}{5} = \dfrac{3 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \dfrac{36}{60}$ $\dfrac{11}{15} = \dfrac{11 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \dfrac{44}{66}$ $\dfrac{13}{20} = \dfrac{13 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \dfrac{39}{60}$

b) $\dfrac{7}{9} = \dfrac{7 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \dfrac{28}{36}$ $\dfrac{3}{12} = \dfrac{3 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \dfrac{9}{36}$ $\dfrac{6}{18} = \dfrac{6 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \dfrac{12}{36}$

1.3 Amplifica cada una de estas fracciones: $\dfrac{7}{2}, \dfrac{9}{5}, \dfrac{1}{25}$ y $\dfrac{11}{50}$, a otra fracción equivalente que tenga por denominador una potencia de 10.

$\dfrac{7}{2} = \dfrac{7 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \dfrac{35}{10}$ $\dfrac{9}{5} = \dfrac{9 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \dfrac{18}{10}$ $\dfrac{1}{25} = \dfrac{1 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \dfrac{4}{100}$ $\dfrac{11}{50} = \dfrac{11 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \dfrac{22}{100}$

1.4 Una clase tiene 42 alumnos. ¿Se puede afirmar que $\dfrac{3}{6}$ son chicos y $\dfrac{4}{7}$ chicas? Razona la respuesta.

$\dfrac{3}{6}$ de 42 es $3 \cdot \dfrac{42}{6} = 21$ $\dfrac{4}{7}$ de 42 es $4 \cdot \dfrac{42}{7} = 24$

No podemos hacer tal afirmación, ya que de ese modo habría $21 + 24 = 45$ alumnos y alumnas en la clase, lo cual no es cierto.

1.5 Realiza y simplifica estas operaciones.

a) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{12} + \dfrac{7}{8}$ **b)** $\dfrac{7}{3} - \dfrac{2}{10} + \dfrac{3}{5}$ **c)** $\dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{4} : \dfrac{2}{3}$ **d)** $\dfrac{2}{3} : \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{9}{2}$

a) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{12} + \dfrac{7}{8} = \dfrac{18}{24} - \dfrac{10}{24} + \dfrac{21}{24} = \dfrac{29}{24}$

b) $\dfrac{7}{3} - \dfrac{2}{10} + \dfrac{3}{5} = \dfrac{70}{30} - \dfrac{6}{30} + \dfrac{18}{30} = \dfrac{82}{30} = \dfrac{41}{15}$

c) $\dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{4} : \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{20} : \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{20} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{18}{40} = \dfrac{9}{20}$

d) $\dfrac{2}{3} : \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{10}{12} \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{90}{24} = \dfrac{15}{4}$

1.6 Efectúa estas operaciones.

a) $1 - \dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{7}$ **b)** $-\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{3} - 3$ **c)** $8 \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{-3}{4}$ **d)** $\dfrac{3}{2} : \dfrac{7}{6} \cdot 9$

a) $1 - \dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{21}{21} - \dfrac{35}{21} + \dfrac{6}{21} = -\dfrac{8}{21}$

b) $-\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{3} - 3 = -\dfrac{6}{15} + \dfrac{20}{15} - \dfrac{45}{15} = -\dfrac{31}{15}$

c) $8 \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{-3}{4} = -\dfrac{8 \cdot 5 \cdot 3}{6 \cdot 4} = -\dfrac{120}{24} = -5$

d) $\dfrac{3}{2} : \dfrac{7}{6} \cdot 9 = \dfrac{18}{14} \cdot 9 = \dfrac{162}{14} = \dfrac{81}{7}$

1.7 **Calcula y simplifica el resultado.**

a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{5} : \frac{4}{15}$ 　　　 **b)** $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$

a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{5} : \frac{4}{15} = \frac{3}{2} + \frac{15}{20} = \frac{30}{20} + \frac{15}{20} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$

b) $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = -\frac{1}{3} - \frac{18}{12} = -\frac{4}{12} - \frac{18}{12} = -\frac{22}{12} = -\frac{11}{6}$

1.8 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{2} + \frac{5}{6} \cdot \left(1 - \frac{7}{2}\right)$

b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{6} - \frac{5}{2}\right) : 3$

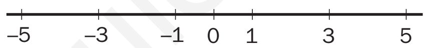
c) $3 - \frac{1}{2} \cdot 4 : \left(\frac{3}{5} - 1\right) + 1$

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{2} + \frac{5}{6} \cdot \left(1 - \frac{7}{2}\right) = \frac{21}{56} + \frac{5}{6} \cdot \frac{-5}{2} = \frac{21}{56} - \frac{25}{12} = \frac{21 \cdot 3}{168} - \frac{25 \cdot 14}{168} = -\frac{287}{168}$

b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{6} - \frac{5}{2}\right) : 3 = \frac{5}{12} \cdot \frac{-13}{6} : 3 = \frac{-65}{72} : 3 = \frac{-65}{72} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{65}{216}$

c) $3 - \frac{1}{2} \cdot 4 : \left(\frac{3}{5} - 1\right) + 1 = 3 - 2 : \frac{-2}{5} + 1 = 3 + 5 + 1 = 9$

1.9 **Dibuja los puntos de abscisa 1 y −1; 3 y −3; 5 y −5. ¿Cómo son estos pares de puntos respecto del origen?**

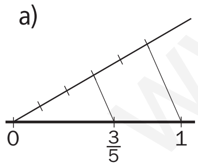


Son puntos simétricos respecto al origen.

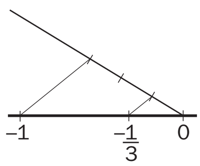
1.10 **Utiliza el método de Tales para representar en una recta estos números racionales.**

a) $\frac{3}{5}$ 　　 **b)** $-\frac{1}{3}$ 　　 **c)** $\frac{12}{5}$ 　　 **d)** $\frac{9}{7}$

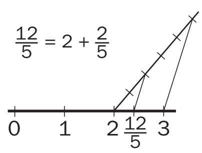
a)



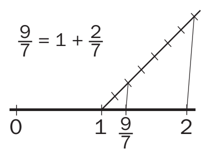
b)



c)

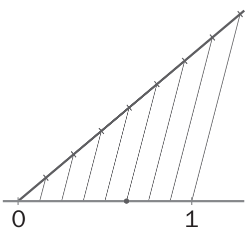


d)

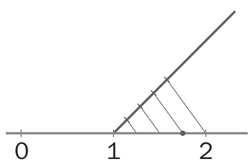


1.11 **Calcula los valores de las abscisas de los puntos de cada figura.**

a)



b)



a) $\frac{5}{8}$

b) $1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

1.12 **Escribe cada número fraccionario en forma decimal. Indica qué tipo de decimal es cada uno y, si existen, la parte entera, el anteperíodo y el período.**

a) $\frac{12}{9}$ **b)** $\frac{7}{15}$ **c)** $\frac{17}{6}$ **d)** $\frac{5}{7}$

a) $1,\widehat{3}$. La parte entera es 1, no hay anteperíodo, y el período es 3.

b) $0,4\widehat{6}$. La parte entera es 0, el anteperíodo es 4 y el período es 6.

c) $2,8\widehat{3}$. La parte entera es 2, el anteperíodo es 8 y el período es 3.

d) $0,\widehat{714285}$. La parte entera es 0, no hay anteperíodo y el período es 714285.

1.13 **Sin hacer la división, explica qué tipo de expresión decimal corresponde a cada fracción.**

a) $\frac{126}{12}$ **b)** $\frac{59}{22}$ **c)** $\frac{29}{27}$ **d)** $\frac{177}{45}$

a) $\frac{126}{12} = \frac{21}{2}$ Decimal exacto

c) $27 = 3^3$ Periódico puro

b) $22 = 2 \cdot 11$ Periódico mixto

d) $\frac{177}{45} = \frac{59}{15}$; $15 = 3 \cdot 5$ Periódico mixto

1.14 **Escribe en forma fraccionaria los números.**

a) 3,5 **c) −3,55…** **e) 5,255…** **g) 1,11…**

b) 0,66… **d) 2,1515…** **f) 0,7575…** **h) 6,2525…**

a) $\frac{35}{10} = \frac{7}{2}$

b) $\frac{6 - 0}{9} = \frac{2}{3}$

c) $-\frac{35 - 3}{9} = -\frac{32}{9}$

d) $\frac{215 - 2}{99} = \frac{213}{99} = \frac{71}{33}$

e) $\frac{525 - 52}{90} = \frac{473}{90}$

f) $\frac{75 - 0}{99} = \frac{25}{33}$

g) $\frac{11 - 1}{9} = \frac{10}{9}$

h) $\frac{625 - 6}{99} = \frac{619}{99}$

1.15 **Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales.**

a) $\frac{3}{5}$ **c)** $\sqrt{7}$ **e) 632**

b) 0,75 **d) −4** **f) 0,14 144 1114…**

a) Racional c) Irracional e) Racional

b) Racional d) Racional f) Irracional

1.16 **Escribe tres números irracionales que estén dados por raíces y tres que no lo estén.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Tres números irracionales dados por raíces: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$

Tres números irracionales que no vienen dados por una raíz: π, 0,12 112 1112…, 2,01 002 0003 00004…

1.17 **Clasifica estos números en racionales o irracionales, y razona la respuesta.**

a) 123,25 25 25... **b) 91,123 777...** **c) 335,12 122 1222 1...** **d) 0,311 3311 33311...**

a) Racional, tiene período 25.

b) Racional, tiene período 7.

c) Irracional, detrás de cada 1 aparecen, sucesivamente, 1, 2, 3, 4… cifras 2. De este modo no va haber ningún período.

d) Irracional, no hay ningún grupo de cifras que se repita periódicamente.

1.18 **Una de las mejores aproximaciones fraccionarias del número π es $\frac{355}{113}$. Si el valor del número π es 3,141592135…, halla el número de cifras que coincide con la aproximación dada.**

$\frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$ Coinciden 6 cifras decimales.

1.19 **Sabiendo que $\sqrt{10} = 3{,}162277\ldots$, escribe las 5 primeras aproximaciones por defecto, por exceso y por redondeo.**

Por defecto	3,1	3,16	3,162	3,1622	3,16227
Por exceso	3,2	3,17	3,163	3,1623	3,16228
Por redondeo	3,2	3,16	3,162	3,1623	3,16228

1.20 **Realiza cada operación con una aproximación de dos cifras decimales, por exceso y por defecto.**

a) $\sqrt{11} + \sqrt{3}$ **b) $\sqrt{12} - 3\sqrt{3}$** **c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$**

a)

	$\sqrt{11}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{11} + \sqrt{3}$
Por exceso	3,32	1,74	5,06
Por defecto	3,31	1,73	5,04

b)

	$\sqrt{12}$	$\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{12} - 3\sqrt{3}$
Por exceso	3,47	1,74	5,22	$-1{,}75$
Por defecto	3,46	1,73	5,19	$-1{,}73$

c)

	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$
Por exceso	2,24	2,65	5,94
Por defecto	2,23	2,64	5,91

1.21 Calcula los valores que faltan en la tabla.

	a	***b***	***a* + *b***	***a* · *b***
Por exceso	**3,235**			
Por defecto		**2,471**		

	a	*b*	*a* + *b*	*a* · *b*
Por exceso		2,472	5,707	7,997
Por defecto	3,234		5,705	7,991

1.22 Halla el error absoluto y el error relativo que se produce, cuando se toma para $\frac{11}{7}$ el valor 1,57.

Error absoluto: $|1{,}57 - 1{,}571428...| = 0{,}001428...$

Error relativo: $\frac{0{,}001428...}{1{,}571428...} = 0{,}0009090...$

1.23 Una excelente aproximación del número irracional $\sqrt{2}$ es la fracción $\frac{17}{12}$. Comprueba este resultado y señala el error máximo.

$\frac{17}{12} = 1{,}41666666...$

$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$

Error absoluto: $|1{,}414213562... - 1{,}416666...| = 0{,}002453...$

Error relativo: $\frac{0{,}002453...}{1{,}414213562...} = 0{,}0017345...$

1.24 El número π es un número irracional. Arquímedes solía utilizar como aproximación el número racional $\frac{22}{7}$. Si el radio de una plaza mide 30 metros.

a) ¿Cuánto mide su circunferencia tomando para π el valor $\frac{22}{7}$?, ¿y si tomamos 3,1416?

b) ¿Es aceptable el error cometido en ambos casos?

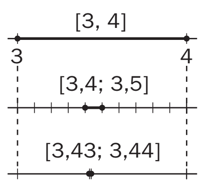
a) $2 \cdot 30 \cdot \frac{22}{7} = \frac{1\,320}{7} = 188{,}5714$ m

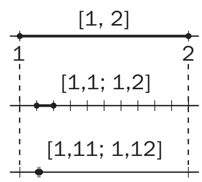
$2 \cdot 30 \cdot 3{,}1416 = 188{,}496$ m

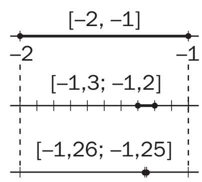
b) Teniendo en cuenta que la circunferencia mide 188,49555 m, el primer error es un poco grande; el segundo es aceptable, ya que por redondeo a tres decimales nos quedaría en eso la aproximación.

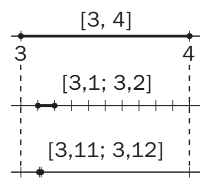
1.25 Representa estos números irracionales.

a) 3,43574... **b) 1,1 10 100...** **c) −1,25239...** **d) 3,1 12 123**

a)


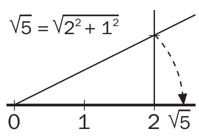
b)


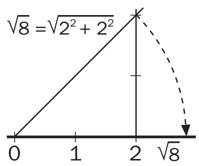
c)


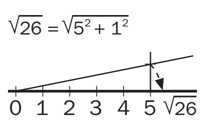
d)


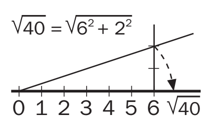
1.26 Representa los siguientes números irracionales.

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{8}$ **c)** $\sqrt{26}$ **d)** $\sqrt{40}$

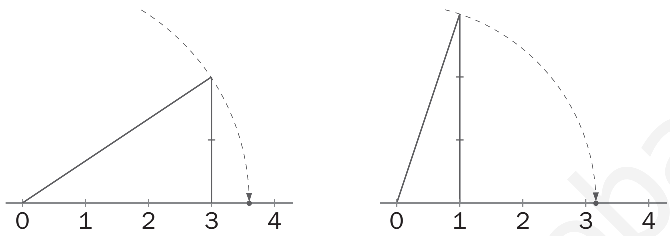
a) 

b) 

c) 

d) 

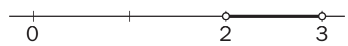
1.27 Escribe los números representados en cada figura.

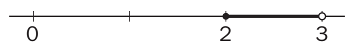


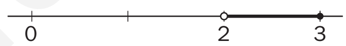
La primera figura representa $\sqrt{13}$, y la segunda, $\sqrt{10}$.

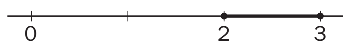
1.28 Dibuja en la recta real cada uno de estos intervalos.

a) (2, 3) **b)** [2, 3) **c)** (2, 3] **d)** [2, 3]

a) 

b) 

c) 

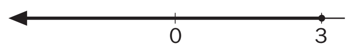
d) 

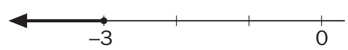
1.29 Dibuja en la recta real estas semirrectas.

a) $(1, \infty)$ **b)** $[1, \infty)$ **c)** $(-\infty, 3]$ **d)** $(-\infty, -3]$

a) 

b) 

c) 

d) 

1.30 Indica el intervalo que representa cada dibujo.

a) 

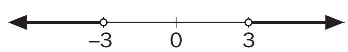
b) 

a) (2, 7]

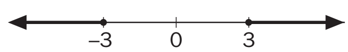
b) $(-\infty, 0)$

1.31 Dibuja en la recta real las semirrectas determinadas por las relaciones $|x| > 3$ y $|x| \geqslant 3$.

$|x| > 3 \Rightarrow x > 3$ y $x < -3 \Rightarrow (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$



$|x| \geqslant 3 \Rightarrow x \geqslant 3$ y $x \leqslant -3 \Rightarrow (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1.32 Una clase de tercero con 25 alumnos tiene que elegir delegado y subdelegado. ¿Cuántas elecciones diferentes son posibles?

Planteamos el problema para casos más sencillos y vemos si se encuentra alguna regularidad.

	2 alumnos	3 alumnos	4 alumnos
Delegado-subdelegado	*AB, BA*	*AB, AC, BA, BC, CA, CB*	*AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC*
Posibilidades	$2 \cdot (2 - 1) = 2$	$3 \cdot (3 - 1) = 6$	$4 \cdot (4 - 1) = 12$

Vemos que se cumple la regla de $n \cdot (n - 1)$ posibilidades, donde n es el número de alumnos. Entonces, en una clase de 25 alumnos las posibilidades son: $25 \cdot 24 = 600$.

1.33 Los 32 alumnos de una clase juegan un torneo de ajedrez. Di cuántas partidas se celebrarán si:

a) Se juega en forma de liga.

b) Se juega por eliminatorias.

a) Planteamos el problema para casos más sencillos y vemos si se encuentra alguna regularidad.

	2 alumnos	3 alumnos	4 alumnos
Partidos	*AB, BA*	*AB, AC, BC, BA, CA, CB*	*AB, AC, AD, BC, BD, CD, BA, CA, DA, CB, DB, DC*
Posibilidades	$2 \cdot (2 - 1) = 2$	$3 \cdot (3 - 1) = 6$	$4 \cdot (4 - 1) = 12$

Vemos que se cumple la regla de $n \cdot (n - 1)$ posibilidades, donde n es el número de alumnos. Entonces, en una clase de 32 alumnos las posibilidades son: $32 \cdot 31 = 992$.

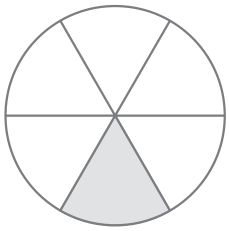
b) Se celebrarán partidas de dieciseisavos de final, de octavos, de cuartos, semifinal y final, en total: $16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$ partidas se celebrarán.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

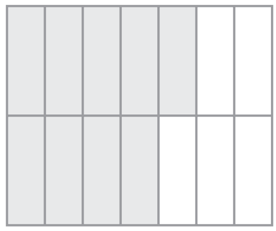
Números fraccionarios

1.34 Escribe las fracciones que representan las partes coloreadas.

a)



b)



a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{9}{14}$

1.35 Averigua el valor de *x* en cada caso.

a) $\frac{3}{5}$ **de** $225 = x$

b) $\frac{x}{4}$ **de** $320 = 1\,360$

c) $\frac{7}{3}$ **de** $x = 938$

d) $\frac{2}{3}$ **de** $x = 300$

a) $\frac{3 \cdot 225}{5} = 135 \cdot x = 135$

b) $\frac{x \cdot 320}{4} = 1\,360 \Rightarrow x = \frac{1\,360 \cdot 4}{320} = 17$

c) $\frac{7x}{3} = 938 \Rightarrow x = \frac{938 \cdot 3}{7} = 402$

d) $\frac{2x}{3} = 300 \Rightarrow x = \frac{300 \cdot 3}{2} = 450$

1.36 Halla el valor de cada letra para que todas las fracciones sean equivalentes.

$$\frac{a}{21} \qquad \frac{104}{b} \qquad \frac{c}{63} \qquad \frac{13}{7} \qquad \frac{143}{70 + d}$$

$\frac{a}{21} = \frac{13}{7} \Leftrightarrow 7a = 273 \Rightarrow a = 39$

$\frac{104}{b} = \frac{13}{7} \Leftrightarrow 13b = 728 \Rightarrow b = 56$

$\frac{c}{63} = \frac{13}{7} \Leftrightarrow 7c = 819 \Rightarrow c = 117$

$\frac{143}{70 + d} \Leftrightarrow \frac{13}{7} = 1\,001 = 910 + 13d \Rightarrow d = 7$

1.37 Realiza estas operaciones.

a) $3 - \frac{1}{4}$

b) $\frac{7}{30} + \frac{2}{3} - \frac{4}{15}$

c) $4 - \frac{7}{6} + \frac{1}{2}$

d) $\frac{5}{6} \cdot (-3)$

e) $\left(\frac{-1}{3}\right) \cdot (-4) \cdot \frac{5}{7}$

f) $(-2) : \frac{-3}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$

a) $\frac{12 - 1}{4} = \frac{11}{4}$

b) $\frac{7 + 20 - 8}{30} = \frac{19}{30}$

c) $\frac{24 - 7 + 3}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$

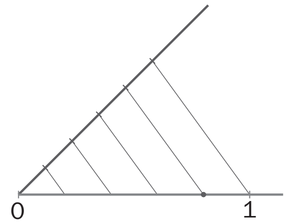
d) $\frac{5 \cdot (-3)}{6} = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2}$

e) $\frac{(-1) \cdot (-4) \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{20}{21}$

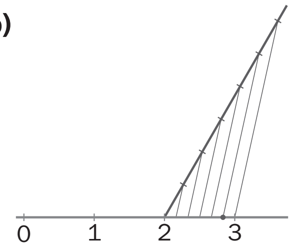
f) $\frac{-3}{(-2) \cdot 4 \cdot 6} = \frac{1}{16}$

1.38 **Indica la abscisa de los puntos indicados.**

a)



b)



a) $\frac{4}{5}$

b) $2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$

1.39 **Ordena las fracciones de menor a mayor utilizando en cada caso el método que se indica.**

a) $\mathbf{\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}}$ **Observando las fracciones.**

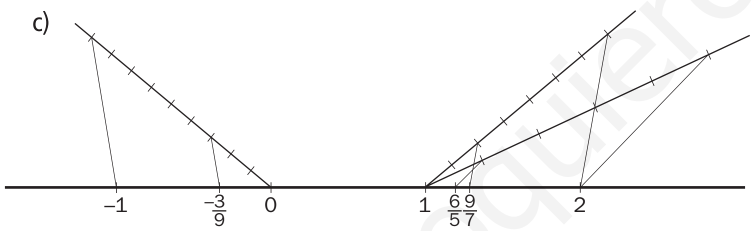
b) $\mathbf{\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}}$ **Reduciendo a común denominador.**

c) $\mathbf{\frac{9}{7}, \frac{-3}{9}, \frac{6}{5}}$ **Representándolas en una recta.**

a) $\frac{1}{9} < \frac{1}{8} < \frac{1}{7}$ Ya que se trata de fracciones con igual numerador, es más grande la que menor denominador tenga.

b) $\frac{105}{140}, \frac{112}{140}, \frac{120}{140} \Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{6}{7}$

c)



$\Rightarrow -\frac{3}{9} < \frac{6}{5} < \frac{9}{7}$

1.40 **Escribe en cada caso la fracción irreducible.**

a) $\mathbf{\frac{30}{150}}$ **b)** $\mathbf{\frac{28}{42}}$ **c)** $\mathbf{\frac{13}{21}}$ **d)** $\mathbf{\frac{18}{3}}$

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{13}{21}$ d) 6

1.41 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\mathbf{4 : \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} - 1}$

b) $\mathbf{2 \cdot \left(\frac{5}{6} - 1\right) : 2 + \frac{1}{3}}$

c) $\mathbf{\left(2 - \frac{3}{4}\right) : \frac{3}{5} - \frac{4}{5}}$

d) $\mathbf{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} - \frac{3}{4} : \frac{1}{6}}$

a) $4 : \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} - 1 = \frac{12}{2} \cdot \frac{4}{5} - 1 = \frac{48}{10} - 1 = \frac{38}{10} = \frac{19}{5}$

b) $2 \cdot \left(\frac{5}{6} - 1\right) : 2 + \frac{1}{3} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) : 2 + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

c) $\left(2 - \frac{3}{4}\right) : \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5}{4} : \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{25}{12} - \frac{4}{5} = \frac{125}{60} - \frac{48}{60} = \frac{77}{60}$

d) $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} - \frac{3}{4} : \frac{1}{6} = \frac{4}{15} - \frac{18}{4} = \frac{16}{60} - \frac{270}{60} = -\frac{254}{60} = -\frac{127}{30}$

1.42 **Efectúa esta operación.**

$$\left[3-\frac{4}{5}:\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\right]\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{5}:3-\frac{1}{4}$$

$$\left[3-\frac{4}{5}:\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\right]\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{5}:3-\frac{1}{4}=\left(3-\frac{4}{5}:\frac{1}{4}+2\right)\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{15}-\frac{1}{4}=\left(3-\frac{16}{5}+2\right)\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{15}-\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{15}-\frac{1}{4}=\frac{9}{15}-\frac{2}{15}-\frac{1}{4}=\frac{13}{60}$$

1.43 **En mi cumpleaños, he partido la tarta en 6 trozos iguales, pero un amigo me dice que le dé $\frac{14}{42}$ de la tarta. ¿Cuántas porciones de la tarta le tengo que dar? ¿Por qué?**

Le tengo que dar dos trozos, ya que: $\frac{14}{42}=\frac{2}{6}$

Números decimales

1.44 **Encuentra una fracción que esté situada entre $\frac{4}{7}$ y $\frac{3}{5}$.**

$\frac{4}{7}=\frac{4\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{20}{35}$

$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{21}{35}$

$\frac{20}{35}<\frac{20{,}5}{35}<\frac{21}{35}$

$\frac{20{,}5}{35}=\frac{205}{350}=\frac{41}{70}$

1.45 **Indica, sin realizar la división, qué tipo de expresión decimal tiene cada fracción.**

a) $\frac{1}{125}$

b) $\frac{43}{21}$

c) $\frac{11}{35}$

d) $\frac{2}{7}$

a) $125 = 5^3$. Es decimal exacto.

b) $21 = 7\cdot 3$. Es periódico puro.

c) $35 = 7\cdot 5$. Es periódico mixto.

d) Es periódico puro.

1.46 **Escribe en forma fraccionaria los siguientes números decimales.**

a) 45,777…

b) 1,2323…

c) 3,4222…

d) 0,53636…

a) $\frac{457-45}{9}=\frac{412}{9}$

b) $\frac{123-1}{99}=\frac{122}{99}$

c) $\frac{342-34}{90}=\frac{308}{90}=\frac{154}{45}$

d) $\frac{536-5}{990}=\frac{531}{990}=\frac{59}{110}$

1.47 **Realiza las siguientes operaciones, expresando los decimales previamente en forma de fracción.**

a) $0{,}4\widehat{6}-\frac{2}{5}+3{,}4$

b) $\frac{1}{3}\cdot 2{,}\widehat{4}-\frac{3}{5}$

a) $\frac{46-4}{90}-\frac{2}{5}+\frac{34}{10}=\frac{42}{90}-\frac{4}{10}+\frac{34}{10}=\frac{14}{30}+\frac{30}{10}=\frac{14+90}{30}=\frac{104}{30}=\frac{52}{15}$

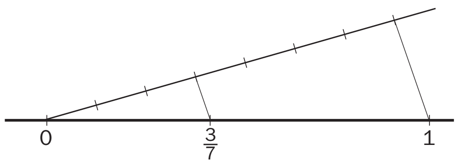
b) $\frac{1}{3}\cdot\frac{24-2}{9}-\frac{3}{5}=\frac{22}{27}-\frac{3}{5}=\frac{110-81}{135}=\frac{29}{135}$

1.48 **Representa estas fracciones utilizando el teorema de Tales.**

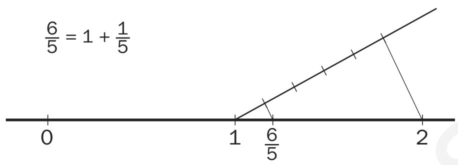
a) $\frac{3}{7}$ **c)** $\frac{6}{5}$

b) $-\frac{3}{10}$ **d)** $\frac{16}{3}$

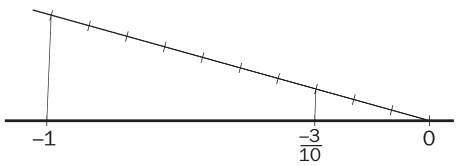
a)



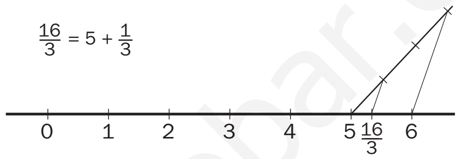
c)



b)



d)



Números reales

1.49 **Clasifica estos números en racionales o irracionales. Justifica la respuesta.**

a) $\sqrt{7}$ **c)** $\sqrt{121}$

b) 4,252552555... **d) 4,5252...**

a) Irracional. No podemos expresar su parte decimal de modo exacto o periódico.

b) Irracional. En la parte decimal, después de cada 25 se le añaden sucesivamente 0, 1, 2… cifras de 5. De este modo, nunca lo podremos expresar de forma periódica o exacta.

c) Racional. $\sqrt{121} = 11$. Número entero

d) Racional, de período 52

1.50 **Realiza estas aproximaciones del número 463,2673.**

a) Aproxima por defecto a la centésima.

b) Aproxima por exceso a la milésima.

c) Redondea a la parte entera.

d) Redondea a la décima.

a) Aproximación por defecto a la centésima: 463,26

b) Aproximación por exceso a la milésima: 463,268

c) Redondea a la parte entera: 463

d) Redondea a la décima: 463,3

1.51 **Calcula el error absoluto y el error relativo que se comete al elegir 5,67 como aproximación de $\frac{17}{3}$.**

a) Error absoluto: $E_{abs} = \left| \frac{17}{3} - 5{,}67 \right| = 0{,}00333...$

b) Error relativo: $E_{relat} = \dfrac{E_{abs}}{\frac{17}{3}} = 0{,}00058823...$

1.52 **Efectúa estas operaciones con una aproximación de tres cifras decimales, por exceso y por defecto.**

a) $\sqrt{7} + 2\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{12}$

a)

	$\sqrt{7}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{7} + 2\sqrt{3}$
Por exceso	2,646	1,733	3,466	6,112
Por defecto	2,645	1,732	3,464	6,109

b)

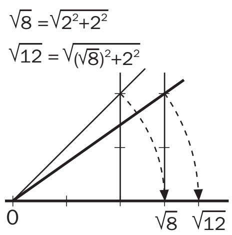
	$\sqrt{5}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{12}$
Por exceso	2,237	3,465	7,752
Por defecto	2,236	3,464	7,745

1.53 **Representa cada uno de estos números irracionales en una recta.**

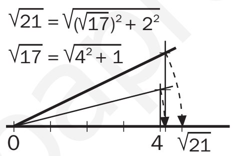
a) $\sqrt{12}$ **c)** $\sqrt{21}$

b) 5,42422… **d) 3,01001…**

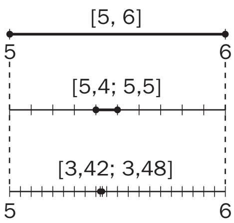
a)



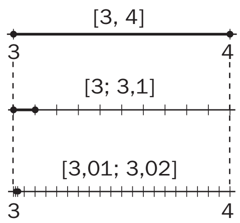
c)



b)



d)



1.54 **Halla el valor de *x* e *y* para que se cumpla la relación.**

$$\sqrt{13} < \frac{x}{y} < \sqrt{14}$$

$\sqrt{13} < \dfrac{x}{y} < \sqrt{14}$. Respuesta abierta. Por ejemplo:

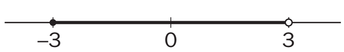
$\sqrt{13} \cong 3{,}6;\ \sqrt{14} \cong 3{,}7 \Rightarrow \dfrac{x}{y} = 3{,}65 = \dfrac{365}{100} = \dfrac{73}{20}$ (Fracción irreducible)

1.55 **Dibuja en una recta estos intervalos y semirrectas.**

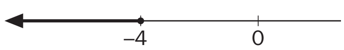
a) $[-3, 3)$ **c)** $(-\infty, -4]$

b) $[-3, +\infty)$ **d)** $(2, 4)$

a)

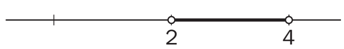


c)



b)

d)



1.56 Indica el intervalo que representa cada dibujo.

a)

c)

b)

d)

a) $[-2, -1]$

b) $(-3, 2]$

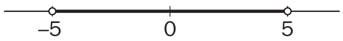
c) $(6, +\infty)$

d) $(-\infty, 1]$

1.57 Representa la relación $|x| < 5$ en una recta y escribe el intervalo que la determina.

$|x| < 5 \Rightarrow -5 < x < 5$

El intervalo que determina es $(-5, 5)$.



CUESTIONES PARA ACLARARSE

1.58 ¿Qué fracción le falta a $\frac{7}{12}$ para completar la unidad?

$1 - \frac{7}{12} = \frac{12 - 7}{12} = \frac{5}{12}$

1.59 Indica si son correctas estas desigualdades.

a) $\frac{7}{6} < \frac{8}{5} < \frac{10}{7}$ **b)** $\frac{-5}{6} > \frac{-11}{13} > \frac{-15}{18}$

a) Expresamos las fracciones con común denominador: $\frac{7}{6} = \frac{245}{210}$; $\frac{8}{5} = \frac{336}{210}$; $\frac{300}{210} = \frac{10}{7}$; $\frac{7}{6} < \frac{10}{7} < \frac{8}{5}$ Falsa

b) Expresamos las fracciones con común denominador: $\frac{5}{6} = \frac{195}{234}$; $\frac{11}{13} = \frac{198}{234}$; $\frac{195}{234} = \frac{15}{18}$; $\frac{11}{13} < \frac{5}{6}$ Falsa

1.60 Responde a las siguientes cuestiones.

a) ¿Qué fracción del alfabeto representan las vocales?

b) ¿Qué fracción de la decena representa la centena?

c) ¿Qué fracción de la semana representa el lunes?

d) ¿Qué fracción del día representa 1 minuto?

e) ¿Qué fracción de un siglo representa 1 mes?

f) ¿Qué fracción del kilómetro representa 1 centímetro?

a) $\left.\begin{array}{l}\text{Alfabeto} = 28 \text{ letras}\\ \text{Vocales} = 5 \text{ letras}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5}{28}$

b) 1 centena = 10 decenas $\Rightarrow \frac{1}{10}$

c) 1 semana = 7 días $\Rightarrow \frac{1}{7}$

d) 1 día = 1 440 minutos $\Rightarrow \frac{1}{1\,440}$

e) 1 siglo = 100 años = 1 200 meses $\Rightarrow \frac{1}{1\,200}$

f) 1 km = 100 000 cm $\Rightarrow \frac{1}{100\,000}$

1.61 Indica qué relación tiene el triángulo de catetos 4 y 5, con la representación del número $\sqrt{41}$.

$\sqrt{41}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son 4 y 5, verificando dicho triángulo el teorema de Pitágoras: $\sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

1.62 **¿Qué paréntesis son necesarios y de cuáles podríamos prescindir en estas operaciones?**

a) $\left(\frac{3}{4} : \frac{5}{2}\right) + \frac{3}{7}$

b) $-3 \cdot \left(\frac{1}{5} + 3\right) - 1$

c) $\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{4}{5} + 1$

d) $\left(\frac{4}{5} : \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)$

a) Sobra el paréntesis, pues la división ya tiene prioridad sobre la suma.

b) Sí es necesario, ya que: $-3 \cdot \left(\frac{1}{5} + 3\right) \neq -3 \cdot \frac{1}{5} + 3$

c) Sobra el paréntesis, ya que solo hay sumas y restas, que no tienen prioridad una sobre la otra.

d) No es necesario, por las razones expuestas en a y c.

1.63 **Explica si son ciertas o falsas estas afirmaciones.**

a) Todo número entero es racional.

b) Todo número real es racional.

c) Muchos números racionales son naturales.

d) Un número racional tiene una sola expresión fraccionaria.

e) Los números irracionales forman el conjunto de todos los números con infinitas cifras decimales.

a) Verdadero, ya que todo número entero z se puede escribir como $\frac{z}{1}$.

b) Falso, porque los números reales están compuestos por la unión de los racionales y los irracionales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ no es racional y sí es real.

c) Verdadero. Todos los racionales con numerador que sea un número natural y denominador igual a uno.

d) Falso. Por ejemplo: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$

e) Falso. Además de tener infinitas cifras decimales, estas han de ser no periódicas.

1.64 **¿Se pueden encontrar dos números enteros cuyo cociente sea 7,41411411…? Justifica la respuesta.**

No, ya que si se pudiese expresar dicho número como cociente de dos números enteros, sería un número racional, y 7,4141141114… es un número irracional.

PROBLEMAS PARA APLICAR

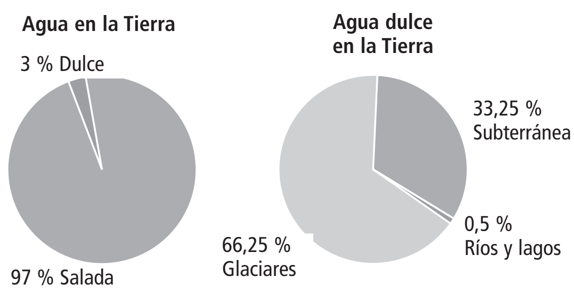
1.65 **Los resultados finales de junio de una clase de 3.º de ESO son los siguientes:**

$\frac{1}{3}$	**Aprueban todo**
$\frac{1}{6}$	**Suspenden 1**
$\frac{1}{15}$	**Suspenden 2**
$\frac{1}{5}$	**Suspenden 3**
$\frac{1}{10}$	**Suspenden 4**
$\frac{2}{15}$	**Suspenden más de 4**

Si el grupo es de 30 alumnos, ¿cuántos alumnos hay en cada nivel de suspensos?

- Aprueban todo: $\frac{1}{3}$ de $30 = \frac{30}{3} = 10$ alumnos.
- Suspenden 1: $\frac{1}{6}$ de $30 = \frac{30}{6} = 5$ alumnos.
- Suspenden 2: $\frac{1}{15}$ de $30 = \frac{30}{15} = 2$ alumnos.
- Suspenden 3: $\frac{1}{5}$ de $30 = \frac{30}{3} = 6$ alumnos.
- Suspenden 4: $\frac{1}{10}$ de $30 = \frac{30}{10} = 3$ alumnos.
- Suspenden más de 4: $\frac{2}{15}$ de $30 = \frac{60}{15} = 4$ alumnos.

1.66 **El agua es un elemento escaso en nuestro planeta, sobre todo que utilizamos en las necesidades diarias.**



De cada 100 litros de agua, ¿qué parte se encuentra en los ríos y lagos?

Si tenemos 100 litros de agua, solo 3 de ellos son de agua dulce, y a esos 3 litros tenemos que aplicarles un 0,5 %. De modo que:

$$100 \cdot \frac{3}{100} \cdot \frac{0,5}{100} = \frac{3}{200} = 0,015 \text{ L}$$

De 100 litros de agua, solo 0,015 litros son potables.

1.67 **De todas mis vacaciones de verano, $\frac{2}{3}$ las paso en mi pueblo. Una vez allí, $\frac{1}{5}$ del tiempo estoy en la piscina.**

a) ¿Qué fracción de mis vacaciones estoy en la piscina?

b) Si tengo 90 días de vacaciones, ¿cuántos días paso en la piscina?

a) La fracción de tiempo que paso en la piscina es: $\frac{1}{5}$ de $\frac{2}{3} = \frac{2}{15}$

b) El número de días que estoy en la piscina es: $\frac{2}{15}$ de $90 = \frac{180}{15} = 12$ días

1.68 **El equipo de baloncesto del instituto juega la final del campeonato. Luis hizo $\frac{1}{8}$ de los puntos, Sonia los $\frac{2}{8}$ y Laura los $\frac{3}{8}$. Los restantes jugadores hicieron 16 puntos. Calcula el número de puntos conseguidos por Luis, Sonia y Laura.**

$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8} \Rightarrow$ los restantes jugadores obtuvieron $\frac{2}{8}$ de los puntos del equipo, que son 16 puntos $\Rightarrow (16 : 2) \cdot 8 = 64$ puntos obtuvo todo el equipo.

Luis consiguió $\frac{1}{8}$ de $64 = 8$ puntos, Sonia $\frac{2}{8}$ de $64 = 16$ puntos y Laura $\frac{3}{8}$ de $64 = 24$ puntos.

1.69 **Juan trabaja el fin de semana como canguro, y de los 90 euros que le pagan decide dar $\frac{1}{5}$ a su padre y $\frac{3}{10}$ a su madre.**
¿Qué fracción del total puede invertir en un regalo para su hermano menor, si necesita quedarse con 12 euros para comprar un compás?

$\frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$ da a sus padres.

$\frac{1}{2}$ de 90 € = 45 € $\Rightarrow$ 90 − 45 = 45 € le restan.

Ahora le restamos el dinero para el compás: 45 − 12 = 33 € le quedan para el regalo.

Como inicialmente tenía 90 €, la fracción respecto al dinero inicial es $\frac{33}{90} = \frac{11}{30}$.

1.70 **En un concurso organizado por el ayuntamiento sobre hábitos saludables y de higiene, nuestra clase recibe el primer premio. Decidimos invertir el premio en material para el uso del aula, de la siguiente forma:**

$\frac{1}{4}$ **del premio en un escáner.**

$\frac{3}{5}$ **del premio en una minicadena.**

$\frac{1}{3}$ **del premio en un DVD.**

Como nos excedimos en la compra, el centro nos hizo un bono regalo valorado en los 154 euros que nos faltaban. ¿A cuánto ascendió el premio?

$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{71}{60}$ se gastó en el escáner, en la minicadena y en el DVD. Ya que nos excedimos en $\frac{11}{60}$ del premio, que son 154 €, obtenemos que: $(154 : 11) \cdot 60 = 840$ € es el valor total del premio.

1.71 **El resultado del cálculo del área de un círculo de 3 centímetros de radio es 28,274337 centímetros cuadrados.**

a) ¿Qué aproximación de π se ha tomado?

b) ¿Es por exceso o por defecto?

c) ¿Cuál es el error absoluto y relativo cometido?

a) $A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow \pi \cong \frac{A_{\text{círculo}}}{r^2} \cong \frac{28{,}274337}{9} \cong 3{,}141593$

b) La aproximación tomada es por exceso, ya que $\pi \cong 3{,}14159265...$

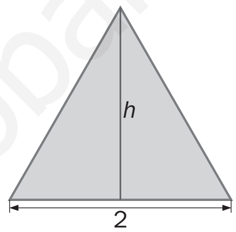
c) Error absoluto: $|3{,}141593 - 3{,}141592...| = 0{,}000001...$

Error relativo: $\frac{0{,}000001}{3{,}14159265...} = 0{,}000000318...$

1.72 **En el triángulo equilátero de la figura.**

a) Determina la altura redondeando a la milésima.

b) Expresa la altura mediante un número racional de dos decimales.



a) Aplicando el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} \cong 5{,}196$ cm

b) $h = 5{,}19 = \frac{519}{100}$ cm

1.73 **Los griegos consideraban que las dimensiones perfectas de un rectángulo cumplen la igualdad:**

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

y a este número le denominaban *número áureo* o *número de oro*.

Utiliza una aproximación a la centésima del número de oro, para calcular las dimensiones del rectángulo áureo de 24 centímetros cuadrados de área.

$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1{,}62 \Rightarrow a = 1{,}62b$. Por otro lado:

Área $= a \cdot b = 1{,}62b \cdot b = 24 \Rightarrow 1{,}62b^2 = 24 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{24}{1{,}62}} \cong 3{,}85$ cm. Sustituimos en la anterior expresión para obtener: $a = 1{,}62b \cong 1{,}62 \cdot 3{,}85 \cong 6{,}24$ cm.

REFUERZO

Números racionales

1.74 **Realiza estos cálculos teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones.**

a) $\frac{1}{4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + 2$

b) $\frac{1}{4} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} + 2\right)$

c) $\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{1}{3} + 2$

d) $\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + 2\right)$

a) $\frac{1}{4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{15}{60} - \frac{8}{60} + \frac{120}{60} = \frac{127}{60}$

b) $\frac{1}{4} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} + 2\right) = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{1}{4} - \frac{14}{15} = -\frac{41}{60}$

c) $\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{-3}{20} \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{-1}{20} + 2 = \frac{39}{20}$

d) $\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + 2\right) = \frac{-3}{20} \cdot \frac{7}{3} = -\frac{7}{20}$

1.75 **Halla los valores que faltan en la tabla.**

Expresión decimal	0,52		5,2312	
Expresión fraccionaria		$\frac{43}{7}$		$\frac{11}{45}$

Expresión decimal		$0,\widehat{571428}$		$0,2\widehat{4}$
Expresión fraccionaria	$\frac{13}{25}$		$\frac{6\,539}{1\,250}$	

Números irracionales

1.76 **Aproxima con dos cifras decimales el valor de $\sqrt{17}$, por exceso y por defecto.**

	$\sqrt{17}$
Por exceso	4,13
Por defecto	4,12

1.77 **Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales.**

a) $\sqrt{\frac{9}{16}}$

b) 2π

c) 3,454554555…

d) $-3\sqrt{49}$

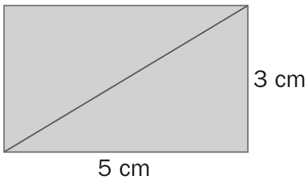
a) Racional, el resultado de la operación es $\frac{3}{4}$.

b) Irracional, π es un número irracional, su expresión decimal ni es exacta ni se puede expresar de forma periódica; al multiplicarlo por 2 ocurrirá lo mismo.

c) Irracional. En la parte decimal, después de cada 4 se le añaden sucesivamente 1, 2, 3… cincos. De este modo, nunca lo podremos expresar de forma periódica o exacta.

d) Racional, el resultado de la operación es -21.

1.78 **El resultado del cálculo de la diagonal del rectángulo de la figura es 5,831.**



Determina el error absoluto y el error relativo.

El valor de la diagonal es $\sqrt{34}$.

Error absoluto: $|5{,}831 - 5{,}83095189\ldots| = 0{,}0000481\ldots$

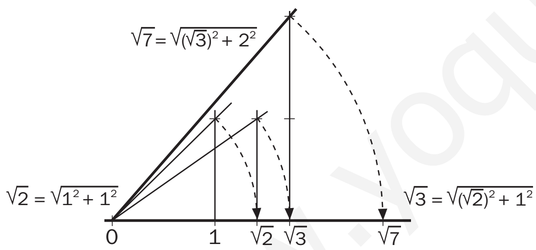
Error relativo: $\dfrac{0{,}0000481\ldots}{5{,}83095189\ldots} = 0{,}00000825$

1.79 **Calcula $\sqrt{7} - \sqrt{10}$, con un aproximación de dos decimales, por exceso y por defecto.**

	$\sqrt{7}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{7} - \sqrt{10}$
Por exceso	2,65	3,17	$-0{,}52$
Por defecto	2,64	3,16	$-0{,}52$

Números reales

1.80 **Representa en la recta real el número $\sqrt{7}$.**



1.81 **Indica los intervalos que representan los siguientes dibujos.**

a)

b)

c)

a) $(-\infty, -6]$

b) $[-7, -3)$

c) $(-\infty, 7]$

AMPLIACIÓN

1.82 **A una fiesta de números racionales, asistieron los siguientes.**

$$\frac{49}{90} \quad \frac{6}{11} \quad \frac{11}{20} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{541}{990}$$

Se quisieron colocar por orden de mayor a menor. A uno se le ocurrió que para ello podrían vestirse de números decimales, pero alguno de ellos no había traído el traje.

a) ¿Cuál fue el orden de colocación?

b) Entraron a la fiesta 4 "colegas" y cada uno de ellos se situó entre dos de los otros. Se vistieron para ello de decimales, uno de *exacto*, otro de *periódico puro* y el último, que se coló, de *irracional*. ¿Qué posibles "colegas" encajarían con esas condiciones?

a) m.c.m. $(90, 11, 20, 9, 990) = 1\,980 \Rightarrow \frac{49}{90} = \frac{1\,078}{1\,980}; \frac{6}{11} = \frac{1\,080}{1\,980}; \frac{5}{9} = \frac{1\,100}{1\,980}; \frac{541}{990} = \frac{1\,082}{1\,980} \Rightarrow \frac{49}{90} < \frac{6}{11} < \frac{541}{990} < \frac{11}{20} < \frac{5}{9}$

b) $0{,}545 = \frac{545}{100} = \frac{109}{20} \rightarrow$ Decimal exacto

$0{,}545545... = \frac{545}{999} \rightarrow$ Periódico puro

$0{,}54777... = \frac{493}{900} \rightarrow$ Periódico mixto

$0{,}551551155111... \rightarrow$ Irracional

1.83 **Observa la siguiente operación.**

$$\frac{3}{2} - 2 : \frac{1}{5} - \frac{3}{4} = \frac{10}{11}$$

a) ¿Qué prioridad no se ha tenido en cuenta en la operación?

b) Introduce los paréntesis que se necesitan para que la solución sea correcta.

a) La de la división, se han hecho primero las dos restas.

b) $\left(\frac{3}{2} - 2\right) : \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{4}\right) = \frac{10}{11}$

1.84 **Se han realizado tres cálculos distintos del volumen de un cilindro de 2 centímetros de radio y 3 centímetros de altura. En cada uno de ellos se ha utilizado una aproximación distinta de π.**

$V_1 = 37{,}6992$ **cm³**

$V_2 = 37{,}69908$ **cm³**

$V_3 = 37{,}698$ **cm³**

¿En cuál de ellos se ha utilizado la mejor aproximación de π?

$V_1 = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi = 37{,}6992 \Rightarrow \pi \cong 3{,}1416$

$V_2 = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi = 37{,}69908 \Rightarrow \pi \cong 3{,}14159$

$V_3 = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi = 37{,}698 \Rightarrow \pi \cong 3{,}1415$

La mejor aproximación se ha utilizado en V_2, y ha sido $\pi \cong 3{,}14159$.

1.85 **La longitud de una circunferencia se expresa mediante un número irracional. Indica el valor que debe tener el radio de una circunferencia para que la longitud de esta circunferencia sea un número racional. Justifica tu respuesta.**

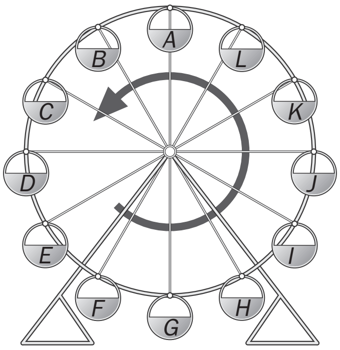
La longitud de una circunferencia es: $L = 2 \cdot \pi \cdot r$; como π es un número irracional, la longitud de una circunferencia también es un número irracional.

Pero si $r = \frac{k}{\pi} \Rightarrow L = 2\pi\frac{k}{\pi} = 2k \in \mathbb{Q}$, con $k \in \mathbb{N}$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

1.86 **La noria**

La noria de la figura contiene 12 coches para viajeros nombrados de la *A* a la *L*.



La noria tarda exactamente 63 segundos en dar una vuelta completa.

a) Indica cuánto tiempo pasa desde que la noria comienza a girar hasta que el coche *A* pasa por tercera vez por la posición inicial de *D*.

b) Indica la posición de los coches cuando han pasado exactamente 21 minutos y 42 segundos.

a) Cuando el coche *A* pasa por tercera vez por la posición inicial de *D*, la noria ha dado dos vueltas y cuarto y, por tanto, han pasado $2{,}25 \cdot 63 = 141{,}75$ segundos.

b) Un coche tarda en pasar de una posición a la consecutiva: $\frac{63}{12} = 5{,}25$ segundos

21 minutos 42 segundos = 1 302 segundos

$\frac{1\,302}{5{,}25} = 248$ posiciones $248 = 20 \cdot 12 + 8$

Por tanto, la noria habrá dado 20 vueltas más ocho posiciones.

1.87 **Transporte de pescado.**

Se precisa transportar 3 000 kilogramos de pescado desde tres puertos marítimos *P*1, *P*2 y *P*3 hasta tres ciudades del interior C1, C2 y C3.

Las cantidades disponibles en los puertos y las demandadas por las ciudades son las siguientes:

*P*1	*P*2	*P*3
2 250	500	250

C1	C2	C3
750	750	1 500

Completa la tabla siguiente en la que se indican las cantidades que van de cada puerto a cada ciudad. Habrá más de una solución, pero el número de trayectos debe ser el mínimo posible. Razona por qué es el número mínimo de trayectos.

El número de trayectos deberá ser superior o igual a tres ya que desde cada puerto debe salir al menos uno.

Sin embrago, no puede ser tres ya que los 2 250 kg del puerto uno no pueden ir a un única ciudad de destino.

Una posible solución de cuatro trayectos sería la que aparece en la tabla.

	*P*1	*P*2	*P*3
C1		500	250
C2	750		
C3	1 500		

AUTOEVALUACIÓN

1.A1 **De una tarta dividida en 30 porciones iguales, Iker, Mohamed y Luis se comen $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{10}$ de la tarta, respectivamente.**

a) ¿Cuántos trozos se toma cada uno de ellos?

b) ¿Cuántos sobran?

a) $\frac{1}{5}$ de 30 es 6, $\frac{1}{3}$ de 30 es 10 y $\frac{3}{10}$ de 30 es 9.

Iker se toma 6 trozos; Mohamed 10, y Luis, 9.

b) $30 - (6 + 10 + 9) = 5$. Sobran 5 trozos.

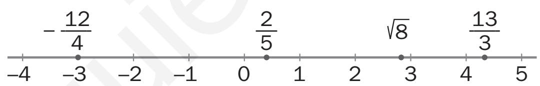
1.A2 **Halla el valor de las letras que aparecen en esta cadena de igualdades de fracciones.**

$$\frac{a}{10} = \frac{21}{b} = \frac{42}{30} = \frac{210}{c} = \frac{d}{240}$$

$$\frac{14}{10} = \frac{21}{15} = \frac{42}{30} = \frac{210}{150} = \frac{336}{240}$$

1.A3 **Representa en la recta real los siguientes números.**

a) $-\frac{12}{4}$ **b)** $\frac{13}{3}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** $\sqrt{8}$



1.A4 **Averigua la expresión fraccionaria de estos números decimales.**

a) 8,3 **b) 2,353535** **c) 0,14444…**

a) $\frac{83}{10}$ b) $\frac{235 - 2}{99} = \frac{233}{99}$ c) $\frac{14 - 1}{90} = \frac{13}{90}$

1.A5 **Realiza y simplifica estas operaciones.**

a) $\frac{1}{6} + \frac{3}{5} - \frac{7}{3}$

b) $\frac{4}{3} - \frac{1}{5} + \frac{4}{15}$

c) $\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{7} \cdot \frac{14}{6}$

d) $\frac{2}{3} : \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{8}$

a) $\frac{5 + 18 - 70}{30} = -\frac{47}{30}$

b) $\frac{20 - 3 + 4}{15} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$

c) $\frac{630}{210} = 3$

d) $\frac{2 \cdot 7 \cdot 14}{3 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{196}{96} = \frac{49}{24}$

1.A6 **Efectúa la operación $\pi - \sqrt{7}$, con una aproximación de una cifra decimal, por exceso y por defecto.**

	π	$\sqrt{7}$	$\pi - \sqrt{7}$
Por exceso	3,2	2,7	0,5
Por defecto	3,1	2,6	0,5

1.A7 **Calcula el error absoluto y el error relativo que se comete al tomar 0,216 como aproximación de $\frac{107}{495}$.**

Error absoluto: $|0{,}2161616161616\ldots - 0{,}216| = 0{,}00016\ldots$

Error relativo: $\frac{0{,}00016161616\ldots}{0{,}21616161616\ldots} = 0{,}00074$

1.A8 **Realiza esta operación.**

$1 + \frac{1}{5} : \frac{4}{3} - 3 \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right)$

$1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} - 3 \cdot \frac{8 - 1}{4} = 1 + \frac{3}{20} - \frac{21}{4} = \frac{20 + 3 - 105}{20} = -\frac{82}{20} = -\frac{41}{10}$

1.A9 **Indica los intervalos que representan los siguientes dibujos.**

a)

b)

a) $(-\infty, 4]$

b) $[-2, 3)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1 Escribe como potencias positivas las negativas, y viceversa.

a) 8^{-3} **b)** $\frac{1}{6^{-4}}$ **c)** 5^2 **d)** $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$

a) $\frac{1}{8^3}$ b) 6^4 c) $\frac{1}{5^{-2}}$ d) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

2.2 Expresa estas potencias como potencias únicas y calcula las operaciones.

a) $2^3 \cdot 2^5$

b) $6^{-3} \cdot 6^{-3}$

c) $6^2 : 6^{-4}$

d) $10^2 : 10^4$

a) $2^{3+5} = 2^8 = 256$

b) $6^{-3+(-3)} = 6^{-6} = 0{,}000021$

c) $6^{2-(-4)} = 6^6 = 46\,656$

d) $10^{2-4} = 10^{-2} = 0{,}01$

2.3 Expresa en forma de potencia única estas potencias y obtén el resultado.

a) $2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 7^{-2}$

b) $3^4 \cdot 6^4 : 18^{-3}$

c) $35^3 : 5^3 \cdot 7^{-3}$

d) $8^2 : 2^2 : 4^{-2}$

a) $(2 \cdot 3 \cdot 7)^{-2} = 42^{-2} = 0{,}00056$

b) $(3 \cdot 6)^4 : 18^{-3} = 18^4 : 18^{-3} = 18^{4-(-3)} = 18^7 = 3{,}93 \cdot 10^{22}$

c) $(35 : 5 : 7)^3 = 1^3 = 1$

d) $(8 : 2)^2 : 4^{-2} = 4^2 : 4^{-2} = 4^4 = 256$

2.4 Escribe las siguientes potencias como potencias únicas y calcula el resultado.

a) $(3^{-3})^2$

b) $(2^2)^{-3}$

c) $(2^{-2})^4$

d) $(5^{-3})^{-2}$

a) $3^{(-3)\cdot 2} = 3^{-6} = 0{,}00137$

b) $2^{2\cdot(-3)} = 2^{-6} = 0{,}01563$

c) $2^{(-2)\cdot 4} = 2^{-8} = 0{,}00391$

d) $5^{(-3)\cdot(-2)} = 5^6 = 15\,625$

2.5 Expresa cada número en notación científica.

a) $123{,}5245 \cdot 10^5$

b) $0{,}01245 \cdot 10^9$

c) $5\,437{,}65 \cdot 10^8$

d) $0{,}0054376$

a) $1{,}235245 \cdot 10^7$

b) $1{,}245 \cdot 10^7$

c) $5{,}43765 \cdot 10^{11}$

d) $5{,}4376 \cdot 10^{-3}$

2.6 Escribe en notación científica estos números.

a) $1\,200\,000$

b $3\,230\,000\,000$

c) $0{,}00000045$

d) $0{,}0000000132$

a) $1{,}2 \cdot 10^6$

b) $3{,}23 \cdot 10^9$

c) $4{,}5 \cdot 10^{-7}$

d) $1{,}32 \cdot 10^{-9}$

2.7 Realiza estas operaciones y expresa el resultado en notación científica.

a) $8{,}05 \cdot 10^7 + 3{,}16 \cdot 10^7$

b) $3{,}13 \cdot 10^8 - 1{,}66 \cdot 10^7$

a) $(8{,}05 + 3{,}16) \cdot 10^7 = 11{,}21 \cdot 10^7 = 1{,}121 \cdot 10^8$

b) $(3{,}13 \cdot 10 - 1{,}66) \cdot 10^7 = (31{,}3 - 1{,}66) \cdot 10^7 = 29{,}64 \cdot 107 = 2{,}964 \cdot 10^8$

2.8 La masa de la Luna es de $7{,}34 \cdot 10^{23}$ kilogramos, y la de la Tierra, de $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kilogramos. ¿A cuántas Lunas equivale la masa de la Tierra?

$$\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{7{,}34 \cdot 10^{23}} = 8{,}147$$

La masa de la Tierra es aproximadamente 8 Lunas.

2.9 Expresa en forma de raíz estas igualdades.

a) $9^2 = 81$ **b) $6^3 = 216$** **c) $(-4)^3 = -64$** **d) $(-10)^3 = -1\,000$**

a) $9 = \sqrt{81}$

b) $6 = \sqrt[3]{216}$

c) $-4 = \sqrt[3]{-64}$

d) $-10 = \sqrt[3]{-1\,000}$

2.10 Escribe en forma de raíz cada igualdad y luego halla el valor de *x*.

a) $x^2 = 144$ **b) $x^3 = \frac{1}{1\,000}$** **c) $x^2 = \frac{16}{25}$** **d) $x^5 = -100\,000$**

a) $x = \sqrt{144} = \pm 12$

b) $x = \sqrt[3]{\frac{1}{1\,000}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1\,000}} = \frac{1}{10}$

c) $x = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \pm\frac{4}{5}$

d) $x^5 = -100\,000 \Rightarrow x = \sqrt[5]{-100\,000} = -10$

2.11 Calcula cada raíz con una aproximación de dos cifras decimales, por exceso y por defecto.

a) $\sqrt[5]{58}$ **b) $\sqrt[4]{49}$** **c) $\sqrt[3]{150}$** **d) $\sqrt[6]{100}$**

	$\sqrt[5]{58}$	$\sqrt[4]{49}$	$\sqrt[3]{150}$	$\sqrt[6]{100}$
Por exceso	$2{,}26^5 = 58{,}95$	$2{,}65^4 = 49{,}31$	$5{,}32^3 = 150{,}57$	$2{,}16^6 = 101{,}56$
Por defecto	$2{,}25^5 = 57{,}66$	$2{,}64^4 = 48{,}57$	$5{,}31^3 = 149{,}72$	$2{,}15^6 = 98{,}773$

2.12 Calcula por aproximación estas raíces.

a) $\sqrt{0{,}25}$ **b) $\sqrt[3]{0{,}064}$** **c) $\sqrt{0{,}81}$** **d) $\sqrt[3]{0{,}125}$**

a)

	Por defecto	Por exceso
Entero	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$
Decimal	$0{,}5^2 = 0{,}25$	Resultado exacto

b)

	Por defecto	Por exceso
Entero	$0^3 = 0$	$1^3 = 1$
Decimal	$0{,}4^3 = 0{,}064$	Resultado exacto

c)

	Por defecto	Por exceso
Entero	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$
Decimal	$0{,}9^2 = 0{,}81$	Resultado exacto

d)

	Por defecto	Por exceso
Entero	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$
Decimal	$0{,}5^3 = 0{,}125$	Resultado exacto

2.13 Indica el número de raíces de estos radicales.

a) $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt[3]{32}$ **c)** $\sqrt[5]{-12}$ **d)** $\sqrt{-4}$

a) Dos, porque tiene índice par y radicando positivo.

b) Una, porque el índice es impar.

c) Una, porque el índice es impar.

d) Ninguna, porque el índice es par y el radicando es negativo.

2.14 Escribe tres radicales equivalentes en cada caso.

a) $\sqrt[4]{3}$ **b)** $\sqrt[5]{2^3}$

a) $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4\cdot 2]{3^2} = \sqrt[8]{9}$; $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4\cdot 3]{3^3} = \sqrt[12]{27}$; $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4\cdot 4]{3^4} = \sqrt[16]{81}$

b) $\sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5\cdot 3]{(2^3)^3} = \sqrt[15]{2^9}$; $\sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5\cdot 5]{(2^3)^5} = \sqrt[25]{2^{15}}$; $\sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5\cdot 10]{(2^3)^{10}} = \sqrt[50]{2^{30}}$

2.15 Comprueba si los radicales son equivalentes.

a) $\sqrt[5]{11^2}$ **y** $\sqrt[10]{11^6}$ **b)** $\sqrt[3]{13^2}$ **y** $\sqrt[12]{13^8}$

a) $\sqrt[5]{11^2} = \sqrt[5\cdot 2]{(11^2)^2} = \sqrt[10]{11^4}$. No son equivalentes.

b) $\sqrt[3]{13^2} = \sqrt[3\cdot 4]{(13^2)^4} = \sqrt[12]{13^8}$. Son equivalentes.

2.16 Expresa los siguientes pares de radicales con el mismo índice.

a) $\sqrt{11}$ **y** $\sqrt[3]{7^2}$ **b)** $\sqrt[3]{5}$ **y** $\sqrt[6]{25}$

a) $\sqrt{11} = \sqrt[2\cdot 3]{11^3} = \sqrt[6]{11^3}$ y $\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3\cdot 2]{(7^2)^2} = \sqrt[6]{7^4}$

b) $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3\cdot 2]{5^2} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

2.17 Escribe en forma radical estas potencias.

a) $3^{\frac{4}{3}}$ **b)** $5^{\frac{7}{2}}$ **c)** $7^{\frac{2}{5}}$ **d)** $3^{\frac{1}{5}}$

a) $\sqrt[3]{3^4}$ b) $\sqrt{5^7}$ c) $\sqrt[5]{7^2}$ d) $\sqrt[5]{3}$

2.18 Expresa estas raíces en forma potencial.

a) $\sqrt[3]{27}$ **b)** $\sqrt[8]{64}$ **c)** $\sqrt[3]{-125}$ **d)** $\sqrt[4]{1\,000}$

a) $27^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3$

b) $64^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{6}{8}} = 2^{\frac{3}{4}}$

c) $(-125)^{\frac{1}{3}} = (-5)^{\frac{3}{3}} = -5$

d) $1\,000^{\frac{1}{4}} = 10^{\frac{3}{4}}$

2.19 Calcula las raíces expresándolas como exponente fraccionario.

a) $\sqrt[3]{7^9}$ **b)** $\sqrt[3]{10^{12}}$ **c)** $\sqrt{13^4}$ **d)** $\sqrt[4]{15^8}$

a) $7^{\frac{9}{3}} = 7^3 = 343$

b) $10^{\frac{12}{3}} = 10^4 = 10\,000$

c) $13^{\frac{4}{2}} = 13^2 = 169$

d) $15^{\frac{8}{4}} = 15^2 = 225$

2.20 Indica qué pares de potencias son iguales.

a) $17^{\frac{2}{5}}$ **y** $17^{\frac{4}{10}}$

b) $29^{\frac{5}{8}}$ **y** $29^{\frac{3}{4}}$

c) $11^{\frac{2}{4}}$ **y** $11^{\frac{15}{30}}$

d) $37^{\frac{1}{3}}$ **y** $37^{0,666...}$

a) Son iguales. Si simplificamos $\frac{4}{10}$, tenemos $\frac{2}{5}$.

b) No son iguales, porque las fracciones $\frac{5}{8}$ y $\frac{3}{4}$ no son equivalentes.

c) Son iguales. Ambas tienen por fracción irreducible $\frac{1}{2}$.

d) Son iguales. Si pasamos $\frac{1}{3}$ a número decimal, obtenemos 0,6666…

2.21 Calcula cada raíz después de factorizar.

a) $\sqrt{144}$

b) $\sqrt[3]{0,027}$

c) $\sqrt{255}$

d) $\sqrt[3]{-0,008}$

a) $\sqrt{144} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2} = 2^2 \cdot 3 = 12$

b) $\sqrt[3]{0,027} = \sqrt[3]{27 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-1} = 0,3$

c) $\sqrt{225} = \sqrt{5^2 \cdot 3^2} = 5 \cdot 3 = 15$

d) $\sqrt[3]{-0,008} = \sqrt[3]{-8 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{-2^3 \cdot 10^{-3}} = -2 \cdot 10^{-1} = -0,2$

2.22 Realiza estas operaciones.

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{4} : \sqrt[5]{2}$

c) $\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3$

d) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{6}}$

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5 \cdot 7 \cdot 2} = \sqrt[3]{70}$

b) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{4} : \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{3 \cdot 4 : 2} = \sqrt[5]{6}$

c) $\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2^3} = \sqrt{5 \cdot 2^3} = \sqrt{40}$

d) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{6}} = \sqrt[4\cdot 5]{6} = \sqrt[20]{6}$

2.23 Introduce en el radical los números que están fuera.

a) $3\sqrt{3}$

b) $7\sqrt[3]{2}$

c) $11\sqrt{7}$

d) $4\sqrt[3]{4}$

a) $3\sqrt{3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{27}$

b) $7\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{7^3 2} = \sqrt[3]{686}$

c) $11\sqrt{7} = \sqrt{11^2 \cdot 7} = \sqrt{847}$

d) $4\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4^3 4} = \sqrt{256}$

2.24 Efectúa estas sumas de radicales.

a) $3\sqrt{18} - 5\sqrt{32} + 6\sqrt{50}$

b) $12\sqrt[3]{81} - 6\sqrt[3]{24}$

a) $3\sqrt{18} - 5\sqrt{32} + 6\sqrt{50} = 3\sqrt{2 \cdot 3^2} - 5\sqrt{2^5} + 6\sqrt{2 \cdot 5^2} = 3 \cdot 3\sqrt{2} - 5 \cdot 2^2\sqrt{2} + 6 \cdot 5\sqrt{2} = 19\sqrt{2}$

b) $12\sqrt[3]{81} - 6\sqrt[3]{24} = 12\sqrt[3]{3^4} - 6\sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = 12 \cdot 3\sqrt[3]{3} - 6 \cdot 2\sqrt[3]{3} = 24\sqrt[3]{3}$

2.25 Calcula el valor de estas operaciones.

a) $64^{-\frac{2}{3}}$

b) $7^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{7}$

c) $\left(11^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

d) $4^{-\frac{3}{2}}$

a) $64^{-\frac{2}{3}} = \left(2^6\right)^{-\frac{2}{3}} = 2^{-4} = 0{,}0625$

b) $7^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{7} = 7^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 7^0 = 1$

c) $\left(11^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} = 11^{\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}} = 11^1 = 11$

d) $4^{-\frac{3}{2}} = \left(2^2\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{-3} = 0{,}125$

2.26 Realiza las siguientes operaciones expresando los radicales como potencias fraccionarias.

a) $\sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$

b) $\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[4]{5^3} : \sqrt[12]{7}$

d) $\sqrt{\sqrt[5]{3^2}}$

a) $\sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[35]{2^5} \cdot \sqrt[35]{2^7} = \sqrt[35]{2^{12}}$

b) $\sqrt{12} \cdot \sqrt[5]{5} = \sqrt[2\cdot3]{12^3} \cdot \sqrt[3\cdot2]{5^2} = \sqrt[6]{12^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{43\,200}$

c) $\sqrt[4]{5^3} : \sqrt[12]{7} = \sqrt[4\cdot3]{(5^3)^3} : \sqrt[12]{7} = \sqrt[12]{5^9 : 7}$

d) $\sqrt{\sqrt[5]{3^2}} = \sqrt[2\cdot5]{3^2} = \sqrt[5]{3}$

P R O B L E M A S   P R O P U E S T O S

2.27 Indica el proceso para acertar la edad, en años, de Pablo con el mínimo de preguntas. Pablo se limitará a responder: "mayor” y "menor”.

Busca un intervalo en el cual se encuentre su edad. Una vez lo tengas, vete reduciéndolo escogiendo el punto medio del intervalo.

Si pruebas con un intervalo inicial muy grande, antes encontrarás uno en el que se encuentre la edad, y podrás empezar a aplicar la “regla del punto medio”. Si vas probando con pequeños, puede que te cueste más encontrar el intervalo.

Por ejemplo, pregúntale a Pablo si su edad es 4 años. Si te responde mayor, pregúntale si es 34; si te responde menor, haya el punto medio del intervalo (4, 34), que es 19. Entonces le preguntas si tiene más o menos años que 19. Si te dice mayor, tienes el intervalo (19, 34), el punto medio es 26,5. Redondea el número a un entero: 26 ó 27, y repite el proceso.

2.28 Halla la arista de un cubo si su capacidad es 2 000 litros, utilizando las cuatro operaciones.

Sabemos que la arista elevada al cubo nos da como resultado el volumen.

Buscamos entre los números enteros una aproximación:

$$10^3 = 1\,000 \qquad 11^3 = 1\,331 \qquad 12^3 = 1\,728 \qquad 13^3 = 2\,197$$

Hallamos el valor central del intervalo y calculamos su valor al cubo: $12{,}5^3 = 1\,953{,}125$

Tomamos ahora el intervalo (12,5, 13) y repetimos el proceso del punto medio: $12{,}75^3 = 2\,072{,}672$

De nuevo con el intervalo (12,5; 12,75): $12{,}625^3 = 2\,012{,}307$

Consideramos la arista del cubo como 12,625 cm.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Potencias de exponente entero

2.29 Calcula estas potencias.

a) $(-2)^3$

b) 1^{23}

c) -3^{-2}

d) 467^0

a) $(-2)^3 = -8$

b) $1^{23} = 1$

c) $-3^{-2} = -\frac{1}{9}$

d) $467^0 = 1$

2.30 Expresa como una potencia de 2 cada número.

a) $1\,024$

b) 4^{17}

c) $\frac{1}{64}$

d) $4 \cdot 8^3$

a) $1\,024 = 2^{10}$

b) $4^{17} = (2^2)^{17} = 2^{34}$

c) $\frac{1}{64} = 2^{-6}$

d) $4 \cdot 8^3 = 2^2 \cdot (2^3)^3 = 2^{11}$

2.31 Escribe como potencias positivas, las negativas, y viceversa.

a) 4^{-3} **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ **c)** 3^2 **d)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

a) $\frac{1}{4^3}$ b) 5^{-2} c) $\frac{1}{3^{-2}}$ d) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$

2.32 Expresa estas operaciones como una sola potencia positiva.

a) $2^3 \cdot 2^6$

b) $3^{-2} \cdot 3^5$

c) $(7^4)^{-3}$

d) $7^9 : 7^{-2}$

e) $4^2 \cdot 4^9 : 4^5$

f) $9^2 \cdot 3^3$

a $2^{3+6} = 2^9$

b) $3^{-2+5} = 3^3$

c) $7^{4\cdot(-3)} = 7^{-12}$

d) $7^{9-(-2)} = 7^{11}$

e) $4^{2+9-5} = 4^6$

f) $3^{2\cdot 2} \cdot 3^3 = 3^{4+3} = 3^7$

2.33 Calcula el resultado expresándolo en forma de potencia positiva.

a) $\frac{16 \cdot 2^{-3}}{4^2}$

b) $2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-2}$

c) $(5^3 \cdot 2^3)^2$

d) $27^3 : 3^7 : 9^{-1}$

a) $\frac{16 \cdot 2^{-3}}{4^2} = \frac{2^4 \cdot 2^{-3}}{(2^2)^2} = 2^{-3}$

b) $2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-2} = (2 \cdot 3 \cdot 5)^{-2} = 30^{-2}$

c) $(5^3 \cdot 2^3)^2 = (10^3)^2 = 10^6$

d) $27^3 : 3^7 : 9^{-1} = (3^3)^3 : 3^7 : (3^2)^{-1} = 3^9 : 3^7 : 3^{-2} = 3^4$

Potencias de 10. Notación científica

2.34 Escribe en notación científica estos números.

a) $234{,}9 \cdot 10^4$

b) $\dfrac{3}{10^3}$

c) 23 millones

d) 0,0000245

a) $2{,}349 \cdot 10^6$

b) $3 \cdot 10^{-3}$

c) $2{,}3 \cdot 10^7$

d) $2{,}45 \cdot 10^{-5}$

2.35 Realiza estas operaciones y expresa el resultado en notación científica.

a) $4{,}02 \cdot 10^4 + 5{,}1 \cdot 10^4$

b) $(3 \cdot 10^5) \cdot (2 \cdot 10^4)$

c) $3{,}11 \cdot 10^3 - 2{,}2 \cdot 10^3$

d) $(7 \cdot 10^8) : (4 \cdot 10^{-3})$

a) $4{,}02 \cdot 10^4 + 5{,}1 \cdot 10^4 = 9{,}12 \cdot 10^4$

b) $(3 \cdot 10^5) \cdot (2 \cdot 10^4) = 6 \cdot 10^9$

c) $3{,}11 \cdot 10^3 - 2{,}2 \cdot 10^3 = 9{,}1 \cdot 10^2$

d) $(7 \cdot 10^8) : (4 \cdot 10^{-3}) = 1{,}75 \cdot 10^{11}$

2.36 Una persona duerme, por término medio, ocho horas diarias. Expresa en notación científica los segundos que ha dormido, en toda su vida, una persona de ochenta años.

80 años. Cada año tiene 365 días, de cada día duerme 8 horas, cada hora tiene 60 minutos, y cada minuto, 60 segundos.

$80 \cdot 365 \cdot 8 \cdot 60 \cdot 60 = 840\,960\,000 = 8{,}4096 \cdot 10^8$ segundos

Radicales. Potencias de exponente fraccionario

2.37 Calcula cada raíz con una aproximación de una cifra decimal, por exceso y por defecto.

a) $\sqrt[3]{35}$

b) $\sqrt[4]{300}$

	$\sqrt[3]{35}$	$\sqrt[4]{300}$
Por exceso	$3{,}2^3 = 32{,}8$	$4{,}1^4 = 282{,}6$
Por defecto	$3{,}3^3 = 35{,}9$	$4{,}2^4 = 311{,}2$

2.38 Indica el número de raíces de estos radicales.

a) $\sqrt[5]{243}$

b) $\sqrt[3]{-125}$

c) $\sqrt[4]{-16}$

d) $\sqrt{64}$

a) Una, porque tiene índice impar.

b) Una, porque tiene índice impar.

c) Ninguna, porque tiene índice par y radicando negativo.

d) Dos, porque tiene índice par y radicando positivo.

2.39 Calcula estas raíces.

a) $\sqrt[4]{3^8}$

b) $\sqrt[3]{7^9}$

c) $\sqrt{2^{12}}$

d) $\sqrt[5]{3^{20}}$

a) $\sqrt[4]{3^8} = 3^{\frac{8}{4}} = 3^2 = 9$

b) $\sqrt[3]{7^9} = 7^{\frac{9}{3}} = 7^3 = 7^3 = 343$

c) $\sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}} = 2^6 = 64$

d) $\sqrt[5]{3^{20}} = 3^{\frac{20}{5}} = 3^4 = 81$

2.40 Comprueba si los siguientes radicales son equivalentes.

a) $\sqrt[3]{4}$ **y** $\sqrt[6]{2^4}$

b) $\sqrt[5]{5}$ **y** $\sqrt[7]{7}$

c) $\sqrt{7^{-1}}$ **y** $\sqrt[4]{-49}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}$ **y** $\dfrac{2}{5}$

a) $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[6]{2^4} = 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{2}{3}}$. Sí, son equivalentes.

b) No son equivalentes.

c) No son equivalentes.

d) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3}{5^3}} = \dfrac{2}{5}$. Sí, son equivalentes.

2.41 Expresa los siguientes radicales con el mismo índice.

a) $\sqrt[4]{3}$ **y** $\sqrt[8]{5}$

b) $\sqrt{5}$ **y** $\sqrt[7]{2^3}$

c) $\sqrt{2^3}$ **y** $\sqrt[5]{5}$

d) $\sqrt[3]{2}$ **y** $\sqrt[4]{7}$

a) $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4\cdot 2]{3^2} = \sqrt[8]{9}$ $\qquad \sqrt[8]{5}$

b) $\sqrt{5} = \sqrt[2\cdot 7]{5^7} = \sqrt[14]{5^7}$ $\qquad \sqrt[7]{2^3} = \sqrt[7\cdot 2]{2^{3^2}} = \sqrt[14]{2^6}$

c) $\sqrt{2^3} = \sqrt[2\cdot 5]{2^{3^5}} = \sqrt[10]{2^{15}}$ $\qquad \sqrt[5]{5} = \sqrt[5\cdot 2]{5^2} = \sqrt[10]{5^2}$

d) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3\cdot 4]{2^4} = \sqrt[12]{2^4}$ $\qquad \sqrt[4]{7} = \sqrt[4\cdot 3]{7^3} = \sqrt[12]{7^3}$

2.42 Escribe estas potencias de exponente fraccionario como radicales.

a) $2^{\frac{5}{3}}$

b) $36^{\frac{3}{2}}$

c) $3^{\frac{-3}{2}}$

d) $4^{\frac{-2}{7}}$

a) $2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$

b) $36^{\frac{3}{2}} = \sqrt{36^3}$

c) $3^{\frac{-3}{2}} = \sqrt{3^{-3}}$

d) $4^{\frac{-2}{7}} = \sqrt[7]{4^{-2}}$

2.43 Expresa los siguientes radicales en forma de potencia con exponente fraccionario.

a) $\sqrt[4]{7^5}$ **b)** $\sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}$ **c)** $\sqrt[3]{-81}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

a) $\sqrt[4]{7^5} = 7^{\frac{5}{4}}$

b) $\sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3} = 2^{\frac{-3}{5}}$

c) $\sqrt[3]{-81} = -3^{\frac{4}{3}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{-1}{3}}$

2.44 Calcula estas raíces expresándolas primero como potencias de exponente fraccionario.

a) $\sqrt[5]{8^{10}}$ **b)** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4^3}}$ **c)** $\sqrt[8]{2^{16}}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{10^6}}$

a) $\sqrt[5]{8^{10}} = 8^{\frac{10}{5}} = 8^2 = 64$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4^3}} = 4^{\frac{-3}{3}} = 4^{-1} = \dfrac{1}{4}$

c) $\sqrt[8]{2^{16}} = 2^{\frac{16}{8}} = 2^2 = 4$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{10^6}} = 10^{\frac{-6}{2}} = 10^{-3} = 0{,}001$

Cálculo con potencias y raíces

2.45 Realiza estas operaciones.

a) $\sqrt{216} : \sqrt{6}$

b) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[3]{729} : \sqrt[3]{27}$

d) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^2$

a) $\sqrt{216} : \sqrt{6} = \sqrt{\frac{216}{6}} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

c) $\sqrt[3]{729} : \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{\frac{729}{27}} = \sqrt[3]{27} = 3$

d) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^2 = \left(\sqrt[4]{2^4}\right)^2 = 2^2 = 4$

2.46 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\left(3 \cdot \sqrt{2}\right)^2$

b) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{8}}$

c) $\left(\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}\right)^4$

d) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^4$

a) $\left(3 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 3^2 \cdot 2 = 18$

b) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{24}{8}} = \sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}\right)^4 = 5^2 \cdot 3^2 = 225$

d) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^4 = \frac{2^4}{5^2} = \frac{16}{15} = 0{,}64$

2.47 Factoriza los radicandos para obtener cada raíz.

a) $\sqrt{129\,600}$

b) $\sqrt[6]{15\,625}$

c) $\sqrt[3]{9\,261}$

d) $\sqrt[5]{537\,824}$

a) $\sqrt{129\,600} = \sqrt{5^2 3^4 2^6} = 5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 = 360$

b) $\sqrt[6]{15\,625} = \sqrt[6]{5^6} = 5$

c) $\sqrt[3]{9\,261} = \sqrt[3]{3^3 7^3} = 3 \cdot 7 = 21$

d) $\sqrt[5]{537\,824} = \sqrt[5]{2^5 7^5} = 2 \cdot 7 = 14$

2.48 Expresa cada número como un radical.

a) $5\sqrt{5}$

b) $7\sqrt{7^3}$

c) $3\sqrt[4]{2}$

d) $2^2 \cdot \sqrt[3]{2}$

a) $5\sqrt{5} = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$

b) $7\sqrt{7^3} = \sqrt{7^5} = \sqrt{16\,807}$

c) $3\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{162}$

d) $2^2 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{128}$

2.49 Realiza las sumas de radicales.

a) $\sqrt{32} - \sqrt{2}$

b) $\sqrt{50} - 2\sqrt{20}$

c) $5\sqrt{18} - \sqrt{8} + 2\sqrt{72}$

d) $3 \cdot \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{375}$

a) $\sqrt{32} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{50} - 2\sqrt{20} = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$

c) $5\sqrt{18} - \sqrt{8} + 2\sqrt{72} = 15\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$

d) $3 \cdot \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{375} = 6\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} = 11\sqrt[3]{3}$

2.50 Calcula el valor de estas potencias.

a) $8^{\frac{1}{3}}$ **b)** $32^{\frac{-1}{5}}$ **c)** $81^{\frac{3}{4}}$ **d)** $0^{\frac{7}{4}}$

a) $8^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2$ b) $32^{\frac{-1}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{-1}{5}} = 2^{-1}$ c) $81^{\frac{3}{4}} = \left(3^4\right)^{\frac{3}{4}} = 3$ d) $0^{\frac{7}{4}} = 0$

2.51 Escribe estas expresiones en forma de potencia, pero con un solo exponente.

a) $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^4$ **b)** $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4$ **c)** $\left(25^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$ **d)** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$

a) $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 2^{\frac{4}{3}}$

b) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4 = 5^{\frac{4}{3}}$

c) $\left(25^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} = 25^{\frac{2}{2}} = 25 = 5^2$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^4 = 2^{-2}$

2.52 Efectúa las operaciones.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3}$

b) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3} : \sqrt[6]{3^4}$

c) $\sqrt[5]{2} : \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[10]{2^7}$

d) $\sqrt{\sqrt{5}} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2$

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} = \sqrt[8]{3^4} \cdot \sqrt[8]{3^2} \cdot \sqrt[8]{3} = \sqrt[8]{3^4 3^2 3} = \sqrt[8]{3^7}$

b) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3} : \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[12]{3^4} \cdot \sqrt[12]{3^9} : \sqrt[12]{3^8} = \sqrt[12]{3^4 \cdot 3^9 : 3^8} = \sqrt[12]{3^5}$

c) $\sqrt[5]{2} : \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[10]{2^7} = \sqrt[30]{2^6 : 2^{20} \cdot 2^{21}} = \sqrt[30]{2^{6-20+21}} = \sqrt[30]{2^7}$

d) $\sqrt{\sqrt{5}} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3\sqrt[4]{5}$

2.53 Escribe en forma de potencia estas expresiones.

a) $3^x \cdot 5^x \cdot 6^x$ **b)** $\frac{x}{\sqrt{x}}$ **c)** $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$ **d)** $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}$

a) $3^x \cdot 5^x \cdot 6^x = (3 \cdot 5 \cdot 6)^x = 90^x$

b) $\frac{x}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}}$

c) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = x^{\frac{2}{3}}$

d) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{12}}$

2.54 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{5} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{4}}$

b) $\left(3^2\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}$

c) $5^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{7^4}$

d) $7^{\frac{1}{5}} \cdot \left(6^{\frac{2}{10}} \cdot \sqrt[\frac{1}{2}]{8}\right)$

a) $\sqrt[3]{5}, 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[12]{5^4 \cdot 3^6 \cdot 5^9} = 5\sqrt[12]{5 \cdot 3^6}$

b) $\left(3^2\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[12]{3^{16} \cdot 2^3 \cdot 5^2} = 3\sqrt[12]{3^4 \cdot 2^3 \cdot 5^2}$

c) $5^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{7^4} = 2\sqrt[6]{5^3 \cdot 7^8}$

d) $7^{\frac{1}{5}} \cdot \left(6^{\frac{2}{10}} \cdot \sqrt{8}\right)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{5}} \cdot \left((3 \cdot 2)^{\frac{2}{10}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{2}{20}} \cdot 2^{\frac{2}{20}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[20]{7^4 \cdot 3^2 \cdot 2^{17}}$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

2.55 **Indica si cada igualdad es verdadera o falsa. Justifica la respuesta.**

a) $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$

b) $(a^p)^q = (a^q)^p$

c) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

a) Verdadera por las propiedades de las potencias.

b) Verdadera, $(a^p)^q = a^{p \cdot q} = a^{q \cdot p} = (a^q)^p$

c) Falsa, ya que $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

d) Verdadera, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}} = \frac{b}{a}$

2.56 **Explica si son verdaderas estas igualdades.**

a) $\frac{x^6}{x^3} = \frac{x^5}{x^2}$

b) $x^4 \cdot x^3 = x^6 \cdot x^2$

a) Verdadera, $\frac{x^6}{x^3} = \frac{x^5}{x^2} \Rightarrow x^{6-3} = x^{5-2} \Rightarrow x^3 = x^3$

b) Falsa, $x^4 \cdot x^3 \neq x^6 \cdot x^2 \Rightarrow x^{4+3} \neq x^{6+2} \Rightarrow x^7 \neq x^8$

2.57 **Razona si son verdaderas las siguientes igualdades.**

a) $(-3)^{-3} = -3^{-3}$

b) $2^{-2} = (-2)^2$

c) $7 \cdot 2^{-2} = (7 \cdot 2)^{-2}$

d) $(-1)^{-1} = -1$

a) Verdadera, porque $(-3)^{-3} = (-1)^{-3} \cdot 3^{-3} = (-1) \cdot 3^{-3} = -3^{-3}$

b) Falsa, porque $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \neq (-2)^2 = 4$

c) Falsa, porque $7 \cdot 2^{-2} = \frac{7}{4} \neq \frac{1}{14} = (7 \cdot 2)^{-2}$

d) Verdadera, porque $(-1)^{-1} = \frac{1}{-1} = -1$

2.58 **Si, $a^2 > b^2$, ¿podemos deducir que $a > b$? Analiza la respuesta buscando ejemplos.**

No necesariamente. Si $a < 0$, por ejemplo, $a = -1$ y $b < 1$, por ejemplo, $b = 0{,}5$; se cumple que: $a^2 > b^2$ $(1 > 0{,}25)$, pero $a < b$ $(-1 < 0{,}5)$.

2.59 **¿Qué valores puede tomar un número a para que se cumpla que $a^2 = a$?**

Cero o uno.

2.60 **Justifica si estas igualdades son verdaderas.**

a) $\sqrt{-16} = -4$ **b)** $\sqrt[8]{0} = 0$ **c)** $\sqrt[3]{-8} = -2$ **d)** $\sqrt{5^{-4}} = 5^{-2}$

a) Falsa. Una raíz con índice par y radicando negativo no tiene ninguna solución.

b) Verdadera. Si el radicando de una raíz es 0, independientemente del índice, la solución va a ser cero.

c) Verdadera, $(-2)^3 = -8$

d) Verdadera, $\sqrt{5^{-4}} = 5^{\frac{-4}{2}} = 5^{-2}$

2.61 ¿Es siempre la raíz cuadrada de un número menor que dicho número? Analiza la respuesta buscando ejemplos.

No, para los números tales que $0 < x < 1$, $\sqrt{x} > x$; por ejemplo, $x = 0{,}25$; entonces, $\sqrt{x} = 0{,}5$.

2.62 Indica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

a) $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b) $(4 + 3)\sqrt{2} = 4 + 3\sqrt{2}$

c) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

d) $(4 + 3)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

a) Falsa. Contraejemplo: $\sqrt{5} = 2{,}236$ y $\sqrt{5} = \sqrt{1 + 4} \neq \sqrt{1} + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3$

b) Falsa, porque $(4 + 3)\sqrt{2} = 7\sqrt{2} = 9{,}9 \neq 4 + 3\sqrt{2} = 8{,}2$

c) Verdadera, porque $\sqrt{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

d) Verdadera, porque $4 + 3 = 7$

2.63 ¿Cuántas raíces cuartas tiene el número 81?

Por ser la raíz de un radicando positivo con índice par, existen dos soluciones, 3 y -3.

PROBLEMAS PARA APLICAR

2.64 **La unidad de memoria de un ordenador es el byte. Un kilobyte (kB) son $2^{10} = 1\,024$ bytes, un megabyte (MB) son $2^{10} = 1\,024$ kB, y un gigabyte (GB) equivale a $2^{10} = 1\,024$ MB. Expresa en forma de potencia cuántos bytes tiene el disco duro de un ordenador de 120 GB.**

120 GB $= 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}$ bytes $= 15 \cdot 2^{33}$ bytes

2.65 **Escribe en notación científica las siguientes cantidades.**

a) El tamaño del virus de la gripe: 0,000 000 002 2 metros

b) La población mundial: 6 400 000 000 de personas

c) El peso de una molécula de oxígeno: 0,000 000 000 000 000 000 000 053 gramos

a) $2{,}2 \cdot 10^{-9}$ m

b) $6{,}4 \cdot 10^{9}$ personas

c) $5{,}3 \cdot 10^{-23}$ g

2.66 **La distancia entre la Tierra y la Luna es de $3{,}8 \cdot 10^5$ kilómetros. Calcula el tiempo que tarda en llegar a la Luna una nave espacial que lleva una velocidad de 200 metros por segundo.**

$t = \dfrac{3{,}8 \cdot 10^8}{200} = 1{,}9 \cdot 10^6$ s $= 21$ días 23 h 46 min 40 s

2.67 **Una molécula de hidrógeno pesa $3{,}3 \cdot 10^{-24}$ gramos. ¿Cuántas moléculas hay en un gramo de hidrógeno?**

$N = \dfrac{1}{3{,}3 \cdot 10^{-24}} = 34 \cdot 10^{23}$ moléculas

2.68 La tabla muestra las distancias medias al Sol, en kilómetros, de los planetas del sistema solar.

Planeta	Distancia al Sol (km)
Júpiter	$7{,}7 \cdot 10^8$
Marte	$2{,}3 \cdot 10^8$
Mercurio	$6 \cdot 10^7$
Neptuno	$4{,}5 \cdot 10^9$
Saturno	$1{,}4 \cdot 10^9$
Tierra	$1{,}5 \cdot 10^8$
Urano	$2{,}9 \cdot 10^9$
Venus	$1{,}1 \cdot 10^8$

a) ¿Cuál es el planeta más cercano al Sol?

b) ¿Cuál es el planeta más lejano del Sol?

c) ¿Qué planeta está más cerca del Sol, la Tierra o Urano?

d) ¿Cuántas veces es mayor la distancia de la Tierra al Sol que la de Mercurio al Sol?

e) ¿Cuántas veces es mayor la distancia de Neptuno al Sol que la de la Tierra al Sol?

a) Mercurio

b) Neptuno

c) La Tierra

d) $N = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^7} = 2{,}5$ veces

La distancia de la Tierra al Sol es dos veces y media mayor que la de Mercurio al Sol.

e) $N' = \dfrac{4{,}5 \cdot 10^9}{1{,}5 \cdot 10^8} = 30$ veces

La distancia de Neptuno al Sol es treinta veces mayor que la de la Tierra al Sol.

2.69 La velocidad de la luz es 300 000 kilómetros por segundo, y la distancia entre el Sol y Júpiter es 7,7 · 108 kilómetros. ¿Cuánto tiempo tarda la luz en llegar desde el Sol a Júpiter?

$t = \dfrac{7{,}7 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} = 2\,567\ s = 42$ min 47 s

La luz tarda 42 minutos y 47 segundos en llegar desde el Sol a Júpiter.

2.70 Según el Instituto Nacional de Estadística, la Renta Neta Nacional Disponible en el año 2002 fue de 589 862 millones de euros. Para ese año, el censo oficial reflejó una población de 40 847 371 habitantes. ¿Cuál fue la renta per cápita en euros? Realiza los cálculos utilizando la notación científica.

$r = \dfrac{5{,}89862 \cdot 10^{11}}{4{,}0847371 \cdot 10^7} \cong 14\,441$ €/persona

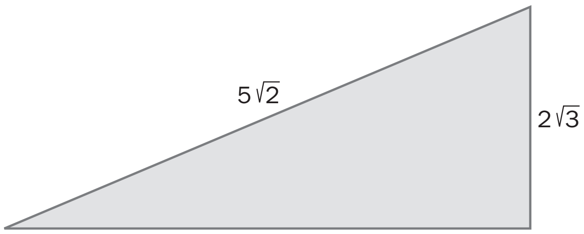
La renta per cápita fue 14 441 euros.

2.71 Queremos construir un almacén de planta cuadrada en un solar de 400 metros cuadrados. ¿Cuál es la longitud del lado del almacén?

Por ser planta cuadrada $l^2 = 400 \Rightarrow l = 20$ m.

La longitud del lado del almacén es de 20 metros.

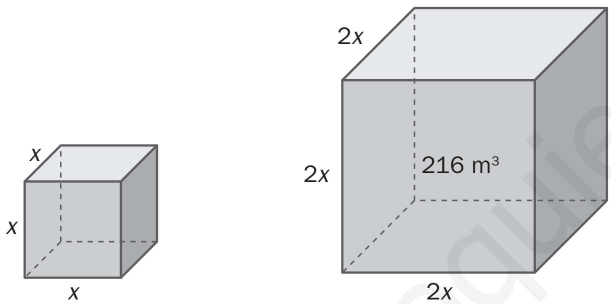
2.72 Calcula cuánto mide el cateto desconocido.



$13^2 = 5^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

2.73 Tenemos un cubo y duplicamos su lado. El volumen del nuevo cubo es 216 metros cúbicos.

¿Cuál era el volumen del cubo inicial?



$(2x)^3 = 216 \Rightarrow 8x^3 = 216 \Rightarrow V = x^3 = 27$ m^3

REFUERZO

Potencias de exponente entero y fraccionario

2.74 Aplicando las propiedades de las potencias, simplifica estas expresiones.

a) $\dfrac{5^2 \cdot (5^{-2})^3 \cdot 5^4}{5^0 \cdot 5^{-5} \cdot (5^2)^2}$

b) $\dfrac{3^{\frac{2}{3}} \cdot \left(3^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3^3}$

c) $\dfrac{2^{-1} \cdot (2^5)^{-3} \cdot 2}{2^7}$

d) $\dfrac{7^{-3} \cdot 7^{-1} \cdot 7^4}{(7^5 \cdot 7)^2}$

a) $\dfrac{5^2 \cdot (5^{-2})^3 \cdot 5^4}{5^0 \cdot 5^{\;5} \cdot (5^2)^2} = \dfrac{5^2 \cdot 5^{-6} \cdot 5^4}{1 \cdot 5^{-5} \cdot 5^4} = 5$

b) $\dfrac{3^{\frac{2}{3}} \cdot \left(3^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3^3} = \dfrac{3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^3}{3^3} = 3^{\frac{2}{3}}$

c) $\dfrac{2^{-1} \cdot (2^5)^{-3} \cdot 2}{2^7} = \dfrac{2^{-1} \cdot 2^{-15} \cdot 2}{2^7} = 2^{-22}$

d) $\dfrac{7^{-3} \cdot 7^{-1} \cdot 7^4}{(7^5 \cdot 7)^2} = \dfrac{7^{-3} \cdot 7^{-1} \cdot 7^4}{7^{10} \cdot 7^2} = 7^{-12}$

2.75 Calcula el valor de *x* en cada igualdad.

a) $x^2 = \dfrac{121}{81}$

b) $x^4 = 16 \cdot 9^2$

c) $x^{-2} = \dfrac{1}{4}$

d) $3^5 \cdot 3^x = 3^{15}$

a) $x^2 = \dfrac{121}{81} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{121}{81}} = \dfrac{11}{9}$

b) $x^4 = 16 \cdot 9^2 = 2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 \Rightarrow x = 6$

c) $x^{-2} = \dfrac{1}{4} = 2^{-2} \Rightarrow x = 2$

d) $3^5 \cdot 3^x = 3^{15} \Leftarrow 3^{5+x} = 3^{15} \Rightarrow x = 10$

2.76 Opera y expresa el resultado como una potencia.

a) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 : \left(\dfrac{5}{3}\right)^3$

b) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3 \cdot 3^3$

a) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 : \left(\dfrac{5}{3}\right)^3 = \dfrac{3^4 \cdot 3^3}{5^4 \cdot 5^3} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^7$

b) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3 \cdot 3^3 = \dfrac{-1}{3^3} \cdot 3^3 = -1$

2.77 Realiza estas operaciones y expresa el resultado en forma de raíz.

a) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{\frac{3}{5}} : \left(\dfrac{7}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

b) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$

a) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{\frac{3}{5}} : \left(\dfrac{7}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{2\ \ \cdot 2}{7^{\frac{3}{5}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}} = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{\frac{11}{10}}$

b) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{5^{\frac{3}{4}}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{-\frac{1}{12}}$

Notación científica

2.78 Escribe en notación científica los siguientes números.

a) 7 millonésimas

b) 32 397 258

c) Dos millones y medio

d) 0, 000 325

a) $7 \cdot 10^{-6}$

b) $3{,}2397258 \cdot 10^7$

c) $2{,}5 \cdot 10^6$

d) $3{,}25 \cdot 10^{-4}$

2.79 Calcula y expresa el resultado en notación científica.

a) $8{,}4 \cdot 10^3 + 9{,}23 \cdot 10^4$ **c)** $(4 \cdot 10^{-5}) \cdot (7 \cdot 10^{-2})$

b) $6{,}3 \cdot 10^{-1} - 2{,}1 \cdot 10^{-2}$ **d)** $(2 \cdot 10^6) : (5 \cdot 10^{-9})$

a) $8{,}4 \cdot 10^3 + 9{,}23 \cdot 10^4 = 0{,}84 \cdot 10^4 + 9{,}23 \cdot 10^4 = 10{,}07 \cdot 10^4 = 1{,}007 \cdot 10^5$

b) $6{,}3 \cdot 10^{-1} = 2{,}1 \cdot 10^{-2} = 6{,}3 \cdot 10^{-1} - 0{,}21 \cdot 10^{-1} = 6{,}09 \cdot 10^{-1}$

c) $(4 \cdot 10^{-5}) \cdot (7 \cdot 10^{-2}) = 28 \cdot 10^{-7} = 2{,}8 \cdot 10^{-6}$

d) $(2 \cdot 10^6) : (5 \cdot 10^{-9}) = 0{,}4 \cdot 10^{15} = 4 \cdot 10^{14}$

Cálculo con potencias y raíces

2.80 Introduce dentro de la raíz los números que aparecen fuera de ella.

a) $5 \cdot \sqrt{3}$ **b)** $3 \cdot \sqrt[3]{2}$ **c)** $2 \cdot \sqrt[4]{5}$ **d)** $4 \cdot \sqrt{7}$

a) $5 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$

c) $2 \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 5} = \sqrt[4]{80}$

b) $3 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$

d) $4 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{4^2 \cdot 7} = \sqrt{112}$

2.81 Simplifica las expresiones.

a) $3 \cdot \sqrt{5} + 3\sqrt{20}$ **c)** $\sqrt{45} + 2 \cdot \sqrt{20} - \sqrt{80}$

b) $\sqrt{27} - 3 \cdot \sqrt{12}$ **d)** $\sqrt{8} + 4\sqrt{18} - \sqrt{50}$

a) $3 \cdot \sqrt{5} + 3\sqrt{20} = 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$

c) $\sqrt{45} + 2 \cdot \sqrt{20} - \sqrt{80} = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

b) $\sqrt{27} - 3 \cdot \sqrt{12} = 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$

d) $\sqrt{8} + 4\sqrt{18} - \sqrt{50} = 2\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

2.82 Efectúa estas operaciones.

a) $(2\sqrt{3}) \cdot (3\sqrt{2})$ **c)** $(3\sqrt{6}) \cdot \sqrt{6}$

b) $\sqrt{125} : (3\sqrt{5})$ **d)** $(5\sqrt{18}) : \sqrt{50}$

a) $(2\sqrt{3}) \cdot (3\sqrt{2}) = 6\sqrt{6}$

c) $(3\sqrt{6}) \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6^2} = 3 \cdot 6 = 18$

b) $\sqrt{125} : (3\sqrt{5}) = \dfrac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \dfrac{5}{3}$

d) $(5\sqrt{18}) : \sqrt{50} = \dfrac{15\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 3$

2.83 Expresa los siguientes radicales con el mismo índice.

a) $\sqrt{2}$ **y** $\sqrt[4]{3}$ **c)** $\sqrt[3]{2^2}$ **y** $\sqrt{7}$

b) $\sqrt{5}$ **y** $\sqrt[4]{3^3}$ **d)** $\sqrt[3]{5}$ **y** $\sqrt[4]{6}$

a) $\sqrt{2} = \sqrt[4]{2^2}$ y $\sqrt[4]{3}$

b) $\sqrt{5} = \sqrt[4]{5^2}$ y $\sqrt[4]{3^3}$

c) $\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[6]{2^4}$ y $\sqrt{7} = \sqrt[6]{7^3}$

d) $\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4}$ y $\sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3}$

AMPLIACIÓN

2.84 Realiza estas operaciones.

a) $(3^{-1} + 3^{-2})^{-1}$

b) $\dfrac{3 \cdot 5^{-1}}{(3 \cdot 5)^{-1}} + \dfrac{5}{3}$

c) $2^{30} + 2^{30}$

d) $\dfrac{2^4}{2^2 + 2^3}$

e) $2^{-1} + 3^{-1} + 5^{-1}$

f) $2^{-7} \cdot 2^7$

a) $(3^{-1} + 3^{-2})^{-1} = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9}\right)^{-1} = \left(\dfrac{4}{9}\right)^{-1} = \dfrac{9}{4}$

b) $\dfrac{3 \cdot 5^{-1}}{(3 \cdot 5)^{-1}} + \dfrac{5}{3} = 3^2 + \dfrac{5}{3} = \dfrac{32}{3}$

c) $2^{30} + 2^{30} = 2 \cdot 2^{30} = 2^{31}$

d) $\dfrac{2^4}{2^2 + 2^3} = \dfrac{16}{4 + 8} = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3}$

e) $2^{-1} + 3^{-1} + 5^{-1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{31}{30}$

f) $2^{-7} \cdot 2^7 = 2^0 = 1$

2.85 Calcula estas potencias.

a) $4^{0,5}$

b) $9^{-1,5}$

a) $4^{0,5} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

b) $9^{-1,5} = 9^{\frac{-3}{2}} = \sqrt{9^{-3}} = \sqrt{3^{-6}} = 3^{-3} = \dfrac{1}{27}$

2.86 Halla el valor de *x* en las siguientes expresiones.

a) $16^x = 2^5$

b) $3^{x+2} = 9^x$

c) $5^{x+1} = 625$

d) $2^{2x-5} = 8$

a) $16^x = 2^5 \Rightarrow 2^{4x} = 2^5 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{4}$

b) $3^{x+2} = 9^x = 3^{2x} \Rightarrow x + 2 = 2x \Rightarrow x = 2$

c) $5^{x+1} = 625 = 5^4 \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$

d) $2^{2x-5} = 8 = 2^3 \Rightarrow 2x - 5 = 3 \Rightarrow x = 4$

2.87 Las siguientes raíces son exactas. Calcula en cada caso el menor valor de *n* que hace que se cumpla esta condición.

a) $\sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot n}$

b) $\sqrt[3]{7^2 \cdot 3^6 \cdot n}$

c) $\sqrt{3^5 \cdot n \cdot 5^3}$

d) $\sqrt[4]{n \cdot 2^3 \cdot 3^2}$

a) $n = 3$, $\sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4} = 18$

b) $n = 7$, $\sqrt[3]{7^2 \cdot 3^6 \cdot 7} = \sqrt[3]{7^3 \cdot 3^6} = 63$

c) $n = 15 = 3 \cdot 5$, $\sqrt{3^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5^3} = \sqrt{3^6 \cdot 5^4} = 675$

d) $n = 18 = 2 \cdot 32$, $\sqrt[4]{2 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = 6$

2.88 Dos números naturales, *a* y *b*, verifican que $a^b = b^a$. ¿Cuál es su valor?

2 y 4, porque $2^4 = 4^2 = 16$

2.89 Racionalizar una fracción es encontrar otra equivalente que no tenga raíces en su denominador. Racionaliza estas fracciones.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2}$

c) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{6}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

2.90 Cuadrados y cubos.

En las siguientes tablas aparecen los 14 y 10 primeros cuadrados y cubos perfectos.

Cuadrados perfectos	
1	64
4	81
9	100
16	121
25	144
36	169
49	196

Cubos perfectos	
1	216
8	343
27	512
64	729
125	1 000

a) Escribe un número distinto de la unidad que sea cuadrado y cubo perfecto a la vez

b) Comprueba que la suma de los dos primeros cubos perfectos es un cuadrado perfecto.

c) Comprueba que lo mismo ocurre para la suma de los tres y de los cuatro primeros cubos perfectos, y realiza una conclusión basada en las anteriores comprobaciones.

d) Comprueba que la conjetura también se verifica para la suma de los cinco y de los seis primeros cubos perfectos.

a) $64 = 8^2 = 4^3$

b) $1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = 3^2$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 6^2 \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2$

La suma de n cubos perfectos es un cuadrado perfecto $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$.

d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 15^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2 = 21^2$

2.91 Nuestro Planeta

A continuación se muestran algunas dimensiones aproximadas y otras características de nuestro planeta.

Radio medio	6 370 km
Densidad media	5 500 kg/m^3
Masa de la atmósfera	$5 \cdot 10^{18}$ kg
Masa de la hidrosfera	$1,5 \cdot 10^{21}$ kg
Área ocupada por los mares y océanos	$3,6 \cdot 10^8$ km^2

Utilizando cuando sea necesario la notación científica y razonando como si el planeta tuviera forma esférica, calcula de forma aproximada:

a) La superficie total de la Tierra.

b) El volumen total de la Tierra.

c) La masa total de la Tierra recordando que Densidad = $\frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}}$

d) La relación entre la masa de la atmósfera y la masa de la hidrosfera.

e) La relación entre la superficie ocupada por los océanos y la superficie total de la Tierra.

a) $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 6\,370^2 = 5,1 \cdot 10^8$ km^2

b) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 6\,370^3 = 1,08 \cdot 10^{12}$ km^3

c) $M = D \cdot V = 5\,500 \cdot 10^9 \cdot 1,08 \cdot 10^{12} = 5,94 \cdot 10^{24}$ kg

d) $\frac{M\ AT}{M\ HID} = \frac{5 \cdot 10^{18}}{1,5 \cdot 10^{21}} = 0,00333 = \frac{1}{300}$

e) $\frac{S\ OC}{S\ TERR} = \frac{3,6 \cdot 10^8}{5,1 \cdot 10^8} = 0,706$

AUTOEVALUACIÓN

2.A1 Encuentra el valor de cada una de las siguientes expresiones.

a) 2^2

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

c) 2^{-2}

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

a) $2^2 = 4$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$

c) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^2 = 4$

2.A2 Efectúa estas operaciones y expresa el resultado en forma de raíz.

a) $3^2 \cdot 3^{\frac{3}{4}}$ **b)** $2^{\frac{3}{4}} : 4^{\frac{1}{2}}$ **c)** $((-3)^{-2})^{\frac{2}{5}}$

a) $3^2 \cdot 3^{\frac{3}{4}} = 3^{2+\frac{3}{4}} = 3^{\frac{11}{4}} = \sqrt[4]{3^{11}}$

b) $2^{\frac{3}{4}} : 4^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}} : (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}} : 2 = 2^{\frac{3}{4}-1} = 2^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2^{-1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

c) $((-3)^{-2})^{\frac{2}{5}} = (-3)^{\frac{-4}{5}} = \sqrt[5]{(-3)^{-4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^4}}$

2.A3 Calcula las siguientes raíces.

a) $\sqrt[3]{27}$

b) $\sqrt[4]{16}$

c) $\sqrt[11]{1}$

d) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

e) $\sqrt[5]{2^{15}}$

f) $\sqrt[7]{0}$

a) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

b) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

c) $\sqrt[11]{1} = 1$

d) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \frac{3}{2}$

e) $\sqrt[5]{2^{15}} = 2^3 = 8$

f) $\sqrt[7]{0} = 0$

2.A4 Realiza esta operación.

$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{7}$

$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[12]{5^4 \cdot 3^6 \cdot 7^3}$

2.A5 Indica el número de raíces de estos radicales.

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[4]{-7}$

d) $\sqrt[5]{-10}$

a) Dos raíces reales

b) Una raíz real

c) No tiene raíces reales

d) Una raíz real

2.A6 **Realiza estas operaciones.**

a) $5\sqrt{8} - \sqrt{32} + 3\sqrt{18}$

b) $\sqrt{12} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{27}$

a) $5\sqrt{8} - \sqrt{32} + 3\sqrt{18} = 5\sqrt{2^3} - \sqrt{2^5} + 3\sqrt{2 \cdot 3^2} = 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 9\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

b) $\sqrt{12} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{27} = \sqrt{2^2 \cdot 3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3^3} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = -5\sqrt{3}$

2.A7 **Queremos construir un cubo de cartón cuyo volumen sea 6 metros cúbicos. ¿Qué superficie de cartón se necesita? Expresa el resultado en forma radical.**

Si a es la arista del cubo, $a^3 = 6 \Rightarrow a = \sqrt[3]{6} = a^2 = \sqrt[3]{6^2}$. Puesto que a^2 es el área de una cara y un cubo tiene seis caras, necesitamos $6 \cdot \sqrt[3]{6^2} \cong 19{,}81$ m^2 de cartón.

2.A8 **Escribe en notación científica.**

a) **Cuatro milésimas**

b) **51 423 000**

a) $4 \cdot 10^{-3}$

b) $5{,}1423 \cdot 10^{7}$

2.A9 **Opera y expresa el resultado en notación científica.**

a) $(3{,}23 \cdot 10^2) + (4{,}1 \cdot 10^3)$

b) $(2{,}6 \cdot 10^4) - (1{,}2 \cdot 10^3)$

c) $(1{,}2 \cdot 10^5) \cdot (6 \cdot 10^{-3})$

d) $(5 \cdot 10^6) : (4 \cdot 10^4)$

a) $3{,}23 \cdot 10^2 + 4{,}1 \cdot 10^3 = 0{,}323 \cdot 10^3 + 4{,}1 \cdot 10^3 = 4{,}423 \cdot 10^3$

b) $2{,}6 \cdot 10^4 - 1{,}2 \cdot 10^3 = 2{,}6 \cdot 10^4 - 0{,}12 \cdot 10^4 = 2{,}48 \cdot 10^4$

c) $(1{,}2 \cdot 10^5) \cdot (6 \cdot 10^{-3}) = 7{,}2 \cdot 10^2$

d) $(5 \cdot 10^6) : (4 \cdot 10^4) = 1{,}25 \cdot 10^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1 Escribe Halla el valor de *x* para que se cumplan las siguientes proporciones.

a) $\frac{12}{3} = \frac{4}{x}$ **b)** $\frac{9}{60} = \frac{x}{40}$ **c)** $\frac{15}{x} = \frac{3}{36}$

a) $x = \frac{12}{4 \cdot 3} = 1$ b) $x = \frac{9 \cdot 40}{60} = 6$ c) $x = \frac{15 \cdot 36}{3} = 180$

3.2 Luis y Carlos cambian divisas. Luis cambia 5 500 soles del Perú y le dan 1 270 euros. A Carlos le dan 1 062 euros.

a) ¿Cuántos soles ha cambiado Carlos?

b) Cuál es el cambio euro-sol?

a) $\frac{5\,500}{1\,270} = \frac{x}{1\,062} \Rightarrow 5\,500 \cdot 1\,062 = 1\,270 \cdot x \Rightarrow x = \frac{5\,841\,000}{1\,270} = 4\,599{,}2$

Carlos ha cambiado 4 599,20 soles. (No hay monedas de un céntimo de soles del Perú, la menor es de 20 céntimos.)

b) $\frac{5\,500}{1\,270} = \frac{1}{x} \Rightarrow 5\,500 \cdot x = 1\,270 \Rightarrow x = 0{,}2$

Un sol del Perú equivale a 20 céntimos de euro.

3.3 Indica si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales.

a) Millones de euros que se dedican a combatir el hambre en el mundo y número de personas fallecidas a causa del hambre.

b) Velocidad de un coche y tiempo que tarda en recorrer una distancia determinada.

c) Kilogramos de pintura y superficie pintada.

Razona la respuesta.

a) No son directamente proporcionales. Cuanto más dinero se destine a combatir el hambre, menos personas morirán.

b) No son directamente proporcionales. Si se dobla la velocidad, el tiempo en recorrer una distancia determinada se reduce a la mitad.

c) Son directamente proporcionales.

Si doblamos la cantidad de pintura, podremos pintar el doble de superficie.

3.4 Reparte 450 de forma directamente proporcional a 25, 50 y 75.

$25k + 50k + 75k = 450 \Rightarrow 150k = 450 \Rightarrow k = 3$

De las 450 unidades, la parte proporcional a 25 es 75, la parte proporcional a 50 es 150 y la parte proporcional a 75 es 225.

3.5 Reparte 10 650 en proporción directa a 3, 5 y 7.

$3k + 5k + 7k = 10\,650 \Rightarrow 15k = 10\,650 \Rightarrow k = 710$

De las 10 650 unidades, la parte proporcional a 3 es 2 130; la parte proporcional a 5, 3 550, y la parte proporcional a 7, 4 970.

3.6 Un padre quiere repartir 140 sellos entre sus dos hijos de forma directamente proporcional a sus edades, que son 13 y 15 años.
¿Cuántos sellos recibirá cada uno?

$13k + 15k = 140 \Rightarrow 28k = 140 \Rightarrow k = 5$

El hijo de 13 años recibirá $13 \cdot 5 = 65$ sellos, y el de 15 años se quedará con $15 \cdot 5 = 75$ sellos.

3.7 Una máquina, *A*, fabrica 280 tornillos y salen 14 defectuosos. Otra máquina, *B*, fabrica 275 tornillos y salen 11 defectuosos.
a) ¿Cuál es el porcentaje de tornillos defectuosos fabricados por cada máquina?
b) ¿Cuál de las dos máquinas trabaja mejor?

a) $\frac{14}{280} = \frac{x}{100} \Rightarrow 1\,400 = 280x \Rightarrow x = 5.$

$\frac{11}{275} = \frac{x}{100} \Rightarrow 1\,100 = 275x \Rightarrow x = 4.$

El porcentaje de tornillos defectuosos hechos por la máquina *A* es del 5 % y el de *B* es del 4 %.

b) Trabaja mejor la máquina *B*. El porcentaje de tornillos que salen defectuosos es menor.

3.8 Un análisis realizado en una granja a 7 200 animales ha permitido detectar un 24 % de animales enfermos. Se emplea como tratamiento una dosis de vitamina *A* en 2 de cada 3 animales.
¿Cuántas dosis de vitamina *A* se necesitan?

Animales enfermos: $7\,200 \cdot 0{,}24 = 1\,728$

Para el tratamiento planteamos la siguiente proporción: $\frac{2}{3} = \frac{x}{1\,728} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 1\,728}{3} = 1\,152.$

Se necesitan 1 152 dosis de vitamina *A*.

3.9 Aumenta las siguientes cantidades en los porcentajes que se indican.

a) 134 en un 8 %.

b) 4 563 en un 17,3 %.

c) 45,76 en un 12 %.

d) 896,32 en un 0,4 %.

a) $134 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 144{,}72$

b) $4\,563 \cdot \left(1 + \frac{17{,}3}{100}\right) = 5\,352{,}4$

c) $45{,}76 \cdot \left(1 + \frac{12}{100}\right) = 51{,}25$

d) $896{,}32 \cdot \left(1 + \frac{0{,}4}{100}\right) = 899{,}9$

3.10 Disminuye las siguientes cantidades en los porcentajes que se indican.

a) 54 en un 5 %.

b) 762 en un 9,6 %.

c) 98,7 en un 79 %.

d) 2 369,83 en un 0,68 %.

a) $54 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 51{,}3$

b) $762 \cdot \left(1 - \frac{9{,}6}{100}\right) = 688{,}85$

c) $98{,}7 \cdot \left(1 - \frac{79}{100}\right) = 20{,}73$

d) $2\,369{,}83 \cdot \left(1 - \frac{0{,}68}{100}\right) = 2\,353{,}715$

3.11 La cantidad de 12 500 se incrementa primero en un 12 % y el resultado se vuelve a incrementar en otro 4 %. ¿Cuál es la cantidad final resultante?

Primer incremento: $12\,500 \cdot \left(1 + \frac{12}{100}\right) = 14\,000$

Segundo incremento: $14\,000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 14\,560$

La cantidad final es 14 560.

3.12 El precio de una bicicleta es 175 euros. En rebajas hacen un descuento del 25 %, pero además, hay que pagar el 16 % de IVA.

¿Cuánto cuesta entonces?

El precio de la bicicleta con el descuento es de $175 \cdot \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 131{,}25$ euros.

Al precio tenemos que añadirle el IVA para saber cuánto nos costará finalmente. Con lo cual, el precio final de la bicicleta es de

$131{,}25 \cdot \left(1 + \frac{16}{100}\right) = 152{,}25$ euros.

3.13 ¿Es lo mismo rebajar primero un artículo un 3 % y luego encarecerlo un 4 % que encarecerlo primero un 4 % y luego rebajarlo un 3 %?

Sea el precio del artículo x euros.

En el caso I tenemos: $\left(x \cdot \left(1 - \frac{3}{100}\right)\right)\left(1 + \frac{4}{100}\right)$

Por las propiedades asociativa y conmutativa tenemos:

$$\left(x \cdot \left(1 - \frac{3}{100}\right)\right)\left(1 + \frac{4}{100}\right) = x\left(1 - \frac{3}{100}\right)\left(1 + \frac{4}{100}\right) = x\left(1 + \frac{4}{100}\right)\left(1 - \frac{3}{100}\right) = \left(x\left(1 + \frac{4}{100}\right)\right)\left(1 - \frac{3}{100}\right)$$

Llegamos al caso II, donde primero se encarece un 4 % y luego se rebaja un 3 %.

Por tanto, es lo mismo rebajar primero un artículo un 3 % y luego encarecerlo un 4 %, que encarecerlo primero un 4 % y luego rebajarlo un 3 %.

3.14 Los productos de cierta empresa subieron un 10 % en 2002 y un 12 % en 2003, y bajaron un 4 % en 2004. ¿Cuál fue el porcentaje de variación de los precios en esos tres años?

Tomamos 100 como valor inicial para calcular los porcentajes.

Valor final de 100 euros: $100 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}12 \cdot 0{,}96 = 118{,}272$

Por tanto, ha habido una variación positiva del 18,272 %

3.15 La tabla representa cantidades de dos magnitudes inversamente proporcionales. Halla la constante de proporcionalidad y completa la tabla.

M	2	3	4	y
M'	12	8	x	5

Constante de proporcionalidad: $2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot x = y \cdot 5 = 24$.

De donde obtenemos que $x = \frac{24}{4} = 6$, e $y = \frac{24}{5} = 4{,}8$.

3.16 La constante de proporcionalidad de dos magnitudes inversamente proporcionales es 18. Escribe cuatro parejas de cantidades que cumplan esa condición.

M	1	2	3	4
M'	18	9	6	4,5

3.17 Con un depósito de agua se llenan 36 jarras. ¿Cuántas jarras se podrán servir si solo se llenan hasta tres cuartos de su capacidad?

Si se llenan menos, se podrán servir más jarras. Son magnitudes inversamente proporcionales.

$36 \cdot 1 = (\text{N.º de jarras}) \cdot \frac{3}{4}$. Se podrán llenar 48 jarras.

3.18 Para abonar un campo de cultivo se han necesitado 42 300 kilogramos de un cierto abono que contiene un 25 % de nitratos.
¿Cuántos kilogramos se necesitarían de otro tipo de abono que contiene un 36 % de nitratos, para que el campo recibiese la misma cantidad de nitratos?

Buscamos la constante: $42\,300 \cdot 25 = 1\,057\,500$

Para el abono al 36 %: $x \cdot 36 = 1\,057\,500$, luego $x = 29\,375$ kilogramos

3.19 Reparte 93 en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 5.

$$\frac{1}{2}k + \frac{1}{3}k + \frac{1}{5}k = 93 \Rightarrow \frac{15k + 10k + 6k}{30} = 93 \Rightarrow 31k = 93 \cdot 30 \Rightarrow k = \frac{2\,790}{31} = 90$$

De las 93 unidades, la parte inversamente proporcional a 2 es 45, la correspondiente a 3 es 30 y la correspondiente a 5 es 18.

3.20 Reparte 168 de modo inversamente proporcional a 3, 5 y 6.

$$\frac{1}{3}k + \frac{1}{5}k + \frac{1}{6}k = 168 \Rightarrow \frac{10k + 6k + 5k}{30} = 168 \Rightarrow 21k = 168 \cdot 30 \Rightarrow k = \frac{5\,040}{21} = 240$$

De las 168 unidades, la parte inversamente proporcional a 3 es 80, la correspondiente a 5 es 48 y la correspondiente a 6 es 40.

3.21 Al repartir 60 de forma inversamente proporcional a los números 2 y *x*, se sabe que la parte correspondiente a 2 es 36. Halla *x*.

Por un lado, tenemos $\frac{1}{2}k + \frac{1}{x}k = 60$. Y por otro, sabemos que $\frac{1}{2}k = 36$. Con esta última igualdad tenemos que $k = 72$.

Sustituyendo este dato en la primera igualdad resulta: $\frac{1}{2}72 + \frac{1}{x}72 = 60$. De donde $x = \frac{72}{60 - 36} = 3$.

3.22 Se reparten 60 euros entre el primer y segundo clasificado de una carrera, de manera inversamente proporcional al puesto alcanzado.
¿Cuántos euros recibirá cada uno?

Tenemos que realizar un reparto inversamente proporcional al puesto.

$$\frac{1}{2}k + 1k = 60 \Rightarrow \frac{3}{2}k = 60 \Rightarrow k = 40$$

El primer clasificado recibirá $1 \cdot 40 = 40$ euros, y el segundo, $\frac{1}{2} \cdot 40 = 20$ euros.

3.23 Para construir un puente de 1 200 metros se cuenta con 300 vigas, que se colocarían cada 40 metros. Después de un estudio de carga, se decide reforzar la obra y se utilizan 100 vigas más.
¿A qué distancia se deben colocar las vigas?

Si ponemos más vigas en el mismo espacio, la distancia entre ellas será menor.

$$40 \cdot 300 = \text{Distancia} \cdot 400 \Rightarrow \text{Distancia} = \frac{40 \cdot 300}{400} = 30 \text{ m}$$

Las vigas se deben colocar a 30 metros de distancia entre ellas.

3.24 Si 10 grifos tardan 12 horas en llenar un depósito de 15 metros cúbicos, ¿cuánto tardarán 8 grifos en llenar otro depósito de 7 metros cúbicos?

10 grifos llenan 15 m^3 en 12 horas.

1 grifo llena 15 m^3 en $12 \cdot 10 = 120$ horas.

1 grifo llena 1 m^3 en $\frac{120}{15} = 8$ horas.

8 grifos llenan 1 m^3 en $\frac{8}{8} = 1$ hora.

8 grifos llenan 7 m^3 en $1 \cdot 7 = 7$ horas.

3.25 El alquiler de 3 coches para 7 días cuesta 630 euros. ¿Cuántos coches se podrán alquilar con 900 euros durante 5 días?

7 días ———————— 3 coches ———————— 630 euros
5 días ———————— x coches ———————— 900 euros
Proporcionalidad inversa   Proporcionalidad directa

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{7} \cdot \frac{630}{900} = \frac{3\,150}{6\,300} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3 \cdot 2 = 6$$

Se pueden alquilar 6 coches.

PROBLEMAS PROPUESTOS

3.26 El número de alumnos y alumnas de un centro escolar matriculados en Secundaria está comprendido entre 1 650 y 1 700. Se sabe que exactamente el 54 % está matriculado en Educación Secundaria. ¿Cuántos alumnos están matriculados?

La solución tiene que ser un número natural, puesto que el número de personas es natural.

Lo mismo pasa con el 54 % de la solución.

Tiene que ser un natural, porque corresponde al número de alumnos y alumnas de Secundaria.

Tenemos que encontrar un natural entre 1 650 y 1 700 que cumpla que su 54 % es un natural.

$$\frac{54}{100} = \frac{1\,728}{3\,200} = \frac{1\,674}{3\,100} = \frac{1\,620}{3\,000} = \frac{1\,701}{3\,150} = \frac{1\,647}{3\,050}$$

Hay matriculados en el centro 3 100 alumnos.

3.27 Un jugador de baloncesto ha obtenido en sus lanzamientos de dos puntos un porcentaje de acierto del 80 %. ¿Cuál será el mínimo número de lanzamientos que debe realizar para poder obtener ese porcentaje?

El número de lanzamientos es un natural.

Debemos encontrar el menor natural que cumple que el 80 % es un natural.

Se debe cumplir la relación: $\frac{80}{100}$.

Hallando la fracción irreducible encontramos los menores naturales que están en esa proporción: $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$.

El mínimo número de lanzamientos que debe realizar el jugador de baloncesto es de 5.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Proporcionalidad directa. Repartos

3.28 **Los números 3, 5, 18 y *x* forman una proporción. Calcula el valor de *x*.**

$\frac{3}{5} = \frac{18}{x} \Rightarrow x = \frac{18 \cdot 5}{3} = 30$

3.29 **La tabla corresponde a dos magnitudes directamente proporcionales *M* y *M'*. Halla la constante de proporcionalidad y completa la tabla.**

M	4	12	...	2	...	...
M'	5	...	25	...	1	100

Constante de proporcionalidad: $\frac{4}{5} = 0,8$. Tenemos entonces:

$\frac{12}{x} = 0,8 \Rightarrow x = 15$

$\frac{y}{25} = 0,8 \Rightarrow y = 20$

$\frac{2}{z} = 0,8 \Rightarrow z = 2,5$

$\frac{t}{1} = 0,8 \Rightarrow t = 0,8$

$\frac{a}{100} = 0,8 \Rightarrow a = 80$

M	4	12	20	2	0,8	80
M'	5	15	25	2,5	1	100

3.30 **La constante de proporcionalidad directa de dos números es 1,25. El mayor es 45. Calcula el menor.**

Como el resultado del cociente es mayor que 1, el mayor es dividido por el menor, de modo que $\frac{45}{x} = 1,25 \Rightarrow x = 36$.

El menor es 36.

3.31 **Tres fotografías valen 5 euros, 6 fotografías cuestan 9 euros. Razona si el número de fotografías es directamente proporcional a su precio.**

Si es directamente proporcional, se tiene que conservar la constante de proporcionalidad.

$0,6 = \frac{3}{5} \neq \frac{6}{9} = 0,\widehat{6}$

Por tanto, el número de fotografías no es directamente proporcional a su precio.

3.32 **Un coche consume 5,5 litros de gasolina cada 100 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros podrá recorrer con 110 litros?**

Los litros de gasolina y los kilómetros recorridos son directamente proporcionales. Entonces:

$\frac{5,5}{100} = \frac{110}{x} \Rightarrow x = 2\,000$

El coche podrá recorrer 2 000 kilómetros.

3.33 Se sabe que de 15 gramos de remolacha se extraen 2 de azúcar. ¿Cuánta remolacha hay que adquirir para obtener 2 376 kilogramos de azúcar?

Podemos establecer la proporción: $\frac{2}{15} = \frac{2\,376}{x}$.

De modo que $x = 17\,820$ kilogramos de remolacha.

3.34 Por un grifo salen 38 litros de agua en 5 minutos. ¿Cuántos litros salen en una hora y cuarto?

Como existe una proporcionalidad directa entre los litros de agua que salen del grifo y los minutos, podemos calcular los litros que saldrán en hora y cuarto, que son 75 minutos:

$$\frac{5}{38} = \frac{75}{x} \Rightarrow x = \frac{75 \cdot 38}{5} = 570 \text{ L}$$

En una hora y cuarto salen por el grifo 570 litros.

3.35 María, Nuria y Paloma han cobrado por un trabajo 344 euros. María ha trabajado 7 horas; Nuria, 5 horas y Paloma, 4 horas. ¿Qué cantidad le corresponde a cada una?

Para que todas cobren por una hora lo mismo, tenemos que hacer un reparto proporcional del dinero según las horas trabajadas. Entonces:

$$7k + 5k + 4k = 344 \Rightarrow 16k = 344 \Rightarrow k = 21{,}5$$

De modo que María cobrará $21{,}5 \cdot 7 = 150{,}50$ euros; a Nuria le corresponden $21{,}5 \cdot 5 = 107{,}50$ euros, y Paloma ha ganado por el trabajo $21{,}5 \cdot 4 = 86$ euros.

Porcentajes y proporcionalidad

3.36 Expresa las siguientes razones en tantos por ciento, en tantos por uno y en tantos por mil.

a) $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{9}{10}$ **c)** $\frac{20}{12}$ **d)** $\frac{5}{3}$

	Tanto por uno	Tanto por ciento (%)	Tanto por mil (‰)
a)	0,4	40	400
b)	0,9	90	900
c)	1,6667	166,67	1 666,7
d)	1,6667	166,67	1 666,7

3.37 Calcula el tanto por ciento de café que hay en una mezcla de 4 litros de café y 7 litros de agua.

La proporción que se cumple es $\frac{4}{7} = \frac{57{,}14}{100}$. Hay un 57,14 % de café en la mezcla.

3.38 Luis prepara una limonada con 12 litros de agua y 8 litros de zumo de limón. ¿Cuál es el porcentaje de zumo de limón que hay en la limonada?

Volumen total: $12 + 8 = 20$ L

De los 20 litros, 8 son de zumo de limón. Tenemos la relación: $\frac{8}{20} : \frac{x}{100} \Rightarrow x = 40\,\%$

El porcentaje de zumo de limón es del 40 %.

3.39 Un teléfono móvil cuesta 85 euros. Halla su nuevo precio si:

a) Se rebaja un 6 %.

b) Se encarece un 4 %.

a) En este caso hay que restarle un 6 % a 85. $85 \cdot \left(1 - \frac{6}{100}\right) = 79{,}90$ €

El nuevo precio es de 79 euros y 90 céntimos.

b) En este caso hay que sumarle un 4 % a 85. $85 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 88{,}40$ €

El nuevo precio es de 88 euros y 40 céntimos.

3.40 La subida salarial de una empresa en los últimos tres años ha sido del 3 %, 2 % y 4 %.

a) ¿Cuánto cobra actualmente un empleado que cobraba hace tres años 1 600 euros?

b) ¿En qué porcentaje se ha incrementado su sueldo después de tres subidas?

a) Tenemos que ver qué resulta después de aplicarle un 3, un 2 y un 4 % a 1 600:

$$\left(\left(1\,600 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)\right)\left(1 + \frac{2}{100}\right)\right)\left(1 + \frac{4}{100}\right) = 1\,600 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}04 = 1\,748{,}20 \text{ €}$$

El sueldo del empleado después de estos tres años será de 1 748 euros con 20 céntimos.

b) Veamos con qué porcentaje se corresponde la subida a 1 748,20 de 1 600.

$$1\,600 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) = 1\,748{,}20 \Rightarrow \frac{1\,600x}{100} = 1\,748{,}20 - 1\,600 \Rightarrow x = \frac{148{,}20}{16} = 9{,}26$$

El porcentaje total en que ha subido el sueldo del empleado en estos tres años es del 9,26 %.

3.41 El precio de un litro de combustible experimentó diversas variaciones. En enero costaba 0,95 euros y en febrero bajó su precio un 8 %. En marzo subió un 3 % y en abril subió un 2 %.

a) ¿Qué porcentaje ha variado su precio en total?

b) ¿Cuál es su precio en abril?

a) Veamos a qué porcentaje equivale la aplicación de los tres porcentajes.

$$\left(1 - \frac{8}{100}\right)\left(1 + \frac{3}{100}\right)\left(1 + \frac{2}{100}\right) = \left(1 - \frac{8}{100} + \frac{3}{100} - \frac{24}{10\,000}\right)\left(1 + \frac{2}{100}\right) =$$

$$= 1 - \frac{5}{100} - \frac{24}{10\,000} + \frac{2}{100} - \frac{10}{10\,000} - \frac{48}{1\,000\,000} = 1 - \frac{3{,}3448}{100}$$

Ha sido rebajado un 3,34 %.

b) Aplicamos el porcentaje calculado en el apartado anterior al precio inicial del litro de combustible para saber su precio en abril.

$$0{,}95 \cdot \left(1 - \frac{3{,}34}{100}\right) = 0{,}92$$

El precio del litro de combustible en abril es de 0,92 euros.

3.42 El Club del Libro tiene 100 socios y cada año aumenta su número en un 10 %.

a) ¿Cuántos socios tiene al cabo de 5 años?

b) Al cabo de 10 años, ¿consigue duplicar el número inicial de socios?

a) Como tenemos que aplicarle a 100 un porcentaje de subida del 10 por ciento 5 veces consecutivas, calculamos primero qué porcentaje final es: $\left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = 1{,}105 = 1{,}61 = 1 + \frac{61}{100}$

El porcentaje de aumento de socios al cabo de 5 años es de un 61 %. Lo que quiere decir que después de 5 años el número de socios es: $100 \cdot \left(1 + \frac{61}{100}\right) = 161$ socios

b) Veamos cuál es el porcentaje de aumento después de 10 años.

$\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{10} = 2{,}59 = 1 + \frac{159}{100}$

El número de socios después de 10 años es: $100 \cdot \left(1 + \frac{159}{100}\right) = 259$

Así que después de 10 años el número de socios es más del doble de los que había inicialmente. No solo se duplica, sino que se pasa del doble.

Proporcionalidad inversa. Repartos

3.43 Di cuáles de las siguientes magnitudes son inversamente proporcionales.

a) Tiempo que se tarda en limpiar un monte y número de personas que realizan la limpieza.

b) Espacio recorrido por un móvil y tiempo empleado para recorrer dicho espacio.

c) Tiempo que tarda en hacer un recorrido un avión y su velocidad.

a) Son inversamente proporcionales. El doble de personas tardarían la mitad de tiempo en realizar la limpieza.

b) No son inversamente proporcionales. En doble tiempo el móvil recorrería doble espacio, son directamente proporcionales.

c) Son inversamente proporcionales. Si la velocidad fuera doble, el avión tardaría la mitad de tiempo en hacer ese recorrido.

3.44 Comprueba si la tabla representa cantidades de dos magnitudes inversamente proporcionales. En caso afirmativo, halla la constante de proporcionalidad y completa la tabla.

M	2	4	8	100
M′	5	2,5	1,25	...

Veamos cuáles son las constantes de proporcionalidad de cada columna:

$2 \cdot 5 = 10$; $4 \cdot 2{,}5 = 10$; $8 \cdot 1{,}25 = 10$. Sí son inversamente proporcionales. La constante de proporcionalidad es 10, y para completar la tabla, el valor de ".....” tiene que ser 0,1 ($100 \cdot 0{,}1 = 10$).

3.45 El agua de un depósito se puede extraer en 200 veces con un bidón de 15 litros. Calcula cuántas veces se extraería con un bidón de 25 litros.

Relación de proporcionalidad inversa: $200 \cdot 15 = x \cdot 25 \Rightarrow x = 120$ veces

Con un bidón de 25 litros se extraería en 120 veces.

3.46 Realizamos un trabajo en 2 meses entre 12 personas. Necesitamos hacerlo solo en 18 días. ¿Cuántas personas debemos contratar?

Dos meses son 60 días.

Tenemos una relación de proporcionalidad inversa: $60 \cdot 12 = 720 = 18 \cdot x \Rightarrow x = 40$

Como ya trabajamos 12, necesitamos contratar $40 - 12 = 28$

Debemos contratar 28 personas.

3.47 Tres niños se comen un pastel en 16 minutos. ¿En cuánto tiempo se lo comerían cuatro niños?

Relación de proporcionalidad inversa: $3 \cdot 16 = 4 \cdot x \Rightarrow x = 12$ minutos

Cuatro niños comerían en 12 minutos.

3.48 Reparte 7 875 en partes inversamente proporcionales a 3, 5 y 6.

$$\frac{k}{3} + \frac{k}{5} + \frac{k}{6} = 7\,875 \Rightarrow \frac{21k}{30} = 7\,875 \Rightarrow k = 11\,250$$

A 3 le corresponde $\frac{11\,250}{3} = 3\,750$

A 5 le corresponde $\frac{11\,250}{5} = 2\,250$

A 6 le corresponde $\frac{11\,250}{6} = 1\,875$

3.49 Reparte 578 en partes inversamente proporcionales a 4, 4 y 18.

$$\frac{1}{4}k + \frac{1}{4}k + \frac{1}{18}k = 578 \Rightarrow \frac{9k + 9k + 2k}{36} = 578 \Rightarrow k = \frac{578 \cdot 36}{20} = 1\,040{,}4$$

La parte que le corresponde a cada 4 es 260,1, y la que le corresponde a 18 es 57,8.

3.50 Una ganadera tiene pienso para alimentar 320 vacas durante 45 días. Pero debe dar de comer a los animales durante 60 días, por lo que decide vender a las que no puede alimentar. ¿Cuántas vacas debe vender?

Relación de proporcionalidad inversa: $320 \cdot 45 = x \cdot 60 \Rightarrow x = 240$

Como puede alimentar a 240, debe vender $320 - 240 = 80$ vacas.

3.51 **El número de vueltas que dan dos ruedas dentadas es inversamente proporcional al número de dientes de cada rueda.**
Una rueda dentada tiene 24 dientes y engrana otra rueda que tiene 5 dientes.
¿Cuántas vueltas dará la primera mientras la segunda da 120 vueltas?

Por ser inversamente proporcionales se cumple que $5 \cdot 120 = 24 \cdot x$. $x = \frac{600}{24} = 25$

La rueda con 24 dientes da 25 vueltas mientras la que tiene 5 dientes da 120.

3.52 **En una Olimpiada Europea de Matemáticas se conceden tres premios inversamente proporcionales a los tiempos empleados en la resolución de los ejercicios. Los tiempos de los tres primeros concursantes han sido 3, 5 y 6 horas.**
Calcula cuánto dinero recibe cada uno si hay 42 000 euros para repartir.

Hacemos un reparto del dinero inversamente proporcional al tiempo tardado.

$$\frac{1}{3}k + \frac{1}{5}k + \frac{1}{6}k = 42\,000 \Rightarrow \frac{10k + 6k + 5k}{30} = 42\,000 \Rightarrow k = \frac{42\,000 \cdot 30}{21} = 60\,000$$

De modo que el primer premio, que se corresponde con un tiempo de 3 horas, es de 20 000 euros. El segundo premio, correspondiente a un tiempo de 5 horas, es de 12 000 euros. Y el tercer premio, para la persona que ha tardado 6 horas, es de 10 000 euros.

Proporcionalidad compuesta

3.53 **Una casa de acogida necesita 5 400 euros para alojar y dar de comer a 40 personas durante 15 días.**
¿Cuánto necesitará para alojar y alimentar a 50 personas durante 10 días?

Tenemos las siguientes correspondencias:

5 400 euros	40 personas	15 días
x euros	50 personas	10 días
Proporcionalidad directa	Proporcionalidad inversa	

$$\frac{40}{50} = 5\frac{400}{x} \cdot \frac{10}{15} \Rightarrow x = 5\,400 \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{50}{40} = 4\,500 \text{ €}$$

Se necesitarán 4 500 euros para alimentar a 50 personas durante 10 días.

3.54 **Si 18 camiones transportan 1 200 contenedores en 12 días, ¿cuántos días necesitarán 24 camiones para mover 1 600 contenedores?**

Tenemos las siguientes correspondencias:

18 camiones	1 200 contenedores	12 días
24 camiones	1 600 contenedores	x días
Proporcionalidad directa	Proporcionalidad directa	

$$\frac{1\,200}{1\,600} = \frac{18}{24} \cdot \frac{12}{x} \Rightarrow x = 12 \cdot \frac{18}{24} \cdot \frac{1\,600}{1\,200} = 12 \text{ días}$$

En 12 días, 24 camiones moverán 1 600 contenedores.

3.55 **En un mes, un equipo de 22 albañiles ha enlosado una acera de 160 metros. ¿Cuántos metros enlosarán 15 albañiles en 22 días?**

Tenemos las siguientes correspondencias:

1 mes (= 30 días) ——— 22 albañiles ——— 160 metros
22 días ——— 15 albañiles ——— x metros
Proporcionalidad inversa Proporcionalidad inversa

$$\frac{22}{15} = \frac{22}{30} \cdot \frac{160}{x} \Rightarrow x = 160 \cdot \frac{22}{30} \cdot \frac{15}{22} = 80 \text{ m}$$

Quince albañiles en 22 días enlosarán 80 metros.

3.56 **Un campamento de la Cruz Roja que alimenta a 1 800 refugiados tiene víveres para tres meses si se distribuyen raciones de 800 gramos por día.**

¿Cuál debería ser la ración si hubiese 2 100 refugiados y estos víveres tuvieran que durar 4 meses?

Tenemos las siguientes correspondencias:

1 800 refugiados ——— 3 meses ——— 800 gramos
2 100 refugiados ——— 4 meses ——— x gramos
Proporcionalidad inversa Proporcionalidad directa

$$\frac{3}{4} = \frac{2\,100}{1\,800} \cdot \frac{x}{800} \Rightarrow x = 800 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1\,800}{2\,100} = 514{,}28 \text{ g}$$

Las raciones para 2 100 refugiados durante 4 días serían de 514,28 gramos.

CUESTIONES PARA ACLARARSE

3.57 De las siguientes tablas, determina cuál o cuáles representan algún tipo de proporcionalidad (directa o inversa). Justifica tu respuesta.

a)

x	5	10	15	20	25
y	1	2	3	4	5

b)

x	2	3	4	3	2
y	1	2	3	4	5

c)

x	1	4	5	10	20
y	20	5	4	2	1

d)

x	18	15	13	10	9
y	20	15	14	2	1

a) Proporcionalidad directa.

Si hacemos para cada una de las columnas el cociente $\frac{x}{y}$, nos da siempre 5.

b) Ningún tipo de proporcionalidad.

No existe proporcionalidad directa. Si hacemos el cociente de la primera columna, tendremos como constante de proporcionalidad 2, pero dicha constante no se conserva al hacer el cociente de la segunda columna, ya que $\frac{3}{2} = 1{,}5$.

Tampoco existe proporcionalidad inversa, basta fijarnos también en las dos primeras columnas para ello. La primera columna nos daría como constante de proporcionalidad 2, mientras que la segunda nos daría que la constante es 6.

c) Proporcionalidad inversa.

Si hacemos para cada una de las columnas el producto $x \cdot y$, nos da siempre 20.

d) Ningún tipo de proporcionalidad.

Basta fijarnos en las dos primeras columnas para ver que no existe una constante de proporcionalidad, ni en el caso de proporcionalidad directa, donde tenemos $\frac{18}{20} = 0{,}9$ y $\frac{15}{15} = 1$. Ni en el caso de proporcionalidad inversa, donde tenemos $18 \cdot 20 = 360$ y $15 \cdot 15 = 225$.

3.58 Pon tres ejemplos de magnitudes proporcionales directas. ¿A qué se llama constante de proporcionalidad directa?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

– Dinero para comprar libros y libros que puedo comprar.
– Volumen de un material y su peso.
– Altura de un árbol y la cantidad de madera que proporciona.

Se llama constante de proporcionalidad directa al cociente entre las dos magnitudes a tener en cuenta.

3.59 Pon tres ejemplos de magnitudes proporcionales inversas. ¿A qué se llama constante de proporcionalidad inversa?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

– Alumnos que recogen el aula y tiempo empleado en recogerla.
– Ejercicios hechos y hojas en blanco en la libreta.
– Presión de un gas y volumen que ocupa (a temperatura constante).

Se llama constante de proporcionalidad inversa al producto de las dos magnitudes que se están considerando.

3.60 En el campeonato escolar el equipo de 3.º de ESO del colegio jugó 50 partidos de los que ganó 20, perdió el 40 % y empató los restantes.

¿Ganó o perdió la mayoría de los partidos?

Veamos cuál es el porcentaje de partidos que ganó.

$\frac{50 \cdot x}{100} = 20 \Rightarrow x = 40$. Así que el porcentaje de partidos ganados es del 40 %.

Ganó y perdió el mismo número de partidos.

3.61 Una mercancía se encareció un 10 % y luego se abarató también en un 10 %. ¿Cuándo vale menos, antes de encarecerla o después de abaratarla?

Sea x el precio inicial de la mercancía.Veamos qué ocurre tras las dos variaciones en el precio:

$$\left(x\left(1 + \frac{10}{100}\right)\right)\left(1 - \frac{10}{100}\right) = x\left(1 - \left(\frac{10}{100}\right)^2\right) = x\left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

Así que el precio después de abaratarla es de $x\left(1 - \frac{1}{100}\right)$. La mercancía vale menos después de abaratarla.

3.62 El salario de Rubén en los últimos 4 años ha tenido las siguientes subidas: 2 %, 2 %, 2 % y 2 %. ¿Gana ahora un 8 % más que hace 4 años?

La subida de sueldo de Rubén es el resultado de añadirle a su sueldo, x, un 2 % cuatro veces.

Luego $x\left(1 + \frac{2}{100}\right)^4 = x \cdot 1{,}0824 = x\left(1 + \frac{8{,}24}{100}\right)$. Después de 4 años gana un 8,24 % más.

3.63 ¿Cómo se reparte un número *N* en partes directamente proporcionales a los números *a*, *b* y *c*? Reparte 360 en partes directamente proporcionales a los números 2, 6 y 18.

Primero hallamos la constante de proporcionalidad que cumple lo siguiente:

$a \cdot k + b \cdot k + c \cdot k = N$

Una vez hallada la constante de proporcionalidad, la parte correspondiente a cada número se calcula multiplicando el número por la constante de proporcionalidad.

$a \cdot k, b \cdot k, c \cdot k$

Veamos ahora el reparto de 360 en partes proporcionales a 2, 6 y 18. Seguimos los pasos antes indicados.

Primero calculamos la constante de proporcionalidad: $2k + 6k + 18k = 360 \Rightarrow 26k = 360$.

$k = \frac{360}{26} = 13{,}846$

Ahora calculamos la parte correspondiente a cada número. La parte que corresponde a 2 es $2 \cdot 13{,}846 = 27{,}692$. La parte correspondiente a 6 es 83,076. Y la parte proporcional a 18 es 249,228.

3.64 **¿Cómo se reparte un número *N* en partes inversamente proporcionales a los números *a*, *b* y *c*? Reparte 360 en partes inversamente proporcionales a los números 2, 6 y 18.**

Primero hallamos la constante de proporcionalidad que cumple lo siguiente:

$$\frac{1}{a} \cdot k + \frac{1}{b} \cdot k + \frac{1}{c} \cdot k = N$$

Una vez hallada la constante de proporcionalidad, la parte correspondiente a cada número la calculamos haciendo el producto del número por la constante de proporcionalidad.

$$\frac{1}{a} \cdot k,\ \frac{1}{\mathrm{b}} \cdot k,\ \frac{1}{c} \cdot k$$

Veamos ahora el reparto de 360 en partes proporcionales a 2, 6 y 18. Seguimos los pasos antes indicados.

Primero calculamos la constante de proporcionalidad:

$$\frac{1}{2}k + \frac{1}{6}k + \frac{1}{18}k = 360 \Rightarrow \frac{13k}{18} = 360 \Rightarrow k = \frac{360 \cdot 18}{13} = 498{,}461$$

Ahora calculamos la parte correspondiente a cada número.

La parte que corresponde a 2 es $\frac{1}{2} \cdot 498{,}461 = 249{,}230$

La parte correspondiente a 6 es 83,076. Y la parte proporcional a 18 es 27,692.

3.65 **¿Es lo mismo repartir una cantidad en partes directamente proporcionales a 10, 15 y 20, que en partes directamente proporcionales a 2, 3 y 4?**

Si repartimos x en 10, 15 y 20 partes directamente proporcionales y K es la constante de proporcionalidad, tenemos que:

$10K + 15K + 20K = x$

Si repartimos x en 2, 3 y 4 partes inversamente proporcionales y k es la constante de proporcionalidad, tenemos que: $2k + 3k + 4k = x$.

$10K + 15K + 20K = 2k + 3k + 4k \Rightarrow 45K = 9k \Rightarrow 5K = k$

Si sustituimos en la segunda ecuación el valor de k con relación al valor de K:

$2 \cdot 5K + 3 \cdot 5K + 4 \cdot 5K = x \Rightarrow 10K + 15K + 20K = x$

Por tanto, sí es lo mismo.

PROBLEMAS PARA APLICAR

3.66 La producción de bolígrafos y cuadernos está en una relación de 8 a 5. Si la producción de bolígrafos disminuye en un 15 % y la de cuadernos aumenta en un 20 %.
¿En qué relación queda la producción? (Expresa la relación en números enteros)

Calculamos la disminución de la producción de bolígrafos: $5 \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 4{,}25$

Calculamos el aumento de la producción de cuadernos: $8 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 9{,}6$

La relación después de las variaciones de producción es: $\frac{9{,}6}{4{,}25} = \frac{960}{425} = \frac{192}{85}$

Así, la relación de la producción de bolígrafos y cuadernos es de 192 a 85.

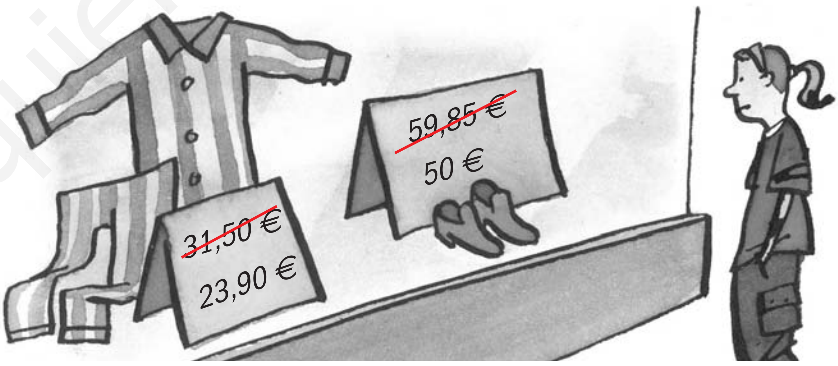
3.67 Un cultivo de bacterias de un laboratorio tiene 120 000 bacterias. Una enfermedad produce la muerte del 16 % de su población. Tratadas las bacterias supervivientes con un producto muy eficaz se consigue aumentar la población en un 14 %.
Entonces, ¿cuántas bacterias forman la población finalmente?

Las bacterias que quedan después de la enfermedad son: $120\,000 \cdot \left(1 - \frac{16}{100}\right) = 100\,800$

Tratando las bacterias con el producto ocurre que: $100\,800 \cdot \left(1 + \frac{14}{100}\right) = 114\,912$

Así, finalmente tenemos una población de 114 912 bacterias.

3.68 Observa el anuncio de rebajas.
a) ¿Están rebajados estos artículos proporcionalmente?
b) Si no es así, ¿cuál lo está más?



a) La relación entre los precios antes de las rebajas es: $\frac{59{,}85}{31{,}50} = 1{,}9$

La relación entre los precios después de las rebajas es de $\frac{50}{23{,}9} = 2{,}09$

Si los artículos estuviesen rebajados proporcionalmente, se conservaría la constante de proporcionalidad entre los precios, y no es así. Luego no están rebajados proporcionalmente.

b) Calculamos cuál es el descuento del pijama y el de los zapatos.

$$31{,}50 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 23{,}9 \Rightarrow 31{,}50 - 23{,}90 = 31{,}50 \cdot \frac{x}{100} \Rightarrow x = 24{,}13$$

$$59{,}85 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 50 \Rightarrow 59{,}85 - 50 = 59{,}85 \cdot \frac{x}{100} \Rightarrow x = 16{,}45$$

El descuento del pijama es de un 24,13 %, y el de los zapatos, de un 16,45 %. Es mayor el descuento del pijama.

3.69 **En un centro escolar, de los 210 alumnos de 3.º de ESO se inscriben en una actividad extraescolar 170. Mientras que de los 160 alumnos de 4.º de ESO se apuntan 130.**

¿Qué curso, 3.º o 4.º, ha mostrado más interés por la actividad?

$\frac{170}{210} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 80{,}95\,\%$ participan en la actividad de 3.º de ESO.

$\frac{130}{160} = \frac{y}{100} \Rightarrow x = 81{,}25\,\%$ participan en la actividad de 4.º de ESO.

Han mostrado más interés los alumnos de 4.º de ESO.

3.70 **Una fiesta de disfraces tiene una relación chicos-chicas de 5 a 3. Llegan 3 chicas más y la relación pasa a ser de 10 a 7.**

¿Cuántas personas hay en la fiesta?

Inicialmente tenemos una relación de $\frac{5}{3} = \frac{5x}{3x}$, donde $5x$ es el número de chicos, y $3x$, el de chicas.

Cuando llegan las chicas: $\frac{5x}{3x + 3} = \frac{10}{7} \Rightarrow 35x = 30x + 30 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6$

Podemos ahora calcular el número de gente que hay en la fiesta: $5 \cdot 6 = 30$ chicos, y $3 \cdot 6 + 3 = 21$ chicas. Hay 51 personas en la fiesta.

3.71 **Dos empresas alquilan un almacén por 3 500 euros. La primera guarda 40 contenedores y la segunda 300 sacos.**

¿Cuánto tendría que pagar cada una si un contenedor ocupa lo mismo que 10 sacos?

Tenemos la relación $\frac{1 \text{ contenedor}}{10 \text{ sacos}} = \frac{40 \text{ contenedores}}{400 \text{ sacos}}$. Ahora que tenemos todo expresado en la misma unidad, podemos hacer un reparto proporcional.

$400k + 300k = 3\,500 \Rightarrow 700k = 3\,500 \Rightarrow k = \frac{3\,500}{700} = 5$

La empresa de los contenedores paga 2 000 euros, y la que guarda sacos, 1 500.

3.72 **Entre tres pintores han pintado la fachada de un edificio, y han cobrado 4 160 euros. El primero ha trabajado 15 días, el segundo 12 días, y el tercero 25 días.**
¿Cuánto dinero tiene que recibir cada uno?

Sea k la constante de proporcionalidad directa.

Al primero le corresponden $15k$; al segundo, $12k$, y al tercero, $25k$.

Así, $15k + 12k + 25k = 4\,160 \Rightarrow 52k = 4\,160 \Rightarrow k = 80$

El primero recibe $15 \cdot 80 = 1\,200$ euros; el segundo, $12 \cdot 80 = 960$, y el tercero, $25 \cdot 80 = 2\,000$ euros.

3.73 **Los ingredientes de una receta para un postre casero son: 1 vaso de mantequilla; 3 huevos; 1,5 vasos de azúcar; 2 vasos de harina.**
Si solo tenemos 2 huevos, ¿cómo debemos modificar los restantes ingredientes de la receta para poder hacer el postre?

$\frac{1}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ de vaso de mantequilla

$\frac{1,5}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 1$ vaso de azúcar

$\frac{2}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ de vaso de harina

3.74 **Dos empresas aceptan realizar un trabajo en colaboración cobrando entre las dos 3 000 euros. Una, con tres personas, trabajó 5 días. La otra, con 4 ayudantes, trabajó 6 días.**
¿Qué dinero debe recibir cada empresa?

La primera tuvo 3 personas trabajando 5 días, lo que supone 15 pagas. Le corresponden x euros.

La segunda tuvo 4 personas trabajando 6 días, lo que supone 24 pagas. Le corresponden $3\,000 - x$ pagas.

$$\frac{15}{x} = \frac{24}{3\,000 - x} \Rightarrow 45\,000 - 15x = 24x \Rightarrow 45\,000 = 39x \Rightarrow x = \frac{45\,000}{39} = 1\,153{,}85 \text{ €}$$

La primera empresa tiene que recibir 1 153,85 euros, y la segunda, 1 846,15.

3.75 **Un propietario alquila una finca de 105 000 metros cuadrados a tres labradores, distribuyéndola entre los tres proporcionalmente al número de personas de cada familia. La familia del labrador *A* se compone de 4 personas, la del *B* de 5 y la del *C* de 6.**
Calcula la parte de terreno que le corresponde a cada uno.

Hacemos el reparto proporcional: $4k + 5k + 6k = 105\,000 \Rightarrow 15k = 105\,000 \Rightarrow k = 7\,000$

A la familia del labrador *A* le corresponden 28 000 metros cuadrados. La familia del labrador *B* tendrá un terreno de 35 000 metros cuadrados. Y la del labrador *C* se queda con 42 000 metros cuadrados.

3.76 **En una prueba ciclista se reparte un premio de 16 650 euros, entre los tres primeros corredores, de modo inversamente proporcional al tiempo que han tardado en llegar. El primero tarda 12 minutos, el segundo 15 minutos y el tercero 18 minutos.**
¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Sea k la constante de proporcionalidad inversa.

Al primero le corresponden $\frac{k}{12}$; al segundo, $\frac{k}{15}$, y al tercero, $\frac{k}{18}$.

Así, $\frac{k}{12} + \frac{k}{15} + \frac{k}{18} = 16\,650 \Rightarrow \frac{37k}{180} = 4\,160 \Rightarrow k = 81\,000$

El primero recibe $\frac{81\,000}{12} = 6\,750$ euros; el segundo, $\frac{81\,000}{15} = 5\,400$, y el tercero, $\frac{81\,000}{18} = 4\,500$.

3.77 Una persona leyendo 4 horas diarias, a razón de 15 páginas por hora, tarda en leer un libro 10 días. Si leyendo a razón de 12 páginas por hora tardase 20 días, ¿cuántas horas diarias leería?

A razón de 15 páginas por hora se tardan 10 días leyendo 4 horas diarias.

A razón de 1 página por hora se tardan 10 días leyendo $4 \cdot 15 = 60$ páginas diarias.

A razón de 1 página por hora se tarda 1 día leyendo $4 \cdot 15 \cdot 10 = 600$ páginas diarias.

A razón de 10 páginas por hora se tarda 1 día leyendo $\frac{600}{100} = 60$ horas diarias.

A razón de 10 páginas por hora se tardan 20 días leyendo $\frac{60}{20} = 3$ horas diarias.

Necesita 3 horas diarias.

3.78 Ocho bombillas iguales, encendidas durante 4 horas diarias, han consumido en 30 días, 49 kilovatios. ¿Cuánto consumirán 6 bombillas iguales a las anteriores, encendidas 3 horas diarias, durante 20 días?

8 bombillas ——— 4 horas ——— 30 días ——— 49 kWh

6 bombillas ——— 3 horas ——— 20 días ——— x kWh

Se puede pasar a proporcionalidad simple fácilmente:

4 horas en 30 días son 120 horas, 8 bombillas son 960 horas.

3 horas en 20 días son 60 horas, 6 bombillas son 360 horas.

Ahora, proporcionalmente:

$$\frac{360}{49} = \frac{360}{x} \Rightarrow \frac{49 \cdot 360}{960} = 18{,}38 \text{ kWh}$$

3.79 Se reparte un número *N*, en partes inversamente proporcionales a 4, 5 y 9. La parte correspondiente a 4 es 900. ¿Qué les corresponde a los otros dos números, y qué número es *N*?

Sea k la constante de proporcionalidad inversa.

A 4 le corresponden $\frac{k}{4} = 900$, luego $k = 3\,600$.

A 5 le corresponden $\frac{3\,600}{5} = 720$.

A 9 le corresponden $\frac{3\,600}{9} = 400$.

Luego el número $N = 900 + 720 + 400 = 2\,020$

R E F U E R Z O

Proporcionalidad directa

3.80 Calcula x.

a) $\frac{3}{4} = \frac{9}{x}$ **b)** $\frac{10}{x} = \frac{15}{9}$ **c)** $\frac{8}{12} = \frac{x}{3}$

a) $3x = 9 \cdot 4 \Rightarrow x = 12$ b) $10 \cdot 9 = 15x \Rightarrow x = 6$ c) $8 \cdot 3 = 12x \Rightarrow x = 2$

3.81 Daniel anduvo 6 kilómetros en una hora.
¿Cuánto recorrió en 10 minutos?

Los kilómetros que anda Daniel y el tiempo que tarda en recorrerlos están en relación directamente proporcional. Teniendo en cuenta que 1 hora = 60 minutos:

$$\frac{6}{60} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 1 \text{ km}$$

Daniel recorrió 1 kilómetro en 10 minutos.

3.82 En un mapa, 14 centímetros representan 238 kilómetros.
¿Cuántos centímetros representarán a otra carretera que mide 306 kilómetros?

Los kilómetros reales y los centímetros que los representan en un mapa están en proporción directa. Entonces:

$$\frac{14}{238} = \frac{x}{306} \Rightarrow x = 18 \text{ cm}$$

En el mapa, 18 centímetros equivalen a 306 kilómetros.

3.83 En una fiesta, tres invitados gastan en refrescos 40 euros. ¿Cuánto pagará cada uno si se llevan 10, 15 y 25 refrescos, respectivamente?

Hacemos un reparto proporcional del precio total en función de los refrescos que se lleva cada uno.

$$10k + 15k + 25k = 40 \Rightarrow 50k = 40 \Rightarrow k = \frac{40}{50} = 0{,}8$$

El que lleva 10 refrescos paga 8 euros, el que se lleva 15 paga 12 euros y el que se lleva 25 refrescos paga 20 euros.

Porcentajes

3.84 Calcula.

a) El 20 % de 650

b) El 0,80 % de 2 005

c) El 20 % del 30 % de 10 000

d) El 50 % del 40 % del 30 % de 1 000 000

a) $650 \cdot \frac{20}{100} = 130$

b) $2\,005 \cdot \frac{0{,}8}{100} = 16{,}04$

c) $10\,000 \cdot \frac{30}{100} = 3\,000;\ 3\,000 \cdot \frac{20}{100} = 600$

d) $1\,000\,000 \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{50}{100} = 60\,000$

3.85 Un jugador de baloncesto ha conseguido 15 encestes de 20 lanzamientos. ¿Cuál es su porcentaje de aciertos?

$$\frac{15}{20} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 75$$

El jugador tiene un porcentaje de aciertos del 75 %.

3.86 **Ricardo compra en rebajas una lavadora cuya etiqueta marca 412 euros. Le hacen un descuento del 30 % y le aplican un IVA del 16 %.**

¿Cuál es el coste final de la lavadora?

Sobre el precio de la lavadora aplicamos los dos porcentajes, el de descuento y el de aumento.

$412\left(1 - \frac{30}{100}\right)\left(1 + \frac{16}{100}\right) = 334{,}54$ €

El precio final de la lavadora es de 334,54 euros.

Proporcionalidad inversa

3.87 **Estudia si las siguientes tablas de datos corresponden a magnitudes inversamente proporcionales. En caso afirmativo, halla la constante de proporcionalidad.**

a)

A	4	3	6	5
B	15	20	10	12

b)

C	3	0,9	5	1
D	6	20	3,6	18

a) Veamos si se cumple que todas las columnas conservan el producto.

$4 \cdot 15 = 3 \cdot 20 = 6 \cdot 10 = 5 \cdot 12 = 60$

Sí, son inversamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es 60.

b) En este caso: $3 \cdot 6 = 0{,}9 \cdot 20 = 5 \cdot 3{,}6 = 1 \cdot 18 = 18$

Sí, son inversamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es 18.

3.88 **Reparte 4 371 en partes inversamente proporcionales a 3, 4 y 5.**

Hacemos el reparto inversamente proporcional:

$\frac{1}{3}k + \frac{1}{4}k + \frac{1}{5}k = 4\,371 \Rightarrow \frac{20k + 15k + 12k}{60} = 4\,371 \Rightarrow k = 5\,580$

La parte que corresponde a 3 es 1 860; la que corresponde a 4, 1 395, y la que corresponde a 5, 1 116.

3.89 **En el colegio se quiere organizar una excursión Fin de Curso. Se contrata un autobús con conductor que dispone de 80 plazas y que cuesta 360 euros.**

Si solo se ocupan la mitad de las plazas, ¿cuánto debe pagar cada alumno?

El precio y el número de plazas cubiertas son magnitudes inversamente proporcionales.

Tenemos que $360 \cdot 1 = x \cdot 40 \Rightarrow x = \frac{360}{40} = 9$ €

Cada alumno deberá pagar 9 euros.

Proporcionalidad compuesta

3.90 **Transportar 720 cajas de libros a 240 kilómetros cuesta 4 320 euros. ¿Cuántas cajas iguales se han transportado a 300 kilómetros, si hemos pagado 6 187,50 euros?**

Método de reducción a la unidad:

720 cajas ——— 240 km ——— 4 320 €

1 caja ——— 240 km ——— $\frac{4\,320}{720} = 6$ €

1 caja ——— 1 km ——— $\frac{6}{240} = 0{,}025$ €

1 caja ——— 300 km ——— $300 \cdot 0{,}025 = 7{,}50$ €

x cajas ——— 300 km ——— $7{,}50 \cdot x = 6\,187{,}50$ €

Luego $x = \frac{6\,187{,}50}{7{,}50} = 825$ cajas.

A M P L I A C I Ó N

3.91 Un hombre ha segado cinco octavos de un terreno, y su hijo un tercio de ese terreno. El hombre necesita 2 horas y 24 minutos para segar lo que le falta. ¿Cuánto tiempo le hubiera costado segar solo todo el terreno?

Fracción de terreno segado: $\frac{5}{8} + \frac{1}{3} = \frac{23}{24}$

Terreno que falta por segar: $1 - \frac{23}{24} = \frac{1}{24}$

Si en segar $\frac{1}{24}$ tarda 2 h y 24 min, en segar el terreno completo tardará: (2 h 24 min) $\cdot$ 24 $=$ 57 h 36 min

Le hubiera costado 57 horas y 36 minutos.

3.92 Para elaborar 100 kilogramos de masa de pan se necesitan 40 litros de agua, medio kilogramo de levadura, tres cuartos de kilogramo de sal y cierta cantidad de harina. En la cocción la masa pierde el 15 % del peso. ¿Cuántos kilogramos de harina hay que emplear para obtener 500 kilogramos de pan?

Calculamos la harina necesaria para elaborar 100 kilogramos de masa.

$$\left(40 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + x\right) \cdot \frac{85}{100} = 100$$

$$\left(\frac{160 + 2 + 3 + 4x}{4}\right) \cdot \frac{85}{100} = 100$$

$14\,025 + 340x = 40\,000$

$x = 76{,}39$ kg

Para elaborar 500 kg de masa se necesitarían:

$5 \cdot 76{,}39 = 381{,}95$ kg de harina

3.93 Durante la primera cuarta parte de la liga de baloncesto, el equipo del colegio ha obtenido un 40 % de los puntos posibles.

¿Qué porcentaje de puntos debe lograr en las tres cuartas partes restantes, para que al finalizar la liga tenga el 70 % de los puntos posibles?

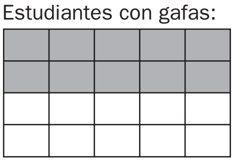
Total de puntos: T. 1.ª cuarta parte: $\frac{T}{4}$. En las otras tres cuartas partes: $\frac{3T}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} 40\,\%\text{ de } \frac{T}{4} = \frac{T}{4} \cdot \frac{4}{100} \\ x\,\%\text{ de } \frac{3T}{4} = \frac{3T}{4} \cdot \frac{x}{100} \\ 70\,\%\text{ de } T = T \cdot \frac{70}{100} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{40T}{400} + \frac{3Tx}{400} = \frac{70T}{100} \Rightarrow T\left(\frac{40}{100} + \frac{3x}{400}\right) = T \cdot \frac{70}{100}$$

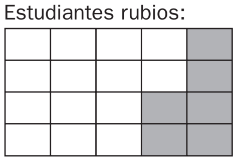
Luego debe hacer el 80 % de los puntos.

3.94 En una clase el 50 % de los estudiantes lleva gafas, el 30 % es rubio y el 10 % es rubio y lleva gafas. ¿Cuántos no son rubios y no llevan gafas?

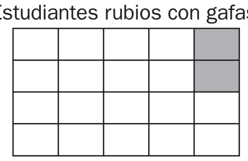
Estudiantes con gafas:



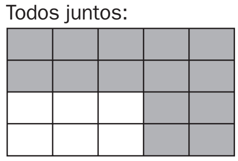
Estudiantes rubios:



Estudiantes rubios con gafas:



Todos juntos:



Los cuadros en blanco representan el porcentaje de estudiantes que no son rubios y no llevan gafas: $6 \cdot 5\,\% = 30\,\%$

3.95 **En las Olimpiadas de 1948, Olga Gyarmati saltó 5,40 metros en longitud y ganó la medalla de oro. En las Olimpiadas de 1988, 40 años después, Jackie Joyner tuvo que saltar 7,20 metros para poder ganar la medalla de oro.**

Si el porcentaje de aumento siguiera manteniéndose, ¿cuánto tendría que saltar para ganar la medalla de oro en longitud en las Olimpiadas del año 2028?

De 5,40 a 7,20 aumenta 1,80 metros: $\frac{5,40}{1,80} = \frac{100}{P} \Rightarrow P = \frac{180}{5,40} = 33,33\,\%$

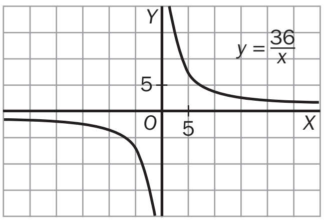
De 7,20 aumenta x: $\frac{7,20}{x} = \frac{100}{33,33} \Rightarrow x = \frac{239,37}{100} = 2,3997 \approx 2,40$ m

Luego debería saltar $7,20 + x = 7,20 + 2,40 = 9,60$ m

3.96 **Representa gráficamente la relación que existe entre todos los números cuyo producto es 36.**

a) ¿Es una relación proporcional?

b) ¿De qué tipo?



a) Sí.

b) Es una relación de proporcionalidad inversa.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

3.97 **Índice de precios al consumo**

Para calcular el IPC, índice que mide la subida de los precios, el instituto de estadística de un país utiliza dos tipos de encuestas.

La primera tabla refleja los datos correspondientes a la encuesta de presupuestos familiares; en ella se aprecia el peso que corresponde a cada grupo de productos consumidos por las familias. (Si una familia tiene un gasto total de 1 000 unidades monetarias, 380 corresponden a alimentación.)

La segunda tabla muestra el alza sufrida durante ese mes en los precios de los productos correspondientes a esos mismos grupos.

El IPC es el promedio de las subidas de precios de los diferentes grupos, pero considerando el peso de cada uno de ellos.

Tabla 1 Peso en el gasto total de los productos consumidos por las familias	
Grupos	Peso
Alimentación	380
Vestido y calzado	135
Vivienda	250
Salud	45
Ocio y cultura	190
Total	1 000

Tabla 2 Porcentaje de subida de los precios	
Grupos	Peso
Alimentación	2 %
Vestido y calzado	1,5 %
Vivienda	3 %
Salud	1 %
Ocio y cultura	5 %

a) Calcula el IPC correspondiente a esos datos.

b) Considerando este IPC, ¿cuánto debería subir un salario de 1 200 euros para que no perdiera poder adquisitivo?

a) $\text{IPC} = \dfrac{380 \cdot 2 + 135 \cdot 1{,}5 + 250 \cdot 3 + 45 \cdot 1 + 190 \cdot 5}{1\,000} = 2{,}71\ \%$

b) $1\,200 \cdot 0{,}0271 = 32{,}52$ €

AUTOEVALUACIÓN

3.A1 **Entre los siguientes pares de magnitudes razona cuáles son directa o inversamente proporcionales y cuáles no.**

a) Número de kilogramos de peras y precio que se ha de pagar por ellos.

b) Tiempo en recorrer 200 kilómetros y velocidad.

c) Peso y edad de una persona.

a) Son directamente proporcionales. Si doblamos el número de kilos de peras que compramos, también se dobla el precio que debemos pagar por ellas.

b) No son directamente proporcionales. Si doblamos la velocidad el tiempo se verá reducido a la mitad.

c) No son directamente proporcionales.

3.A2 **Halla el valor de x para que se cumpla la proporción $\frac{x}{24} = \frac{60}{288}$.**

$288 \cdot x = 60 \cdot 24 \Rightarrow x = \frac{1\,440}{288} = 5$

3.A3 **Tres grupos de alumnos de tercero deciden ir al teatro y pagan en total por las entradas 120 euros. Calcula lo que paga cada grupo sabiendo que del primero van 20 alumnos, del segundo, 15, y del tercero, 25.**

Hacemos un reparto proporcional: $20k + 15k + 25k = 120 \Rightarrow 60k = 120 \Rightarrow k = 2$

Los alumnos del primer grupo deben pagar 40 euros; los del segundo, 30, y los del tercero, 50.

3.A4 **Luis afirma que disminuir una cantidad en un 25 % equivale a multiplicar dicha cantidad por 0,75. ¿Es cierta su afirmación?**

$x\left(1 - \frac{25}{100}\right) = x\left(\frac{100 - 25}{100}\right) = x\frac{75}{100} = x \cdot 0{,}75$ La afirmación es cierta.

3.A5 **El precio de una mercancía este mes sube un 10 % y al mes siguiente un 5 %. ¿Qué porcentaje ha subido en total?**

$$\left(x\left(1 + \frac{10}{100}\right)\right)\left(1 + \frac{5}{100}\right) = \left(x + \frac{10x}{100}\right)\left(1 + \frac{5}{100}\right) = x + \frac{10x}{100} + \frac{5x}{100} + \frac{50x}{10\,000} = x\left(1 + \frac{15{,}5}{100}\right)$$

Sube un 15,5 %.

3.A6 **El precio de un libro antiguo es 24 euros. A un cliente habitual el librero le hace un 25 % de descuento y le cobra el 4 % de IVA.**
¿Cuánto tiene que pagar este cliente por el libro?

Aplicamos al precio del libro el descuento y luego el IVA: $\left(24\left(1 - \frac{25}{100}\right)\right)\left(1 + \frac{4}{100}\right) = 18{,}72$ €

El cliente paga por el libro 18,72 euros.

3.A7 **El depósito de la calefacción de un bloque de viviendas tiene combustible para 30 días, si se enciende 10 horas diarias.**
¿Para cuántos días tendrá combustible si se enciende en las mismas condiciones 12 horas diarias?

Las magnitudes son inversamente proporcionales, de modo que: $30 \cdot 10 = x \cdot 12 \Rightarrow x = 25$ días

Habrá combustible para 25 días.

3.A8 Para recoger en 16 días la aceituna de una finca de olivos, se necesita un grupo de 30 personas. ¿Cuánto tiempo necesitarán 20 personas?

Las magnitudes inversamente proporcionales: $30 \cdot 16 = 20 \cdot x \Rightarrow x = 24$ días

Tardarán 24 días en recoger las aceitunas de la finca de olivos.

3.A9 Cinco máquinas iguales envasan 20 000 botellas de agua funcionando 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardarían 6 máquinas en envasar 40 000 botellas?

5 máquinas envasan 20 000 botellas en 5 horas.

1 máquina envasa 20 000 botellas en $5 \cdot 5 = 25$ horas.

1 máquina envasa 1 botella en $\dfrac{25}{20\,000} = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ horas.

6 máquinas envasan 1 botella en $\dfrac{1{,}25 \cdot 10^{-3}}{6} = 2{,}08 \cdot 10^{-4}$ horas.

6 máquinas envasan 40 000 botellas en $2{,}08 \cdot 10^{-4} \cdot 40\,000 = 8{,}3$ horas.

3.A10 Para pintar una pared de 8 metros de largo y 2,5 metros de altura se han utilizado 2 botes de 1 kilogramo de pintura.
¿Cuántos botes de 5 kilogramos de pintura se necesitarán para pintar una pared de 50 metros de largo y 2 metros de alto?

Calculamos el área de las paredes: $8 \cdot 2{,}5 = 20$ m^2; $50 \cdot 2 = 100$ m^2

20 m^2	———	2 botes	———	1 kilogramo
100 m^2	———	x botes	———	5 kilogramos
	Proporcionalidad directa		Proporcionalidad inversa	

$$\frac{2}{x} = \frac{20}{100} \cdot \frac{5}{1} \Rightarrow x = 2 \cdot \frac{100}{20} \cdot \frac{1}{5} = 2$$

Hacen falta dos botes de 5 kilogramos de pintura para pintar una pared de 100 metros cuadrados.

EJERCICIOS PROPUESTOS

4.1 **Relaciona cada enunciado con su expresión algebraica.**

Múltiplo de 3. → $3x$

Número par. → $2x$

El cuadrado de un número más 3. → $x^2 + 3$

Un número más 5. → $x + 5$

El triple de un número más 7. → $3x + 7$

4.2 **Escribe las expresiones algebraicas correspondientes.**

a) Tres números consecutivos.

b) Tres números pares consecutivos.

a) x, $(x + 1)$, $(x + 2)$

b) $2x$, $2(x + 1)$, $2(x + 2)$

4.3 **Expresa en forma algebraica el área y el volumen de un cubo cuya arista mide x centímetros.**

Área: x^2

Volumen: x^3

4.4 **El largo y el ancho de esta piscina son datos desconocidos, pero sabemos que el largo es el doble que el ancho.**

Escribe las expresiones algebraicas que nos dan el perímetro y el área de la piscina.

Si el ancho es x, el largo es $2x$.

Perímetro: $x + 2x + x + 2x = 6x$; Área: $x \cdot 2x = 2x^2$

4.5 **Averigua, para estos valores de x, el valor numérico de la expresión: $x^2 - 7x + 10$.**

a) $x = 2$

b) $x = 1$

c) $x = 3$

d) $x = 5$

a) $2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 0$

b) $1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 4$

c) $3^2 - 7 \cdot 3 + 10 = -2$

d) $5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0$

4.6 **Obtener el valor numérico puede ayudar a comprobar si una igualdad es falsa; basta sustituir la x por números sencillos cualesquiera. Comprueba si son falsas estas igualdades.**

a) $x \cdot x \cdot x = 3x$

b) $x^2 \cdot x^4 = x^6$

c) $(x^2)^3 = x^5$

d) $x^2 + x^3 = x^5$

a) Si $x = 2$; $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 3 \cdot 2 = 6$

b) Cierta, por las propiedades de las potencias

c) Si $x = 2$; $(2^2)^3 = 64 \neq 2^5 = 32$

d) Si $x = 1$; $1^2 + 1^3 = 2 \neq 1^5 = 1$

4.7 **El valor numérico de las siguientes expresiones es 0 para algunos números. Indica cuáles son.**

a) $x^2 - 64$

b) $x^3 - 1000$

c) $x^2 + 25$

d) $x^3 + 64$

a) $x = 8$ y $x = -8$

b) $x = 10$

c) La expresión nunca es 0.

d) $x = -4$

4.8 Relaciona cada expresión algebraica con una equivalente.

$x(y + z)$	$y + x$
$x + y$	$xy + xz$
$y + 2x + y$	$2(x + y)$

4.9 Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son monomios.

a) $3,7x^2$ **b)** $\frac{1}{3}x^3$ **c)** $6\left(\frac{x}{3}\right)^3$ **d)** $\frac{x + y + z}{11}$

Son todas monomios menos la del apartado d.

4.10 Escribe el coeficiente, la parte literal y el grado de cada monomio.

a) $7x^2y$ **b)** $6xy^4z^2$ **c)** $-23x^5y^4$ **d)** $-9x^2yz^3$

a) Coeficiente: 7. Parte literal: x^2y. Grado: 3.

b) Coeficiente: 6. Parte literal: xy^4z^2. Grado: 7.

c) Coeficiente: -23. Parte literal: x^5y^4. Grado: 9.

d) Coeficiente: -9. Parte literal: x^2yz^3. Grado: 6.

4.11 Escribe un monomio semejante a cada uno de estos monomios.

a) $7xyz$ **b)** $-11x^4y^2$ **c)** $3x^4y^5$ **d)** $13x^7y^3$

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $-xyz$ b) $2x^4y^2$ c) $-3x^4y^5$ d) $26x^7y^3$

4.12 Un alumno define el grado de un monomio como el número de factores que forman su parte literal.

a) ¿Coincide esta definición con la dada?

b) Aplica las dos definiciones al monomio $3x^2y^4$.

a) Sí.

b) Con la primera definición, el grado es $2 + 4 = 6$.

Con la segunda definición hemos de tener en cuenta que $x^2y^4 = x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$, hay 6 factores, el grado es 6.

4.13 Halla el monomio que permite calcular el área de los rectángulos cuya base es el doble que la altura.

Altura: x. Base: $2x$. Área: $2x^2$

4.14 ¿Cuáles de estas expresiones algebraicas son polinomios?

a) $\frac{5}{2a + b}$ **b)** $\frac{2 + x}{2}$ **c)** $\frac{1}{3}x + 1 - \frac{2}{4}x^2$ **d)** $2^x + 1$

Son polinomios b y c.

4.15 Indica el grado de estos polinomios.

a) $x^5 - 7x + 1$ **b)** $1 - x^3$ **c)** $1 + x + x^2$ **d)** $x^7 - x^{11} - 11$

a) Tiene grado 5. b) Tiene grado 3. c) Tiene grado 2. d) Tiene grado 11.

4.16 Indica el grado de los siguientes polinomios.

a) $3xy^2 + 2x^2y + 5x^2y^2$

b) $2zt + 3t^3 + 2z^5$

a) Tiene grado 4.

b) Tiene grado 5

4.17 Determina el valor numérico de cada polinomio para $x = 10$.

a) $x^3 + x + 1$

b) $-x^4 - x^2$

c) $2x^4 - x^2 - 1$

d) $x^6 - x^3$

a) $10^3 + 10 + 1 = 111$

b) $-10^4 - 10^2 = -10\,100$

c) $2 \cdot 10^4 - 10^2 - 1 = 19\,799$

d) $10^6 - 10^3 = 999\,000$

4.18 Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - 6 + 11x - 6$ para los valores $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$

$P(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = 0$

$P(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 6 = 0$

4.19 Reduce términos en estas expresiones.

a) $8x - 7y - 5x$

b) $x^3 - 6z^3 - 4z^3 + 2x^3$

c) $12xy^2 - xy^2 - 4yx^2$

d) $2xy + 3x + x^4 - 3x$

a) $3x - 7y$

b) $3x^3 - 10z^3$

c) $11xy^2 - 4yx^2$

d) $2xy + x^4$

4.20 La suma de dos monomios es $10x^5$. Indica qué monomios pueden ser.

a) $7x^2$ y $3x^3$

b) $7x^5$ y $3x^5$

c) $6x^4$ y $4x$

d) $9x^5$ y $9x^5$

Los del apartado b.

4.21 Con los siguientes polinomios.

$P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 11$

$Q(x) = 4x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 12$

$R(x) = 3x^5 - 7x^4 + 6x - 5$

Realiza estas operaciones.

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - R(x)$

c) $P(x) + Q(x)$

d) $R(x) - Q(x)$

e) $P(x) + Q(x) - R(x)$

f) $P(x) - Q(x) + R(x)$

a) $7x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1$

b) $-3x^5 + 10x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 6x - 6$

c) $3x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 6x + 7$

d) $3x^5 - 11x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 6x - 17$

e) $-3x^5 - 2x^3 - 6x^2 - 6x + 6$

f) $3x^5 - 8x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 6x - 28$

4.22 Realiza estos productos de monomios.

a) $(2y) \cdot (3z)$

b) $(3xy^2) \cdot (-5x^2yz)$

c) $(-5ab^2c) \cdot (4a^3c) \cdot (b^2c)$

d) $(12xy) \cdot (6x^2) \cdot (x^2y^3)$

a) $6yz$

b) $-15x^3y^3z$

c) $-20a^4b^4c^3$

d) $72x^5y^4$

4.23 Multiplica el monomio por el polinomio.

a) $x^2 \cdot (3x^2 - 5x + 1)$

b) $5zt \cdot (2z^2t - 3zt^3)$

c) $ab \cdot (2ab^2 + 3c - ab)$

d) $2xy^2 \cdot (5x + 2y - 3xy)$

a) $3x^4 - 5x^3 + x^2$

b) $10z^3t^2 - 15z^2t^4$

c) $2a^2b^3 + 3abc - a^2b^2$

d) $10x^2y^2 + 4xy^3 - 6x^2y^3$

4.24 Calcula estos productos de binomios.

a) $(x^2 + 11) . (x^2 - 11)$

b) $(x^3 + y^3) . (7x + 2)$

c) $(2x - 3y) \cdot (x - y)$

d) $(3tz - 2t^2) \cdot (tz - z^2)$

a) $x^4 - 121$

b) $7x^4 + 2x^3 + 7xy^3 + 2y^3$

c) $2x^2 - 5xy + 3y^2$

d) $3t^2z^2 - 3tz^3 - 2t^3z + 2t^2z^2$

4.25 Saca factor común en estas expresiones.

a) $x^3 - 7x^4 + 2x^2y$

b) $-4z^2x - 2zx^4 - 12zx$

c) $3t^5 + 21t^3x^4 + 15t^2x$

d) $6x^4y - 24x^7y + 12x^3y^2$

a) $x^2(x + 7x^2 + 2y)$

b) $2xz(-2z - x^3 - 6)$

c) $3t^2(t^3 + 7tx^4 + 5x)$

d) $6x^3y(x - 4x^4 + 3y)$

4.26 Realiza estos productos.

a) $(2x^2 + x + 1) \cdot (x - 3)$

b) $(3x^3 - x^2 + 3) \cdot (2x + 1)$

a) $2x^3 + x^2 + x - 6x^2 - 3x - 3 = 2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$

b) $6x^4 - 2x^3 + 6x + 3x^3 - x^2 + 3 = 6x^4 + x^3 - x^2 + 6x + 3$

4.27 Efectúa estos productos de polinomios.

a) $(x^5 - 6x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \cdot (x^3 - 3x + 1)$

b) $(x^4 - 7x^3 + x^2 - 1) \cdot (x^3 + 4x^2 - 6x + 2)$

a) $x^8 - 6x^6 - 3x^4 + 2x^4 - x^2 - 3x^6 + 18x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x + x^5 - 6x^3 - 3x^2 + 2x - 1 =$
$= x^8 - 9x^6 + x^5 + 17x^4 - 7x^2 + 5x - 1$

b) $x^7 + 4x^6 - 6x^5 + 2x^4 - 7x^6 - 28x^5 + 42x^4 - 14x^3 + x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - x^3 - 4x^2 + 6x - 2 =$
$= x^7 - 3x^6 - 33x^5 + 48x^4 - 21x^3 - 2x^2 + 6x - 2$

4.28 Desarrolla estas potencias.

a) $(2x + y + 1)^2$

b) $(2ab - 1 + a)^2$

c) $(2a + 1)^3$

d) $(1 - 3t)^3$

a) $(2x + y + 1) \cdot (2x + y + 1) = 4x^2 + 2xy + 2x + 2xy + y^2 + y + 2x + y + 1 = 4x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 1$

b) $(2ab - 1 + a) \cdot (2ab - 1 + a) = 4a^2b^2 - 2ab + 2a^2b - 2ab + 1 - a + 2a^2b - a + a^2 = 4a^2b^2 + 4a^2b + a^2 - 4ab - 2a + 1$

c) $(2a + 1)^2(2a + 1) = (4a^2 + 4a + 1) \cdot (2a + 1) = 8a^3 + 4a^2 + 8a^2 + 4a + 2a + 1 = 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$

d) $(1 - 3t)^2(1 - 3t) = (1 - 6t + 9t^2) \cdot (1 - 3t) = 1 - 3t - 6t + 9t^2 + 9t^2 - 27t^3 = -27t^3 + 18t^2 - 9t + 1$

4.29 Comprueba la veracidad de estas igualdades. Si alguna es falsa, escribe el resultado verdadero.

a) $(2x^3 + 3x)^2 = 4x^6 + 9x^2 + 12x^4$

b) $(2x^3 - 5x)^2 = 4x^6 - 25x^2 + 20x^4$

c) $(5x + 3)(5x - 3) = 25x^2 + 9$

d) $(3x^2 - 4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$

a) Cierta.

b) Falsa. $(2x^3 - 5x)^2 = 4x^6 + 25x^2 - 20x^4$

c) Falsa. $(5x + 3)(5x - 3) = 25x^2 - 9$

d) Falsa. $(3x^2 - 4y)^2 = 9x^4 + 16y^2 - 24x^2y$

4.30 Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las igualdades notables.

a) $(a + 3b)^2$

b) $(a - 3b)^2$

c) $(3a + b)^2$

d) $(a + 3b) \cdot (a - 3b)$

a) $a^2 + 9b^2 + 6ab$

b) $a^2 + 9b^2 - 6ab$

c) $9a^2 + b^2 + 6ab$

d) $a^2 - 9b^2$

4.31 A partir de esta igualdad $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$, resuelve estas operaciones.

a) $11^2 - 10^2$ **b)** $75^2 - 25^2$ **c)** $999^2 - 1$ **d)** $650^2 - 150^2$

a) $11^2 - 10^2 = (11 + 10) \cdot (11 - 10) = 21$

b) $75^2 - 25^2 = (75 + 25) \cdot (75 - 25) = 5\,000$

c) $999^2 - 1 = (999 + 1) \cdot (999 - 1) = 998\,000$

d) $650^2 - 150^2 = (650 + 150) \cdot (650 - 150) = 400\,000$

4.32 Expresa como una potencia estos polinomios.

a) $9x^2 + y^2 + 6xy$

b) $25y^2 + 100 + 100y$

c) $x^2 + 49 - 14x$

d) $x^4 + 12x^2 + 36$

a) $(3x + y)^2$

b) $(5y + 10)^2$

c) $(x - 7)^2$

d) $(x^2 + 6)^2$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.33 Halla la fórmula que nos permite calcular el número de saludos que se intercambia un grupo de 40 amigos que se ven después de las vacaciones.

Resolvemos el problema para cuando son pocos amigos.

Cuando son dos amigos: 1 saludo.

Cuando son tres amigos: 3 saludos; $3 = \frac{3 \cdot 2}{2}$

Cuando son cuatro amigos: 6 saludos; $6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$

Cuando son n amigos: $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$. Lo cual es lógico, puesto que cada persona saluda a $(n - 1)$ personas, tendríamos así $n \cdot (n - 1)$, pero es que en este recuento está contado cada saludo dos veces, con lo cual dividimos entre 2.

En el caso de 40 amigos nos da como resultado: $\frac{40 \cdot 39}{2} = 780$ saludos.

4.34 Determina la fórmula que da el número de diagonales de los polígonos convexos de 20 lados.

Resolvemos el problema para polígonos de menos lados.

Un triángulo no tiene diagonales.

Un cuadrilátero tiene 2 $\left(\frac{4 \cdot 1}{2}\right)$ diagonales.

Un pentágono tiene 5 $\left(\frac{5 \cdot 2}{2}\right)$ diagonales.

Un hexágono tiene 9 $\left(\frac{6 \cdot 3}{2}\right)$ diagonales.

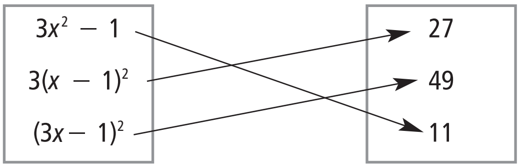
Generalizando, tenemos que para un polígono de n lados, el número de diagonales es: $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$

Así, si es un polígono de 20 lados, tendrá $\frac{20 \cdot 17}{2} = 170$ diagonales.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Expresiones algebraicas y su valor numérico

4.35 Relaciona cada expresión algebraica con su valor numérico para $x = -2$.



4.36 Calcula x, en cada caso, si el valor numérico de las siguientes expresiones es 0.

a) $3x - 24$ **b)** $\frac{7x}{56} - 1$ **c)** $(x + 2)^3$ **d)** $\sqrt{x} - 7$

a) $3x - 24 = 0 \Rightarrow x = 8$

b) $\frac{7x}{56} - 1 = 0 \Rightarrow x = 8$

c) $(x + 2)^3 = 0 \Rightarrow x = -2$

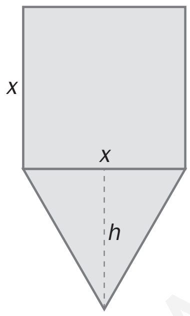
d) $\sqrt{x} - 7 = 0 \Rightarrow x = 49$

4.37 Escribe la expresión algebraica que genera estos valores. 3 6 9 12 15...

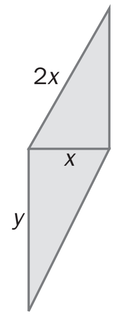
La expresión es $3n$, siendo n un número natural.

4.38 Escribe la expresión algebraica del área de cada figura.

a)



b)



a) $x^2 + \frac{x \cdot h}{2}$

b) Calculamos la altura del triángulo por el teorema de Pitágoras: $4x^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}\,x$

Así, el área del triángulo de arriba es: $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$

Del triángulo de abajo conocemos la base y la altura. Así, el área resulta: $\frac{x \cdot y}{2}$

Si sumamos las dos áreas, obtenemos el área de la figura: $\frac{\sqrt{3}x^2 + xy}{2}$

4.39 Expresa en forma algebraica cada frase.

a) Los cuadrados de tres números consecutivos.

b) Dos números que sumen 34.

c) El doble de un número menos cuatro quintos del mismo número.

d) El 30 % de un número impar.

a) x^2, $(x + 1)^2$, $(x + 2)^2$

b) x, $34 - x$

c) $2x - \frac{4}{5}x$

d) $0{,}3 \cdot (2k + 1)$

4.40 El monedero de una persona contiene las siguientes monedas.

***x* monedas de 1 euro.**

***y* monedas de 50 céntimos.**

***z* monedas de 20 céntimos.**

***m* monedas de 10 céntimos.**

***t* monedas de 5 céntimos.**

Halla la expresión algebraica que expresa el dinero, en euros, que tiene en el monedero.

Tiene: $x + 0{,}50y + 0{,}20z + 0{,}10m + 0{,}05t$ €

4.41 Indica si son monomios estas expresiones algebraicas.

a) $5xyz$ **b)** $\frac{8x}{y}$ **c)** $7z^3y^{-4}$ **d)** $12xy^3$

a) Es monomio.

b) No son monomios porque el exponente de y no es natural.

c) No son monomios porque el exponente de y no es natural.

d) No es monomio porque el exponente de x no es natural.

4.42 Indica el coeficiente, parte literal y grado de cada monomio.

a) $8x^2$ **b)** $\frac{7}{5}z^4m^3$ **c)** $\frac{xy^5}{8}$ **d)** $\frac{3}{2}yz^4$

a) Coeficiente: 8. Parte literal: x^2. Grado: 2.

b) Coeficiente: $\frac{7}{5}$. Parte literal: z^4m^3. Grado: 7.

c) Coeficiente: $\frac{1}{8}$. Parte literal: xy^5. Grado: 6.

d) Coeficiente: $\frac{3}{2}$. Parte literal: yz^4. Grado: 5.

4.43 **¿Cuál de los siguientes monomios es el de mayor grado?**

$3x^2yz^3 \quad 7y^4z^3 \quad 8z^5 \quad 4y^6$

El segundo polinomio, $7y^4z^3$, que tiene grado 7.

4.44 **Escribe el polinomio que cumple las siguientes características.**

Binomio en la variable *z*.
De grado 5.
Con coeficiente del término principal 8.
Término independiente −7.

El polinomio que cumple las características es: $8z^5 - 7$

4.45 **Calcula el término independiente, a, del polinomio $xz^2 - 4x^2 + 3z + a$, sabiendo que el valor numérico para $x = -1$ y $z = 2$ es 10.**

Sustituimos las variables por los valores numéricos en el polinomio: $(-1) \cdot 2^2 - 4 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 2 + a$

El resultado de dicha sustitución es igual a 10, de modo que $-4 - 4 + 6 + a = 10 \Rightarrow a = 12$.

Operaciones con monomios y polinomios

4.46 **Realiza estas sumas de monomios.**

a) $-4zy^3 + 7zy^3 - 15zy^3 + 22zy^3$

b) $\dfrac{-xyz}{2} + \dfrac{2}{3}xyz$

c) $-3xy + 2xz + 5yz$

d) $-4x^3 + 5x^2 - 9x^2 + 12x^3 - \dfrac{3}{2}x + x - 1$

a) $10zy^3$ b) $\dfrac{1}{6}xyz$ c) $-3xy + 2xz + 5yz$ d) $8x^3 - 4x^2 - \dfrac{1}{2}x - 1$

4.47 **Copia y completa esta suma de polinomios.**

$$\begin{array}{rrrr}
-4x^3 & + \mathbf{(-4x^2)} & + \; 6x & - \mathbf{(-6)} \\
\mathbf{11x^3} & + \; 3x^2 & - \; 10x & + \; 9 \\
\hline
7x^3 & - \; x^2 & + \mathbf{(-4x)} & + \; 15
\end{array}$$

4.48 **Con los siguientes polinomios.**

$P(x) = -5x^4 + 7x^2 - 5x + 1 \qquad M(x) = -6x^3 + 9x^2 - x + 1 \qquad T(x) = x^4 + 2x^3 + 8x - 2$

Realiza las operaciones indicadas.

a) $P(x) - T(x) + 2M(x)$ **b)** $(M(x) - P(x)) \cdot (T(x) - M(x))$ **c)** $3P(x) - 4T(x) - M(x)$

a) $-5x^4 + 7x^2 - 5x + 1 - (x^4 + 2x^3 + 8x - 2) + 2(-6x^3 + 9x^2 - x + 1) =$
$= -5x^4 + 7x^2 - 5x + 1 - x^4 - 2x^3 - 8x + 2 - 12x^3 + 18x^2 - 2x + 2 = -6x^4 - 14x^3 + 25x^2 - 15x + 5$

b) $[(-6x^3 + 9x^2 - x + 1) - (-5x^4 + 7x^2 - 5x + 1)] \cdot [x^4 + 2x^3 + 8x - 2 - (-6x^3 + 9x^2 - x + 1)] =$
$= (5x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 4x) \cdot (x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 9x - 3) = 5x^8 + 34x^7 - 91x^6 + 119x^5 - 55x^4 + 30x^2 - 12x$

c) $3(-5x^4 + 7x^2 - 5x + 1) - 4(x^4 + 2x^3 + 8x - 2) - (-6x^3 + 9x^2 - x + 1) =$
$= -15x^4 + 21x^2 - 15x + 3 - 4x^4 - 8x^3 - 32x + 8 + 6x^3 - 9x^2 + x - 1 = -19x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 46x + 10$

4.49 **Copia y completa esta multiplicación de polinomios.**

$$\begin{array}{rrrr}
 & \mathbf{-4}x^2 & + \; \mathbf{3}x & - \; 1 \\
 & & - \; 5x & + \; \mathbf{2} \\
\hline
 & - \; \mathbf{8}x^2 & + \; 6x & - \; 2 \\
\mathbf{20}x^3 & - \; 15x^2 & + \; \mathbf{5}x & \\
\hline
\mathbf{20}x^3 & - \; 23x^2 & + \; \mathbf{11}x & - \; 2
\end{array}$$

4.50 **Saca factor común en estas expresiones.**

a) $-8x^2y^3 + 4x^3y - 2x^4y^2$

b) $9t^3x^4 - 5t^2x^6 + 2t^7x^5$

c) $8z^2t - \frac{2}{3}x^3t^2 - \frac{4}{7}z^4t^3$

d) $-\frac{2}{21}a^3b^2 - \frac{4}{15}a^4b^7 - \frac{14}{3}a^9b^4$

a) $-2yx^2(4y^2 - 2x + yx^2)$

b) $x^4t^2(9t - 5tx^2 + 2xt^5)$

c) $2t\left(4z^2 - \frac{1}{3}x^3t - \frac{2}{7}z^4t^2\right)$

d) $\frac{2}{3}a^3b^2\left(-\frac{1}{7} - \frac{2}{5}a^3b^5 - 7a^6b^2\right)$

4.51 **Expresa estos polinomios en forma de productos.**

a) $x^2 - 4xy + 4y^2$

b) $49 - 7z + \frac{z^2}{4}$

c) $36z^2t^2 + 24z^2t + 4z^2$

d) $3z^2 + 12zx + 12x^2$

a) $(x - 2y)^2$

b) $\left(7 - \frac{z}{2}\right)^2$

c) $(6zt + 2z)^2$

d) $(\sqrt{3}z + \sqrt{12}x)^2$

4.52 **Desarrolla las siguientes potencias de polinomios.**

a) $(3x - 4)^3$ **b)** $(x + 1)^4$ **c)** $(2x + 3y)^4$ **d)** $(x + y + z)^2$

a) $(3x - 4)^3 = (3x)^3 + (-4)^3 + 3(3x)^2(-4) + 3(-4)^2(3x) = 27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$

b) $(x + 1)^4 = (x + 1)^2 \cdot (x + 1)^2 = (x^2 + 1 + 2x) \cdot (x^2 + 1 + 2x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

c) $(2x + 3y)^4 = (2x + 3y)^2 \cdot (2x + 3y)^2 = (4x^2 + 9y^2 + 12xy) \cdot (4x^2 + 9y^2 + 12xy) =$
$= 16x^4 + 81y^4 + 216x^2y^2 + 96x^3y + 216y^3x$

d) $(x + y + z)^2 = (x + y + z) \cdot (x + y + z) = x^2 + xy + xz + yx + y^2 + yz + zx + zy + z^2 =$
$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

4.53 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $-5x(x^2 + x + 1) + 4(-x^3 + 7x^2 - 2)$

b) $(3x - 2)^2 . (-2x + 1) - 3(6x^3 - 4x^2 + 3x - 2)$

c) $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right)$

d) $(-x + 2) \cdot (5x + 3) . (2x - 4) - 3x(x + 1)$

e) $4(-5x^2 + 6x - 1) - (2x^3 - 6) + 7x^2 - 8x$

f) $(-7x + 2) \cdot (4x - 5) - 2x(-3x^2 + 9)$

g) $-x^2 \cdot (x^3 - x^2 - 1) - x(x^2 - 1)$

h) $(x + 1)^3 - x^3 - 1 - 3(x^2 + 1)$

i) $-2x(-x^2) - 5x^2(2x^3) + (x^4 - 2x^2) \cdot (-7x + 2)$

j) $3(x - 1) - 4(7x^2 - 9x) + 7(-4x + 2)$

a) $-9x^3 + 23x^2 - 5x - 8$

b) $-36x^3 + 45x^2 - 29x + 10$

c) $\frac{x^3}{3} - \frac{163}{60}x^2 + \frac{86}{15}x - \frac{4}{5}$

d) $-10x^3 + 31x^2 - 19x - 24$

e) $-2x^3 - 13x^2 + 16x + 2$

f) $6x^3 - 28x^2 + 25x - 10$

g) $-x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + x$

h) $3x - 3$

i) $-17x^5 + 2x^4 + 16x^3 - 4x^2$

j) $-28x^2 + 11x + 11$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

4.54 **¿Puede existir un trinomio, con una sola variable, de grado 1? Justifica la respuesta.**

No. Todos los polinomios de grado 1 son de la forma $ax + b$, luego, como mucho, son binomios.

4.55 **Los siguientes polinomios tienen sus términos ordenados en forma decreciente.**

$(-3x^3 + \square) + (7x^3 + \square) = P(x)$

$(-6x^4 + \square) - (2x^2 + \square) = R(x)$

$(-x^5 + \square) \cdot (4x^3 + \square) = T(x)$

$(2x^3 + \square)^3 = L(x)$

$[(2x + \square) \cdot (-6x^4 + \square)]^2 = M(x)$

¿Cuál es el grado de los polinomios $P(x)$, $R(x)$, $T(x)$, $L(x)$ y $M(x)$?

Grado $P(x) = 3$ Grado $R(x) = 4$ Grado $T(x) = 8$ Grado $L(x) = 9$ Grado $M(x) = 10$

4.56 **Indica si son correctas estas operaciones.**

a) $3x^4 - 2x = x^3$

b) $(4x^2 + 3x)^2 = 16x^4 + 9x^2$

c) $(4x^3)^3 = 64x^9$

d) $\left(\frac{7}{2}x^2y\right) \cdot (6xy^3) = 21x^3y^4$

e) $(5x - 2y) \cdot (5x - 2y) = 25x^2 - 4y^2$

a) Incorrecta

b) Incorrecta

c) Correcta

d) Correcta

e) Incorrecta

4.57 **¿Puede tener un polinomio un mismo valor numérico para dos valores distintos de la variable? Justifica tu respuesta.**

Sí, por ejemplo, lo vemos en el caso del polinomio x^2, cuyo valor, tanto para $x = 1$ como para $x = -1$, es 1.

4.58 **¿Puede tener un polinomio varios valores numéricos para un determinado valor de la variable? Justifica la respuesta.**

No, las operaciones que incluye un polinomio dan como resultado sólo un valor.

4.59 **Sin realizar operaciones, ¿para qué valor de x el polinomio $5x^3 - 4x^2 + 8x - 7$ toma el valor -7?**

Para $x = 0$

4.60 **Indica qué valores de la incógnita hacen que el polinomio $P(x) = (x - 1) \cdot (x + 7) \cdot (2x - 3)$ tenga como valor numérico 0.**

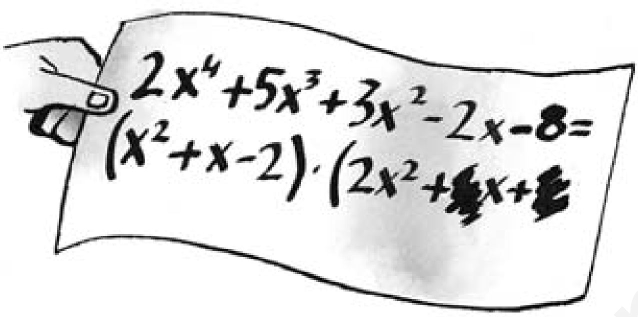
Para $x = 1$, $x = -7$ y $x = \frac{3}{2}$

4.61 **Halla el polinomio de grado 2 cuyo término principal es 16, cuyo término independiente es 1 y que es un cuadrado perfecto. ¿Cuántas soluciones existen?**

$ax^2 + bx + c$ donde $\left.\begin{array}{l} a = 16 \\ c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 16x^2 + bx + 1 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow 16x^2 + 8x + 1 = (4x + 1)^2$

PROBLEMAS PARA APLICAR

4.62 Mario le pasa a Pablo una multiplicación de polinomios para que compruebe el resultado, pero no se pueden leer todos los coeficientes.



¿Cuáles son los coeficientes que faltan?

$2x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 2x - 8 = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x^3 + ax^2 + bx - 4x^2 - 2ax - 2b =$

$$= 2x^4 + (a + 2)x^3 + (b + a - 4)x^2 + (b - 2a)x - 2b \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} a + 2 = 5 \\ b + a - 4 = 3 \\ b - 2a = -2 \\ -2b = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 3,\ b = 4$$

4.63 Halla el polinomio que aparece en las siguientes igualdades.

a) $\dfrac{Q(x)}{\frac{1}{2}x^2 - 4x + 3} = -x + \dfrac{1}{3}$ **b)** $(L(x))^2 = 4x^2 - 12x + 9$

a) $Q(x) = \left(-x + \dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 3\right) = -\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{25}{6}x^2 - \dfrac{13}{3}x + 1$

b) $(L(x))^2 = 4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2 \Rightarrow L(x) = 2x - 3$

4.64 La edad de un hombre y la de su hijo se diferencian en 30 años. Dentro de cinco años, la edad del padre será el triple que la de su hijo.

Completa, utilizando una variable, la tabla con la edad del padre y del hijo.

	Padre	Hijo
Edad actual		
Edad dentro de cinco años		

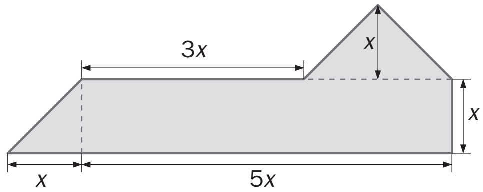
$x \equiv$ edad hijo

$30 + x \equiv$ edad padre $\Rightarrow 30 + x + 5 = 3(x + 5) \Rightarrow x + 35 = 3(x + 5) \Rightarrow x + 35 = 3x + 15 \Rightarrow 20 = 2x \Rightarrow x = 10$

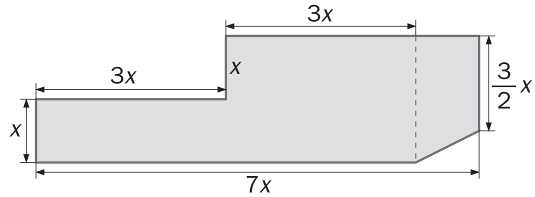
	Padre	Hijo
Edad actual	40	10
Edad dentro de cinco años	45	15

4.65 Expresa mediante un polinomio el área de las figuras.

a)



b)



Dividimos las figuras en otras más simples y sumamos las áreas:

a) $\dfrac{x \cdot x}{2} + 5x \cdot x + \dfrac{2x \cdot x}{2} = \dfrac{13}{2}x^2$

b) $3x \cdot x + 3x \cdot 2x + x \cdot \dfrac{3}{2}x + \dfrac{x \cdot \frac{3}{2}x}{2} = 3x^2 + 6x^2 + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{4}x^2 = \dfrac{45}{4}x^2$

4.66 Averigua los valores de *x* e *y*, para que se produzca la siguiente transformación.

$x + y$	$y^2x - 1$	$\dfrac{y}{6x} + 7$
$3y - 4x$	$(x + 1)^3y$	xy

⇩

7	35	8
14	48	6

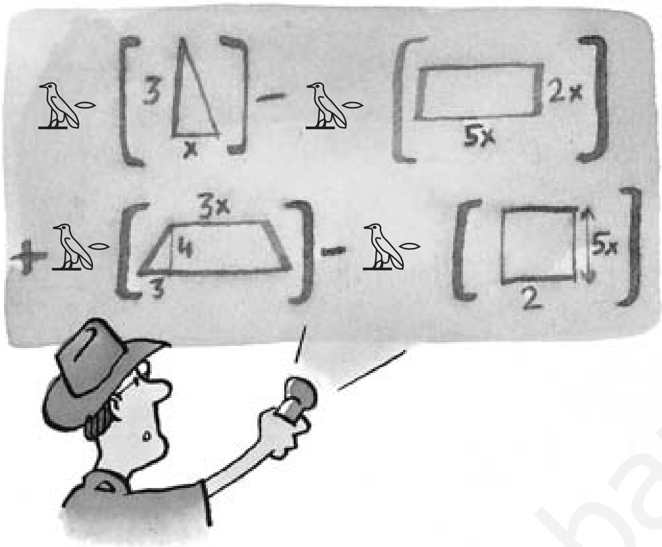
Los valores son: $x = 1$, $y = 6$.

4.67 Expresa con un monomio el área de un triángulo equilátero de lado *x*.

Aplicando el teorema de Pitágoras: $x^2 = h^2 + \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{x^2 - \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

$\text{Área} = \dfrac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$

4.68 **En una pirámide del antiguo Egipto descubrieron la siguiente inscripción.**



Un joven matemático desveló el enigma y, para su sorpresa, descubrió que se trataba de un polinomio. ¿Cuál era?

Calculamos las diferentes áreas:

$$\frac{3x}{2} - 5x \cdot 2x + \left(2\left(\frac{4 \cdot 3}{2}\right) + 3x \cdot 4\right) - 2 \cdot 5x = \frac{3x}{2} - 10x^2 + 12 + 12x - 10x = 10x^2 + \frac{7}{2}x + 12$$

4.69 **Sin conocer todavía la división de polinomios, pero sabiendo que cumplen la misma regla de dividir que los números, halla el polinomio dividendo de la división.**

$$\begin{array}{l|l} \boldsymbol{P(x)} & \boldsymbol{x^2 - 3} \\ \cline{2-2} \boldsymbol{\ldots} & \boldsymbol{x^2 - 1} \\ \boldsymbol{3x - 2} & \end{array}$$

$P(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 1) + (3x - 2) = x^4 - 4x^2 + 3x + 1$

REFUERZO

Expresiones algebraicas

4.70 **Escribe en lenguaje algebraico.**

a) Dos números cuyo producto es 18.

b) Tres cubos consecutivos.

c) Un múltiplo de 5 más su doble.

d) El producto de dos pares consecutivos.

a) $x \cdot y = 18$

b) $x^3, (x + 1)^3, (x + 2)^3$

c) $5x + 10x$

d) $2x \cdot (2x + 2)$

Monomios y polinomios

4.71 **Indica cuáles de estos monomios son semejantes a $3x^2zy^3$.**

a) $8x^2yz^3$

b) $\frac{x^2yz^3}{17}$

c) x^2zy^3

d) $15xzy^3$

El c, porque tiene la misma parte literal.

4.72 **Comprueba si que estos pares de polinomios son no son equivalentes, hallando sus valores numéricos para $x = 1$.**

a) $(x + 2)^3$ y $x^3 + 8$

b) $-\frac{8x^2 - 4}{2}$ y $4x^2 - 2$

c) $(3x^2)^3$ y $-27x^5$

a) $(1 + 2)^3 = 3^3 = 27$ y $1^3 + 8 = 1 + 8 = 9 \Rightarrow$ No son equivalentes.

b) $-\frac{8 \cdot 1^2 - 4}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ y $4 \cdot 12 - 2 = 2 \Rightarrow$ No son equivalentes.

c) $(3 \cdot 1^2)^3 = 3^3 = 27$ y $-27 \cdot 1^5 = -27 \Rightarrow$ No son equivalentes.

Operaciones con polinomios

4.73 **Efectúa estos productos.**

a) $-3x^2 \cdot (4x^3 - 5x + 2)$

b) $5x^2yz^4 \cdot (4x^3 - 5x + 2)$

c) $(6y^2 - 5y + 1) \cdot (4y^2 - 3)$

a) $-12x^5 + 15x^3 - 6x^2$

b) $20x^5yz^4 - 25x^3yz^4 + 10x^2yz^4$

c) $24y^4 - 18y^3 - 20y^2 + 15y + 4y^2 - 3 = 24y^4 - 34y^2 + 15y - 3$

4.74 **Realiza las operaciones indicadas con los siguientes polinomios.**

$P(x) = 5x^2 - 4x + 1$ $\quad Q(x) = -6x + 2$ $\quad L(x) = x^2 - 5$ $\quad M(x) = x^3 - 5x + 4$

a) $P(x) + Q(x)$

b) $Q(x) - M(x)$

c) $L(x) \cdot M(x)$

d) $(M(x))^2$

a) $5x^2 - 10x + 3$

b) $-x^3 - x - 2$

c) $x^5 - 10x^3 + 4x^2 + 25x - 20$

d) $x^6 - 10x^4 + 8x^3 + 25x^2 - 40x + 16$

4.75 **Utilizando los productos notables, desarrolla estas potencias de binomios.**

a) $(x - 3)^2$

b) $(2a + 3b)^2$

c) $(x^2 + 2)^2$

d) $(3 - 2t^3)^2$

a) $x^2 - 6x + 9$

b) $2a^2 + 12ab + 9b^2$

c) $x^4 + 4x^2 + 4$

d) $9 - 12t^3 + 4t^6$

4.76 **Completa estas igualdades.**

a) $(\square - 2z)^2 = 25x^2 - \square + 4z^2$

b) $(3z^2 + \square)^2 = \square + \square + 1$

a) $(\mathbf{5x} - 2z)^2 = 25x^2 - \mathbf{20xz} + 4z^2$

b) $(3z^2 + \mathbf{1})^2 = \mathbf{9z^4} + \mathbf{6z^2} + 1$

AMPLIACIÓN

4.77 **Una igualdad notable muy útil en el cálculo de polinomios es la siguiente:**

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$$

Teniendo en cuenta este resultado, desarrolla las siguientes potencias.

a) $(2x^2 + 1)^3$ **b)** $(3x + y)^3$

a) $(2x^2 + 1)^3 = 8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1$

b) $(3x + y)^3 = 27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$

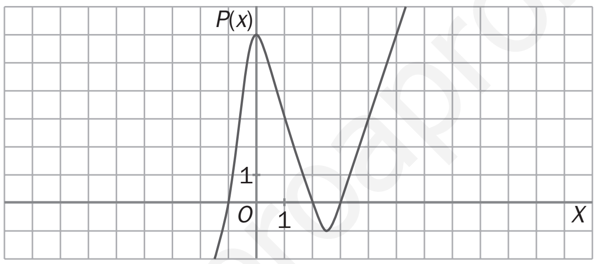
4.78 **Encuentra un polinomio $N(x)$, de grado 2, de forma que $N(0) = 3$, $N(-1) = 12$ y $N(2) = 15$.**

$$N(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} N(0) = c = 3 \\ N(-1) = a - b + c = 12 \\ N(2) = 4a + 2b + c = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 9 \\ 4a + 2b = 12 \end{cases} \Rightarrow 4(9 + b) + 2b = 12 \Rightarrow 36 + 4b + 2b = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6b = -24 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow a = 5$$

Así: $N(x) = 5x^2 - 4x + 3$

4.79 **Hemos representado en una gráfica los valores numéricos de un polinomio, $P(x)$, según el valor de la variable por la que sustituimos x.**



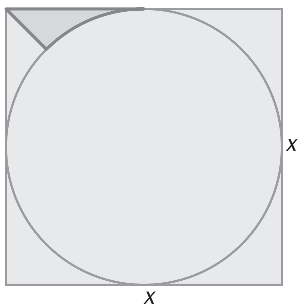
a) Para qué valores de x el valor numérico del polinomio es 0?

b) ¿Qué valores toma el polinomio cuando la variable x es 1?

a) Para $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$

b) $P(1) = 3$

4.80 **Expresa el área coloreada en azul en forma de un solo monomio.**



El área del cuadrado es x^2.

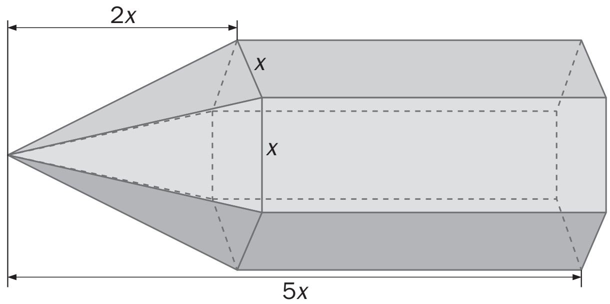
La del círculo es $\pi \cdot \frac{x^2}{4}$.

La suma de las áreas de los huecos entre el cuadrado y el círculo es: $x^2 - \frac{\pi}{4}x^2 = \frac{4 - \pi}{4}x^2$

Si dividimos entre 4 tendremos la de un hueco, y entonces dividimos entre dos y tendremos el área de la mitad de uno de esos huecos:

$$\frac{\frac{\left(\frac{4 - \pi}{4}\right)}{4}}{2}x^2 = \frac{4 - \pi}{32}x^2$$

4.81 Escribe la fórmula que permite calcular el volumen del siguiente cuerpo geométrico.



Sumamos los volúmenes del prisma y de la pirámide y obtenemos el volumen del conjunto.

La base del prisma es un hexágono regular de lado x.

Calculamos la apotema de la base utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$\text{Apotema} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Calculamos el volumen del prisma:

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \cdot 3x = \frac{9\sqrt{3}}{2}x^3$$

Calculamos el volumen de la pirámide:

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \cdot 2x}{3} = \sqrt{3}x^3$$

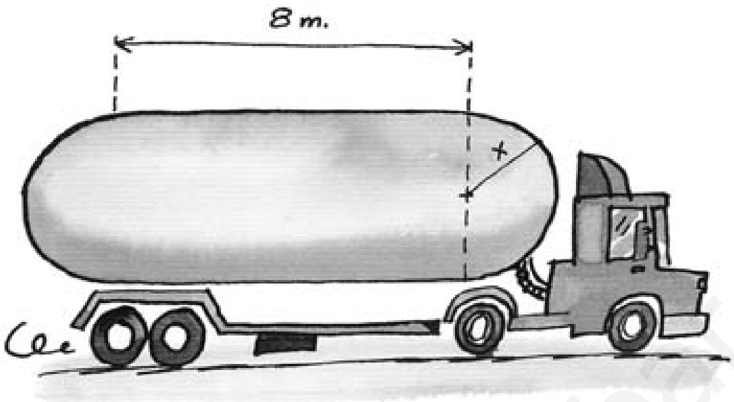
Así, el volumen de la pirámide es:

$$V_T = \frac{9\sqrt{3}}{2}x^3 + \sqrt{3}x^3 = \frac{11\sqrt{3}}{2}x^3$$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

4.82 Depósito lácteo

El depósito de un camión destinado a transportar leche tiene la forma de la figura.



a) Determina, mediante dos expresiones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, la superficie y el volumen del depósito.
b) Calcula la superficie y el volumen si $x = 2$ y $x = 3$ metros.

a) Superficie total = Superficie lateral cilindro + Superficie esfera = $6\pi x + 4\pi x^2$

Volumen total = Volumen cilindro + volumen esfera = $3\pi x^2 + \frac{4}{3}\pi x^3$

b) $A(2) = 6\pi x + 4\pi x^2 = 87{,}96$ m^2; $A(3) = 6\pi x + 4\pi x^2 = 169{,}65$ m^2

$V(2) = 3\pi x^2 + \frac{4}{3}\pi x^3 = 71{,}21$ m^3; $V(3) = 3\pi x^2 + \frac{4}{3}\pi x^3 = 197{,}92$ m^3

4.83 Ayudas para material

El Ayuntamiento de Jarrilla ofrece a sus habitantes una ayuda para la compra de material escolar ante el inicio de curso.

La ayuda se calcula utilizando la fórmula: $A = 25n + 50i$

Siendo:

***A*: la ayuda en euros.**

***n*: el número de hijos que integran la familia y que están escolarizados en Educación Primaria o en ESO.**

***i*: un coeficiente relacionado con los ingresos anuales del total de integrantes de la familia y que se calcula mediante la siguiente tabla.**

Ingresos anuales	*i*
Menos de 12 000 euros	4
Entre 12 000 y 15 000 euros	3
Entre 15 000 y 20 000 euros	2
Más de 20 000 euros	1

Calcula la ayuda que corresponde a cada una de las siguientes familias:

Familia	Hijos escolarizados	Ingresos anuales
González	3	19 000
Pérez	2	11 500
Sánchez	1	14 000
García	2	25 000

González: $A = 25n + 50i = 25 \cdot 3 + 50 \cdot 2 = 175$ €
Pérez: $A = 25n + 50i = 25 \cdot 2 + 50 \cdot 4 = 250$ €
Sánchez: $A = 25n + 50i = 25 \cdot 1 + 50 \cdot 3 = 175$ €
García: $A = 25n + 50i = 25 \cdot 2 + 50 \cdot 1 = 100$ €

A U T O E V A L U A C I Ó N

4.A1 **Indica cuál de estas expresiones algebraicas es un monomio.**

$\dfrac{5}{z^2}$ $\qquad\sqrt{7xy}$ $\qquad 5t^{\frac{1}{2}}$ $\qquad 15z^3m^4$ $\qquad -3x^2 + 1$

El único monomio es $15z^3m^4$

4.A2 **Con los siguientes polinomios.**

$A(x) = 3x - 2$ $\qquad B(x) = -5x^2 - 6x + 1$ $\qquad C(x) = 4x + 3$

Realiza las operaciones indicadas.

a) $A(x) - B(x)$ $\qquad$ **b)** $(A(x))^2$ $\qquad$ **c)** $A(x) \cdot C(x)$

a) $(3x - 2) - (-5x^2 - 6x + 1) = 5x^2 + 9x - 3$

b $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

c) $(3x - 2) \cdot (4x + 3) = 12x^2 + x - 6$

4.A3 **¿Cuál es el grado de este polinomio?**

$15xy^4 - 3x^2y^6 + 7x^7 - 2x^5y + y^6$

El polinomio tiene grado 8.

4.A4 **Halla los valores de *a*, *b* y *c*, para que los polinomios $A(x)$ y $B(x)$ sean iguales.**

$A(x) = (7a - 4)x^3 - 6x + (1 - 5b)$

$B(x) = 3x^3 + 8cx^2 + (b - 4)x + 11$

Para que sean iguales, los coeficientes de cada uno de sus términos han de ser iguales. Así:

$$\begin{cases} 7a - 4 = 3 \\ 0 = 8c \\ -6 = b - 4 \\ 1 - 5b = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a = 7 \\ c = 0 \\ -2 = b \\ -5b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

Luego $a = 1$, $b = -2$ y $c = 0$

4.A5 **Relaciona cada área rayada con el monomio que le corresponde.**

a) $\dfrac{x^2}{8}$ $\qquad$ **b)** $\dfrac{3}{2}x^2$ $\qquad$ **c)** $3x^2$

a) Cuadrado $\qquad$ b) Triángulo $\qquad$ c) Rectángulo

4.A6 **Aplica las igualdades notables para desarrollar las siguientes operaciones.**

a) $(2a + b)^2$ $\qquad$ **c)** $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$

b) $(2x^2 - y)$ $\qquad$ **d)** $(3t^3 - 2)^2$

a) $4a^2 + b^2 + 4ab$ $\qquad$ c) $9x^2 - 1$

b) $4x^4 + y^2 - 4x^2y$ $\qquad$ d) $9t^6 + 4 - 12t^3$

4.A7 **Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = 2 - x^2 + 3x - 2x^3$ para el valor $x = -2$.**

$P(-2) = 2 - (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)^3 = 8$

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1 Divide los siguientes monomios.

a) $54x^5 : 9x^2$ **b)** $63x^{12} : 3x^5$ **c)** $35xy^6 : 7y^3$ **d)** $121x^2y^6 : 11yx^4$

a) $54x^5 : 9x^2 = \frac{54x^5}{9x^2} = \frac{54}{9} \cdot \frac{x^5}{x^2} = 6x^3$ c) $35xy^6 : 7y^3 = \frac{35xy^6}{7y^3} = \frac{35}{7} \cdot x \cdot \frac{y^6}{y^3} = 5xy^3$

b) $63x^{12} : 3x^5 = 21x^7$ d) $121x^2y^6 : 11yx^4 = 11x^{-2}y^5$

5.2 Efectúa estas divisiones.

a) $(60x^3 - 75x^2) : 15x$

b) $(121x^2 - 55x) : 11x^2$

a) $(60x^3 - 75x^2) : 15x = \frac{60x^3 - 75x^2}{15x} = \frac{60x^3}{15x} - \frac{75x^2}{15x} = 4x^2 - 5x$

b) $(121x^2 - 55x) : 11x^2 = \frac{121x^2 - 55x}{11x^2} = \frac{121x^2}{11x^2} - \frac{55x}{11x^2} = 11 - \frac{5}{x}$

5.3 Completa estas divisiones de monomios.

a) $36xy^3 : \square = 2x$ **b)** $\square : 7x^3 = 11x^2$ **c)** $15x^2yz : \square = 3yz$ **d)** $\square : ab = a^2b^3$

a) $18y^3$ b) $77x^5$ c) $5x^2$ d) a^3b^4

5.4 Realiza las siguientes divisiones.

a) $(26x^3z - 52x^5z) : 13x^2$

b) $(26x^3z + 39x^4z) : 13x^4z$

a) $(26x^3z - 52x^5z) : 13x^2 = \frac{26x^3z - 52x^5z}{13x^2} = \frac{26x^3z}{13x^2} - \frac{52x^5z}{13x^2} = 2xz - 4x^3z$

b) $(26x^3z - 39x^4z) : 13x^4z = \frac{26x^3z - 39x^4z}{13x^4z} = \frac{26x^3z}{13x^4z} - \frac{39x^4z}{13x^4z} = \frac{2}{x} - 3$

5.5 Realiza estas divisiones.

a) $(x^3 + 6x^2 + 6x + 5) : (x^2 + x + 1)$

b) $(x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6) : (x^2 - x + 2)$

c) $(x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 5x + 6) : (x^2 + 3x - 2)$

d) $(x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7) : (x^4 - 3x + 1)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +6x^2 & +6x & +5 & x^2 + x + 1 \\
-x^3 & -x^2 & -x & & x + 5 \\
\hline
 & 5x^2 & +5x & +5 & \\
 & -5x^2 & -5x & -5 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

b) $C(x) = x^2 - 4x + 5$ $R(x) = x - 4$

c) $C(x) = x^3 - 5x^2 + 17x - 58$ $R(x) = 203x - 110$

d) $C(x) = x^2 + 3$ $R(x) = 3x^3 - 3x^2 + 14x - 10$

5.6 Efectúa la siguiente división de polinomios.

$$(6x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 8x - 3) : (2x^2 + 3x - 1)$$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
6x^4 & +7x^3 & -2x^2 & +8x & -3 & & 2x^2 + 3x - 1 \\ \cline{7-7}
-6x^4 & -9x^3 & +3x^2 & & & & 3x^2 - x + 1 \\ \cline{1-3}
 & -2x^3 & -x^2 & & & & \\
 & 2x^3 & +3x^2 & -x & & & \\ \cline{2-4}
 & & 2x^2 & +7x & & & \\
 & & -2x^2 & -3x & +1 & & \\ \cline{3-5}
 & & & 4x & -2 & &
\end{array}$$

5.7 Escribe el dividendo de una división de polinomios en la que el divisor es $x^2 + 1$, el cociente $x^3 - 3$, y el resto $2x$.

$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^3 - 3) + 2x = x^5 - 3x^2 + x^3 - 3 + 2x$

5.8 Realiza estas divisiones aplicando la regla de Ruffini, y escribe el cociente y el resto de la división.

a) $(4x^3 - 8x^2 - 9x + 7) : (x - 3)$

b) $(2x^3 + 5x^2 - 4x + 2) : (x + 3)$

c) $(5x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x - 1) : (x + 1)$

d) $(6x^4 + 9x^3 - 10x^2 + 8x - 2) : (x - 2)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & -8 & -9 & 7 \\
3 & & 12 & 12 & 9 \\ \hline
 & 4 & 4 & 3 & 16
\end{array}$$

$C(x) = 4x^2 + 4x + 3$ $\quad R(x) = 16$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 5 & -4 & 2 \\
-3 & & -6 & 3 & 3 \\ \hline
 & 2 & -1 & -1 & 5
\end{array}$$

$C(x) = 2x^2 - x - 1$ $\quad R(x) = 5$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 5 & -7 & 3 & -5 & 3 & -1 \\
-1 & & -5 & 12 & -15 & 20 & -23 \\ \hline
 & 5 & -12 & 15 & -20 & 23 & -24
\end{array}$$

$C(x) = 5x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 20x + 23$ $\quad R(x) = -24$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 6 & 9 & -10 & 8 & -2 \\
2 & & 12 & 42 & 64 & 144 \\ \hline
 & 6 & 21 & 32 & 72 & 142
\end{array}$$

$C(x) = 6x^3 + 21x^2 + 32x + 72$ $\quad R(x) = 142$

5.9 Averigua el cociente y resto de estas divisiones mediante la regla de Ruffini.

a) $(2x^3 - x^2 + 5) : (x - 3)$

b) $(3x^5 + 3x^2 - 4) : (x + 1)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -1 & 0 & 5 \\
3 & & 6 & 15 & 45 \\ \hline
 & 2 & 5 & 15 & 50
\end{array}$$

$C(x) = 2x^2 + 5x + 15$ $\quad R(x) = 50$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\
-1 & & -3 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ \hline
 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 & -4
\end{array}$$

$C(x) = 3x^4 - 3x^3 + 3x^2$ $\quad R(x) = -4$

5.10 Efectúa las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(x^3 - 1) : (x - 1)$

b) $(x^4 + 1) : (x + 1)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$C(x) = x^2 + x + 1$ $\quad$ $R(x) = 0$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{array}$$

$C(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ $\quad$ $R(x) = 2$

5.11 Utiliza el teorema del resto para calcular el resto de estas divisiones.

a) $(x^{11} - 2x^2) : (x - 1)$

b) $(x^7 - 1) : (x - 1)$

c) $(x^{12} - 81) : (x + 1)$

d) $(-x^{14} + 101) : (x + 1)$

a) $R = P(1) = 1^{11} - 2 \cdot 1^2 = 1 - 2 = -1$

b) $R = P(1) = 1^7 - 1 = 1 - 1 = 0$

c) $R = P(-1) = (-1)^{12} - 81 = 1 - 81 = -80$

d) $R = P(-1) = -(-1)^{14} + 101 = -1 + 101 = 100$

5.12 La división de $P(x) = x^3 + 2x^2 + k$ por $x - 3$ da resto 0. ¿Cuánto vale k?

Usando el teorema del resto, sabemos que $P(3) = R$. Así, $P(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 + k = 45 + k = 0$. De modo que $k = -45$.

5.13 Comprueba si $x + 1$ es un factor de estos polinomios.

a) $A(x) = 3x^4 - 2x^2 + x$

b) $B(x) = -2x^2 + 3x$

c) $C(x) = x^7 + 1$

d) $D(x) = 2x^3 - 3x + 1$

Aplicamos el teorema del factor, así que será factor si el valor numérico del polinomio en -1 es 0.

a) $A(-1) = 3 \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 + (-1) = 3 - 2 - 1 = 0$. Sí es factor de $A(x)$.

b) $B(-1) = -2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) = -2 - 3 = -5$. No es factor de $B(x)$.

c) $C(-1) = (-1)^7 + 1 = -1 + 1 = 0$. Sí es factor de $C(x)$.

d) $D(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 = -2 + 3 + 1 = 2$. No es factor de $D(x)$.

5.14 Encuentra entre los siguientes factores los del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.

a) $x - 1$

b) $x - 3$

c) $x + 1$

d) $x + 2$

a) $P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 0$

b) $P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -10$

c) $P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 8 = 10$

d) $P(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 8 = 0$

Usando el teorema del factor, afirmamos que los factores de $P(x)$ son $x - 1$ y $x + 2$.

5.15 Comprueba si 5 y −5 son raíces del siguiente polinomio $P(x) = x^3 - 5x^2 - 5x + 5$.

$P(5) = 5^3 - 5 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 + 5 = -20$; $P(-5) = (-5)^3 - 5 \cdot (-5)^2 - 5 \cdot (-5) + 5 = -220$

Ni 5 ni −5 son raíces de $P(x)$.

5.16 Entre estos valores, indica el posible número de raíces del polinomio $P(x) = x^3 + 3x^5 - 8x + 15$.

a) 5

b) 3

c) 6

d) 1

Al ser un polinomio de grado 5, no puede tener 6 raíces, las otras opciones pueden ser válidas.

5.17 Completa la tabla indicando el grado de cada polinomio y si cada uno de los números indicados es raíz del polinomio.

	Grado	−1	−2	−5
$x + 1$	1	Sí	No	No
$x^2 + x - 2$	2	No	Sí	No
$x^3 - 5x^2 - 5x + 5$	3	No	No	No

5.18 Halla las raíces enteras de estos polinomios.

a) $x^2 - 7x + 10$

b) $x^2 - 8x + 15$

a) Las posibles raíces son: 1, −1, 2, −2, 5, −5, 10, −10.

$P(1) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 4$

$P(-1) = (-1)^2 - 7 \cdot (-1) + 10 = 18$

$P(2) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 0$

$P(-2) = (-2)^2 - 7 \cdot (-2) + 10 = 28$

$P(5) = 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0$

Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que no puede haber más de dos raíces en un polinomio de grado 2, así las raíces del polinomio son 2 y 5.

b) Las posibles raíces son: 1, −1, 3, −3, 5, −5, 15, −15.

$P(1) = 1^2 - 8 \cdot 1 + 15 = 8$

$P(-1) = (-1)^2 - 8 \cdot (-1) + 15 = 24$

$P(3) = 3^2 - 8 \cdot 3 + 15 = 0$

$P(-3) = (-3)^2 - 8 \cdot (-3) + 15 = 48$

$P(5) = 5^2 - 8 \cdot 5 + 15 = 0$

Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que no puede haber más de dos raíces en un polinomio de grado 2, así las raíces del polinomio son 3 y 5.

5.19 **Determina las raíces enteras de los siguientes polinomios.**

a) $x^3 + x^2 - 9x - 9$

b) $x^3 - x^2 - 25x + 25$

a) Las posibles raíces son 1, −1, 3, −3, 9, −9.

$P(1) = 1^3 + 1^2 - 9 \cdot 1 - 9 = -16$

$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 9 \cdot (-1) - 9 = 0$

$P(3) = 3^3 + 3^2 - 9 \cdot 3 - 9 = 0$

$P(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 9 = 0$

Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que no puede haber más de tres raíces en un polinomio de grado 3, así las raíces del polinomio son −1, 3 y −3.

b) Las posibles raíces son 1, −1, 5, −5, 25, −25.

$P(1) = 1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$

$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$

$P(5) = 5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$

$P(-5) = (-5)^3 - (-5)^2 - 25 \cdot (-5) + 25 = 0$

Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que no puede haber más de tres raíces en un polinomio de grado 3, así las raíces del polinomio son −1, 5 y −5.

5.20 **Averigua las raíces de estos polinomios.**

a) $x^3 - x^2 + 4x - 4$

b) $x^2 + x + 1$

a) Las posibles raíces del polinomio son 1, −1, 2, −2, 4, −4.

$P(1) = 1^3 - 1^2 + 4 \cdot 1 - 4 = 0$

$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 4 = -10$

$P(2) = 2^3 - 2^2 + 4 \cdot 2 - 4 = 8$

$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 4 = -24$

$P(4) = 4^3 - 4^2 + 4 \cdot 4 - 4 = 60$

$P(-4) = (-4)^3 - (-4)^2 + 4 \cdot (-4) - 4 = -100$

Este polinomio sólo tiene una raíz real, que es 1.

b) Las posibles raíces del polinomio son 1, −1.

$P(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

$P(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$

Este polinomio no tiene raíces enteras.

5.21 **Se sabe que los siguientes polinomios tienen alguna raíz entera. Indica una de ellas.**

a) $x^2 - 12x + 35$

b) $x^3 - 8$

a) Por ejemplo, 5; $5^2 - 12 \cdot 5 + 35 = 0$

b) Por ejemplo, 2; $2^3 - 8 = 0$

5.22 Descompón en factores estos polinomios.

a) $x^2 - 6x + 8$

b) $x^2 - 14x + 33$

c) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

a)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -6 & 8 \\ 4 & & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$

b)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -14 & 33 \\ 11 & & 11 & -33 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 14x + 33 = (x - 11)(x - 3)$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & & 1 & -3 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & \end{array}$$

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -4 & 16 \\ 4 & & 4 & 0 & -16 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = (x - 4)(x - 2)(x + 2)$

5.23 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^4 - x^2$

b) $x^3 - 1$

c) $x^3 - x^2 + 9x - 9$

d) $x^4 - 6x^3 - 7x^2$

a) $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1)$

b) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

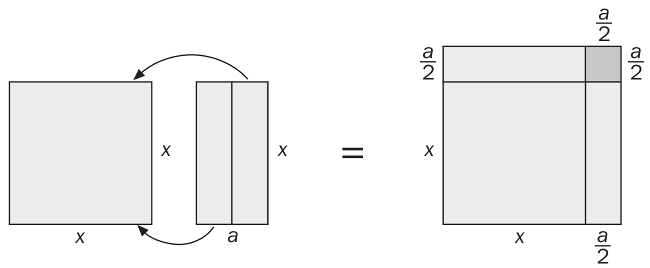
c) $x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x^2 + 9)$

d) $x^4 - 6x^3 - 7x^2 = x^2(x^2 - 6x - 7) = x^2(x + 1)(x - 7)$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

5.24 Expresa el polinomio $x^2 + ax$ como una diferencia de cuadrados.

Puede tratarse de dos figuras geométricas de área x^2 y ax.

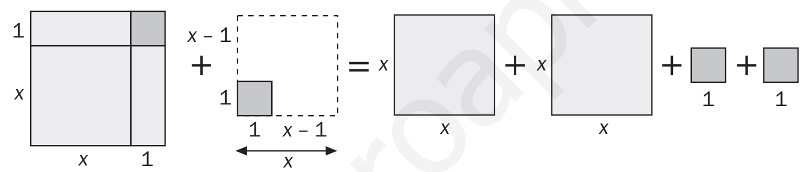


$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

5.25 Demuestra geométricamente que es cierta la siguiente igualdad.

$$(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 2(x^2 + 1^2)$$

Tenemos un cuadrado de lado $x + 1$ y otro de lado $x - 1$.



Al final nos quedan dos cuadrados de lado x y dos de lado 1: $2x^2 + 2 = 2(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1^2)$.

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

División y regla de Ruffini

5.26 **Realiza estas divisiones.**

a) $(12x^2yz - 6xy^3 + 8xyz^2) : (2xy)$

b) $(15x^4 - 3x^3 + 9x^2) : (3x^2)$

c) $(5a^3b^2 - 10ab^2 + 15a^3b^4) : (5ab^2)$

a) $(12x^2yz - 6xy^3 + 8xyz^2) : (2xy) = \dfrac{12x^2yz - 6xy^3 + 8xyz^2}{2xy} = \dfrac{12}{2}\dfrac{x^2}{x}\dfrac{y}{y}z - \dfrac{6}{2}\dfrac{x}{x}\dfrac{y^3}{y} + \dfrac{8}{2}\dfrac{x}{x}\dfrac{y}{y}z^2 = 6xz - 3y^2 + 4z^2$

b) $(15x^4 - 3x^3 + 9x^2) : (3x^2) = 5x^2 - x + 3$

c) $(5a^3b^2 - 10ab^2 + 15a^3b^4) : (5ab^2) = a^2 - 2 + 3a^2b^2$

5.27 **Efectúa cada división indicando el polinomio cociente y el polinomio resto.**

a) $x^5 - 3x^4 + x^3 + 2x^2 + x) : (x^2 + x + 1)$

b) $2x^4 + 2x^2 + 3) : (x^2 + x - 1)$

c) $(x^6 - x^3 + x - 1) : (x^3 - x + 2)$

a) $C(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 2$ $\quad R(x) = -5x - 2$

b) $C(x) = 2x^2 - 2x + 6$ $\quad R(x) = -8x + 9$

c) $C(x) = x^3 + x - 3$ $\quad R(x) = x^2 - 4x + 5$

5.28 **De una división entera, conocemos que el dividendo es $D(x) = x^4 - x^3 + 3x + 3$, el cociente es $C(x) = x^2 - x^3 + 5$, y el resto es $R(x) = -4x - 2$ ¿Cuál es el divisor?**

$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x) \Rightarrow \dfrac{D(x) - R(x)}{C(x)} = d(x)$

En nuestro caso: $\dfrac{(x^4 - x^3 + 3x + 3) - (-4x - 2)}{x^2 - 3x + 5} = \dfrac{x^4 - x^3 + 7x + 5}{x^2 - 3x + 5}$

Haciendo los cálculos tenemos que $d(x) = x^2 + 2x + 1$.

5.29 **Sabiendo que el polinomio $P(x) = x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 14x + k$ es divisible por el polinomio $x^2 + 2x + 4$, calcula cuál ha de ser el valor de k.**

Si hacemos la división de polinomios $P(x) : (x^2 + 2x + 4)$, tenemos que el resto es $R(x) = k - 12$. Para que sea divisible, el resto tiene que ser 0, así tenemos que $k - 12 = 0$, de donde $k = 12$.

5.30 **El polinomio $P(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x + 2$ es múltiplo del polinomio $Q(x) = x^3 - 2x + a$. Averigua los posibles valores de a.**

Como son múltiplos, tenemos que $R(x) = 0$. Así que $P(x) = C(x) \cdot Q(x)$.

$C(x)$ será de la forma $bx^2 + cx + d$; $x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x + 2 = (bx^2 + cx + d)(x^3 - 2x + a)$

De donde tomamos los términos del producto que tienen a: $(ab - 2c)x^2$, $(ac - 2d)x$, ad, y los igualamos a los coeficientes que corresponden: $ab - 2c = 4$

$ac - 2d = -4$

$ad = 2$

Como a y d son enteros, por la última ecuación tenemos que a es 1, -1, 2 ó -2. Sabemos que $b = 1$, porque es el coeficiente en el producto de x^5. Así que haciendo pruebas para los diferentes valores de a tendremos que $a = 2$.

5.31 Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini, e indica el cociente y el resto de cada división.

a) $(x^3 + 2x^2 + x + 3) : (x - 1)$ b) $(x^5 - 3x^2 + x - 1) : (x + 2)$ c) $(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x - 3)$

a)

	1	2	1	3
1		1	3	4
	1	3	4	7

$C(x) = x^2 + 3x + 4$ $R(x) = 7$

b)

	1	0	0	−3	1	−1
−2		−2	4	−8	22	−46
	1	−2	4	−11	23	−47

$C(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 11x + 23$ $R(x) = -47$

c)

	1	−3	1	−3
3		3	0	3
	1	0	1	0

$C(x) = x^2 + 1$ $R(x) = 0$

5.32 Mediante la regla de Ruffini, calcula el valor que debe tomar *m* para que se cumpla esta relación.

$3x^3 + 2x + m = (3x^2 - 3x + 5) \cdot (x + 1) + 1$

	3	0	2	m
−1		−3	3	−5
	3	−3	5	$m - 5$

Como el resto es 1, $m - 5 = 1 \Rightarrow m = 6$.

5.33 Completa las siguientes divisiones de polinomios en las que se ha aplicado la regla de Ruffini.

a)

	1	**−2**	□	□
□		□	□	□
	□	**−1**	**−1**	**−4**

b)

	□	□	□	□	□
−2		**−2**	□	□	□
	□	**−4**	**−2**	**8**	**0**

a)

	1	**−2**	0	−3
1		**1**	−1	−1
	1	**−1**	**−1**	**−4**

b)

	1	−2	−10	4	16
−2		**−2**	8	4	−16
	1	**−4**	**−2**	**8**	**0**

Teoremas y raíces de un polinomio

5.34 Halla el resto de estas divisiones sin llegar a realizarlas.

a) $(x^3 - x + 2) : (x + 2)$ b) $(x^{101} + 1) : (x + 1)$ c) $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x - 1)$

Usamos para ello el teorema del resto:

a) $P(-2) = (-2)^3 - (-2) + 2 = -8 + 2 + 2 = -4$

b) $P(-1) = (-1)^{101} + 1 = -1 + 1 = 0$

c) $P(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 5$

5.35 Comprueba si las siguientes afirmaciones son correctas.

a) $P(x) = x^2 + x - 2$ tiene por factor a $x + 2$.

b) $Q(x) = x^6 + x^3 - 2$ tiene por factor a $x - 1$.

c) $R(x) = x^3 - 1$ tiene por factor a $x + 1$.

Vamos a usar el teorema del factor:

a) $P(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$. Sí es factor.

b) $Q(1) = 1^6 + 1^3 - 2 = 0$. Sí es factor.

c) $R(-1) = (-1)^3 - 1 = -2$. No es factor.

5.36 **Halla los restantes factores de estos polinomios.**

a) $P(x) = x^2 + x - 6$, que tiene por factor a $x - 2$.

b) $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$, que tiene por factor a $x + 1$.

c) $R(x) = x^3 - 7x - 6$, que tiene por factor a $x - 3$.

a)
$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x - 2)(x + 3)$

b) Si hacemos la división, vemos que nos queda de cociente $x^2 + x + 3$, que podemos comprobar que no tiene raíces enteras. Así, $Q(x) = (x + 1)(x^2 + x + 3)$.

c) Aplicando sucesivamente la regla de Ruffini tenemos que $R(x) = (x - 3)(x + 1)(x + 2)$.

5.37 **Aplicando el teorema del resto, halla en cada caso el valor que debe tomar k.**

a) $P(x) = x^4 + x^3 + kx^2 + 10x + 3$ es divisible por $x + 3$.

b) $Q(x) = 2x^3 + 7x^2 + kx + 6$ tiene por resto 20 al dividirlo por $x - 1$.

c) $R(x) = 2x^2 + kx - 15$ es divisible por $x + 5$.

a) $P(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 + k(-3)^2 + 10(-3) + 3 = 27 + 9k = 0 \Rightarrow k = -3$

b) $Q(1) = 2 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 + k \cdot 1 + 6 = k + 15 = 20 \Rightarrow k = 5$

c) $R(-5) = 2(-5)^2 + k(-5) - 15 = 35 - 5k = 0 \Rightarrow k = 7$

5.38 **Escribe las raíces enteras de estos polinomios.**

a) $P(x) = x^2 - 2x - 15$

b) $Q(x) = x^3 - 6x^2 - 6x - 7$

c) $R(x) = x^4 + x^2 + 6$

a) Las posibles raíces son 1, -1, 3, -3, 5, -5, 15, -15.

$P(-3) = (-3)^2 - 2(-3) - 15 = 0$
$P(5) = 5^2 - 2 \cdot 5 - 15 = 0$

Como es de grado 2, como máximo tiene 2 raíces. De modo que las raíces de $P(x)$ son -3 y 5.

b) Las posibles raíces son 1, -1, 7, -7.

$Q(7) = 7^3 - 6 \cdot 7^2 - 6 \cdot 7 - 7 = 0$

Si comprobamos con las otras posibles raíces, vemos que para ninguna más $Q(x)$ es 0. De modo que $Q(x)$ sólo tiene una raíz entera que es 7.

c) Las posibles raíces son 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6. Si comprobamos todos los valores, vemos que nunca se anula $R(x)$. No haría falta comprobarlo si nos fijamos en que los exponentes de x son siempre pares, con lo cual su resultado nunca va a ser negativo; $x^4 + x^2 \geqslant 0$, y sumando 6 resulta que $R(x)$ siempre es mayor que 0. De modo que $R(x)$ no tiene ninguna raíz real.

5.39 **Encuentra un polinomio $P(x)$ de grado tres, cuyas raíces enteras sean -2, 1 y 4, y que, además, verifique que $P(-1) = 20$.**

$P'(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 4)$ tiene grado 3.

$P'(-1) = 10$; $2 \cdot P'(-1) = 20$

$P(x) = 2P'(x)$ sigue teniendo grado 3 y verifica que $P(-1) = 20$.

Así que el polinomio que buscamos es $P(x) = 2(x + 2)(x - 1)(x - 4)$.

5.40 **Calcula a sabiendo que el resto obtenido al dividir $x^2 + ax - 2$ por $x - 1$ es 6 unidades inferior al obtenido al dividir $x^2 - ax - 2$ por $x + 5$.**

Usamos el teorema del resto: $P(1) = 1^2 + a \cdot 1 - 2 = a - 1$

$$Q(-5) = (-5)^2 - a(-5) - 2 = 5a + 23$$

Con la condición del enunciado tenemos que $a - 1 = 5a + 23 - 6 \Rightarrow a = -\frac{9}{2}$.

Factorización de polinomios

5.41 **Factoriza estas expresiones sacando factor común.**

a) $2x^2yz - 2xy^2z + 2x^2y^2$

b) $8x^4 - 4x^3 + 6x^2$

c) $2x^3 \cdot (x - 2) + 4x^4 \cdot (x - 2)^2$

a) $2x^2yz - 2xy^2z + 2x^2y^2 = 2xy(xz - yz + xy)$

b) $8x^4 - 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(4x^2 - 2x + 3)$

c) $2x^3(x - 2) + 4x^4(x - 2)^2 = 2x^3(x - 2)[1 + 2x(x - 2)]$

5.42 **Factoriza al máximo los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

b) $Q(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$

c) $R(x) = x^3 - 19x + 30$

d) $S(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x$

a)

	1	0	−5	0	4
1		1	1	−4	−4
	1	1	−4	−4	−0
2		2	6	4	
	1	3	2	0	
−1		−1	−2		
	1	2	0		

$x^4 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x - 2)(x + 1)(x + 2)$

b)

	1	4	−7	−10
−1		−1	−3	10
	1	3	−10	0
2		2	10	
	1	5	0	

$x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x + 1)(x - 2)(x + 5)$

c)

	1	0	−19	30
2		2	4	−30
	1	2	−15	0
−5		−5	15	
	1	−3	0	

$x^3 - 19x + 30 = (x - 2)(x + 5)(x - 3)$

d)

	1	−1	−9	9	0
1		1	0	−9	0
	1	0	−9	0	0
3		3	9	0	
	1	3	0	0	

$x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x = (x - 1)(x - 3)(x^2 + 3x) = x(x - 1)(x - 3)(x + 3)$

5.43 **Indica cuáles son las raíces de estos polinomios, sin desarrollar dichas expresiones.**

a) $P(x) = 3\,(x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 2)$

b) $Q(x) = 2x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$

c) $R(x) = 4x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$

¿Qué grado tiene cada uno de estos polinomios?

Puesto que los polinomios están factorizados, las raíces serán cada uno de los valores que anulan los factores.

a) Raíces: 2, −3, −2. Grado 3.

b) Raíces: 0, 2, −3. Grado 3.

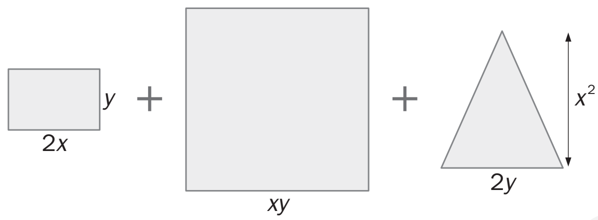
c) Raíces: 0, 1, 2. Grado 4.

5.44 Halla un polinomio de grado tres, cuyos factores sean $x + 1$, $x - 1$ y $x + 4$, y cuyo término independiente sea -8.

$P'(x) = (x + 1)(x - 1)(x + 4)$, tiene grado 3 y el término independiente es el que resulta de multiplicar los tres términos independientes de cada uno de los factores: $1 \cdot (-1) \cdot 4 = -4$.

$P(x) = 2P'(x)$ tiene grado 3 y término independiente -8.

5.45 Descompón en factores la siguiente expresión, hallando previamente el área de las figuras geométricas.



$$2xy + (xy)^2 + \frac{2x^2y}{2} = 2xy + x^2y^2 + x^2y = xy(2 + xy + x)$$

5.46 Factoriza al máximo estos polinomios.

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9$

b) $Q(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6$

c) $R(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

d) $S(x) = x^4 - x^3 - 13x - 15$

Usamos el teorema de Ruffini y llegamos a las siguientes factorizaciones:

a) $P(x) = (x - 3)(x^2 + x + 3)$

b) $Q(x) = (x - 3)(x + 1)(2x - 2)$

c) $R(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$

d) $S(x) = (x + 1)(x - 3)(x^2 + x + 5)$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

5.47 **De cierto polinomio de grado tres, conocemos sus tres raíces enteras. ¿Existe un único polinomio de grado tres que tenga como raíces a esas tres? Justifica tu respuesta con algún ejemplo.**

No, si multiplicamos por un entero el polinomio, tiene las mismas raíces.

Por ejemplo: $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ tiene las mismas raíces que $2(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

5.48 **Explica si son ciertas o falsas estas afirmaciones.**

a) Un polinomio con coeficientes enteros tiene, al menos, una raíz entera.

b) Todo divisor del término independiente de un polinomio es una raíz de dicho polinomio.

c) Un polinomio de grado n tiene $n + 1$ raíces.

Justifica tus respuestas con ejemplos.

a) Falso, el polinomio $x^2 + 1$ tiene todos sus coeficientes enteros y ninguna raíz entera.

b) Falso, el 1 es divisor del término independiente de $x^2 + 1$, pero no es raíz del polinomio.

c) Falso, el polinomio $x^2 - 1$ tiene 2 raíces, 1 y -1, que es el grado del polinomio, y no puede tener más porque estaría en contradicción con el teorema fundamental del álgebra.

5.49 **¿Qué verifica siempre el resto que resulta de dividir un polinomio por un binomio del tipo $x - a$? Justifica tu respuesta y pon algún ejemplo para explicarlo.**

El resto va a ser un número entero, ya que su grado tiene que ser menor que el del divisor, y además, por el teorema del resto va a ser el valor del polinomio dividendo en a.

$x^2 + 1$, si lo dividimos por $x - 1$, podemos comprobar usando Ruffini que tiene resto 2, que es un número entero, y además $1^2 + 1 = 2$.

5.50 **Encuentra un polinomio $P(x)$ de grado dos que verifique las tres condiciones siguientes.**

- **$x - 5$ sea factor suyo.**
- **$P(3) = 0$.**
- **Su coeficiente principal sea 4.**

La segunda condición nos indica que $x - 3$ es factor del polinomio también. Como un polinomio de grado 2 solo puede tener 2 raíces a lo sumo, pues $(x - 5)(x - 3)$ tiene grado 2 y cumple las dos primeras condiciones. El coeficiente principal de este producto es 1, así que si multiplicamos por 4 tendremos el polinomio que buscábamos. $P(x) = 4(x - 5)(x - 3)$.

5.51 **¿Qué le ha de ocurrir a un polinomio de grado tres para que tenga una sola raíz entera? Explícalo con un ejemplo.**

Que uno de sus factores sea un polinomio de grado 2 que no tenga raíces enteras. Por ejemplo, el polinomio de grado 3 podría ser el resultante de $x(x^2 + 1)$.

5.52 **¿Cuál es la relación existente entre los grados del dividendo, divisor, cociente y resto de una división entera de polinomios?**

Grado $(R(x)) <$ Grado $(d(x))$

Grado $(D(x)) =$ Grado $(d(x)) +$ Grado $(C(x))$

5.53 **¿Existe algún número n para el cual el polinomio $x^n + 1$ se anule para algún valor real de x?**

Si n es impar, se anula para $x = -1$.

5.54 **¿Qué condición debe verificar n para que el polinomio $x^n - a^n$ sea divisible por el binomio $x + a$?**

Tiene que ser n par, para que así $(-a)^n = a^n$ y $x^n - a^n = 0$.

PROBLEMAS PARA APLICAR

5.55 Un alumno de 3.º de ESO está empeñado en transformar los polinomios $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ y $x^2 - 6x + 9$ en potencias del polinomio $x - 3$. Ayúdale en su tarea.

Aplicamos la regla de Ruffini al polinomio de grado 3:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & 27 & -27 \\ 3 & & 3 & -18 & 27 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array}$$

Tenemos entonces que $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)(x^2 - 6x + 9)$.

Este segundo factor resulta ser el polinomio de grado 2 del enunciado, que es un cuadrado perfecto, el cuadrado de una diferencia, $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Y entonces $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3$.

5.56 Al salir de un examen de polinomios quiero contrastar con mis compañeros los resultados que hemos obtenido, pero se han emborronado dos coeficientes y no puedo distinguirlos.

$$\mathbf{2x^3 - 5x^2 + \square\, x + \square}$$

Tan solo recuerdo que el polinomio era divisible por $x^2 - 4$.

¿Cuál es el polinomio que había escrito en el examen?

$$\begin{array}{llll|l} 2x^3 & -5x^2 & +\ ax & +\ b & x^2 - 4 \\ \cline{5-5} -2x^3 & & +\ 8x & & 2x - 5 \\ \cline{1-3} & -5x^2 & +\ (8 + a)x & & \\ & 5x^2 & & -\ 20 & \\ \cline{2-4} & & (8 + a)x & +\ (b - 20) & \end{array}$$

Por ser divisible $(8 + a)x + (b - 20) = 0$.

Esto quiere decir que: $\begin{cases} 8 + a = 0 \\ b - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 20 \end{cases}$

El polinomio es $2x^3 - 5x^2 - 8x + 20$.

5.57 Un alumno ha confundido los números en una división de Ruffini y le ha quedado el siguiente resultado.

$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-1} & & \mathbf{-7} & \mathbf{10} & \mathbf{2} \\ \hline & \mathbf{-10} & \mathbf{-2} & \mathbf{7} & \mathbf{14} \end{array}$$

Ayuda al alumno a reconstruir la división, sabiendo que el divisor y el resto están bien, pero que los demás números están desordenados.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & 5 & -3 & 4 \\ -1 & & 2 & -7 & 10 \\ \hline & -2 & 7 & -10 & 14 \end{array}$$

5.58 Una división enlazada de Ruffini, es decir, una división en la que cada cociente obtenido lo utilizamos como nuevo dividendo, nos ha quedado de la siguiente forma.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & \square & \square & \square & \square & \square \\ 1 & & \square & \square & \square & \square \\ \hline & \square & \square & \square & \square & 0 \\ 1 & & \square & \square & \square & \\ \hline & \square & \square & \square & 0 & \\ 1 & & \square & \square & & \\ \hline & \square & \square & 0 & & \\ 1 & & \square & & & \\ \hline & 1 & 0 & & & \end{array}$$

Averigua todos los coeficientes que faltan si todos los 1 pertenecen a los polinomios divisores y todos los ceros a los restos.

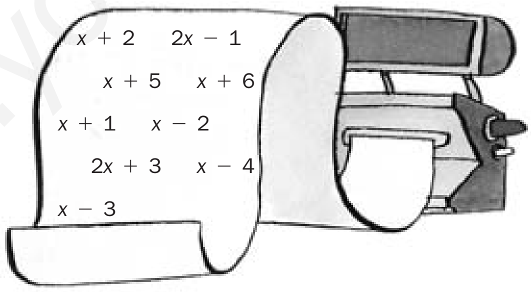
Vamos haciendo los cálculos desde la parte de abajo.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & & 1 & -3 & 3 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & & 1 & -2 & 1 & \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 & \\ 1 & & 1 & -1 & & \\ \hline & 1 & -1 & 0 & & \\ 1 & & 1 & & & \\ \hline & 1 & 0 & & & \end{array}$$

5.59 El departamento de Matemáticas de mi centro ha instalado un factorizador de polinomios.

Se trata de una máquina que proporciona un polinomio al azar y, continuación, imprime una tarjeta con los posibles factores del polinomio. Si la persona que juega encuentra los factores del polinomio en la tarjeta obtiene un premio.

Jugamos una vez y aparece en la pantalla el polinomio $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$, y nos imprime una tarjeta como esta.



¿Qué combinación me proporciona el premio?

Vamos probando con cada uno de los posibles factores y tenemos que:

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 12 = -16 + 12 + 16 - 12 = 0$

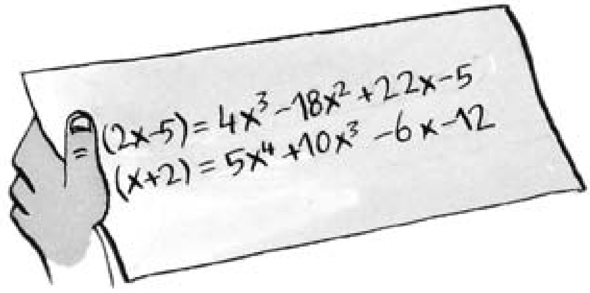
$P(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 12 = 16 + 12 - 16 - 12 = 0$

$$\begin{array}{llll|l} 2x^3 & + 3x^2 & - 8x & - 12 & 2x + 3 \\ \cline{5-5} -2x^3 & - 3x^2 & & & x^2 - 4 \\ \cline{1-2} 0 & 0 & & & \\ & & + 8x & + 12 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Por el teorema del factor podemos decir entonces que $(x + 2)$ y $(x - 2)$ son factores. También $2x + 3$ lo es porque al dividir el polinomio por este binomio nos da resto 0.

La combinación correcta es $x - 2$, $x + 2$, $2x + 3$.

5.60 **Mi hermano mayor estudia Matemáticas, y practica polinomios conmigo tapándome polinomios y jugando a que adivine lo que oculta.**



Encuentra los polinomios que ha tapado.

$P(x)(2x - 5) = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 5$.

El grado de $P(x)$ tiene que ser 2, para que ambos lados de la igualdad tengan el mismo grado. $P(x)$ será de la forma $ax^2 + bx + c$.

$(ax^2 + bx + c)(2x - 5) = 2ax^3 - 5ax^2 + 2bx^2 - 5bx + 2cx - 5c = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 5$, igualando coeficientes y resolviendo el sistema obtenemos las incógnitas, y así, $P(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

$Q(x)(x + 2) = 5x^4 + 10x^3 - 6x - 12$.

El grado de $Q(x)$ tiene que ser 3, para que ambos lados de la igualdad tengan el mismo grado. $Q(x)$ será de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$(ax^3 + bx^2 + cx + d)(x + 2) = ax^4 + (2a + b)x^3 + (2b + c)x^2 + (2c + d) + 2d = 5x^4 + 10x^3 - 6x - 12$, igualando coeficientes y resolviendo el sistema obtenemos las incógnitas.

Tenemos entonces que $Q(x) = 5x^3 - 6$.

La parte del ejercicio referente a $Q(x)$ también podríamos resolverla dividiendo por Ruffini.

5.61 **Explica cómo variando simplemente el valor de k el polinomio $2x^3 - 4x + 3k$ cumple las siguientes condiciones.**

a) Tiene como factor $x + 3$.

b) Al dividirlo por $x - 2$, tiene como resto 5.

c) Es divisible por $x + 1$.

d) Tiene como raíz 4.

e) Es igual al polinomio $Q(x) = 2(x^3 - 2x + 7)$.

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -4 & 3k \\ -3 & & -6 & 18 & -42 \\ \hline & 2 & -6 & 14 & 3k - 42 \end{array}$$

Aplicando el teorema del factor, $3k - 42 = 0 \Rightarrow k = 14$.

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -4 & 3k \\ -2 & & 4 & 8 & 8 \\ \hline & 2 & 4 & 4 & 3k + 8 \end{array}$$

Aplicando el teorema del resto, $3k + 8 = 5 \Rightarrow k = -1$.

c) Dividiendo por Ruffini y aplicando el teorema del factor tenemos que $k = -\frac{2}{3}$.

d) Dividiendo por Ruffini y aplicando el teorema del factor tenemos que $k = -\frac{112}{3}$.

e) En este caso, $3k = 14 \Rightarrow k = \frac{14}{3}$

R E F U E R Z O

División y regla de Ruffini

5.62 Realiza las siguientes divisiones de un polinomio por un monomio.

a) $(9xy + 3xy^2 - 3x^2y) : (3xy)$ **b) $(5x^2 - 3x^4 + 2x) : x^2$**

a) $(9xy + 3xy^2 - 3x^2y) : (3xy) = \dfrac{9xy + 3xy^2 - 3x^2y}{3xy} = \dfrac{9}{3}\dfrac{x}{x}\dfrac{y}{y} + \dfrac{3}{3}\dfrac{x}{x}\dfrac{y^2}{y} - \dfrac{3}{3}\dfrac{x^2}{x}\dfrac{y}{y} = 3 + y - x$

b) $(5x^2 - 3x^4 + 2x) : x^2 = 5 - 3x^2 + 2\dfrac{1}{x}$

5.63 Efectúa estas divisiones de polinomios.

a) $(3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1) : (x^2 - x + 2)$ **b) $(2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 3) : (x^2 + 1)$**

a)
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +5x^3 & -3x^2 & +6x & -1 & x - x + 2 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & +3x^3 & -6x^2 & & & 3x^2 + 8x - 1 \\ \cline{1-3}
 & 8x^3 & -9x^2 & & & \\
 & -8x^3 & +8x^2 & -16x & & \\ \cline{2-4}
 & & -x^2 & -10x & & \\
 & & x^2 & -x & +2 & \\ \cline{3-5}
 & & & -11x & +1 &
\end{array}
$$

b) $(2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 3) : (x^2 + 1)$; $C(x) = 2x^2 - 4x + 1$ y $R(x) = -2x + 2$

5.64 Mediante la regla de Ruffini, realiza las siguientes divisiones, e indica el cociente y el resto.

a) $(x^4 + x^2 - 1) : (x - 2)$ **b) $(x^7 - 2x^4 + x - 1) : (x - 1)$**

a)
$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
2 & & 2 & 4 & 10 & 20 \\ \hline
 & 1 & 2 & 5 & 10 & 19
\end{array}
$$

$C(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10$; $R(x) = 19$

b)
$$
\begin{array}{r|rrrrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
1 & & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline
 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1
\end{array}
$$

$C(x) = x^6 + x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x$; $R(x) = -1$

5.65 Utilizando la regla de Ruffini, calcula el número que se ha de sumar al polinomio para que sea divisible por $x + 3$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & -9 & k \\
-3 & & -3 & 12 & -9 \\ \hline
 & 1 & -4 & 3 & k - 9
\end{array}
$$

Como tiene que ser divisible, $k - 9 = 0$, así que $k = 9$.

Teoremas y raíces de un polinomio

5.66 Comprueba si son exactas las siguientes divisiones sin llegar a realizarlas.

a) $(x^4 - 81) : (x - 3)$ **b) $(x^{1\,001} - 1) : (x + 1)$**

Aplicamos el teorema del resto, y si el resto es 0, es porque la división es exacta.

a) $P(3) = 3^4 - 81 = 0$. Sí es exacta la división.

b) $P(-1) = (-1)^{1\,001} - 1 = -1 - 1 \neq 0$. No es división exacta.

5.67 **Determina, sin realizar ninguna operación, si 3 es una raíz de este polinomio.**

$P(x) = 3x^7 + 5x^5 + 3x^4 + 2x^2 + x - 7$

No, 3 no es raíz de $P(x)$, ya que no es divisor del término independiente, -7.

5.68 **Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios.**

a) $A(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

b) $B(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

a) Las posibles raíces de $A(x)$ son 1, -1, 2, -2, 4, -4.

$A(1) = 1^4 - 5 \cdot 1^2 + 4 = 0$

$A(-1) = (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^2 + 4 = 0$

$A(2) = 2^4 - 5 \cdot 2^2 + 4 = 0$

$A(-2) = (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^2 + 4 = 0$

Por el teorema fundamental del álgebra, un polinomio de grado 4 no puede tener más de cuatro raíces. De modo que las raíces del polinomio son 1, -1, 2 y -2.

b) Las posibles raíces de $B(x)$ son 1, -1, 3, -3.

$B(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 0$

$B(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - (-1) + 3 = 0$

$B(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 3 + 3 = 0$

Por el teorema fundamental del álgebra, un polinomio de grado 3 no puede tener más de tres raíces. De modo que las raíces del polinomio son 1, -1 y 3.

5.69 **Sin efectuar el producto de factores, identifica el polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$ con alguna de las siguientes factorizaciones.**

a) $(x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

b) $(x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

c) $(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 5)$

Las respuestas a y b no pueden ser porque dan como raíz -2, que no es un divisor del término independiente de $P(x)$. Además, en c, cada uno de esos factores cumple que $P(a) = 0$.

Factorización de polinomios

5.70 **Factoriza cada uno de los siguientes polinomios sacando factor común.**

a) $5x^7 - 6x^6 + 3x^5$

b) $5xy + 3x^2 - 2xy^2$

a) $x^5(5x^2 - 6x + 3)$

b) $x(5y + 3x - 2y^2)$

5.71 **Factoriza al máximo estos polinomios.**

a) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

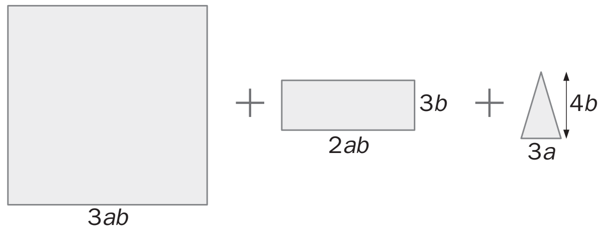
b) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$

Con las posibles raíces del polinomio por Ruffini obtengo la factorización.

a) La factorización es $(x - 2)(x + 1)(x + 4)$.

c) La factorización es $(x - 2)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.

5.72 Factoriza la siguiente expresión; determina previamente el área de las figuras geométricas.



Las tres áreas son $9a^2b^2$, $6ab^2$, $6ab$. Factorizamos la suma de las tres y nos queda: $3ab(3ab + 2b + 2)$

5.73 Halla un polinomio de grado cuatro cuyos factores sean $x^2 + x + 1$, $x + 1$ y $x - 3$; y cuyo término independiente sea -9.

El producto de $x^2 + x + 1$, $x + 1$ y $x - 3$, $(x^2 + x + 1)(x + 1)(x - 3)$, tiene grado 4, su término independiente sería -3. Así que el polinomio buscado es $P(x) = 3(x^2 + x + 1)(x + 1)(x - 3)$.

AMPLIACIÓN

5.74 Halla los valores que han de tomar m y n, para que el polinomio $P(x) = 2x^5 - x^4 + x^3 + mx^2 + nx - 2$ sea divisible por $x^2 - 1$.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 & -x^4 & +x^3 & +mx^2 & +nx & -2 & x^2 - 1 \\ \cline{7-7}
-2x^5 & & +2x^3 & & & & 2x^3 - x^2 + 3x + (m-1) \\ \cline{1-3}
& -x^4 & +3x^3 & & & & \\
& x^4 & & -x^2 & & & \\ \cline{2-4}
& & 3x^3 & +(m-1)x^2 & & & \\
& & -3x^3 & & +3x & & \\ \cline{3-5}
& & & (m-1)x^2 & +(3+n)x & & \\
& & & -(m-1)x^2 & & +(m-1) & \\ \cline{4-6}
& & & & (3+n)x & +(m-3) &
\end{array}$$

El resto tiene que ser 0, así que: $\begin{cases} 3 + n = 0 \\ m - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -3 \\ m = 3 \end{cases}$

5.75 La descomposición factorial de un polinomio $P(x)$ es $(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)^2$.

Escribe un polinomio de tercer grado que, siendo divisor de $P(x)$ sea, a la vez, divisible por $x + 1$ y por $x - 3$, siendo su coeficiente principal 3.

Buscamos $Q(x)$ tal que el resto de $P(x) : Q(x)$ sea 0. Y además, $Q(x)$ divisible por $x + 1$ y $x - 3$, es decir, que ambos sean factores de $Q(x)$. Le falta un factor más al polinomio para que sea de grado 3, y como tiene que dividir a $P(x)$, este tendrá que ser alguno de los factores de $P(x)$.

De modo que $Q(x) = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$ o $Q(x) = (x + 1) \cdot (x - 3)^2$.

5.76 Si tenemos el polinomio $P(x) = x^2 - 4x + c$, ¿para qué valores de c se tienen estas factorizaciones?

a) $(x - a) \cdot (x - b)$

b) $(x - a)^2$

c) Irreducible

a) $(x - a) \cdot (x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$. Tenemos que:

$\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = c \\ a, b, c \in Z \\ c > 0 \end{cases}$. De donde hay dos posibles soluciones $(a, b) = (3, 1)$ ó $(2, 2)$.

Por tanto, $c = 3$ ó 4

b) $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

$\begin{cases} 2a = 4 \\ a^2 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 4 \end{cases}$

c) Para esto tiene que cumplirse que la ecuación de segundo grado no tenga raíces reales. Para ello, $b^2 - 4ac < 0$. En nuestro caso, $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot c < 0 \Rightarrow 16 - 4c < 0 \Rightarrow 4 < c$.

5.77 **Tres amigos piensan una condición para un polinomio.**

Escribe el polinomio de grado tres que cumpla las tres condiciones.

Vamos a ver cuáles son las tres raíces del polinomio $x^2 - 10x + 24$.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -10 & 24 \\ 4 & & 4 & -24 \\ \hline & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 10x + 24 = (x - 4)(x - 6)$

La media de 6 y 4 es 5.

El polinomio buscado es $2(x - 4)(x - 6)(x - 5)$.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

5.78 **El puzle**

Se cuenta con las expresiones polinómicas:

$(x + 3)\ (\square x^2 + \square x - 3)$

$2x^3 + 11x^2 + 12x - \square$

Y las tarjetas:

5	9	2

Coloca las tarjetas en los huecos de las expresiones de forma que se obtenga una identidad algebraica.

El valor numérico de la primera expresión en $x = 0$ es -9. Por tanto, la tarjeta correspondiente a la segunda expresión es la que tiene marcada el número nueve.

Realizando la división $\dfrac{2x^3 + 11x^2 + 12x - 9}{x + 3}$ se obtiene el cociente exacto $2x^2 + 5x - 3$ por lo que las tarjetas marcadas con el dos y el cinco, en este orden, son las correspondientes a la primera expresión.

5.79 **Aproximaciones sucesivas**

Se considera el polinomio $P(x) = x^3 + x - 3$.

a) Calcula $P(0)$ y $P(2)$, y comprueba que tienen diferente signo.

b) El punto medio del intervalo [0, 2] es 1. Calcula $P(1)$ y comprueba si tiene signo positivo o negativo.

c) Elige entre los intervalos [0, 1] y [1, 2] aquel en el que el polinomio cambia de signo en sus extremos y calcula su punto medio y el valor del polinomio en él.

d) Realiza la operación anterior cinco veces y da un valor aproximado de una raíz del polinomio *P*.

$[a, b]$	Punto medio c	$P(a)$ $P(c)$ $P(b)$	Nuevo segmento
[0, 2]	1	$P(0) = -3$ $P(1) = -1$ $P(2) = 7$	[1, 2]
[1, 2]	1,5	$P(1) = -1$ $P(1{,}5) = 1{,}875$ $P(2) = 7$	[1; 1,5]
[1; 1,5]	1,25	$P(1) = -1$ $P(1{,}25) = 0{,}203$ $P(1{,}5) = 1{,}875$	[1; 1,25]
[1; 1,25]	1,125	$P(1) = -1$ $P(1{,}125) = -0{,}451$ $P(1{,}25) = 0{,}203$	[1,125; 1,25]
[1,125; 1,25]	1,1875	$P(1{,}125) = -0{,}451$ $P(1{,}1875) = -0{,}138$ $P(1{,}25) = 0{,}203$	[1,1875; 1,25]

El polinomio tendrá una raíz comprendida entre 1,1875 y 1,25.

AUTOEVALUACIÓN

5.A1 **Al dividir dos polinomios, hemos obtenido como cociente el polinomio $C(x) = 3x - 7$, y como resto $R(x) = 19x - 10$.**

Si el divisor es $d(x) = x^2 + 2x - 1$, ¿cuál es el dividendo $D(x)$?

$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)$

$D(x) = (x^2 + 2x - 1)(3x - 7) + (19x - 10) = 3x^3 - x^2 + 2x - 3$

5.A2 **Calcula esta división de polinomios.**

$(x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3) : (x^2 + x + 1)$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -x^3 & +2x^2 & +x & -3 & x^2 + x + 1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & & & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{1-3}
 & -2x^3 & +x^2 & & & \\
 & 2x^3 & +2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-4}
 & & 3x^2 & +3x & & \\
 & & -3x^2 & -3x & -3 & \\ \cline{3-5}
 & & & & -6 &
\end{array}$$

$C(x) = x^2 - 2x + 3 \qquad R(x) = -6$

5.A3 **Completa estos esquemas aplicando la regla de Ruffini.**

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 5 & 1 & \square \\
-1 & & -2 & \square & 2 \\ \hline
 & \square & \square & -2 & 1
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & -15 \\
\square & & -2 & 4 & \square & 16 \\ \hline
 & 1 & \square & 4 & -8 & 1
\end{array}$$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 5 & 1 & \mathbf{-1} \\
-1 & & -2 & \mathbf{-3} & 2 \\ \hline
 & \mathbf{2} & \mathbf{3} & -2 & 1
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & -15 \\
\mathbf{-2} & & -2 & 4 & \mathbf{-8} & 16 \\ \hline
 & 1 & \mathbf{-2} & 4 & -8 & 1
\end{array}$$

5.A4 **Utilizando la regla de Ruffini, realiza cada división, e indica el polinomio cociente y el resto.**

a) $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x + 2)$ **b) $(x^4 - 5x^2 + 4) : (x - 2)$**

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 0 & 4 \\
-2 & & -2 & 10 & -20 \\ \hline
 & 1 & -5 & 10 & -16
\end{array}$$

$C(x) = x^2 - 5x + 10 \qquad R(x) = -16$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\
2 & & 2 & 4 & -2 & -4 \\ \hline
 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0
\end{array}$$

$C(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \qquad R(x) = 0$

5.A5 **Averigua qué valor tiene que tomar m, para que el resto obtenido al dividir $2x^3 + mx^2 + x - 6$ entre $x + 1$ sea -12.**

Usamos el teorema del resto para saberlo:
$C(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + m \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 = -9 + m = -12$. Entonces, $m = -3$.

5.A6 **Sin efectuar el producto, halla las raíces de estos polinomios.**

a) $(x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$ **b) $x \cdot (x - 7) \cdot (x + 3)$**

a) Las raíces son 1, -2, 3.

b) Las raíces son 0, 7, -3.

5.A7 **Utilizando el valor numérico, calcula las raíces de estos polinomios.**

a) $x^2 - 3x - 28$ **b)** $x^3 + x^2 - 36x - 36$

a) Las posibles raíces son 1, -1, 2, -2, 4, -4, 7, -7, 14, -14, 28, -28.
Como $P(-4) = 0$ y $P(7) = 0$
Y el polinomio es de grado 2, no puede tener más de dos raíces, y son -4 y 7.

b) Las posibles raíces son 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 9, -9, 12, -12, 18, -18.
Como $P(-1) = 0$, $P(6)$ 6 $= 0$ y $P(-6) = 0$
Y el polinomio es de grado 3, no puede tener más de tres raíces, y son -1, 6 y -6.

5.A8 **Completa las siguientes divisiones entre monomios.**

a) $15x^2yz^3 : \square = 3xz^2$ **b)** $\square : 8a^2b^2c^2 = bc^3$

a) $5xyz$ b) $8a^2b^3c^5$

5.A9 **Factoriza al máximo estos polinomios.**

a) $6x^3 + 12x^2 - 90x - 216$ **b)** $2x^4 + 3x^3 + x - 6$

a) $6x^3 + 12x^2 - 90x - 216 = 6(x + 3)^2(x - 4)$ b) $2x^4 + 3x^3 + x - 6 = (x - 1)(x + 2)(2x^2 + x + 3)$

5.A10 **Factoriza al máximo las siguientes expresiones.**

a) $3a^2bc + 6abc^3 - 12a^3b^2c$ **b)** $9x^4 - 12x^2y^3 + 4y^6$

a) $3abc \cdot (a + 2c^2 - 4a^2b)$ b) $(3x^2 - 2y^3)^2$

5.A11 **Factoriza al máximo estas expresiones.**

a) $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ **b)** $x^3 - 5x^2 - 8x - 12$

a) $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = (x - 1)(x - 4)(x + 3)$ b) $x^3 - 5x^2 - 8x - 12 = (x - 6)(x - 1)(x + 2)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

6.1 Halla el valor numérico de la fracción $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 6x + 8}$ para los valores 2, 0 y 4.

Para 2: $\dfrac{2^2 - 7 \cdot 2 + 10}{2^2 - 6 \cdot 2 + 8} = \dfrac{0}{0}$. Valor indeterminado.

Para 0: $\dfrac{0^2 - 7 \cdot 0 + 10}{0^2 - 6 \cdot 0 + 8} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$.

Para 4: $\dfrac{4^2 - 7 \cdot 4 + 10}{4^2 - 6 \cdot 4 + 8} = \dfrac{-2}{0}$. No existe valor numérico.

6.2 Indica si estas fracciones tienen valor numérico para los valores que anulan el denominador.

a) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 4}$ **b)** $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

a) El denominador se anula para $x = 4$. Para este valor, el numerador vale $4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2$. No existe valor numérico para $x = 4$.

b) El denominador se anula para $x = 3$. Para este valor, el numerador vale $3^2 - 9 = 0$. Así que el valor de la fracción algebraica para $x = 3$ es indeterminado.

6.3 Comprueba si son equivalentes las siguientes fracciones: $\dfrac{x + 1}{x}$ y $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$.

Dos fracciones son equivalentes si el producto de medios es igual al producto de extremos. De modo que se tiene que cumplir que $(x + 1)(x^2 - x) = x(x^2 - 1)$.

$(x + 1)(x^2 - x) = x^3 - x^2 + x^2 - x = x^3 - x$

$x(x^2 - 1) = x^3 - x$

Las fracciones dadas son equivalentes.

6.4 Escribe tres fracciones equivalentes a $\dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$.

$\dfrac{x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)}$ es equivalente a $\dfrac{1}{x - 1}, \dfrac{x}{x^2 - x}, \dfrac{x + 3}{(x - 1)(x + 3)}$

6.5 Simplifica las siguientes fracciones.

a) $\dfrac{x^2 + 1}{x^4 - 1}$ **b)** $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 8x + 15}$

a) $\dfrac{x^2 + 1}{x^4 - 1} = \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b) Factorizando cada una de sus partes tenemos que $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 8x + 15} = \dfrac{(x - 1)(x - 5)}{(x - 3)(x - 5)} = \dfrac{x - 1}{x - 3}$.

6.6 Simplifica $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ y calcula el valor numérico para $x = 2$.

Factorizamos numerador y denominador: $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

Si $x = 2$, $\frac{2^2 + 2 + 1}{2 + 1} = \frac{7}{3}$

6.7 Opera estas fracciones.

a) $\frac{7x}{x^3 + 5} + \frac{6x + 1}{x^3 + 5}$ **b)** $\frac{3xy}{x - y} - \frac{1 - 2xy}{x - y}$

a) $\frac{7x}{x^3 + 5} + \frac{6x + 1}{x^3 + 5} = \frac{7x + 6x + 1}{x^3 + 5} = \frac{13x + 1}{x^3 + 5}$

b) $\frac{3xy}{x - y} - \frac{1 - 2xy}{x - y} = \frac{3xy - (1 + 2xy)}{x - y} = \frac{xy - 1}{x - y}$

6.8 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\frac{7x + 3}{x - 4} + \frac{5x}{x^2 - 16}$ **b)** $\frac{2x}{x - 5} - \frac{x + 2}{x - 1}$

a) $\frac{7x + 3}{x - 4} + \frac{5x}{x^2 - 16} = \frac{(7x + 3)(x + 4)}{(x - 4)(x + 4)} + \frac{5x}{x^2 - 16} = \frac{7x^2 + 36x + 12}{x^2 - 16}$

b) $\frac{2x}{x - 5} - \frac{x + 2}{x - 1} = \frac{2x(x - 1) - (x + 2)(x - 5)}{(x - 5)(x - 1)} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 3x + 10}{x^2 - 6x + 5} = \frac{x^2 + x + 10}{x^2 - 6x + 5}$

6.9 Realiza estas operaciones: $\frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x - 2} + \frac{4}{x^2 - 4}$.

$\frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x - 2} + \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2) - (x + 2) + 4}{x^2 - 4}$

6.10 Realiza las siguientes operaciones con fracciones: $\frac{x}{x - 1} + \frac{2}{x + 2} + \frac{x + 1}{x - 2}$.

$\frac{x}{x - 1} + \frac{2}{x + 2} - \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{x(x + 2)(x - 2) + 2(x - 1)(x - 2) - (x + 1)(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)} = \frac{-9x + 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$

6.11 Calcula estos productos.

a) $\frac{x + 1}{x} \cdot \frac{x - 1}{x + 2}$ **b)** $\frac{2x - 1}{x - 3} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 4}$

a) $\frac{x + 1}{x} \cdot \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x(x + 2)} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x}$

b) $\frac{2x - 1}{x - 3} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 4} = \frac{(2x - 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 3)(2x^2 - 4)} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{2x^3 - 6x^2 - 4x + 12}$

6.12 Efectúa el producto y simplifica el resultado: $\frac{x^2}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3}$.

$\frac{x^2}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3} = \frac{x^2(x^2 - 1)}{(x + 1)x^3} = \frac{x^2(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)x^3} = \frac{x - 1}{x}$

6.13 Opera estos cocientes.

a) $\dfrac{4x+7}{x^2} : \dfrac{3x+1}{x+5}$ **b)** $\dfrac{5x-1}{3x-1} : \dfrac{x^2-1}{2x^2+3}$

a) $\dfrac{4x+7}{x^2} : \dfrac{3x+1}{x+5} = \dfrac{4x+7}{x^2} \cdot \dfrac{x+5}{3x+1} = \dfrac{(4x+7)(x+5)}{x^2(3x+1)} = \dfrac{4x^2+27x+35}{3x^3+x^2}$

b) $\dfrac{5x-1}{3x-1} : \dfrac{x^2-1}{2x^2+3} = \dfrac{5x-1}{3x-1} \cdot \dfrac{2x^2+3}{x^2-1} = \dfrac{(5x-1)(2x^2+3)}{(3x-1)(x^2-1)} = \dfrac{10x^3-2x^2+15x-3}{3x^3-x^2-3x+1}$

6.14 Calcula este cociente y simplifica el resultado: $\dfrac{x}{x^2-36} : \dfrac{12x^2}{x-6}$

$\dfrac{x}{x^2-36} : \dfrac{12x^2}{x-6} = \dfrac{x}{x^2-36} \cdot \dfrac{x-6}{12x^2} = \dfrac{x(x-6)}{12x^2(x-6)(x+6)} = \dfrac{1}{12x(x+6)}$

6.15 Calcula el valor numérico para $x = 2$ de cada expresión radical.

a) $\sqrt{-x^2}$ **b)** $\sqrt[3]{-x^3}$ **c)** $\sqrt{(-x)^2}$ **d)** $\sqrt[3]{(-x)^3}$

a) $\sqrt{-2^2} = \sqrt{-4}$, no existe.

c) $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt[3]{-2^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

d) $\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

6.16 Comprueba que las siguientes expresiones radicales no son equivalentes.

a) $\sqrt{x^4}$ **y** $\sqrt[3]{x^{12}}$ **b)** $\sqrt{x^6}$ **y** $\sqrt[3]{x^6}$

a) $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2 \neq x^4 = x^{\frac{12}{3}} = \sqrt[3]{x^{12}}$

b) $\sqrt{x^6} = x^{\frac{6}{2}} = x^3 \neq x^2 = x^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{x^6}$

6.17 Un alumno dice que los radicales $\sqrt{x^4}$ y $\sqrt[3]{x^6}$ son iguales.

a) ¿Es cierta esta afirmación?

b) ¿Y si los radicales son $\sqrt{x^4}$ y $\sqrt[4]{x^8}$?

a) Sí, $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2 = x^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{x^6}$

b) Sí, $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2 = x^{\frac{8}{4}} = \sqrt[4]{x^8}$

6.18 Simplifica estos radicales.

a) $\sqrt[4]{x^6}$ **b)** $\sqrt[8]{a^4}$ **c)** $\sqrt[6]{x^3}$ **d)** $\sqrt[12]{y^8}$

a) $\sqrt[4]{x^6} = x^{\frac{6}{4}} = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$

c) $\sqrt[6]{x^3} = x^{\frac{3}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

b) $\sqrt[8]{a^4} = a^{\frac{4}{8}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

d) $\sqrt[12]{y^8} = y^{\frac{8}{12}} = y^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{y^2}$

6.19 Simplifica estos radicales hasta conseguir un radical irreducible.

a) $\sqrt[18]{x^{12}y^{36}z^6}$ **b)** $\sqrt[45]{x^{15}y^{30}z^{15}}$

a) $\sqrt[18]{x^{12}y^{36}z^6} = \sqrt[\frac{18}{6}]{x^{\frac{12}{6}}y^{\frac{36}{6}}z^{\frac{6}{6}}} = \sqrt[3]{x^2y^6z}$

b) $\sqrt[45]{x^{15}y^{30}z^{15}} = \sqrt[\frac{45}{15}]{x^{\frac{15}{15}}y^{\frac{30}{15}}z^{\frac{15}{15}}} = \sqrt[3]{xy^2z}$

6.20 **Reduce a índice común estos radicales.**

a) $\sqrt[15]{ab},\ \sqrt[5]{ab},\ \sqrt[3]{ab}$

b) $\sqrt[3]{x^2y},\ \sqrt[9]{x^7y^2},\ \sqrt[6]{xy^2}$

a) $\sqrt[15]{ab}$

$\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5\cdot 3]{(ab)^3} = \sqrt[15]{a^3b^3}$

$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3\cdot 5]{(ab)^5} = \sqrt[15]{a^5b^5}$

b) $\sqrt[3]{x^2y} = \sqrt[3\cdot 6]{(x^2y)^6} = \sqrt[18]{x^{12}y^2}$

$\sqrt[9]{x^7y^2} = \sqrt[9\cdot 2]{(x^7y^2)^2} = \sqrt[18]{x^{14}y^4}$

$\sqrt[6]{xy^2} = \sqrt[6\cdot 3]{(xy^2)^3} = \sqrt[18]{x^3y^6}$

6.21 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{x^2y}$

b) $\sqrt[4]{x^7y^3} : \sqrt[4]{xy^2}$

c) $\left(\sqrt[3]{x^3y}\right)^2$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{xy^3}}$

a) $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{x^2y} = (x^2y)^{\frac{1}{3}}\,(x^2y)^{\frac{1}{3}} = (x^2y)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = (x^2y)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x^2y)^2} = \sqrt[3]{x^4y^2}$

b) $\sqrt[4]{x^7y^3} : \sqrt[4]{xy^2} = (x^7y^3)^{\frac{1}{4}} : (xy^2)^{\frac{1}{4}} = (x^7y^3 : xy^2)^{\frac{1}{4}} = (x^6y)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x^6y}$

c) $\left(\sqrt[3]{x^3y}\right)^2 = \sqrt[3]{(x^3y)^2} = \sqrt[3]{x^6y^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{xy^3}} = \sqrt[3\cdot 2]{xy^3} = \sqrt[6]{xy^3}$

6.22 **Efectúa estas operaciones.**

a) $\sqrt[5]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{x^3y} : \sqrt[5]{x^2y}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}} : \sqrt[6]{x^2} \cdot \left(\sqrt[6]{x}\right)^4$

a) $\sqrt[5]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{x^3y} : \sqrt[5]{x^2y} = \sqrt[5]{(x^2y)\cdot(x^3y) : (x^2y)} = \sqrt[5]{x^3y}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}} : \sqrt[6]{x^2} \cdot \left(\sqrt[6]{x}\right)^4 = \sqrt[3\cdot 2]{x^5} : \sqrt[6]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6]{x^5 : x^2 \cdot x^4} = \sqrt[6]{x^7}$

6.23 **Extrae factores de estos radicales.**

a) $\sqrt[7]{x^{15}y^7z^{22}}$

b) $\sqrt[3]{x^9y^{10}zt^7}$

c) $\sqrt[5]{x^{10}y^{11}z^{12}t^{13}}$

a) $\sqrt[7]{x^{15}y^7z^{22}} = \sqrt[7]{x^7x^7xy^7z^7z^7z^7z} = x^2yz^3 \cdot \sqrt[7]{xz}$

b) $\sqrt[3]{x^9y^{10}zt^7} = \sqrt[3]{x^3x^3x^3y^3y^3y^3yzt^3t^3t} = x^3y^3t^2 \cdot \sqrt[3]{yzt}$

c) $\sqrt[5]{x^{10}y^{11}z^{12}t^{13}} = \sqrt[5]{x^5x^5y^5y^5yz^5z^5z^2t^5t^5t^3} = x^2y^2z^2t^2 \cdot \sqrt[5]{yz^2t^3}$

6.24 **Calcula estas sumas de radicales.**

a) $\sqrt{x^3y^3} - \sqrt{xy^5} + \sqrt{x^3y}$

b) $\sqrt[4]{x^4y^5} + \sqrt[4]{x^8y} - \sqrt[4]{y^9}$

a) $\sqrt{x^3y^3} - \sqrt{xy^5} + \sqrt{x^3y} = xy\sqrt{xy} - y^2\sqrt{xy} + x\sqrt{xy} = (xy - y^2 + x)\sqrt{xy}$

b) $\sqrt[4]{x^4y^5} + \sqrt[4]{x^8y} - \sqrt[4]{y^9} = xy\sqrt[4]{y} + x^2\sqrt[4]{y} - y^2\sqrt[4]{y} = (xy + x^2 - y^2)\sqrt[4]{y}$

6.25 Realiza estos cálculos.

a) $\sqrt[5]{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy^4}$

b) $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^4b}$

c) $\sqrt[6]{x^2y^3} : \sqrt[4]{xy^2}$

d) $\sqrt{a^3b} : \sqrt[6]{a^5}$

a) $\sqrt[5]{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy^4} = \sqrt[5]{x^3y^7} = y\sqrt[5]{x^3y^2}$

b) $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^4b} = \sqrt[6]{(ab^2)^2} \cdot \sqrt[6]{a^4b} = \sqrt[6]{a^6b^5} = a\sqrt[6]{b^5}$

c) $\sqrt[6]{x^2y^3} : \sqrt[4]{xy^2} = \sqrt[12]{(x^2y^3)^2} : \sqrt[12]{(xy^2)^3} = \sqrt[12]{x}$

d) $\sqrt{a^3b} : \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{(a^3b)^3} : \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^4b^3}$

6.26 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{\sqrt{ab}} \cdot \left(\sqrt{ab^2}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{b}$

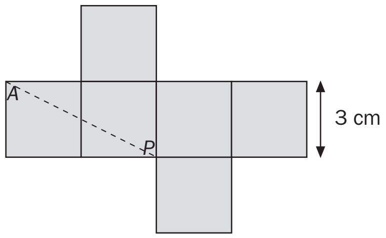
b) $\sqrt[5]{xy^2} \cdot \left(\sqrt[3]{xy}\right)^2 : \sqrt[15]{xy}$

a) $\sqrt{\sqrt{ab}} \cdot \left(\sqrt{ab^2}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[4]{ab} \cdot \left(\sqrt{ab^2}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[12]{a^3b^3 \cdot a^{18}b^{36} \cdot b^4} = \sqrt[12]{a^{21}b^{43}} = ab^3\sqrt[12]{a^9b^7}$

b) $\sqrt[5]{xy^2} \cdot \left(\sqrt[3]{xy}\right)^2 : \sqrt[15]{xy} = \sqrt[5]{xy^2} \cdot \sqrt[3]{x^2y^2} : \sqrt[15]{xy} = \sqrt[15]{x^3y^6 \cdot x^{10}y^{10} : xy} = \sqrt[15]{x^{12}y^{15}} = y\sqrt[15]{x^{12}}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

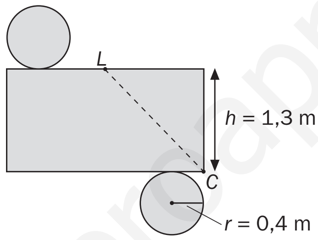
6.27 ¿Cuál es la distancia mínima que tiene que recorrer la araña para salir del cubo de la figura?



La distancia mínima es la línea recta que une los dos puntos, que coincide con la diagonal del rectángulo de altura 3 cm y base 6 cm.

$l^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow l = \sqrt{45} = 6{,}71$ cm

6.28 ¿Cuál es la distancia mínima que tiene que recorrer el caracol para comerse la lechuga?



$(LO)^2 = h^2 + \left(\frac{2\pi r}{2}\right)^2 = 1{,}3^2 + \pi^2 \cdot 0{,}4^2 = 3{,}27 \Rightarrow LO = 1{,}8$

El caracol debe recorrer 1,8 metros para comerse la lechuga.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Fracciones algebraicas equivalentes

6.29 Determina el valor numérico de estas fracciones algebraicas para $x = 1$ e $y = -2$.

a) $\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ **b)** $\dfrac{3x + 2y}{x + y}$ **c)** $\dfrac{4x^2y}{5x + y}$

a) $\dfrac{2 \cdot 1 \cdot (-2)}{1^2 + (-2)^2} = -\dfrac{4}{5}$ b) $\dfrac{3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)}{1 + (-2)} = 1$ c) $\dfrac{4 \cdot 1^2(-2)}{5 \cdot 1 + (-2)} = -\dfrac{8}{3}$

6.30 Halla los valores de x para los cuales el valor numérico de la fracción algebraica $\dfrac{x^3 - 7x - 6}{x^2 - x - 6}$ es indeterminado.

Las raíces del denominador 3 y -2. Vemos qué ocurre con estos valores cuando los sustituimos en el numerador.

Si $x = 3$, $\dfrac{3^3 - 7 \cdot 3 - 6}{3^2 - 3 - 6} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminado

Si $x = -2$, $\dfrac{(-2)^3 - 7 \cdot (-2) - 6}{(-2)^2 - (-2) - 6} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminado

6.31 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$ **c)** $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

b) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$ **d)** $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^5 - x^4 - 2x^3}$

a) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \dfrac{1}{x - 1}$

c) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 3)} = \dfrac{x + 2}{x + 3}$

b) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} = \dfrac{(x + 2)^2}{(x + 2)(x - 2)} = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

d) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^5 - x^4 - 2x^3} = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3(x^2 - x - 2)} = \dfrac{1}{x^3}$

6.32 Reduce a común denominador estas fracciones algebraicas.

$$\frac{x - 1}{x + 2} \qquad \frac{x + 1}{x - 2} \qquad \frac{3x}{x^2 + 2x - 8}$$

$$\frac{x - 1}{x + 2} = \frac{(x - 1)(x - 2)(x + 4)}{(x + 2)(x - 2)(x + 4)} = \frac{x^3 + x^2 - 10x + 8}{x^3 + 4x^2 - 4x - 16}$$

$$\frac{x + 1}{x - 2} = \frac{(x + 1)(x + 2)(x + 4)}{(x - 2)(x + 2)(x + 4)} = \frac{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}{x^3 + 4x^2 - 4x - 16}$$

$$\frac{3x}{x^2 + 2x - 8} = \frac{3x}{(x + 4)(x - 2)} = \frac{3x(x + 2)}{(x^2 + 2x - 8)(x + 2)} = \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 4x^2 - 4x - 16}$$

6.33 Indica qué pares de fracciones algebraicas son equivalentes.

a) $\dfrac{x+1}{x-1}$ y $\dfrac{x^3+x^2-2x-2}{x^3-x^2-2x+2}$ b) $\dfrac{x}{2x-1}$ y $\dfrac{x^2+x}{2x^2-3x+1}$ c) $\dfrac{(x-3)^2}{x^2-9}$ y $\dfrac{x^2-3x+9}{(x-3)\cdot(x+3)}$

a) Sí son equivalentes, tanto el numerador como el denominador de la segunda coinciden con el de la primera multiplicados por $(x^2 - 2)$.

b) No son equivalentes. Si $x = 2$, $\dfrac{2}{2\cdot 2-1} = \dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{2^2+2}{2\cdot 2^2-3\cdot 2+1} = \dfrac{6}{3} = 2$.

c) No son equivalentes. El denominador de la segunda es la factorización del denominador de la primera, y en los numeradores no se establece la relación de igualdad porque el numerador del segundo no coincide con el desarrollo del numerador de la primera fracción.

Operaciones con fracciones algebraicas

6.34 Opera y simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$ b) $\dfrac{a-2}{a+2}+\dfrac{a+2}{a-2}$

a) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x(x+1)+(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{x^2+x+x-1}{x^2-1}=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{a-2}{a+2}+\dfrac{a+2}{a-2}=\dfrac{(a-2)^2+(a+2)^2}{a^2-4}=\dfrac{a^2-4a+4+a^2+4a+4}{a^2-4}=\dfrac{2a^2+8}{a^2-4}$

6.35 Opera y simplifica, reduciendo previamente a común denominador.

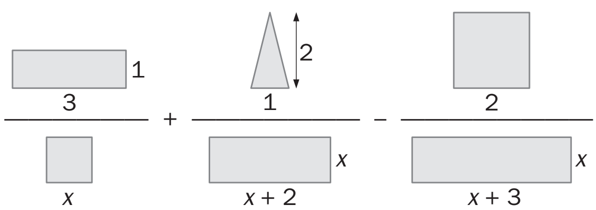
a) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}$ b) $\dfrac{1}{3x^2-3}-\dfrac{2}{2x+2}+\dfrac{x+5}{x+1}$ c) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3x-1}{x-3}$

a) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{x(x+2)+(2x+1)(x-2)-1}{x^2-4}=\dfrac{3x^2-x-3}{x^2-4}$

b) $\dfrac{1}{3x^2-3}-\dfrac{2}{2x+2}+\dfrac{x+5}{x+1}=\dfrac{1}{3(x^2-1)}-\dfrac{2}{2(x+1)}+\dfrac{x+5}{x+1}=\dfrac{2-2\cdot 3(x-1)+6(x+5)(x-1)}{6(x^2-1)}=\dfrac{3x^2+9x-11}{3(x^2-1)}$

c) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3x-1}{x-3}=\dfrac{x(x+2)(x-3)-(x-1)(x-3)+(3x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\dfrac{4x^3-9x-1}{x^3-2x^2-5x+6}$

6.36 Opera y simplifica las siguientes fracciones algebraicas, calculando previamente las áreas de las figuras geométricas que aparecen en los numeradores y en los denominadores.



$$\frac{3\cdot 1}{x^2}+\frac{\frac{1\cdot 2}{2}}{x(x+2)}-\frac{2\cdot 2}{x(x+3)}=\frac{3(x+2)(x+3)+x(x+3)-4x(x+2)}{x^2(x+2)(x+3)}=\frac{10x+18}{x^4+5x^3+6x^2}$$

6.37 **Realiza estas operaciones y simplifica el resultado.**

a) $\dfrac{x+1}{x^2+2x} \cdot \dfrac{4x+3x^3}{x^2+x}$

b) $\dfrac{x-2}{x^2-9} : \dfrac{x^2-4}{x+3}$

a) $\dfrac{x+1}{x^2+2x} \cdot \dfrac{4x+3x^3}{x^2+x} = \dfrac{(x+1)(4x+3x^3)}{(x^2+2x)(x^2+x)} = \dfrac{(x+1)x(4+3x^2)}{x(x+2)x(x+1)} = \dfrac{4+3x^2}{x(x+2)}$

b) $\dfrac{x-2}{x^2-9} : \dfrac{x^2-4}{x+3} = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x^2-9)(x^2-4)} = \dfrac{1}{(x-3)(x+2)}$

6.38 **Opera y simplifica.**

a) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3x}\right) : \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x}\right)$

b) $\left[\left(x + \dfrac{1}{x}\right) : \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1)$

c) $\left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x^2-1}{x}\right) : \left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\right)$

a) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3x}\right) : \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x}\right) = \left(\dfrac{1}{6x}\right) : \left(\dfrac{2-2}{2x^2}\right) = \dfrac{2x^2}{6x(2-x)} = \dfrac{x}{6-3x}$

b) $\left[\left(x + \dfrac{1}{x}\right) : \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1) = \left[\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) : \left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\right] \cdot (x-1) = \dfrac{(x^2+1)x}{(x^2-1)x} \cdot (x-1) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$

c) $\left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x^2-1}{x}\right) : \left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\right) = \dfrac{(x+1)(x^2-1)}{(x-1)^2x} : \dfrac{x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)x} : \dfrac{x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)^2(x-1)^2}{(x+1)(x-1)x} = \dfrac{x^2-1}{x}$

Expresiones radicales equivalentes

6.39 **Halla el valor numérico de estas expresiones radicales para los valores $x = 2$ e $y = 1$.**

a) $\sqrt{\dfrac{2xy}{x^2+y^2}}$

b) $\sqrt{x^3y^2+5}$

c) $\sqrt{2x+3y-1}$

a) $\sqrt{\dfrac{2\cdot 2\cdot 1}{2^2+1^2}} = \sqrt{\dfrac{4}{5}}$

b) $\sqrt{2^3\cdot 1^2+5} = \sqrt{13}$

c) $\sqrt{2\cdot 2+3\cdot 1-1} = \sqrt{6}$

6.40 **Calcula las posibles raíces de estas expresiones radicales.**

a) $\sqrt{144x^4}$

b) $\sqrt{81x^4}$

c) $\sqrt[3]{64x^6}$

d) $\sqrt[5]{32x^{25}}$

a) $\sqrt{144x^4} = \pm 12x^2$

b) $\sqrt{81x^4} = \pm 9x^2$

c) $\sqrt[3]{64x^6} = 4x^2$

d) $\sqrt[5]{32x^{25}} = 2x^5$

6.41 **Indica qué pares de expresiones radicales son equivalentes.**

a) $\sqrt{4x^2}$ y $-\sqrt[3]{8x^3}$ **b)** $\sqrt[3]{8x^6}$ y $\sqrt[9]{512x^{18}}$ **c)** $\sqrt{9x^4}$ y $\sqrt[4]{81x^{12}}$

a) No lo son, para $x = 1$, $\sqrt{4 \cdot 1^2} = 2$ (cuando no se indica el signo, se considera signo positivo), y $-\sqrt[3]{8 \cdot 1^3} = -2$.

b) Sí, ya que $\sqrt[3 \cdot 3]{(8x^6)^2} = \sqrt[9]{512x^{18}}$

c) No, ya que $\sqrt{9x^4} = \sqrt[2 \cdot 2]{(9x^4)^2} = \sqrt[4]{81x^8} \neq \sqrt[4]{81x^{12}}$

6.42 **Escribe tres radicales equivalentes a cada uno de los siguientes.**

a) $\sqrt[4]{x^2y^8}$ **b)** $\sqrt[3]{ab}$

a) $\sqrt[4]{x^2y^8} = \sqrt{xy^4} = \sqrt[8]{x^4y^{16}} = \sqrt[6]{x^3y^{12}}$

b) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[9]{a^3b^3} = \sqrt[15]{a^5b^5} = \sqrt[21]{a^7b^7}$

6.43 **Reduce estos radicales a índice común:** $\sqrt[3]{x^2}$ $\sqrt{x^3}$ $\sqrt[6]{x^5}$

$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^4}$ $\sqrt{x^3} = \sqrt[6]{x^9}$ $\sqrt[6]{x^5}$

6.44 **Simplifica los siguientes radicales.**

a) $\sqrt[16]{a^8b^4}$ **c)** $\sqrt[15]{x^{12}y^{18}}$

b) $\sqrt[12]{(x^2y^2)^3}$ **d)** $\sqrt[20]{(x^2y^4)^5}$

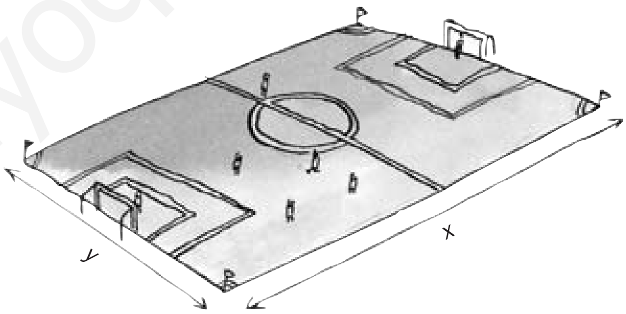
a) $\sqrt[16]{a^8b^4} = \sqrt[4]{a^2b}$

c) $\sqrt[15]{x^{12}y^{18}} = \sqrt[5]{x^4y^6}$

b) $\sqrt[12]{(x^2y^2)^3} = \sqrt{xy}$

d) $\sqrt[20]{(x^2y^4)^5} = \sqrt{xy^2}$

6.45 **Utilizando el teorema de Pitágoras, calcula la diagonal del campo de fútbol.**



Si $x = 100$ metros e $y = 80$ metros, ¿cuál sería la longitud de dicha diagonal?

$d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si $x = 100$ metros e $y = 80$ metros; $d = \sqrt{100^2 + 80^2} = 10\sqrt{164} = 20\sqrt{41}$ metros

Operaciones con expresiones radicales

6.46 **Realiza estas operaciones con radicales.**

a) $\sqrt{\sqrt{x^{12}y^6}}$ **c)** $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{x^4y^2}$

b) $\sqrt{x^5y} : \sqrt{xy}$ **d)** $\left(\sqrt{xy}\right)^4$

a) $\sqrt{\sqrt{x^{12}y^6}} = \sqrt[4]{x^{12}y^6} = x^3y\sqrt{y}$

c) $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{x^4y^2} = \sqrt[3]{x^6y^3} = x^2y$

b) $\sqrt{x^5y} : \sqrt{xy} = \sqrt{x^5y : xy} = \sqrt{x^4} = x^2$

d) $\left(\sqrt{xy}\right)^4 = \sqrt{x^4y^4} = x^2y^2$

6.47 Extrae factores de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{64x^8}$ **b)** $\sqrt[3]{x^4yz^5}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{16a^6}{b^3}}$

a) $\sqrt[4]{64x^8} = \sqrt[4]{2^6x^8} = 2x^2\sqrt[4]{4}$

b) $\sqrt[3]{x^4yz^5} = xz\sqrt[3]{xyz^2}$

c) $\sqrt{\dfrac{16a^6}{b^3}} = \sqrt{\dfrac{2^4 \cdot a^6}{b^3}} = \dfrac{4a^3}{b}\sqrt{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{4a^3}{b\sqrt{b}}$

6.48 Efectúa estas operaciones con expresiones radicales.

a) $\sqrt[3]{x^2} : \sqrt{x^3}$ **b)** $\sqrt{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy}$ **c)** $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ **d)** $\sqrt[3]{xy^2} : \sqrt[4]{x^3y^5}$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{\sqrt[6]{x^4}}{\sqrt[6]{x^9}} = \sqrt[6]{\dfrac{x^4}{x^9}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{x^5}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$

b) $\sqrt{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy} = \sqrt[10]{x^{10}y^{15}} \cdot \sqrt[10]{x^2y^2} = \sqrt[10]{x^{12}y^{17}} = xy\sqrt[10]{x^2y^7}$

c) $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^9} \cdot \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6]{x^{13}} = x^2\sqrt[6]{x}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[4]{x^3y^5}} = \dfrac{\sqrt[12]{x^4y^8}}{\sqrt[12]{x^9y^{15}}} = \sqrt[12]{\dfrac{1}{x^5y^7}} = \dfrac{1}{\sqrt[12]{x^5y^7}}$

6.49 Opera las siguientes expresiones radicales.

a) $\sqrt{12x} + \sqrt{75x} - \sqrt{27x} + \sqrt{48x}$

b) $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab^3} + \sqrt[3]{ab^6} - \sqrt[3]{ab^9}$

c) $5\sqrt{xy^2} + \sqrt{16x^3y^4} - \sqrt{9xy^6}$

a) $\sqrt{12x} + \sqrt{75x} - \sqrt{27x} + \sqrt{48x} = \sqrt{2^2 \cdot 3x} + \sqrt{5^2 \cdot 3x} - \sqrt{3^3x} + \sqrt{2^4 \cdot 3x} = 8\sqrt{3x}$

b) $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab^3} + \sqrt[3]{ab^6} - \sqrt[3]{ab^9} = (1 - b + b^2 - b^3)\sqrt[3]{a}$

c) $5\sqrt{xy^2} + \sqrt{16x^3y^4} - \sqrt{9xy^6} = (5y + 4xy^2 - 3y^3)\sqrt{x}$

6.50 Realiza estas operaciones.

a) $\sqrt[3]{xy^3} \cdot \sqrt{xy} \cdot \sqrt[4]{x^5y}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[6]{x^4}}$

a) $\sqrt[3]{xy^3} \cdot \sqrt{xy} \cdot \sqrt[4]{x^5y} = \sqrt[12]{(xy^3)^4(xy)^6(x^5y)^3} = \sqrt[12]{x^{25}y^{21}} = x^2y\sqrt[12]{xy^9}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[6]{x^4}} = \dfrac{\sqrt[15]{x^5 \cdot x^9}}{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[15]{\dfrac{x^{14}}{x^{10}}} = \sqrt[15]{x^4}$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

6.51 ¿Puede ser que el resultado obtenido al calcular el valor numérico de una expresión algebraica sea otra expresión algebraica? Razona tu respuesta.

No, porque al calcular el valor numérico de una expresión algebraica resulta un número, no una expresión algebraica.

6.52 Indica los casos en los que sea necesario factorizar una fracción algebraica para calcular el valor numérico para algún valor en concreto. Pon algún ejemplo.

Cuando tenemos el caso de indeterminada $\frac{0}{0}$.

Por ejemplo, $\frac{x+1}{x^2-1}$ para $x = -1$. Tenemos $\frac{0}{0}$. Si factorizamos, podemos simplificar, $\frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$, sustituimos $x = -1$ y nos da como resultado $-\frac{1}{2}$.

6.53 Indica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta.

a) $\sqrt{(x+a)\cdot(x-a)} = x - a$

b) $\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 1$

a) Falsa. $\sqrt{(x+a)(x-a)} = \sqrt{x^2-a^2} \neq x - a$

b) Falsa. $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

6.54 ¿Qué debe verificar el índice de la raíz de una expresión algebraica positiva para obtener dos soluciones al calcular dicha raíz? Explícalo con ejemplos.

El índice ha de ser un número par. Por ejemplo: $\sqrt{4x^2} = 2x$ y $-2x$

6.55 ¿Existe siempre la raíz cuadrada de la raíz cúbica de una expresión algebraica? Justifica tu respuesta con algún ejemplo.

No, por ejemplo, $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$ no existe si $x < 0$.

6.56 Tenemos un rectángulo cuya base y altura son *x* e *y*, respectivamente. Obtenemos otro rectángulo cuyos lados tienen doble longitud. ¿La longitud de la diagonal del nuevo rectángulo también es el doble? Razona la respuesta.

$D = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = \sqrt{4(x^2+y^2)} = 2\sqrt{x^2+y^2}$

La longitud de la diagonal del nuevo rectángulo mide el doble que la del rectángulo inicial.

6.57 En una expresión radical de índice *n*, ¿por cuánto hemos de dividir el radicando para que la expresión radical quede dividida por 2?

$\sqrt[n]{\frac{x}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{2} \Rightarrow$ hemos de dividir por 2^n

PROBLEMAS PARA APLICAR

6.58 Realiza las siguientes operaciones utilizando expresiones algebraicas.

a) El cociente entre un número y su siguiente más el cociente entre dicho número y su anterior.

b) El cociente entre dos números pares consecutivos más el cociente entre dos números impares consecutivos.

c) La suma de los inversos de dos pares consecutivos.

d) La suma de los inversos de dos números impares consecutivos.

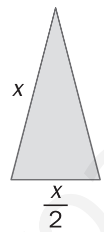
a) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x}{x-1}$

b) $\dfrac{2x}{2x+2} + \dfrac{2x+1}{2x+3}$

c) $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2x+2}$

d) $\dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{1}{2x+3}$

6.59 Expresa, mediante una fracción algebraica, el área del triángulo isósceles de la figura.

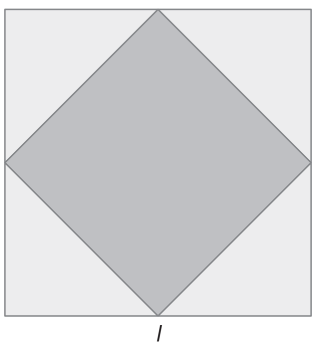


Sea h la altura del triángulo:

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{15x^2}{16}} = \frac{\sqrt{15}x}{4}$$

$$A = \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}x}{4}}{2} = \frac{\sqrt{15}x^2}{16}$$

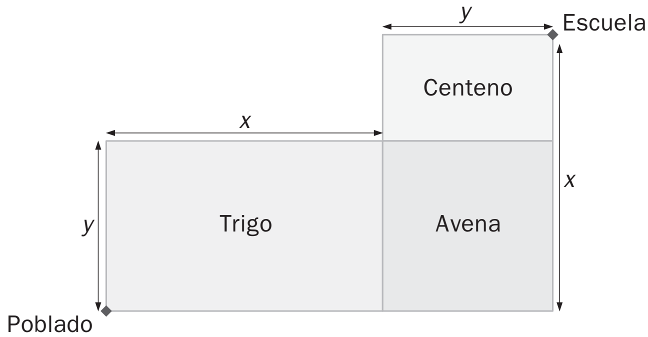
6.60 Expresa, mediante una fracción algebraica, el área de la parte coloreada.



Lado del cuadrado coloreado: $l' = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2l^2}{4}} = \frac{\sqrt{2} \cdot l}{2}$

$$A = \left(\frac{\sqrt{2} \cdot l}{2}\right)^2 = \frac{2l^2}{4} = \frac{l^2}{2}$$

6.61 Hassan vive en un pequeño poblado de Marruecos y le separan de la escuela tres campos de cultivo de trigo, avena y centeno, como indica la figura.



¿Cuál es la expresión algebraica que hace mínimo el trayecto recorrido por Hassan para llegar a la escuela?

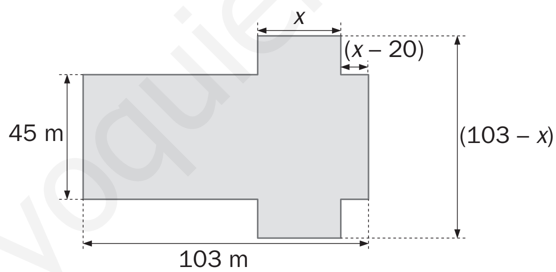
Primero, Hassan recorre la diagonal del campo de trigo: $d_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$

Después, la del campo de centeno: $d_2 = \sqrt{y^2 + (x - y)^2} = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 2xy}$

La distancia total que recorre Hassan es: $d = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + 2y^2 - 2xy}$

6.62 En la fotografía observamos la catedral de Santiago de Compostela.

Esta catedral posee una planta en forma de cruz latina como la de la figura.



Expresa el área de dicha planta como una expresión algebraica en *x*.

Dividimos la planta en tres rectángulos (de izquierda a derecha) y calculamos el área de cada uno de ellos.

$A_1 = 45 \cdot [103 - x - (x - 20)] = 45(123 - 2x) = 5\,535 - 90x$

$A_2 = x \cdot (103 - x) = 103x - x^2$

$A_3 = (x - 20) \cdot 45 = 45x - 900$

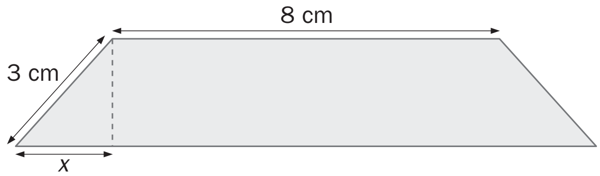
El área total es: $A = A_1 + A_2 + A_3 = 5\,535 - 90x + 103x - x^2 + 45x - 900 = -x^2 + 58x + 4\,635 \text{ m}^2$

6.63 En el código de circulación, las señales en forma de triángulo indican peligro. La señal de ceda el paso solo difiere de un triángulo equilátero en sus vértices, ya que estos están redondeados.

Suponiendo que fuese un triángulo equilátero, expresa el área de la señal si el lado mide *x* centímetros.

$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}x}{2} \text{ cm} \qquad A = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \text{ cm}^2$

6.64 Expresa el área del siguiente trapecio isósceles.



Área de cada triángulo: $h = \sqrt{9 - x^2}$ $\quad A = \dfrac{x\sqrt{9 - x^2}}{2}$ cm^2. Área del rectángulo: $A = 8 \cdot \sqrt{9 - x^2}$ cm^2

$A_T = 2\dfrac{x\sqrt{9 - x^2}}{2} + 8 \cdot \sqrt{9 - x^2} = (x + 8)\sqrt{9 - x^2}$ cm^2

REFUERZO

Fracciones y radicales equivalentes

6.65 Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{xy - y}{x - 1}$ b) $\dfrac{x^2 - 4}{2x - 4}$ c) $\dfrac{x - 1}{x^2 + x - 1}$ d) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 6}$

a) $\dfrac{xy - y}{x - 1} = \dfrac{(x - 1)y}{x - 1} = y$

b) $\dfrac{x^2 - 4}{2x - 4} = \dfrac{(x + 2)(x - 2)}{2(x - 2)} = \dfrac{x + 2}{2}$

c) $\dfrac{x - 1}{x^2 + x - 1}$. No se simplifica.

d) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 6} = \dfrac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 2)(x + 3)} = \dfrac{x - 1}{x - 2}$

6.66 Simplifica las siguientes expresiones radicales.

a) $\sqrt[15]{x^5y^{20}z^{10}}$ b) $\sqrt[3]{x^{14}y^7z^{23}}$ c) $\sqrt[12]{a^4b^8c^6}$ d) $\sqrt[8]{x^2y^4z^8}$

a) $\sqrt[15]{x^5y^{20}z^{10}} = \sqrt[3]{xy^4z^2}$

b) $\sqrt[3]{x^{14}y^7z^{23}}$. No se puede simplificar.

c) $\sqrt[12]{a^4b^8c^6} = \sqrt[6]{a^2b^4c^3}$

d) $\sqrt[8]{x^2y^4z^8} = \sqrt[4]{xy^2z^4}$

6.67 Calcula el valor de cada fracción para $x = -2$ y para $x = 1$.

a) $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2}$ b) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + x - 2}$

a) $\dfrac{(-2)^2 - (-2) - 6}{(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminado.

$\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2} = \dfrac{(x + 2)(x - 3)}{(x + 2)(x + 1)} = \dfrac{x - 3}{x + 1}$

Sustituimos $x = -2$, $\dfrac{-2 - 3}{-2 + 1} = 5$.

Sustituimos $x = 1$, $\dfrac{1 - 3}{1 + 1} = -1$.

b) $\dfrac{1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2}{1^2 + 1 - 2} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminado.

$\dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + x - 2} = \dfrac{(x - 1)(x^2 - x - 2)}{(x - 1)(x + 2)} = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 2}$

Sustituimos $x = -2$, $\dfrac{(-2)^2 - (-2) - 2}{-2 + 2} = \dfrac{6}{0}$. No existe valor numérico.

Sustituimos $x = 1$, $\dfrac{1^2 - 1 - 2}{1 + 2} = -\dfrac{2}{3}$.

6.68 ¿Cuál de las siguientes expresiones radicales no es equivalente a $\sqrt[3]{xy^2z}$?

a) $\sqrt[6]{x^2y^4z^2}$ b) $\sqrt[9]{x^3y^6z^2}$ c) $\sqrt[12]{x^4y^8z^4}$

La b, porque $\sqrt[3]{xy^2z} = \sqrt[9]{x^3y^6z^3} \neq \sqrt[9]{x^3y^6z^2}$

6.69 ¿Cuál de estas fracciones algebraicas no es equivalente a $\dfrac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^4 + 2x^3 - 3x^2}$?

a) $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2(x - 1)}$ b) $\dfrac{x^2 + 3x}{x^2 \cdot (x - 1)}$ c) $\dfrac{x + 2}{x^2 - x}$

$\dfrac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^4 + 2x^3 - 3x^2} = \dfrac{x(x^2 + 5x + 6)}{x^2(x^2 + 2x - 3)} = \dfrac{x(x + 2)(x + 3)}{x^2(x - 1)(x + 3)}$

La fracción no equivalente es la b.

Operaciones con fracciones algebraicas

6.70 Realiza las operaciones.

a) $\dfrac{3x}{x-5}+\dfrac{2x-1}{x+2}$ **b)** $\dfrac{2x-1}{x^2-4}-\dfrac{3x-1}{x-2}$ **c)** $\dfrac{2x-1}{3x}\cdot\dfrac{x+2}{x^2-3x+1}$ **d)** $\dfrac{x^2-x+1}{x^3}:\dfrac{4x-7}{x+1}$

a) $\dfrac{3x}{x-5}+\dfrac{2x-1}{x+2}=\dfrac{3x(x+2)+(2x-1)(x-5)}{(x-5)(x+2)}=\dfrac{5x^2-5x+5}{x^2-3x-10}$

b) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}-\dfrac{3x-1}{x-2}=\dfrac{2x-1-(3x-1)(x+2)}{x^2-4}=\dfrac{-3x^2-3x+1}{x^2-4}$

c) $\dfrac{2x-1}{3x}\cdot\dfrac{x+2}{x^2-3x+1}=\dfrac{(2x-1)(x+2)}{3x(x^2-3x+1)}=\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^3-9x^2+3x}$

d) $\dfrac{x^2-x+1}{x^3}:\dfrac{4x-7}{x+1}=\dfrac{(x^2-x+1)(x+1)}{x^3(4x-7)}=\dfrac{x^3+1}{4x^4-7x^3}$

6.71 Opera y simplifica.

a) $\left(\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}\right)\cdot\left(x-\dfrac{4}{x}\right)$ **b)** $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x-1}\right)$

a) $\left(\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}\right)\cdot\left(x-\dfrac{4}{x}\right)=\dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x^2-4}\cdot\dfrac{x^2-4}{x}=8$

b) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{x-1-x^2}{x(x-1)}:\dfrac{x-1+x^2}{x(x-1)}=\dfrac{-x^2+x-1}{x^2+x-1}$

Operaciones con expresiones radicales

6.72 Realiza las operaciones.

a) $\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[3]{x^2y}$ **c)** $\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[5]{x^4y^3}$ **e)** $\left(\sqrt[4]{x^2y^3}\right)^3$

b) $\sqrt[5]{x^2y}:\sqrt[5]{xy}$ **d)** $\sqrt[6]{\sqrt[3]{xy}}$ **f)** $\sqrt[3]{x^4y}:\sqrt[9]{x^3y^2}$

a) $\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[3]{x^2y}=\sqrt[3]{xy\cdot x^2y}=x\sqrt[3]{y^2}$

b) $\sqrt[5]{x^2y}:\sqrt[5]{xy}=\sqrt[5]{x^2y:xy}=\sqrt[5]{x}$

c) $\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[5]{x^4y^3}=\sqrt[15]{x^{10}y^5x^{12}y^9}=x\sqrt[15]{x^7y^{14}}$

d) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{xy}}=\sqrt[6\cdot3]{xy}=\sqrt[18]{xy}$

e) $\left(\sqrt[4]{x^2y^3}\right)^3=\sqrt[4]{(x^2y^3)^3}=xy^2\sqrt[4]{x^2y}$

f) $\sqrt[3]{x^4y}:\sqrt[9]{x^3y^2}=\sqrt[9]{x^{12}y^3:x^3y^2}=x\sqrt[9]{y}$

6.73 Extrae factores de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[5]{x^{17}y^7}$ **b)** $\sqrt[7]{x^{22}y^8}$ **c)** $\sqrt[6]{x^{12}y^3}$ **d)** $\sqrt{x^{13}y^4}$

a) $\sqrt[5]{x^{17}y^7}=x^3y\sqrt[5]{x^2y^2}$

b) $\sqrt[7]{x^{22}y^8}=x^3y\sqrt[7]{xy}$

c) $\sqrt[6]{x^{12}y^3}=x^2\sqrt[6]{y^3}$

d) $\sqrt{x^{13}y^4}=x^6y^2\sqrt{x}$

6.74 Calcula estas sumas de radicales.

a) $\sqrt{4x}-3\sqrt{x^5}+x\sqrt{x^3}$ **b)** $\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{x^9}-\sqrt[4]{x}$

a) $\sqrt{4x}-3\sqrt{x^5}+x\sqrt{x^3}=2\sqrt{x}-3x^2\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}=(2-2x^2)\sqrt{x}$

b) $\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{x^9}-\sqrt[4]{x}=x\sqrt[4]{x}+x^2\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x}=(x^2+x-1)\sqrt[4]{x}$

AMPLIACIÓN

6.75 Opera y simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{a^4b^5}}{\sqrt[6]{a^5b^4}\cdot\sqrt{ab}}$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2y^3}\cdot\sqrt[6]{x^4y^6}}{\sqrt[10]{x^3y^2}}$

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{a^4b^5}}{\sqrt[6]{a^5b^4}\cdot\sqrt{ab}}=\dfrac{\sqrt[12]{(a^3b^2)^3(a^4b^5)^4}}{\sqrt[12]{(a^5b^4)^2(ab)^6}}=\sqrt[12]{\dfrac{a^{25}b^{26}}{a^{16}b^{14}}}=\sqrt[12]{a^9b^{12}}=b\sqrt[12]{a^9}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2y^3}\cdot\sqrt[6]{x^4y^6}}{\sqrt[10]{x^3y^2}}=\dfrac{\sqrt[12]{(x^2y^3)^3(x^4y^6)^2}}{\sqrt[10]{x^3y^2}}=\dfrac{xy\sqrt[12]{x^2y^9}}{\sqrt[10]{x^3y^2}}=xy\sqrt[120]{\dfrac{x^{20}y^{90}}{x^{36}y^{24}}}=xy\sqrt[60]{\dfrac{y^{33}}{x^8}}$

6.76 Opera las siguientes fracciones algebraicas.

a) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$ b) $2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{x}}}$

a) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1-x}{x-1}}=1-\dfrac{x-1}{-1}=x$

b) $2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{x}}}=2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\dfrac{2x-1}{x}}}=2-\dfrac{1}{2-\dfrac{x}{2x-1}}=2-\dfrac{1}{\dfrac{4x-2-x}{2x-1}}=2-\dfrac{2x-1}{3x-2}=\dfrac{4x-3}{3x-2}$

6.77 Calcula cuánto han de valer los números *A* y *B*, para que se verifique la siguiente igualdad:

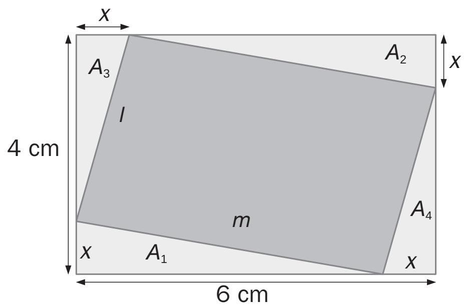
$$\frac{A}{x^2-3x}+\frac{B}{x^2}=\frac{3x-6}{x^3-3x^2}$$

$\dfrac{A}{x^2-3x}+\dfrac{B}{x^2}=\dfrac{Ax^2+B(x^2-3x)}{(x^2-3x)x^2}=\dfrac{(A+B)x-3B}{(x^2-3x)x}=\dfrac{3x-6}{x^3-3x^2}\Rightarrow\begin{cases}A+B=3\\3B=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=2\end{cases}$

6.78 Escribe con un solo radical la siguiente expresión $x\sqrt{y\sqrt{z\sqrt[3]{t}}}$.

$x\sqrt{y\sqrt{z^3\sqrt[3]{t}}}=\sqrt{x^2y\sqrt{z^3\sqrt[3]{t}}}=\sqrt{\sqrt{x^4y^2z^3\sqrt[3]{t}}}=\sqrt[4]{x^4y^2z^3\sqrt[3]{t}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^{12}y^6z^3t}}=\sqrt[12]{x^{12}y^6z^3t}$

6.79 Expresa el área del cuadrilátero coloreado, mediante un polinomio en *x*.



¿Cuánto miden los lados de dicho cuadrilátero?

Para resolver el problema, le restaremos al área del rectángulo grande el área de los cuatro triángulos rectángulos, que son iguales dos a dos: $A_1 = A_2$ y $A_3 = A_4$.

$\text{Área } (A_1) = \text{Área } (A_2) = \dfrac{(6 - x)x}{2}$; $\text{Área } (A_3) = \text{Área } (A_4) = \dfrac{(4 - x)x}{2}$

Área del rectángulo $= 4 \cdot 6 = 24$ cm^2; *Área de la figura* $= 24 - (6 - x)x - (4 - x)x = 2x^2 - 10x + 24$ cm^2

El cuadrilátero es un paralelogramo, y, por tanto, tiene los lados iguales dos a dos.

Usamos el teorema de Pitágoras para calcular los lados *l* y *m* del paralelogramo:

$$l = \sqrt{(4 - x)^2 + x^2} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} \text{ cm} \quad \text{y} \quad m = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2} = \sqrt{2x^2 - 12x + 36} \text{ cm}$$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

6.80 Población de aves

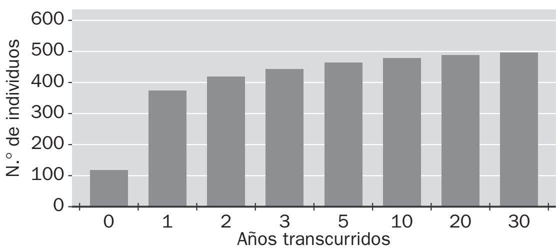
En unas lagunas naturales de un espacio protegido por la ley se ha observado que el número de individuos de una cierta especie de aves se puede expresar mediante la fracción algebraica: $\dfrac{2\,000x + 250}{4x + 2}$ siendo x el número de años que han transcurrido desde un año inicial $x = 0$.

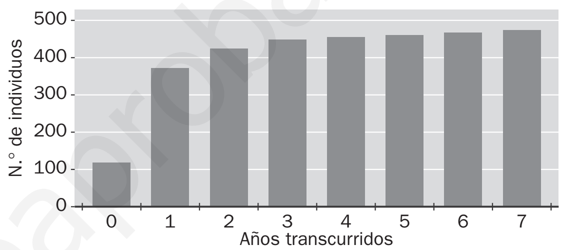
a) Completa la tabla siguiente.

Años transcurridos	0	1	2	3	10
Población					

b) Cuando hayan pasado muchos años, ¿qué población crees que habrá?

c) De los siguientes gráficos, ¿en cuál de ellos se aprecia mejor la contestación a la pregunta anterior?





a)

Años transcurridos	0	1	2	3	10
Población	125	375	425	446	482

b) La población tiende a estabilizarse en los 500 individuos.

c) El primer gráfico es mejor al contar con datos de años más separados del inicio.

AUTOEVALUACIÓN

6.A1 **Reduce a común denominador estas fracciones.**

a) $\dfrac{1}{x^2-1}, \dfrac{1}{x+1}, \dfrac{1}{x^2+2x+1}$

b) $\dfrac{1}{x-1}, \dfrac{1}{x+2}, \dfrac{1}{x^2+x-2}$

a) $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{(x+1)(x+1)} = \dfrac{x+1}{(x+1)^2(x+1)}$

$\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}$

$\dfrac{1}{x^2+2x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x-1}{(x+1)^2(x-1)}$

b) $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x+2}{(x-1)(x+2)}$

$\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)}$

$\dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

6.A2 **Opera los siguientes radicales.**

a) $\sqrt{18x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{98x}$

b) $\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{ab^3} - 3\sqrt{a^3b^5} + 2\sqrt{ab}$

a) $\sqrt{18x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{98x} = \sqrt{9 \cdot 2x} + \sqrt{25 \cdot 2x} - \sqrt{16 \cdot 2x} + \sqrt{49 \cdot 2x} = 11\sqrt{2x}$

b) $\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{ab^3} - 3\sqrt{a^3b^5} + 2\sqrt{ab} = \sqrt{a^2b^2ab} + \sqrt{b^2ab} - 3\sqrt{a^2b^4ab} + 2\sqrt{ab} = (ab + b - 3ab^2 + 2)\sqrt{ab}$

6.A3 **Realiza estas operaciones con fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{3x-2}{x-3} - \dfrac{2x-5}{x^2-9} + \dfrac{2x}{x+3}$

b) $\dfrac{x-1}{3x} \cdot \dfrac{5x^2}{x^2-x} : \dfrac{2}{x}$

a) $\dfrac{3x-2}{x-3} - \dfrac{2x-5}{x^2-9} + \dfrac{2x}{x+3} = \dfrac{(3x-2)(x+3) - (2x-5) + 2x(x-3)}{x^2-9} = \dfrac{5x^2-x-1}{x^2-9}$

b) $\dfrac{x-1}{3x} \cdot \dfrac{5x^2}{x^2-x} : \dfrac{2}{x} = \dfrac{(x-1) \cdot 5x^2 \cdot x}{3x \cdot (x^2-x) \cdot 2} = \dfrac{5x}{6}$

6.A4 **Simplifica las siguientes fracciones.**

a) $\dfrac{x^4+x^3-7x^2-x+6}{x^3+6x^2+11x+6}$

b) $\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3-x^2-x-2}$

a) $\dfrac{x^4+x^3-7x^2-x+6}{x^3+6x^2+11x+6} = \dfrac{(x+1)(x-1)(x-2)(x+3)}{(x+3)(x+1)(x+2)} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x+2}$

b) $\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3-x^2-x-2} = \dfrac{(x+2)(x^2+x+1)}{(x-2)(x^2+x+1)} = \dfrac{x+2}{x-2}$

6.A5 **Realiza las siguientes operaciones con expresiones radicales.**

a) $\sqrt[5]{xy^4} \cdot \sqrt[5]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{xy}$

b) $\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[4]{xy} : \sqrt[6]{xy}$

a) $\sqrt[5]{xy^4} \cdot \sqrt[5]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{xy} = \sqrt[5]{xy^4x^2yxy} = y\sqrt[5]{x^4y}$

b) $\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[4]{xy} : \sqrt[6]{xy} = (xy)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}} = (xy)^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{(xy)^5}$

6.A6 Halla el valor numérico de estas expresiones: $\dfrac{3x^2y+1}{2x+1}$ $\sqrt{\dfrac{2xy-3}{xy}}$

a) Para $x = 1$ e $y = 2$. **b) Para $x = -1$ e $y = -2$.**

a) $\dfrac{3\cdot 1^2\cdot 2+1}{2\cdot 1+1}=\dfrac{7}{3}$

$\sqrt{\dfrac{2\cdot 1\cdot 2-3}{1\cdot 2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{3\cdot(-1)^2\cdot(-2)+1}{(-2)\cdot 1+1}=\dfrac{-5}{-1}=5$

$\sqrt{\dfrac{2\cdot(-1)\cdot(-2)-3}{(-1)\cdot(-2)}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

6.A7 Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt[12]{a^4b^8c^6}$ **b)** $\sqrt[18]{x^{12}y^{36}c^6}$

a) $\sqrt[12]{a^4b^8c^6}=\sqrt[6]{a^2b^4c^3}$

b) $\sqrt[18]{x^{12}y^{36}c^6}=\sqrt[3]{x^2y^6c}$

6.A8 Comprueba si las fracciones $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-6}$ **y** $\dfrac{x-1}{x-2}$ **son equivalentes.**

$\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-6}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{x-1}{x-2}$. Sí, son equivalentes porque son iguales.

6.A9 Escribe dos expresiones radicales equivalentes a $\sqrt[3]{x^2y}$**.**

Respuesta abierta, por ejemplo: $\sqrt[6]{x^4y^2}$, $\sqrt[12]{x^8y^4}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

7.1 **Escribe estos enunciados en forma de ecuación.**

a) La suma de dos números consecutivos es 21.
b) La suma de tres números pares consecutivos es 30.
c) Un número más su quinta parte es 12.

a) $x + (x + 1) = 21$

b) $2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 30$

c) $x + \frac{x}{5} = 12$

7.2 **En una academia de idiomas el número de alumnos que estudian francés es la mitad de los que estudian inglés. Calcula el número de alumnos de cada grupo si en total son 240.**

Sea x el número de alumnos de francés. $2x + x = 240 \Rightarrow x = 80$
Hay 80 alumnos que estudian francés y 160 que estudian inglés.

7.3 **Resuelve la siguiente ecuación: $5x + 4 = 19 + 2x$**

$5x + 4 = 19 + 2x$

$5x + 4 - 2x = 19 + 2x - 2x \Rightarrow 3x + 4 = 19$

$3x + 4 - 4 = 19 - 4 \Rightarrow 3x = 15$

$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3} \Rightarrow x = 5$

7.4 **Resuelve esta ecuación: $18x - 50 = 14x - 4x + 6$**

$18x - 50 = 14x - 4x + 6 \Rightarrow 18x - 50 - 10x + 50 = 10x + 6 - 10x + 50 \Rightarrow 8x = 56 \Rightarrow x = 7$

7.5 **Resuelve la ecuación: $6x - 4 = 60 - 2x$**

$6x - 4 = 60 - 2x \Rightarrow 6x - 4 + 2x + 4 = 60 - 2x + 2x + 4 \Rightarrow 8x = 64 \Rightarrow x = 8$

7.6 **Las edades de tres alumnos son números pares consecutivos.**
Si la suma de sus edades es 42, ¿cuántos años tiene cada uno?

La ecuación es $2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 42$.

$2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 42 \Rightarrow 6x + 6 = 42 \Rightarrow x = 6$

Tienen 12, 14 y 16 años respectivamente.

7.7 **María ha dibujado un rectángulo cuyo largo es tres veces el ancho.**
Si el perímetro del rectángulo mide 80 centímetros, ¿cuánto mide el área?

Si x es el ancho, $3x$ es el largo. Entonces, el perímetro es $x + 3x + x + 3x$.

$x + 3x + x + 3x = 80 \Rightarrow 8x = 80 \Rightarrow x = 10$ cm

$A = 10 \cdot 30 = 300$ cm^2

7.8 **Resuelve estas ecuaciones con paréntesis.**

a) $2(x + 1) - 3(x - 2) = x + 6$ **b) $x + 20 = 5(x - 20)$**

a) $2(x + 1) - 3(x - 2) = x + 6 \Rightarrow 2x + 2 - 3x + 6 = x + 6 \Rightarrow -x + 8 = x + 6 \Rightarrow 2 = 2x \Rightarrow x = 1$

b) $x + 20 = 5(x - 20) \Rightarrow x + 20 = 5x - 100 \Rightarrow 120 = 4x \Rightarrow x = 30$

7.9 Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores.

a) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 34$ **b)** $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 15$

a) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 34 \Rightarrow 20x - 15x + 12x = 60 \cdot 34 \Rightarrow 17x = 2\,040 \Rightarrow x = 120$

b) $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 15 \Rightarrow 6x + 3 \cdot 3x - 2 \cdot 5x = 12 \cdot 15 \Rightarrow 5x = 180 \Rightarrow x = 36$

7.10 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2(x + 2) - 5(2x - 3) = 3$ **b)** $8(x + 3) + 4(x - 2) = 9x - 7$

a) $2(x + 2) - 5(2x - 3) = 3 \Rightarrow 2x + 4 - 10x + 15 = 3 \Rightarrow -8x = -16 \Rightarrow x = 2$

b) $8(x + 3) + 4(x - 2) = 9x - 7 \Rightarrow 8x + 24 + 4x - 8 = 9x - 7 \Rightarrow 3x = -23 \Rightarrow x = -\frac{23}{3}$

7.11 Resuelve estas ecuaciones.

a) $4x + \frac{6x}{7} = \frac{3x + 2}{2} + 46$ **b)** $x - \frac{4x}{5} + 39 = x + \frac{x}{2}$

a) $4x + \frac{6x}{7} = \frac{3x + 2}{2} + 46 \Rightarrow 14 \cdot 4x + 2 \cdot 6x = 7(3x + 2) + 14 \cdot 46 \Rightarrow 47x = 658 \Rightarrow x = 14$

b) $x - \frac{4x}{5} + 39 = x + \frac{x}{2} \Rightarrow 10x - 2 \cdot 4x + 10 \cdot 39 = 10x + 5x \Rightarrow 390 = 13x \Rightarrow x = 30$

7.12 Decide cuál de estas ecuaciones es de segundo grado.

a) $x^2 = 9x - 18$ **b)** $3x^2 + 3x - 28 = 1 + 3x^2$ **c)** $2 - 5x^2 - x^3 = 3x^2 - 2x^3 + x^3$

La ecuación de 2.º grado es la a. En la ecuación b, al operar desaparecen los términos de grado 2, y la ecuación c es de grado 3.

7.13 ¿Qué ecuación tiene por soluciones 3 y 4?

a) $x^2 + 7x - 12 = 0$ **b)** $x^2 - 12x + 7 = 0$ **c)** $x^2 - 7x + 12 = 0$ **d)** $x^2 + 12x - 7 = 0$

La ecuación c. $3^2 - 7 \cdot 3 + 12 = 0$; $4^2 - 7 \cdot 4 + 12 = 0$

7.14 Escribe la ecuación de segundo grado que tenga estas soluciones.

a) 2 y 1 **b)** −4 y 5 **c)** 3 y −3 **d)** −1 y −7

a) $x^2 - (2 + 1)x + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $x^2 - (-4 + 5)x + (-4) \cdot 5 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0$

c) $x^2 - [3 + (-3)]x + 3 \cdot (-3) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$

d) $x^2 - [-1 + (-7)]x + (-1) \cdot (-7) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$

7.15 Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por raíces −2 y $\frac{1}{3}$.

$x^2 - \left(-2 + \frac{1}{3}\right)x + (-2) \cdot \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 5x - 2 = 0$

7.16 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $3x^2 - 12x = 0$ **b)** $x^2 + 25x = 0$ **c)** $-2x^2 - 6x = 0$ **d)** $-8x^2 + 24x = 0$

a) $3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(3x - 12) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = 4$

b) $x^2 + 25x = 0 \Rightarrow x(x + 25) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = -25$

c) $-2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(-2x - 6) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = -3$

d) $-8x^2 + 24x = 0 \Rightarrow x(-8x + 24) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = 3$

7.17 Resuelve estas ecuaciones.

a) $5x^2 - 20 = 0$ **b)** $-4x^2 + 100 = 0$

a) $5x^2 - 20 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, x = -2$

b) $-4x^2 + 100 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5, x = -5$

7.18 **Resuelve estas otras ecuaciones.**

a) $3x^2 = 0$

b) $-7x^2 = 0$

a) $3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

b) $-7x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

7.19 **Resuelve las ecuaciones.**

a) $3x^2 - 5x = x$

b) $3x^2 = 75x$

c) $2x^2 - x - 3 - 1 = x - 4$

d) $x^2 - x = 3x^2 - x$

a) $3x^2 - 5x = x \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(3x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

b) $3x^2 = 75x \Rightarrow x(3x - 75) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 25$

c) $2x^2 - x - 3 - 1 = x - 4 \Rightarrow x(2x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$

d) $x^2 - x = 3x^2 - x \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

7.20 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

a) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$; $x = 2, x = 1$

b) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$; $x = 2, x = \dfrac{1}{2}$

7.21 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

b) $x^2 - 11x + 30 = 0$

a) $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \dfrac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$; $x = 5, x = 2$

b) $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30}}{2 \cdot 1} = \dfrac{11 \pm \sqrt{1}}{2}$; $x = 6, x = 5$

7.22 **Sin resolverlas, averigua el número de soluciones de estas ecuaciones.**

a) $2x^2 + x + 2 = 0$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $3x^2 - 5x - 8 = 0$

d) $-3x^2 - 4x + 5 = 0$

Vemos el signo del discriminante.

a) $1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0$. No tiene soluciones reales.

b) $(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$. Tiene una única solución.

c) $(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) > 0$. Dos soluciones reales.

d) $(-4)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 > 0$. Dos soluciones reales.

7.23 **Plantea el sistema de ecuaciones lineales para este enunciado: "Una clase tiene 36 alumnos y el número de chicas es el triple que el de chicos". Trata de obtener la solución construyendo una tabla de valores.**

Sea x el número de chicas e y el número de chicos.

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x = 3y \end{cases}$$

y	0	1	2	...	9
$x = 3y$	0	3	6	...	27
$x + y$	0	4	8	...	36

En la clase hay 9 chicos y 27 chicas.

7.24 **Comprueba si los valores $x = 2$ e $y = 7$ son soluciones de los siguientes sistemas.**

a) $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4 \cdot 2 - 7 = 1 \\ 2 + 2 \cdot 7 = 16 \neq 15 \end{cases}$

$x = 2$ e $y = 7$ no son solución del sistema.

b) $\begin{cases} -3 \cdot 2 + 7 = 1 \\ 5 \cdot 2 - 7 = 3 \end{cases}$

$x = 2$ e $y = 7$ sí son solución del sistema.

7.25 **Resuelve estos sistemas, sumando o restando ecuaciones.**

a) $\begin{cases} x + y - 50 \\ x - y = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3x - 3y = 15 \end{cases}$

a) Sumando:

$$\begin{array}{r} x + y = 50 \\ \underline{x - y = 10} \\ 2x \quad = 60 \Rightarrow \end{array}$$
$\Rightarrow x = 20 \quad y = 20$

b) Restando:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 12 \\ \underline{3x - 3y = 15} \\ -x \quad = -3 \Rightarrow \end{array}$$
$\Rightarrow x = 3 \quad y = -2$

7.26 **Resuelve los siguientes sistemas, sumando o restando ecuaciones.**

a) $\begin{cases} x + 2y = 100 \\ x - 2y = 60 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y = 12 \\ 3x - y = 22 \end{cases}$

a) Sumando:

$$\begin{array}{r} x + 2y = 100 \\ \underline{x - 2y = 60} \\ 2x \quad = 160 \end{array}$$
$\Rightarrow x = 80 \quad y = 10$

b) Restando:

$$\begin{array}{r} 2x - y = 12 \\ \underline{3x - y = 22} \\ -x \quad = -10 \Rightarrow \end{array}$$
$\Rightarrow x = 10 \quad y = 8$

7.27 **Utiliza la regla de la suma de ecuaciones para resolver los siguientes sistemas.**

a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = 0 \end{cases}$

a)
$$\begin{array}{r} x + y = 20 \\ \underline{x - y = 10} \\ 2x \quad = 30 \end{array}$$
$\Rightarrow x = 15 \quad y = 5$

b)
$$\begin{array}{r} x + y = 2 \\ \underline{-x - y = 0} \\ 0 = 2 \end{array}$$
No tiene solución.

7.28 **La suma de dos números es 120 años y su diferencia 60. ¿Cuáles son? Utiliza la regla de la suma de ecuaciones para resolver el problema.**

Sean los números x e y.

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ \underline{x - y = 60} \end{cases}$$
$2x \quad = 180 \Rightarrow x = 90,\ y = 30$

Los números son 30 y 90.

7.29 **Resuelve por sustitución estos sistemas.**

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x + 2y = 19 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + y = 6 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = 6 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x + 2y = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 - 2x \\ x + 2(20 - 2x) = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 - 2x \\ x + 40 - 4x = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 - 2x \\ -3x = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 - 2 \cdot 7 = 6 \\ x = 7 \end{cases}$

7.30 Resuelve los siguientes sistemas por sustitución.

a) $\begin{cases} \mathbf{x - y = 3} \\ \mathbf{3x + 2y = 44} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{5x + 2y = 46} \\ \mathbf{x - y = -2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 3(3 + y) + 2y = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 9 + 3y + 2y = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 5y = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 7 = 10 \\ y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 2y = 46 \\ x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(y - 2) + 2y = 46 \\ x = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y = 56 \\ x = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 6 \end{cases}$

7.31 Plantea para este enunciado un sistema de ecuaciones y resuélvelo por sustitución: "En un corral hay conejos y patos. El número de animales es 30 y el de patas 100". ¿Cuántos conejos y patos hay en el corral?

Sea x el número de conejos e y el de patos

$\begin{cases} x + y = 30 \\ 4x + 2y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ 4(30 - y) + 2y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ -2y = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 - 10 = 20 \\ y = 10 \end{cases}$

Hay 20 conejos y 10 patos.

7.32 La base de un rectángulo es 12 centímetros mayor que la altura y su perímetro es 64 centímetros. Halla sus dimensiones. Para ello, plantea un sistema y resuélvelo por sustitución.

Sea x la longitud de la base e y la de la altura.

$\begin{cases} x = 12 + y \\ 2x + 2y = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 + y \\ 2(12 + y) + 2y = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 + y \\ 4y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 + 10 = 22 \\ y = 10 \end{cases}$

La base del rectángulo mide 22 centímetros, y la altura, 10.

7.33 Resuelve por reducción estos sistemas.

a) $\begin{cases} \mathbf{4x - 5y = 2} \\ \mathbf{5x + 3y = 21} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{x - 5y = 8} \\ \mathbf{27x + 8y = 25} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \xrightarrow{\times 3} 12x - 15y = 6 \\ 5x + 3y = 21 \xrightarrow{\times 5} \underline{25x + 15y = 105} \end{cases}$

$37x = 111 \Rightarrow x = 3$

$\begin{cases} 4x - 5y = 2 \xrightarrow{\times 5} 20x - 25y = 10 \\ 5x + 3y = 21 \xrightarrow{\times 4} \underline{20x + 12y = 84} \end{cases}$

$-37y = -74 \Rightarrow y = 2$

b) $\begin{cases} x - 5y = 8 \xrightarrow{\times 8} 8x - 40y = 64 \\ 27x + 8y = 25 \xrightarrow{\times 5} \underline{135x + 40y = 125} \end{cases}$

$143x = 189 \Rightarrow x = \dfrac{189}{143}$

$\begin{cases} x - 5y = 8 \xrightarrow{\times 27} 27x - 135y = 216 \\ 27x + 8y = 25 \longrightarrow \underline{27x + 8y = 25} \end{cases}$

$143y = -191 \Rightarrow x = \dfrac{-191}{143}$

7.34 Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} \mathbf{6x + 5y = 16} \\ \mathbf{5x - 12y = -19} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{22x + 15y = 9} \\ \mathbf{18x + 28y = 71} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 6x + 5y = 16 \\ 5x - 12y = -19 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{\times 12} \\ \xrightarrow{\times 5} \end{matrix} \begin{cases} 72x + 60y = 192 \\ \underline{25x - 60y = -95} \end{cases}$

$97x = 97 \Rightarrow x = 1$

$\begin{cases} 6x + 5y = 16 \\ 5x - 12y = -19 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{\times 5} \\ \xrightarrow{\times(-6)} \end{matrix} \begin{cases} 30x + 25y = 80 \\ \underline{-30x + 72y = 114} \end{cases}$

$97y = 194 \Rightarrow y = 2$

b) $\begin{cases} 22x + 15y = 9 \\ 18x + 25y = 71 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{\times 9} \\ \xrightarrow{\times 11} \end{matrix} \begin{cases} 198x + 135y = 81 \\ \underline{198x + 275y = 781} \end{cases}$

$-140y = -700 \Rightarrow y = 5$

$\begin{cases} 22x + 15y = 9 \\ 18x + 25y = 71 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{\times 5} \\ \xrightarrow{\times 13} \end{matrix} \begin{cases} 110x + 75y = 45 \\ \underline{54x + 75y = 213} \end{cases}$

$56x = -168 \Rightarrow x = -3$

7.35 Resuelve los sistemas por reducción.

$\times 2$

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 16 \\ 2x + 6y = 16 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 7y = -23 \\ 5x + 4y = -23 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 16 \xrightarrow{\times 2} 6x + 10y = 32 \\ 2x + 6y = 16 \xrightarrow{\times 3} \underline{6x + 18y = +48} \end{cases}$

$$-8y = -16 \Rightarrow y = 2$$

$\begin{cases} 3x + 5y = 16 \xrightarrow{\times 6} 18x + 30y = 96 \\ 2x + 6y = 16 \xrightarrow{\times 5} \underline{10x + 30y = 80} \end{cases}$

$$8x \quad = 16 \Rightarrow x = 2$$

b) $\begin{cases} 3x + 7y = -23 \xrightarrow{\times 5} 15x + 35y = -115 \\ 5x + 4y = -23 \xrightarrow{\times 3} \underline{15x + 12y = -69} \end{cases}$

$$23y = -46 \Rightarrow y = -2$$

$\begin{cases} 3x + 7y = -23 \xrightarrow{\times 4} 12x + 28y = -92 \\ 5x + 4y = -23 \xrightarrow{\times 7} \underline{35x + 28y = -161} \end{cases}$

$$-23x \quad = 69 \Rightarrow x = -3$$

7.36 Halla dos números naturales tales que su suma aumentada en 22 sea igual a dos veces el mayor, y que la diferencia de los dos números menos 1 sea igual al menor.

Sean x e y los números.

$$\begin{cases} x + y + 22 = 2x \\ x - y - 1 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = -22 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = -44 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$-y = -21 \qquad -x \quad = -43$$

Los números son 43 y 21.

7.37 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones.

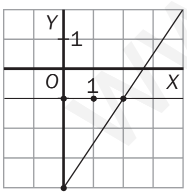
a) $\begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 6x + y = 0 \end{cases}$

a) Se despeja y en las ecuaciones:

$y = \dfrac{3x - 8}{2}$; $y = -1$

x	$y = \dfrac{3x - 8}{2}$
0	-4
2	-1

x	$y = -1$
0	-1
2	-1



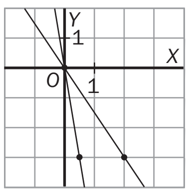
Solución: $x = 2$, $y = -1$

b) Se despeja y en las ecuaciones:

$y = -\dfrac{3}{2}x$; $y = -6x$

x	$y = -\dfrac{3}{2}x$
0	0
2	-3

x	$y = -6x$
0	0
$\dfrac{1}{2}$	-3



Solución: $x = 0$, $y = 0$

7.38 **Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones.**

a) $\begin{cases} 2x - 3y - 8 = x \\ 4x - 12y - 30 = 2y \end{cases}$

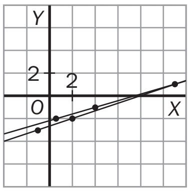
b) $\begin{cases} -3x + 5y + 14 = 3y \\ 7x + 4y - 2 = -2x \end{cases}$

a) Se despeja y en las ecuaciones:

$y = \frac{x - 8}{3}$; $y = \frac{4x - 30}{14}$

x	$y = \frac{x-8}{3}$
2	-2
-1	-3

x	$y = \frac{4x-30}{14}$
4	-1
$\frac{1}{2}$	-2



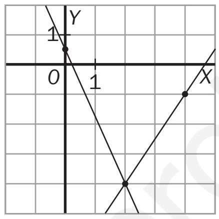
Solución: $x = 11$, $y = 1$

a) Se despeja y en las ecuaciones:

$y = \frac{3x - 14}{2}$; $y = \frac{-9x + 2}{4}$

x	$y = \frac{3x-14}{2}$
4	-1
2	-4

x	$y = \frac{9x+2}{4}$
0	$\frac{1}{2}$
-2	5



Solución: $x = 2$, $y = -4$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

7.39 **Un motorista sale del punto *F* hacia el punto *K* a una velocidad media de 80 km/h, y al mismo tiempo sale otro motorista de *K* hacia *F* a una velocidad media de 100 km/h. Si la distancia entre esos puntos es de 360 kilómetros, ¿cuánto tardarán en encontrarse? ¿Cuántos kilómetros ha recorrido cada uno?**

La suma de las distancias que recorre cada uno es 360; $d_1 + d_2 = 360$.

La distancia que recorre el motorista que va de *F* a *K* es $80t$, y la que recorre el motorista es $100t$.

Se cumple entonces que $80t + 100t = 360$, despejamos t y obtenemos $t = 2$.

Tardan en encontrarse 2 horas.

El primer motorista recorre $80 \cdot 2 = 160$ km, y el segundo, $100 \cdot 2 = 200$ km.

7.40 **Un ciclista sale del punto *A* a una velocidad media de 30 km/h, y trata de alcanzar a un amigo que ha salido una hora antes del mismo punto y cuya velocidad media es de 20 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzarle?**

La distancia que recorren los ciclistas es la misma. Sea t el tiempo que tarda el segundo en recorrer esa distancia, entonces $30t = 20 \cdot (t + 1)$. Despejamos t y obtenemos que el tiempo que el segundo ciclista tardará en alcanzar al primero es $t = 2$ horas.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Ecuaciones de primer grado

7.41 **Relaciona cada ecuación con su número de soluciones.**

$5x = 15$	**Infinitas soluciones**
$x^2 + 7 = 0$	**2 soluciones**
$x^2 + 9 + 6x = (x + 3)^2$	**1 solución**
$x^2 - 25 = 0$	**0 soluciones**

7.42 **En una familia, la madre gana el triple que el padre y entre los dos ingresan mensualmente 4 800 euros.**

a) Escribe la ecuación que corresponde a esa situación.
b) ¿Cuánto gana cada uno?

a) $x + 3x = 4\,800$

b) $4x = 4\,800 \Rightarrow x = 1\,200$; $3x = 3\,600$, El padre gana 1 200 euros, y la madre, 3 600.

7.43 **En la ecuación $8x - 6 = -5x + 20$, realiza las transformaciones que se indican.**

1. Suma $5x$ a los dos miembros.

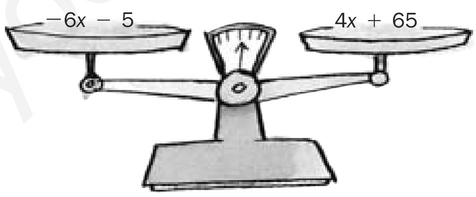
2. Suma 6 a los dos miembros.

3. Divide por 13 los dos miembros.

¿Cuál es la solución?

1. $13x - 6 = 20$; 2. $13x = 26$; 3. $x = 2$. La solución es $x = 2$.

7.44 **¿Para qué valor de x la balanza está equilibrada?**



$-6x - 5 = 4x + 65 \Rightarrow -70 = 10x \Rightarrow x = -7$

7.45 **En una clase de 28 alumnos de 3.º de ESO hay doble número de alumnos americanos que africanos y doble número de alumnos europeos que americanos.**

a) Elige una incógnita y plantea una ecuación que refleje el enunciado.

b) ¿Cuántos alumnos hay de cada continente?

a) Sea x el número de alumnos africanos. Entonces la ecuación es $x + 2x + 4x = 28$.

b) Resolvemos: $7x = 28 \Rightarrow x = 4$. Hay 4 alumnos africanos, 8 americanos y 16 europeos.

7.46 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{x}{5} - \frac{x}{9} = \frac{x}{3} - 11$

b) $3(x - 4) + 2(3x - 1) = 7x - 18$

c) $-4(2x - 1) + \frac{3x + 1}{2} = -5x - 3$

d) $4(x - 3) + \frac{x}{2} = -(x - 4) + 1$

e) $3(2x - 5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x + 3)$

f) $\frac{x - 4}{5} - 4(-2x + 1) - \frac{(-4x + 2)}{10} = 2(x - 3) + \frac{5x + 6}{2}$

a) $\frac{x}{5} - \frac{x}{9} = \frac{x}{3} - 11 \Rightarrow 9x - 5x = 15x - 495 \Rightarrow 495 = 11x \Rightarrow x = 45$

b) $3(x - 4) + 2(3x - 1) = 7x - 18 \Rightarrow 3x - 12 + 6x - 2 = 7x - 18 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$

c) $-4(2x - 1) + \frac{3x + 1}{2} = -5x - 3 \Rightarrow -8x + 4 + \frac{3x + 1}{2} = -5x - 3 \Rightarrow -3x = -15 \Rightarrow x = 5$

d) $4(x - 3) + \frac{x}{2} = -(x - 4) + 1 \Rightarrow 8x - 24 + x = -2x + 8 + 2 \Rightarrow 11x = 34 \Rightarrow x = \frac{34}{11}$

e) $3(2x - 5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x + 3) \Rightarrow 28x - 42 = x - 10x - 6 \Rightarrow 37x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{37}$

f) $\frac{x - 4}{5} - 4(-2x + 1) - \frac{(-4x + 2)}{10} = 2(x - 3) + \frac{5x + 6}{2} \Rightarrow 2x - 8 - 40(-2x + 1) - (-4x + 2) =$
$= 20(x - 3) + 25x + 30 \Rightarrow 86x - 50 = 45x - 30 \Rightarrow 41x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{41}$

Ecuaciones de segundo grado

7.47 Escribe en cada caso la ecuación de segundo grado que tenga estas soluciones.

a) −3 y 4 **b) 5 y −5** **c) 0 y 3** **d) −1 y −3**

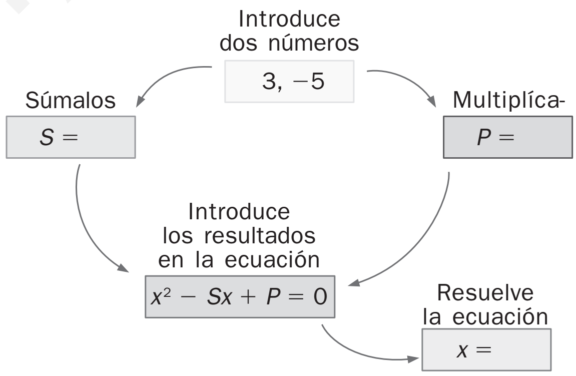
a) $x^2 - (-3 + 4)x + (-3) \cdot 4 = x^2 - x - 12 = 0$

b) $x^2 - (5 - 5)x + 5 \cdot (-5) = x^2 - 25 = 0$

c) $x^2 - (0 + 3)x + 0 \cdot 3 = x^2 - 3x = 0$

d) $x^2 - (-1 - 3)x + (-1)(-3) = x^2 + 4x + 3 = 0$

7.48 Copia y completa el gráfico.



$S = -2$, $P = -15$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$x = 3$, $x = -5$

7.49 Resuelve las ecuaciones incompletas de segundo grado.

a) $5x^2 - 20x = 0$ **b)** $2x^2 - 32 = 0$ **c)** $17x^2 = 0$

a) $5x^2 - 20x = 0 \Rightarrow x \cdot (5x - 20) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 4$

b) $2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{32}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x = 4,\ x = -4$

c) $17x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

7.50 Resuelve estas ecuaciones utilizando la fórmula explicada en el texto.

a) $x^2 - 11x - 12 = 0$ **b)** $x^2 + 9x + 18 = 0$

a) $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{2} = \dfrac{11 \pm 13}{2} = \begin{cases} 12 \\ -1 \end{cases}$

b) $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \dfrac{-9 \pm 3}{2} = \begin{cases} -3 \\ -6 \end{cases}$

7.51 Soluciona las ecuaciones sin utilizar la fórmula.

a) $(x + 3) \cdot (x - 6) = 0$ **b)** $(3x - 1) \cdot (2x + 5) = 0$

a) $x = -3,\ x = 6$

b) $x = \dfrac{1}{3},\ x = -\dfrac{5}{2}$

7.52 Relaciona cada ecuación con su número de soluciones.

$3x^2 + x + 2 = 0$	**2 soluciones**
$x^2 - 5x + 1 = 0$	**1 solución**
$4x^2 + 4x + 1 = 0$	**0 soluciones**

Vemos el signo de los discriminantes.

$3x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 < 0 \rightarrow 0$ soluciones

$x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \rightarrow 2$ soluciones

$4x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0 \rightarrow 1$ solución

7.53 Desarrolla las ecuaciones hasta conseguir escribirlas en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y, luego, resuélvelas.

a) $6x^2 - 1 + \dfrac{2x \cdot (-x + 3)}{3} = \dfrac{5x^2 - 2}{6} - 4x^2 + 2 + \dfrac{47}{6}$

b) $\dfrac{3(x^2 - 11)}{5} - \dfrac{2(x^2 - 60)}{7} = 36$

a) $6x^2 - 1 + \dfrac{2x(-x - 3)}{3} = \dfrac{5x^2 - 2}{6} - 4x^2 + 2 + \dfrac{47}{6} \Rightarrow 36x^2 - 6 + 4x(-x + 3) = 5x^2 - 2 - 24x^2 + 12 + 47 \Rightarrow$

$\Rightarrow 51x^2 + 12x - 63 = 0$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 51 \cdot (-63)}}{2 \cdot 51} = \frac{-12 \pm 114}{102} = \begin{cases} -\dfrac{21}{17} \\ 1 \end{cases}$$

b) $\dfrac{3(x^2 - 11)}{5} - \dfrac{2(x^2 - 60)}{7} = 36 \Rightarrow 21(x^2 - 11) - 10(x^2 - 60) = 1\,260 \Rightarrow 11x^2 = 891 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm 9$

7.54 La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 14 centímetros y la hipotenusa mide 10 centímetros. Aplica el teorema de Pitágoras, utilizando una sola incógnita, y halla el valor de los catetos.

Como la suma de los catetos es 14, tenemos que estos valen x y $14 - x$.

Entonces, por el teorema de Pitágoras: $10^2 = x^2 + (14 - x)^2 \Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm 2}{2} = \begin{cases} 8 \\ 6 \end{cases}$$

Los catetos miden 8 y 6 centímetros.

Sistemas de ecuaciones

7.55 Dos números se diferencian en 7 y el triple de uno menos el doble del otro se diferencian en 26.

a) Escribe el sistema que corresponda al enunciado.

b) Resuelve el sistema obtenido por tanteo.

a) $\begin{cases} x - y = 7 \\ 3x - 2y = 26 \end{cases}$

b)

x	7	8	9	...	12
$x - 7 = y$	0	1	2	...	5
$3x - 2y$	21	22	23	...	26

La solución es: $x = 12$ e $y = 5$.

7.56 Indica, sin resolverlos, si estos sistemas son compatibles o incompatibles.

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 7} \\ \boldsymbol{x + y = 10} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{2x - y = 5} \\ \boldsymbol{2y - x = -1} \end{cases}$

a) Incompatible, porque tendríamos $7 = 10$.

b) Compatible.

7.57 Comprueba si los valores $x = -2$ e $y = 7$ son solución del sistema.

a) $\begin{cases} \boldsymbol{5x + y = 3} \\ \boldsymbol{-3x + 2y = 20} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{x - y = -9} \\ \boldsymbol{2x + y = 3} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 5 \cdot (-2) + 7 = -3 \neq 3 \\ -3 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 = 20 \end{cases}$. No son solución. b) $\begin{cases} -2 - 7 = -9 \\ 2 \cdot (-2) + 7 + 3 \end{cases}$. Sí son solución.

7.58 Plantea un sistema que tenga como solución $x = -3$ e $y = 5$.

Respuesta abierta, por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -8 \end{cases}$

7.59 Resuelve estos sistemas por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x = -4y + 2} \\ \boldsymbol{3x + 5y = -1} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{-2x + 3y = 1} \\ \boldsymbol{2x - 7y = -3} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = -4y + 2 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4y + 2 \\ 3(-4y + 2) + 5y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4y + 2 \\ -7y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \cdot 1 + 2 = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Solución: $x = -2$, $y = 1$

b) $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 2x - 7y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - 3y}{-2} \\ 2 \cdot \dfrac{1 - 3y}{-2} - 7y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - 3y}{-2} \\ -4y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - 3 \cdot 1}{-2} = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Solución: $x = 1$, $y = 1$

7.60 Resuelve los sistemas utilizando el método de reducción.

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 6y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2 \cdot (5x + 2y = 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 10x + 4y = 2 \end{cases}$

$13x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{13}$

$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot (3x - 4y = 7) \\ -3 \cdot (5x + 2y = 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x - 20y = 35 \\ -15x - 6y = -3 \end{cases}$

$-26y = 32 \Rightarrow y = -\frac{32}{26} = -\frac{16}{13}$

b) $\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot (5x + 4y = -1) \\ 2 \cdot (3x - 6y = 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 12y = -3 \\ 6x - 12y = 10 \end{cases}$

$21x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

$\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot (5x + 4y = -1) \\ -5 \cdot (3x - 6y = 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 12y = -3 \\ -15x + 30y = -25 \end{cases}$

$42y = -28 \Rightarrow y = -\frac{28}{42} = -\frac{2}{3}$

7.61 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas.

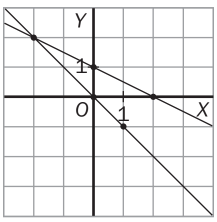
a) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x - y = -10 \\ 5x + y = 1 \end{cases}$

a) Se despeja y en las ecuaciones:

$y = \frac{-x + 2}{2}$; $y = -x$

x	$y = \frac{-x + 2}{2}$
0	1
2	0

x	$y = -x$
0	0
1	-1



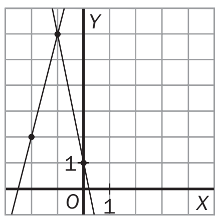
Solución: $x = -2$, $y = 2$

b) Se despeja y en las ecuaciones:

$y = 4x + 10$; $y = -5x + 1$

x	$y = 4x + 10$
-2	2
-1	6

x	$y = -5x + 1$
0	1
1	-4



Solución: $x = -1$, $y = 6$

7.62 **Elimina los paréntesis y los denominadores de las ecuaciones y resuelve los sistemas.**

a) $\begin{cases} -2(x+1)+3(2y-4)=16 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{5}-\frac{2y}{3}=6 \\ \frac{-x}{10}+\frac{5y}{6}=-6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y=1 \\ \frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y=5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} -2(x+1)+3(2y-4)=16 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2+6y-12=16 \\ 2x-3y=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$

Solución: $x=-3$, $y=4$

b) $\begin{cases} \frac{x}{5}-\frac{2y}{3}=6 \\ \frac{-x}{10}+\frac{5y}{6}=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-10y=90 \\ -3x+25y=-180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=-6 \end{cases}$

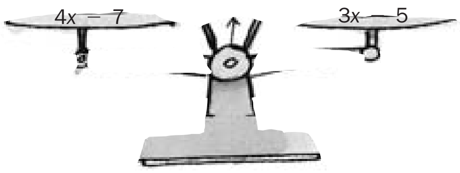
Solución: $x=10$, $y=-6$

c) $\begin{cases} x-y=1 \\ \frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ 8x+15y=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$

Solución: $x=5$, $y=4$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

7.63 Observa la balanza.



Encuentra un valor de la incógnita tal que la balanza:

a) Se incline a la derecha. **b) Se incline a la izquierda.** **c) Consiga el equilibrio.**

a) $x = 1$, $4 \cdot 1 - 7 = -3 < -2 = 3 \cdot 1 - 5$

b) $x = 3$, $4 \cdot 3 - 7 = 5 > 4 = 3 \cdot 3 - 5$

c) $x = 2$, $4 \cdot 2 - 7 = 1 = 1 = 3 \cdot 2 - 5$

7.64 ¿Qué es resolver una ecuación? Resuelve la ecuación $(x + 1) \cdot (x - 4) = 0$.

Es encontrar un valor para la incógnita de modo que se cumpla la igualdad.

$(x + 1) \cdot (x - 4) = 0$. Para que el producto sea 0, alguno de los dos factores debe ser 0, de modo que $x = -1$ ó $x = 4$.

7.65 ¿A qué ecuación corresponden las soluciones $x = -2$ y $x = 3$?

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ **c) $x^2 + 5x + 6 = 0$**

b) $x^2 + x - 6 = 0$ **d) $x^2 - x - 6 = 0$**

a) $(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6 = 20 \neq 0$; $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$

b) $(-2)^2 + (-2) - 6 = -4 \neq 0$; $3^2 + 3 - 6 = 6 \neq 0$

c) $(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = 0$; $3^2 + 5 \cdot 3 + 6 = 30 \neq 0$

d) $(-2)^2 - (-2) - 6 = 0$; $3^2 - 3 - 6 = 0$

Corresponde a la ecuación d.

7.66 ¿Cuál de los tres coeficientes de una ecuación de segundo grado nunca puede ser 0? Justifica tu respuesta.

No puede ser 0 el coeficiente que va con x^2, porque si fuese 0 tendríamos una ecuación del tipo $0x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow bx + c = 0$, que no es una ecuación de segundo grado.

7.67 ¿Qué valor debe tener c para que la solución de la ecuación $9x^2 - 30x + c = 0$ sea única?

Para que tenga solución única, el discriminante tiene que ser 0, $b^2 - 4ac = 0$, que en nuestro caso es $900 - 36c = 0 \Rightarrow c = 25$.

7.68 ¿Dos ecuaciones de segundo grado pueden tener las mismas soluciones?

Sí, $(x - 1)(x + 1) = 0$ tiene las mismas soluciones que $2(x - 1)(x + 1) = 0$.

7.69 ¿Dos ecuaciones de segundo grado pueden tener una solución común y la otra distinta? Justifica la respuesta.

Sí, las ecuaciones $(x - 1)(x + 1) = 0$ y $x \cdot (x + 1) = 0$ tienen en común la solución $x = -1$, y sin embargo la otra solución es diferente.

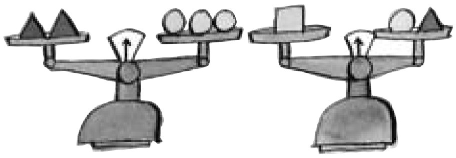
7.70 Sin resolverlos, indica cuántas soluciones tiene cada uno de estos sistemas.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ -6x + 4y = 10 \end{cases}$

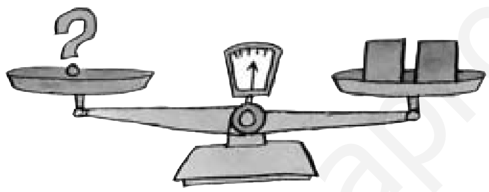
a) No tiene ninguna solución porque tenemos la igualdad $-5 = 1$, que es falsa.

b) Tiene infinitas soluciones porque la segunda ecuación es la primera multiplicada por -2.

7.71 Si tenemos equilibradas estas dos balanzas:



¿cuántas bolas equilibran esta tercera balanza?



1 cuadrado = 1 bola + 1 triángulo
2 cuadrados = 2 bolas + 2 triángulos
2 triángulos = 3 bolas
2 cuadrados = 5 bolas

Equilibran esta balanza 5 bolas.

7.72 La ecuación $x^2 + x + c = 0$, ¿para qué valores de c tiene una solución? ¿Y dos soluciones? ¿Y ninguna solución?

Depende del valor del discriminante.

$1 - 4c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$. Tiene una solución.

$1 - 4c > 0 \Rightarrow c < \frac{1}{4}$. Tiene dos soluciones.

$1 - 4c < 0 \Rightarrow c > \frac{1}{4}$. No tiene ninguna solución.

PROBLEMAS PARA APLICAR

7.73 Mario gasta un viernes por la tarde en el cine $\frac{1}{2}$ del dinero que llevaba, y un $\frac{1}{3}$ de lo que le queda en un bocata a la salida del cine. Vuelve a casa con 4 euros. ¿Cuánto dinero llevaba al salir de casa?

Si x es el dinero que llevaba al salir de casa, tenemos que: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\frac{1}{2}x + 4 = x \Rightarrow 3x + x + 24 = 6x \Rightarrow 24 = 2x \Rightarrow x = 12$

Mario salió de casa con 12 euros.

7.74 En una clase de 3.º de ESO, la cuarta parte repiten curso. El director cambió a tres repetidores del grupo por otros tres de otro grupo que no habían repetido. Ahora solo repiten curso $\frac{1}{7}$ del total. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?

Sea x el número de alumnos de la clase.

Entonces $\frac{x}{4}$ es el número de repetidores antes.

$\frac{x}{4} - 3 = \frac{1}{7}x \Rightarrow \frac{7x - 84}{28} = \frac{4x}{28} \Rightarrow 3x = 84 = x = 28$

En clase hay 28 alumnos.

7.75 Me faltan 4,10 euros para comprar mi pizza favorita. Si tuviera el triple de lo que tengo compraría 2 pizzas. ¿Cuánto cuesta la pizza y cuánto dinero llevo?

Sea x el precio de la pizza, entonces $x - 4{,}1$ es el dinero que llevo.

$3(x - 4{,}1) = 2x \Rightarrow 3x - 12{,}3 = 2x \Rightarrow x = 12{,}3$

La pizza vale 12,30 €. Llevo 8,20 €.

7.76 En una fiesta a la que acuden 42 personas, hay tres hombres más que mujeres y tantos niños como hombres y mujeres juntos. Halla el número de hombres, mujeres y niños.

Sea x el número de mujeres, entonces $x + 3$ es el número de hombres y $2x + 3$ es el número de niños.

$x + x + 3 + 2x + 3 = 42 \Rightarrow 4x + 6 = 42 \Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = 9$

Hay 9 mujeres, 12 hombres y 21 niños.

7.77 Javier tiene 5 años más que su hermano Miguel y su madre tiene 42 años. Dentro de tres años la edad de la madre será el triple que la suma de las edades de los hijos. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

Si x es la edad actual de Miguel, la edad actual de Javier es $x + 5$.

$42 + 3 = 3(x + 3 + x + 5 + 3) \Rightarrow 45 = 3(2x + 11) \Rightarrow 12 = 6x \Rightarrow x = 2$

Miguel tiene 2 años, y Javier, 7.

7.78 En el Concurso Literario Anual, la asociación de padres y madres de alumnos de un instituto premia con libros, por un valor de 196 euros, a los alumnos que hayan presentado las tres mejores redacciones. Deciden repartir el premio proporcionalmente a sus puntuaciones: 10; 9,5 y 8,5. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada alumno premiado?

Si x es la constante de proporcionalidad:

$10x + 9{,}5x + 8{,}5x = 196 \Rightarrow 28x = 196 \Rightarrow x = 7$

A quien obtuvo un 10 le corresponden 70 €, quien obtuvo 9,5 recibirá 66,50 € y la persona de puntuación 8,5 será premiada con 59,50 €.

7.79 La diferencia entre el denominador y el numerador de una fracción es 18. Se sabe que si se suma 8 unidades a cada uno de los términos, la fracción resultante es equivalente a $\frac{3}{5}$. Halla la fracción.

$$\frac{x}{y} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 18 \\ \dfrac{x+8}{y+8} = \dfrac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 18 \\ \dfrac{x+8}{x+26} = \dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow 5x + 40 = 3x + 78 \Rightarrow 2x = 38 \Rightarrow x = 19 \Rightarrow y = 37 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{19}{37}$$

La fracción es $\frac{19}{37}$.

7.80 Los coeficientes de una ecuación de segundo grado son 1, 2 y 5. Averigua cuál es el coeficiente de *x* si se sabe que la ecuación tiene dos soluciones distintas.

a	*b*	*c*	$b^2 - 4ac$
2	5	1	$25 - 8 = 17$
5	2	1	$4 - 20 = -16$
1	2	5	$4 - 20 = -16$
1	5	2	$25 - 8 = 17$
2	1	5	$1 - 40 = -39$
5	1	2	$1 - 40 = -39$

Si $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ dos soluciones distintas, entonces la solución es $2x^2 + 5x + 1 = 0$ ó $x^2 + 5x + 2 = 0$.

7.81 La resolución de una ecuación de segundo grado se ha emborronado y hay partes que no se aprecian.

$$x = \frac{-9 + \sqrt{\ldots}}{4} = \begin{cases} \ldots \\ -5 \end{cases}$$

¿Puedes averiguar de qué ecuación se trataba?

$$\left.\begin{matrix} b = 9 \\ a = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{-9 - 11}{4} = -5 \Rightarrow b^2 - 4ac = 121 \Rightarrow 81 - 8c = 121 \Rightarrow -8c = 40 \Rightarrow c = -5$$

La ecuación buscada es: $2x^2 + 9x - 5 = 0$.

7.82 Marta y Álex quedan todas las tardes en la biblioteca. Entre ambos recorren 6 kilómetros. Álex camina a una velocidad de 7 kilómetros por hora y Marta a 5 kilómetros por hora. Ambos salen de sus casas y llegan a la biblioteca al mismo tiempo.

a) ¿Cuánto tardan en llegar a la biblioteca?

b) ¿Cuál es la distancia de cada casa a la biblioteca?

$$v = \frac{e}{t}$$

$$t_A = t_B$$

$$\frac{e_A}{v_A} = \frac{e_B}{v_B} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{6 - x}{5} \Rightarrow 5x = 42 - 7x \Rightarrow 12x = 42 \Rightarrow x = 3{,}5$$

a) $t_A = \frac{3{,}5}{7} = 0{,}5 = 30$, tardan 30 minutos en encontrarse.

b) La distancia de la biblioteca a casa de Alex es 3,5 km, y a casa de Marta, $6 - 3{,}5 = 2{,}5$ km.

7.83 **Durante el recreo, en la cafetería de mi instituto, compro todas las mañanas un bocadillo y un refresco. El bocadillo cuesta el triple que el refresco, y en total me cobran 1,80 euros. ¿Cuál es el precio del bocadillo?, ¿y el del refresco?**

Sea x el precio del refresco, el del bocadillo es entonces $3x$. $3x + x = 1{,}8 \Rightarrow 4x = 1{,}8 \Rightarrow x = 0{,}45$

El precio del bocadillo es 1,35 €, y el del refresco, 0,45 €.

7.84 **En un mercadillo solidario se venden dos tipos de figuras de artesanía. Unas a 1,50 euros y otras a 2,50 euros. Se vendieron 82 figuras y se obtuvieron 154 euros. ¿Cuántas unidades se vendieron de cada tipo?**

Sean x el número de figuras vendidas de 1,50 €, e y, el número de figuras vendidas de 2,50 €.

$$\begin{cases} x + y = 82 \\ 1{,}5x + 2{,}5y = 154 \end{cases} \Rightarrow y = 82 - x \Rightarrow 1{,}5x + 2{,}5(82 - x) = 154 \Rightarrow 1{,}5x + 205 - 2{,}5x = 154 \Rightarrow -x = -51 \Rightarrow x = 51 \Rightarrow y = 31$$

Se vendieron 51 unidades de figuras de 1,50 € y 31 unidades de 2,50 €.

7.85 **Una caja de material de geometría contiene objetos triangulares y rectangulares. En total hay 20 objetos y se pueden contar hasta 68 vértices. ¿Cuántos objetos hay de cada clase?**

Sea x el número de objetos triangulares, e y, el número de objetos rectangulares.

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x + 4y = 68 \end{cases} \Rightarrow 3(20 - y) + 4y = 68 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x = 12$$

Hay 12 objetos triangulares y 8 objetos rectangulares.

7.86 **Dos números suman 46 y la diferencia de sus cuadrados es 92. ¿Qué números son?**

$$\begin{cases} x + y = 46 \\ x^2 - y^2 = 92 \end{cases} \Rightarrow y = 46 - x \Rightarrow x^2 - (46 - x)^2 = 92 \Rightarrow x^2 - (2\,116 + x^2 - 92x) = 92 \Rightarrow 92x = 2\,208 \Rightarrow x = 24 \Rightarrow y = 22$$

Los números son 22 y 24.

7.87 **La superficie de una habitación rectangular mide 11,25 metros cuadrados, y el perímetro, 14 metros. ¿Cuáles son las dimensiones de la habitación?**

$$\begin{cases} x \cdot y = 11{,}25 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 11{,}25 \\ x + y + 7 \end{cases} \Rightarrow y = 7 - x \Rightarrow x \cdot (7 - x) = 11{,}25 \Rightarrow 7x - x^2 = 11{,}25 \Rightarrow x^2 - 7x + 11{,}25 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 45}}{2} = \frac{7 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 4{,}5,\ x_2 = 2{,}5$$

Largo = 4,5 m.
Ancho = 2,5 m

7.88 **El perímetro de un triángulo isósceles es 13 centímetros y la altura sobre el lado desigual mide 4 centímetros. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?**

Sea x la medida de los dos lados iguales, y $2y$, la medida del lado desigual.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 13 \\ x^2 = 4^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 13 \\ x^2 = 16 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{13 - 2y}{2}\right)^2 = 16 + y^2 \Rightarrow \frac{169 + 4y^2 - 52y}{4} = 16 + y^2 \Rightarrow -52y = -105 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-105}{-52} \cong 2{,}02 \Rightarrow x \cong 4{,}48$$

Los lados iguales miden 4,48 centímetros, y el lado desigual, 4,04.

7.89 **Dos números suman 90. Si divido el mayor entre el menor, el resto es 6 y el cociente es 3. ¿Cuáles son los números?**

Sean x e y los números, por la prueba de la división, siendo y el menor de ellos, tenemos que $x = 3y + 6$.

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ x = 3y + 6 \end{cases} \Rightarrow 90 - y = 3y + 6 \Rightarrow 84 = 4y \Rightarrow y + 21 \Rightarrow x = 90 - 21 = 69$$

Los números son 21 y 69.

REFUERZO

Ecuaciones de primer grado

7.90 **Averigua si los valores 0, −2, 1, 5, 3 y −3 son soluciones de la ecuación.**

$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0.$

$0^3 - 3 \cdot 0^2 - 13 \cdot 0 + 15 = 0 \Rightarrow 15 = 0 \Rightarrow 0$. No es solución.

$(-2)^3 - 3(-2)^2 - 13(-2) + 15 = 0 \Rightarrow 21 = 0 \Rightarrow -2$. No es solución.

$1^3 - 3(1)^2 - 13(1) + 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 1$. Es solución.

$5^3 - 3 \cdot 5^2 - 13 \cdot 5 + 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 5$. Es solución.

$3^3 - 3 \cdot 3^2 - 13 \cdot 3 + 15 = 0 \Rightarrow -24 = 0 \Rightarrow 3$. No es solución.

$(-3)^3 - 3(-3)^2 - 13(3) + 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow -3$. Es solución.

7.91 **Escribe con una sola incógnita las ecuaciones correspondientes.**

a) Un número, más su doble, más su mitad, suman 21.

b) Los cuadrados de dos números consecutivos se diferencian en 15.

c) La mitad más la cuarta parte de un número suman 13 unidades más que el tercio más la quinta parte del mismo número.

a) $x + 2x + \frac{x}{2} = 21$

b) $(x + 1)^2 - x^2 = 15$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 13$

7.92 **Resuelve las ecuaciones.**

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{16} = \frac{x}{8} + \frac{x}{4} + 6$

b) $5(-x + 2) = 13 - 4(3x - 1)$

a) $\frac{8x + x}{16} = \frac{2x + 4x + 96}{16} \Rightarrow 9x = 6x + 96 \Rightarrow 3x = 96 \Rightarrow x = 32$

b) $-5x + 10 = 13 - 12x + 4 \Rightarrow 7x = 7 \Rightarrow x = 1$

Ecuaciones de segundo grado

7.93 **Resuelve las ecuaciones.**

a) $12x(2x - 3) = 0$

b) $x^2 - 3x - 10 = 0$

c) $7x^2 + 5 = 4x^2 + 12$

d) $8x^2 - 10x - 3 = 0$

a) $\begin{cases} 12x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$ $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$

b) $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow x = 5,\ x = -2$

c) $3x^2 = 17 \Rightarrow x^2 = \frac{17}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{17}{3}}$

d) $x = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 96}}{16} = \frac{10 \pm 14}{16} \Rightarrow x = \frac{3}{2},\ x = \frac{-1}{4}$

7.94 Completa la ecuación $5x^2 - 6x + c = 0$ asegurándote de que tenga dos soluciones distintas. ¿Cuántas soluciones existen?

$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 36 - 4 \cdot 5 \cdot c > 0 \Rightarrow 36 - 20c > 0 \Rightarrow 36 > 20c \Rightarrow \frac{36}{20} > c \Rightarrow \frac{18}{10} > c \Rightarrow \frac{9}{5} > c \Rightarrow \infty$ soluciones

Para cualquier valor de c tal que $c < \frac{9}{5}$, la ecuación tiene 2 soluciones. Por lo tanto, existen ∞ soluciones.

Sistemas de ecuaciones

7.95 Halla el valor de a y b, para que se cumpla que los dos sistemas sean equivalentes.

$$\begin{cases} -4x + y = -3 \\ 7x + 2y = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 20x + ay = 15 \\ bx - 12y = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + y = -3 \\ 7x + 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-4x + y = -3) \cdot (-5) \\ (7x + 2y = -5) \cdot (-6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20x - 5y = 15 \\ -42x - 12y = 30 \end{cases} \Rightarrow a = -5,\ b = -42,\ c = 30$$

7.96 Resuelve estos sistemas por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 3y = 13 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ -2(2 - y) + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ 3y - 4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

$x = 1,\ y = 1$

b) $\begin{cases} -x + 3y = 13 \\ 5x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 13 \\ 5(3y - 13) + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 13 \\ 16y = 67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\left(\frac{67}{16}\right) - 13 = -\frac{7}{16} \\ y = \frac{67}{16} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{7}{16},\ y = \frac{67}{16}$

7.97 Resuelve por el método de reducción los sistemas.

a) $\begin{cases} 6x - y = 19 \\ -4x + 3y = -15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 7y = -11 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 6x - y = 19 \\ -4x + 3y = -16 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{\times 4} \\ \xrightarrow{\times 6} \end{matrix} \begin{cases} 24x - 4y = 76 \\ -24x + 18y = -90 \end{cases}$

$14y = -14 \Rightarrow y = -1$

$\begin{cases} 6x - y = 19 \\ -4x + 3y = -15 \end{cases} \xrightarrow{\times 3} \begin{cases} 18x - 3y = 57 \\ -4x + 3y = -15 \end{cases}$

$14x \quad = 42 \Rightarrow x = 3$

b) $\begin{cases} x - 7y = -11 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -2x + 14y = 22 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases}$

$20y = 20 \Rightarrow y = 1$

$\begin{cases} x - 7y = -11 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{\times 6} \\ \xrightarrow{\times 7} \end{matrix} \begin{cases} 6x - 42y = -66 \\ 14x + 42y = -14 \end{cases}$

$20x \quad = -80 \Rightarrow x = -4$

7.98 Halla el valor de m y n, si $x = 2$ e $y = 1$ es solución del sistema.

$$\begin{cases} 3x + my = 2 \\ nx + 5y = 9 \end{cases}$$

Sustituimos en las ecuaciones del sistema las soluciones:

$$\begin{cases} 3x + my = 2 \\ nx + 5y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + m = 2 \\ 2n + 5 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 - 6 = -4 \\ 2n = 4 \Rightarrow n = 2 \end{cases}$$

7.99 Con las siguientes ecuaciones plantea un sistema que tenga por solución $(-2, 1)$.

$4x - y = -9$ $\quad 3x - 5y = 2$ $\quad 5x - y = 7$ $\quad x + 6y = 4$

Las ecuaciones que forman un sistema con esa solución son: $\begin{cases} 4x - y = -9 \\ x + 6y = 4 \end{cases}$

AMPLIACIÓN

7.100 **Halla el valor de c en la ecuación de segundo grado $x^2 - x + c = 0$, para que una de sus soluciones sea $x = 3$.**

La suma de raíces es 1, $3 + x_2 = 1$; $x_2 = -2$

El producto de raíces es c. Como las soluciones son 3 y $-2 \Rightarrow c = -6$

7.101 **Un grupo de 15 amigos contratan una excursión por 1 380 euros. Como algunos de ellos no tienen dinero, cada uno de los restantes pone 23 euros más de lo que le corresponde. ¿Cuántos son los amigos que no tienen dinero?**

Sea x el número de amigos que tienen dinero. Entonces, los amigos que no tienen dinero son $15 - x$.

Lo que paga cada uno de los que tienen dinero es $\frac{1\,380}{x}$, que es lo mismo que lo que tendrían que pagar si pagasen todos y 23 euros más; $\frac{1\,380}{15} + 23$.

Resolvemos la ecuación $1\,380 \cdot 15 = 1\,380x + 23 \cdot 15x \Rightarrow 1\,380 = 115x \Rightarrow x = 12$.

Los amigos que no tienen dinero son 3.

7.102 **En un triángulo rectángulo, el lado mayor mide 3 centímetros más que el mediano y 54 más que el pequeño. ¿Cuánto miden sus lados?**

El triángulo es rectángulo y el lado mayor es la hipotenusa:

$(x + 3)^2 = x^2 + (x - 51)^2 \Rightarrow x^2 + 9 + 6x = x^2 + x^2 + 2\,601 - 102x \Rightarrow x^2 - 108x + 2\,592 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{108 \pm \sqrt{11\,664 - 10\,368}}{2} = \dfrac{108 \pm 36}{2} \Rightarrow x_1 = 72,\ x_2 = 36 \rightarrow$ No es válida porque al restar 51 quedaría un lado de longitud negativa. Los catetos miden 21 y 72 cm, y la hipotenusa, 75 cm.

7.103 **Cuando aparecieron los CD le regalé la mitad de mis discos de vinilo más la mitad de un disco a mi hermano Miguel y la mitad de los restantes más la mitad de un disco a mi amigo Luis. Tan solo me he quedado con uno de ellos: mi primer disco de los *Beatles*.**

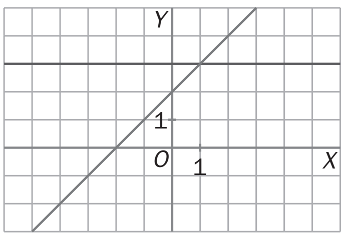
Por cierto, no tuve que romper ningún disco. ¿Cuántos discos tenía en un principio?

Sea x el número de discos de vinilo que tenía.

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{1}{2} + 1 = x \Rightarrow \frac{x}{2} + 2 + \frac{x - 1}{4} = x \Rightarrow 2x + 8 + x - 1 = 4x \Rightarrow x = 7$$

Tenía 7 discos en un principio.

7.104 **La figura corresponde a la resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales.**



a) ¿Cuál es la solución?

b) Escribe las dos ecuaciones del sistema.

a) Solución: $x = 1$, $y = 3$

b) $y = x + 2$, $y = 3$

7.105 **La suma de las dos cifras de un número es 11, y si se invierte el orden de sus cifras, el número aumenta en 9 unidades. Halla el número.**

Sea x la cifra de las decenas.

Sea y la cifra de las unidades.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 11 \\ -9x + 9y = 9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 11 \\ -x + y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 5$$

El número buscado es el 56.

7.106 **Las ecuaciones del tipo $a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$ se llaman bicuadradas. Si realizamos el cambio de variable: $x^2 = z$ y $x^4 = z^2$, transformamos la ecuación bicuadrada en una ecuación de segundo grado en la variable z. Una vez aplicada la fórmula para obtener z, deshacemos el cambio. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.**

a) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ **b)** $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

a) Se realiza el cambio de variable: $x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = z \\ x^4 = z^2 \end{cases}$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$z^2 - 25z + 144 = 0 \qquad z = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} \Rightarrow z_1 = 16,\ z_2 = 9$$

Las soluciones son: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, $x_3 = 3$, $x_4 = -3$

b) Se realiza el cambio de variable: $x^4 - 26x^2 + 25 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = z \\ x^4 = z^2 \end{cases}$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$z^2 - 26z + 25 = 0 \qquad z = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{2} = \frac{26 \pm 24}{2} \Rightarrow z_1 = 25,\ z_2 = 1$$

Las soluciones son: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

7.107 Consumo de gasoil

Un tanque de gasoil está lleno en sus tres cuartas partes.
Transcurren cinco semanas en las que se gastan las cantidades indicadas en la tabla.

Semana	Gasto
1.ª semana	Se gastan 150 litros
2.ª semana	Se gasta la sexta parte de lo que había en el depósito al comenzar la semana
3.ª semana	Se gastan 250 litros
4.ª semana	Se gasta un tercio de lo que había en el depósito al comenzar la semana
5.ª semana	Se gastan 300 litros

Al acabar el período de cinco semanas, el depósito cuenta con 200 litros.
a) Calcula cuántos litros había en el depósito antes de comenzar el período descrito.
b) Calcula cuántos litros se han gastado en las cinco semanas.
c) Calcula la capacidad del depósito.

a) Al comenzar la quinta semana había: $200 + 300 = 500$ litros
Al comenzar la cuarta semana había x litros.

$$x - \frac{1}{3}x = 500 \Rightarrow \frac{2}{3}x = 500 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \cdot 500 = 750 \text{ litros}$$

Entonces:
Al comenzar la tercera semana había $750 + 250 = 1\,000$ litros
Al comenzar la segunda semana había x litros.

$$x - \frac{1}{6}x = 1\,000 \Rightarrow \frac{5}{6}x = 1\,000 \Rightarrow x = \frac{6\,000}{5} = 1\,200 \text{ litros}$$

Entonces:
Al comenzar el período había: $1\,200 + 150 = 1\,350$ litros

b) Se han gastado $1\,350 - 200 = 1\,150$ litros.

c) Capacidad del depósito: $\frac{4}{3} \cdot 1\,350 = 1\,800$ litros

7.108 Las compras de la semana

En la puerta del frigorífico, Alejandro tiene pegado con un imán la siguiente nota.

a) El lunes de una determinada semana, Alejandro pagó 5,65 euros, y el miércoles de esa misma semana, 6,20. ¿Cuánto pagó el viernes, sabiendo que los precios no habían variado en toda la semana?

b) Con los datos del apartado anterior y sabiendo que cada botella de leche costaba 90 céntimos, calcula el precio de cada paquete de pan y de cada bote de refresco.

a) $3L + 3P + 5R = (2L + 1P + 3R) + (1L + 2P + 2R) = 5{,}65 + 6{,}20 = 11{,}85$
El viernes pagó 11 euros y 85 céntimos.

b) $\begin{cases} 1{,}8 + P + 3R = 5{,}65 \\ 0{,}9 + 2P + 2R = 6{,}20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P + 3R = 3{,}85 \\ 2P + 2R = 5{,}30 \end{cases} \Rightarrow P = 2{,}05 \quad R = 0{,}60$

Paquete de pan: 2 euros y 5 céntimos   Bote de refresco: 60 céntimos

AUTOEVALUACIÓN

7.A1 **Averigua cuál de las siguientes ecuaciones es una identidad.**

a) $9x = 27$

b) $8x(2x - 3) = 16x^2 - 24x$

c) $x^2 - 36 = 0$

d) $\frac{x}{7} = 3$

La b, porque si operamos vemos que hay lo mismo a los dos lados de la igualdad.

7.A2 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $\frac{x}{9} - \frac{x}{3} = \frac{x+1}{7} - 10$

b) $-8(2x - 1) - 4 = -7x - 23$

a) $\frac{x}{9} - \frac{x}{3} = \frac{x+1}{7} - 10 \Rightarrow 7x - 21x = 9(x + 1) - 630 \Rightarrow -23x = -621 \Rightarrow x = 27$

b) $-8(2x - 1) - 4 = -7x - 23 \Rightarrow -16x + 8 - 4 = -7x - 23 \Rightarrow 27 = 9x \Rightarrow x = 3$

7.A3 **Escribe la ecuación de segundo grado que tiene por soluciones $x = \frac{2}{3}$ y $x = -4$.**

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 4) = x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 10x - 8 = 0$$

7.A4 **Resuelve estas ecuaciones incompletas de segundo grado.**

a) $3x^2 - 24 = 0$

b) $6x^2 = 3x$

c) $\frac{x^2}{3} - 5x = 0$

a) $3x^2 - 24 = 0 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

b) $6x^2 = 3x \Rightarrow x \cdot (6x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = \frac{1}{2}$

c) $\frac{x^2}{3} - 5x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 15) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 15$

7.A5 **Resuelve, usando la fórmula explicada, las siguientes ecuaciones.**

a) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

a) $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 \pm 40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{5}{2} \\ -1 \end{cases}$

b) $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$

7.A6 **Halla el valor de a y b, para que el sistema tenga como solución $x = -3$ e $y = 4$.**

$$\begin{cases} -2x + 5y = a \\ 3x - y = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 5y = a \\ 3x - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 = a \\ 3 \cdot (-3) - 4 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 26 = a \\ -13 = b \end{cases}$$

7.A7 **Averigua si el sistema es compatible o incompatible, sin resolverlo.**

$$\begin{cases} -5x + 2y = 6 \\ 10x - 4y = -8 \end{cases}$$

Es incompatible porque si multiplicamos la primera ecuación por -2, tenemos una equivalente que es $10x - 4y = -12$, y al resolver tendríamos que $-8 = -12$, lo cual es falso.

7.A8 **Resuelve los sistemas por el método más adecuado.**

a) $\begin{cases} 5x + y = -6 \\ -2x + 7y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y = -15 \\ -5x + 4y = 17 \end{cases}$

a) Sustitución: $\begin{cases} 5x + y = -6 \\ -2x + 7y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 - 5x \\ -2x + 7(-6 - 5x) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 - 5x \\ -37x = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$

b) Reducción. Sumando las dos ecuaciones: $-2x = 2 \Rightarrow x = -1$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -15 \\ -5x + 4y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(3x - 4y = -15) \\ 3(-5x + 4y = 17) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x - 20y = -75 \\ -15x + 12y = 51 \end{cases} \Rightarrow -8y = -24 \Rightarrow y = 3$$

7.A9 **En el garaje de una comunidad de vecinos hay un total de 31 vehículos entre coches y motos y 98 ruedas tocan el suelo del garaje. ¿Cuántos coches y cuántas motos hay en total?**

Sea x el número de coches e y el número de motos.

$$\begin{cases} x + y = 31 \\ 4x + 2y = 98 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 31 - y \\ 4(31 - y) + 2y = 98 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 31 - y \\ -2y = -26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 31 - 13 = 18 \\ y = 13 \end{cases}$$

Hay 18 coches y 13 motos.

7.A10 **Halla un número tal que la diferencia entre su cuádruplo y su cuarta parte sea 45.**

Sea x el número.

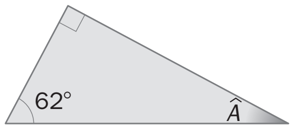
$$4x - \frac{x}{4} = 45 \Rightarrow 16x - x = 180 \Rightarrow x = 12$$

El número es 12.

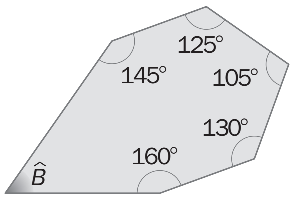
EJERCICIOS PROPUESTOS

8.1 Calcula la medida del ángulo que falta en cada figura.

a)



b)



a) En un triángulo, la suma de las medidas de sus ángulos es 180°.

$\widehat{A} = 180° - 90° - 62° = 28$

El ángulo mide 28°.

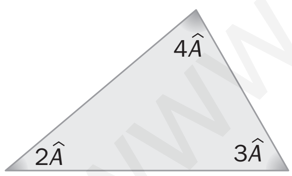
b) En un hexágono, la suma de las medidas de sus ángulos es $180 \cdot (6 - 2) = 720°$.

$\widehat{B} = 720° - 145° - 125° - 105° - 130° - 160° = 55$

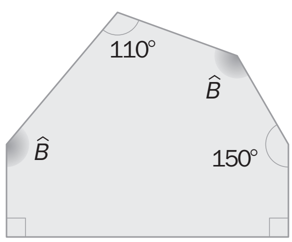
El ángulo mide 55°.

8.2 Determina cuánto mide el ángulo desconocido en estas figuras.

a)



b)

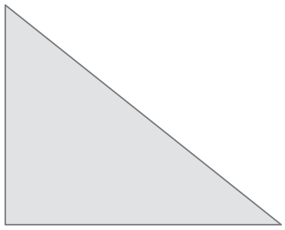


a) $180° = 2\widehat{A} + 4\widehat{A} + 3\widehat{A} = 9\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} \Rightarrow 20°$

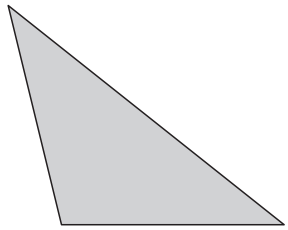
b) $720° = 90° + \widehat{B} + 110° + \widehat{B} + 150° + 90° = 440° + 2\widehat{B} \Rightarrow \widehat{B} = 140°$

8.3 Copia cada triángulo y halla gráficamente el circuncentro, el incentro, el baricentro y el ortocentro.

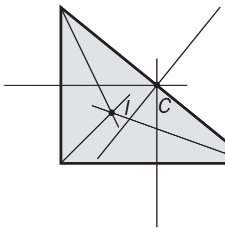
a)

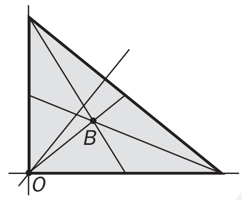


b)

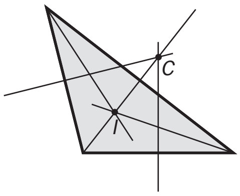


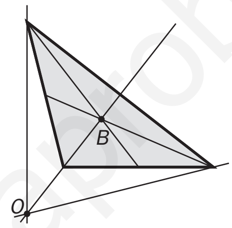
a)



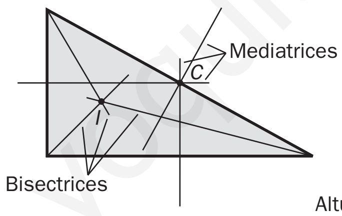


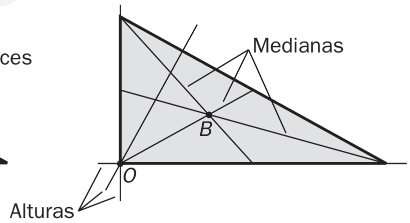
b)



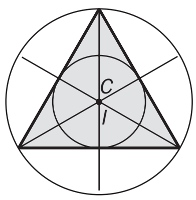


8.4 Dibuja en un triángulo rectángulo las mediatrices, medianas, bisectrices y alturas.

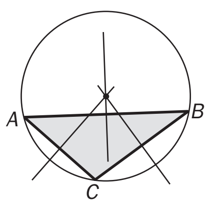




8.5 Dibuja en un triángulo equilátero la circunferencia inscrita y la circunscrita.



8.6 Dibuja tres puntos *A*, *B* y *C*, no alineados, y traza una circunferencia que pase por ellos.



8.7 **En un triángulo, el baricentro divide a una mediana en dos segmentos. Si el mayor mide 6 centímetros, ¿cuánto mide el otro segmento?**

El baricentro cumple que corta la mediana en un punto tal que su distancia al vértice es doble que su distancia al punto medio del lado opuesto. Si el mayor de esos dos segmentos es de 6 centímetros, el otro medirá 3 centímetros.

8.8 **Razona si las siguientes parejas de triángulos pueden ser semejantes.**

a) 40°, 50°, $\widehat{A}$; 40°, $\widehat{B}$, 90°

b) 60°, 60°, 60°; 8 cm, 8 cm, 8 cm

a) Para que sea triángulo, la suma de sus ángulos tiene que ser 180°, así tenemos que $\widehat{A}$ debe valer 90°, y $\widehat{B}$, 50°, de modo que todos los ángulos son iguales y $\widehat{B}$, por tanto, son semejantes.

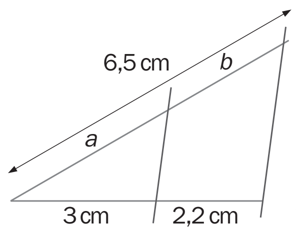
b) Son semejantes. El triángulo con los tres lados iguales es equilátero, así que tendrá los tres ángulos iguales, eso quiere decir que cada ángulo mide 60°, de modo que los ángulos son iguales a los del primer triángulo. Y por el otro lado, el primer triángulo tiene que tener los tres lados iguales por tener los tres ángulos iguales, así que todos los lados seguirán la misma proporción comparando con el segundo triángulo del enunciado.

8.9 **Los lados de un rectángulo miden 8 y 4 centímetros, respectivamente. Un rectángulo semejante tiene como perímetro 240 centímetros. ¿Cuáles son sus dimensiones?**

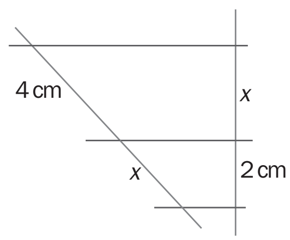
El perímetro del primer rectángulo es de $2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 24$ centímetros. Si multiplicamos todos los lados por 10, tenemos un rectángulo de lados 80 y 40, que tiene de perímetro 240 centímetros. Así que los lados del rectángulo buscado miden 80 y 40 centímetros.

8.10 **Calcula el valor de los lados desconocidos.**

a)



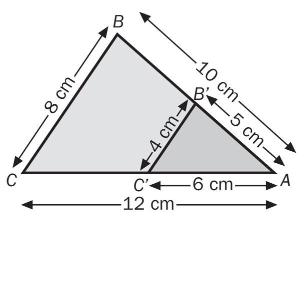
b)



a) $\frac{3}{a} = \frac{2,2}{6,5 - a} \Rightarrow 3 \cdot (6,5 - a) = 2,2a \Rightarrow 19,5 - 3a = 2,2a \Rightarrow a = 3,75$ cm y $b = 6,5 - 3,75 = 2,75$ cm

b) $\frac{4}{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8}$ cm

8.11 **Los lados de un triángulo miden 8, 10 y 12 centímetros. Construye sobre él otro triángulo, en posición de Tales, sabiendo que la razón de semejanza es 0,5.**



$$0,5 = \frac{AB'}{AB} \Rightarrow AB' = 0,5 \cdot AB \Rightarrow AB' = 0,5 \cdot 10 = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} \Rightarrow \frac{10}{5} = \frac{12}{AC'} \Rightarrow AC' = 6 \text{ cm} \\ \frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{10}{5} = \frac{8}{B'C'} \Rightarrow B'C' = 4 \text{ cm} \end{cases}$$

8.12 Un alumno dibuja dos rectas *r* y *s*, secantes. A continuación, marca en *r* tres puntos *A*, *B* y *C*, que distan entre sí 3 y 4 centímetros, respectivamente. Por esos puntos traza rectas paralelas que cortan a *s* en *A′*, *B′* y *C′*. Si la distancia entre *A′* y *B′* es 6 centímetros, ¿cuál es la distancia entre *A′C′* y *B′C′*?

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{B'C'} = \frac{7}{A'C'} \Rightarrow \begin{cases} B'C' = 8 \text{ centímetros} \\ A'C' = 14 \text{ centímetros} \end{cases}$$

8.13 La sala de una biblioteca tiene base rectangular cuyos lados miden 12 y 15 metros, respectivamente. ¿Cuánto mide la diagonal?

Aplicando el teorema de Pitágoras: $d^2 = 12^2 + 15^2 = 369 \Rightarrow d = 19{,}2$ metros.

8.14 Averigua cuáles de los siguientes datos corresponden a triángulos rectángulos.

a) 9, 15 y 17

b) 6, 8 y 10

c) 9, 12 y 15

d) 12, 16 y 19

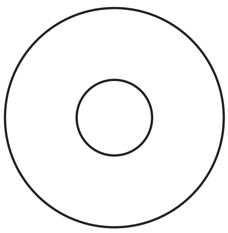
a) $17^2 = 289 \neq 306 = 81 + 225 = 9^2 + 15^2$. No es triángulo rectángulo.

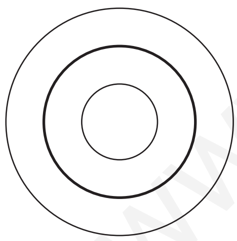
b) $10^2 = 100 = 36 + 64 = 6^2 + 8^2$. Es triángulo rectángulo.

c) $15^2 = 225 = 81 + 144 = 9^2 + 12^2$. Es triángulo rectángulo.

d) $19^2 = 361 \neq 400 = 144 + 256 = 12^2 + 16^2$. No es triángulo rectángulo.

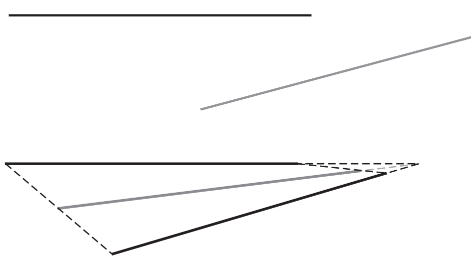
8.15 Copia las circunferencias de la figura y dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambas. Describe la figura resultante.





La figura obtenida es una circunferencia concéntrica con las dos dadas, siendo la longitud del radio la media aritmética de las longitudes de los radios de las circunferencias dadas.

8.16 Copia los segmentos de la figura y dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambos. Describe la figura resultante.



La figura obtenida es parte de la bisectriz del ángulo formado por la prolongación de los segmentos dados.

8.17 Halla el área de un triángulo isósceles cuyos lados miden 8, 6 y 6 centímetros.

Averiguamos primero la altura, h, sobre el lado desigual. Dividiendo el triángulo por dicha altura obtenemos un triángulo rectángulo que cumple que $6^2 = h^2 + 4^2$. Despejamos h y obtenemos la altura, $h = 4{,}5$ centímetros.

Calculamos el área del triángulo: $A = \dfrac{8 \cdot 4{,}5}{2} = 18 \text{ cm}^2$.

8.18 Calcula el área y el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 18 y 12 centímetros.

$A = \dfrac{18 \cdot 12}{2} = 108 \text{ cm}^2$

Se calcula el lado como la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por catetos las mitades de las dos diagonales del rombo:

$L = \sqrt{9^2 + 6^2} = 10{,}82$

$P = 4 \cdot 10{,}82 = 43{,}28 \text{ cm}$

8.19 La diagonal menor de un rombo mide 6 centímetros y el lado 5 centímetros. Determina su área.

Las diagonales se cortan en el punto medio. Dibujamos un triángulo rectángulo cuyos catetos son la mitad de cada una de las diagonales, y la hipotenusa, un lado.

$5^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow c = 4 \text{ cm} \Rightarrow D = 8 \text{ cm}$

$A = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$

8.20 ¿Cuánto mide el área de un hexágono regular de 20 centímetros de lado?¿Y su perímetro?

Formamos un triángulo rectángulo de catetos la apotema y la mitad de un lado, y de hipotenusa el segmento que va desde el centro del hexágono hasta uno de los vértices, que coincide con el radio de la circunferencia circunscrita, el cual, por tratarse de un hexágono regular, mide lo mismo que el lado del hexágono.

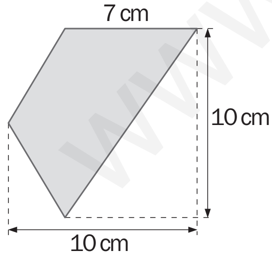
$20^2 = 10^2 + ap^2 \Rightarrow ap = 17{,}3 \text{ cm}$

$A = \dfrac{(6 \cdot 20) \cdot 17{,}3}{2} = 1\,038 \text{ cm}^2$

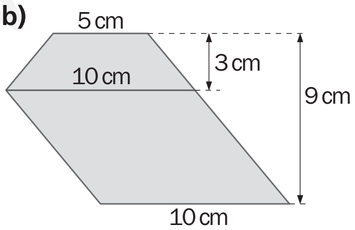
$P = 6 \cdot 20 = 120 \text{ cm}$

8.21 Averigua el área de estas figuras.

a)



b)



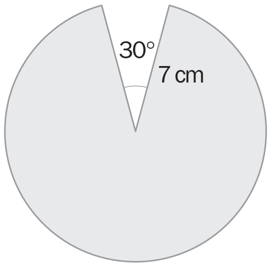
a) Sumamos el área de los dos triángulos: $A = \dfrac{10 \cdot 7}{2} + \dfrac{10 \cdot 3}{2} = 35 + 15 = 50 \text{ cm}^2$

b) Para calcular el área sumamos el área del trapecio y la del romboide.

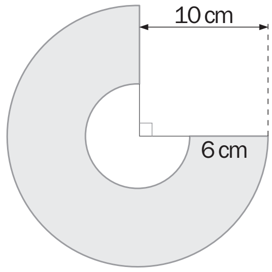
$A = \dfrac{(10 + 5) \cdot 3}{2} + 10 \cdot (9 - 3) = \dfrac{165}{2} = 82{,}5 \text{ cm}^2$

8.22 Halla el área de las siguientes figuras.

a)



b)

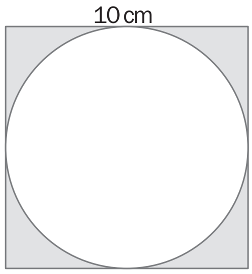


a) Sector circular: $A = \dfrac{\pi \cdot 7^2 \cdot 330}{360} = 141{,}11 \text{ cm}^2$

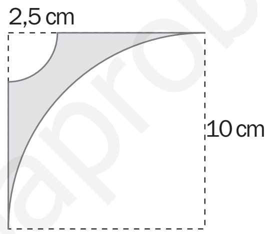
b) Trapecio circular: $A = \dfrac{\pi \cdot 270 \cdot (10^2 - 6^2)}{360} = 48\pi = 150{,}80 \text{ cm}^2$

8.23 Calcula el área de las figuras sombreadas.

a)



b)

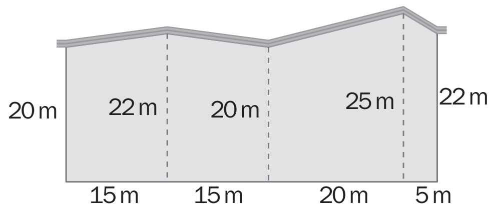


a) $A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{Círculo}} = 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 21{,}46 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{SecCirc1}} - A_{\text{SecCirc2}} = 10^2 - \dfrac{\pi \cdot 10^2 \cdot 90}{360} - \dfrac{\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 90}{360} = 100 - 78{,}54 - 4{,}91 = 16{,}55 \text{ cm}^2$

RESOLUFCIÓN DE PROBLEMAS

8.24 Calcula el área de la finca de la figura.

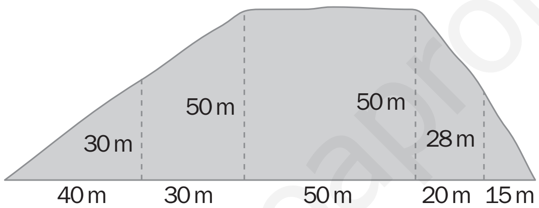


Sumamos las áreas de los cuatro trapecios en que podemos dividir la finca.

$$A = A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3} + A_{T_4} = \frac{(20 + 22) \cdot 15}{2} + \frac{(22 + 20) \cdot 15}{2} + \frac{(20 + 25) \cdot 20}{2} + \frac{(25 + 22) \cdot 5}{2} = 1\,197{,}5$$

La finca tiene un área de 1 197,5 m^2.

8.25 Determina el área del islote de la figura.



Sumamos las áreas de los dos triángulos y los dos trapecios en que podemos dividir el plano del islote.

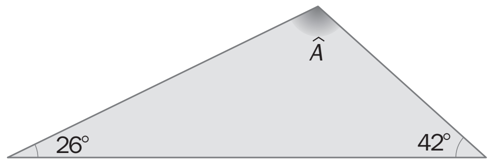
$$A = A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3} + A_{T_4} + A_{T_5} = \frac{30 \cdot 40}{2} + \frac{(30 + 50) \cdot 30}{2} + \frac{(50 + 50) \cdot 50}{2} + \frac{(50 + 28) \cdot 20}{2} + \frac{28 \cdot 15}{2} = 5\,290$$

El islote tiene 5 290 m^2.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Ángulos y triángulos

8.26 Halla la medida del ángulo $\widehat{A}$ en el siguiente triángulo.



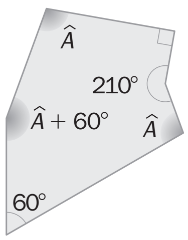
$$180° = 26° + \widehat{A} + 42° \Rightarrow \widehat{A} = 180° - 26° - 42° = 112°$$

8.27 Calcula la suma de los ángulos interiores de un pentágono.

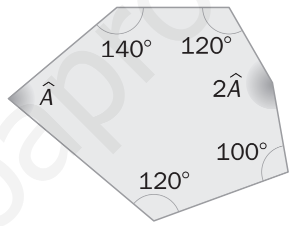
El pentágono tiene 5 lados; así, la suma de sus ángulos interiores es de $180° \cdot (5 - 2) = 540°$.

8.28 ¿Cuánto miden los ángulos designados por letras en estas figuras?

a)



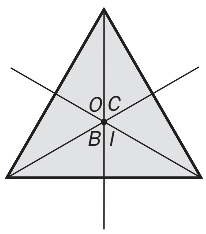
b)



a) $180°(6 - 2) = \widehat{A} + 90° + 210° + \widehat{A} + 60° + (\widehat{A} + 60°) \Rightarrow 3\widehat{A} = 300° \Rightarrow \widehat{A} = 100°$

b) $180°(6 - 2) = \widehat{A} + 140° + 120° + 2\widehat{A} + 100° + 120° \Rightarrow 3\widehat{A} = 240° \Rightarrow \widehat{A} = 80°$

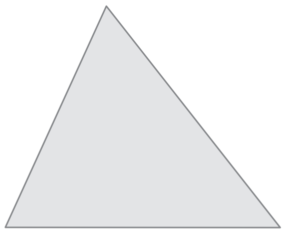
8.29 Dibuja un triángulo equilátero y traza sus mediatrices, medianas, bisectrices y alturas. Explica qué observas.



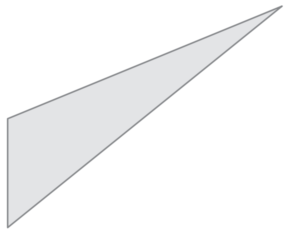
Que todas se cortan en el mismo punto.

8.30 **Traza la circunferencia inscrita y la circunscrita de los siguientes triángulos.**

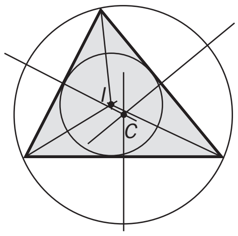
a)



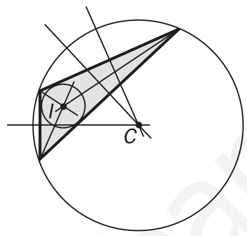
b)



a)



b)



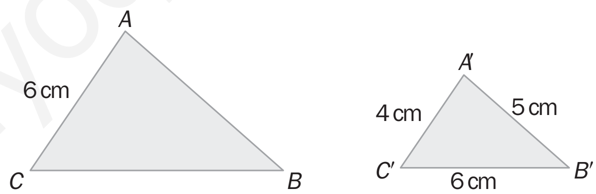
Figuras semejantes. Teorema de Tales

8.31 **Los lados de un triángulo miden, respectivamente, 10, 12 y 14 centímetros. Los de otro triángulo miden 15, 18 y 21 centímetros. ¿Son semejantes?**

$$\frac{15}{10} = \frac{18}{12} = \frac{21}{14} = 1{,}5$$

Son semejantes, puesto que los lados son proporcionales.

8.32 **Los triángulos de la figura son semejantes. Calcula el valor de *AB* y *BC*.**

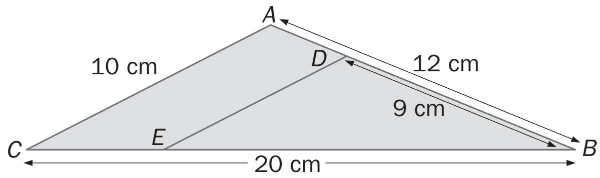


$$\frac{6}{4} = \frac{AB}{5} = \frac{BC}{6} \Rightarrow AB = 7{,}5 \text{ cm y } BC = 9 \text{ cm}$$

8.33 **Los lados de un triángulo miden 5, 6 y 9 centímetros. El lado menor de otro triángulo semejante al dado mide 20 centímetros. Halla la medida de los otros lados.**

$$\frac{20}{5} = \frac{a}{6} = \frac{b}{9} \Rightarrow a = 24 \text{ cm y } b = 36 \text{ cm}$$

8.34 Calcula la medida de $\overline{DE}$ y $\overline{CE}$.



$$\frac{12}{9} = \frac{10}{\overline{DE}} \Rightarrow \overline{DE} = 7{,}5 \text{ cm}$$

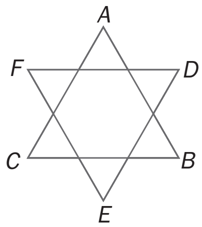
$$\frac{12}{3} = \frac{20}{\overline{CE}} \Rightarrow \overline{CE} = 5 \text{ cm}$$

8.35 Los lados de un triángulo miden 9, 12 y 16 centímetros. Calcula las longitudes de los lados de otro triángulo semejante al dado, tal que su perímetro es 148 centímetros.

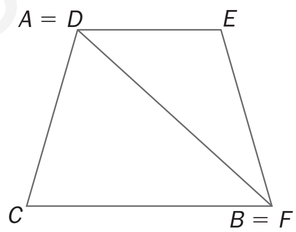
$$\frac{148}{9 + 12 + 16} = \frac{a}{9} = \frac{b}{12} = \frac{c}{16} \Rightarrow a = 36 \text{ cm},\ b = 48 \text{ cm},\ c = 64 \text{ cm}$$

8.36 Razona, utilizando algún criterio de semejanza de triángulos, si los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes.

a)



b)



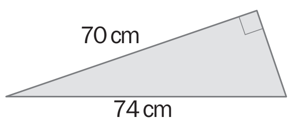
a) Son semejantes porque ambos son equiláteros.

b) El lado común de los dos triángulos es, obviamente, de la misma longitud en ambos, y también son de igual longitud los lados que se corresponden con los lados iguales del trapecio isósceles. La razón de proporcionalidad de los lados sería 1, pero los terceros lados, que son cada una de las bases del trapecio, no conservan esa razón de proporcionalidad. Por tanto, los triángulos no son semejantes.

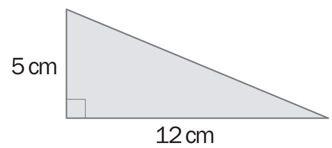
Teorema de Pitágoras

8.37 Averigua el valor del lado desconocido de estos triángulos.

a)



b)



a) $l^2 = 74^2 - 70^2 = 576 \Rightarrow l = 24$ cm

b) $l^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow l = 13$ cm

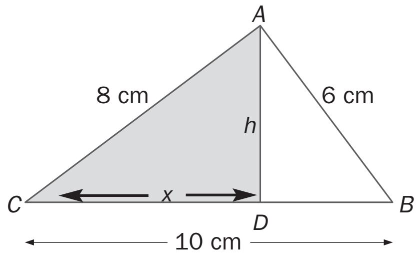
8.38 Determina la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 12 centímetros.

Si llamamos h a la altura del triángulo, tendremos

$12^2 = h^2 + 6^2$

$h^2 = 12^2 - 6^2 = 108 \Rightarrow h = 10{,}39$ cm

8.39 Calcula el área del triángulo rectángulo sombreado.



Los triángulos ABC y DAC son semejantes, luego

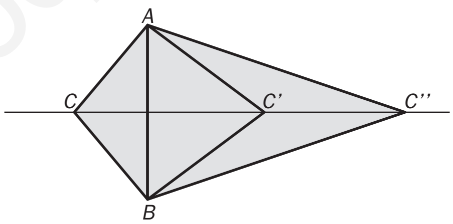
$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{10}{8} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 6{,}4 \text{ cm} \Rightarrow h^2 = 8^2 - 6{,}4^2 = 23{,}04 \text{ cm} \Rightarrow h = 4{,}8 \text{ cm}$$

Por tanto, el área será

$$A = \frac{6{,}4 \cdot 4{,}8}{2} = 15{,}36 \text{ cm}^2$$

Lugar geométrico

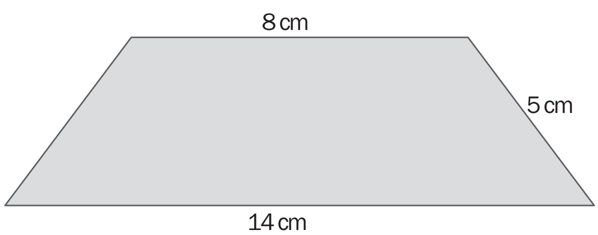
8.40 Construye varios triángulos isósceles cuyo lado desigual sea un segmento *AB* dado y nombra con la letra *C* al tercer vértice de dichos triángulos. ¿Cuál es el lugar geométrico que forman los puntos?



El lugar geométrico que forman los puntos C es la recta mediatriz del segmento AB.

Longitudes y áreas

8.41 Halla el área del trapecio isósceles de la figura.

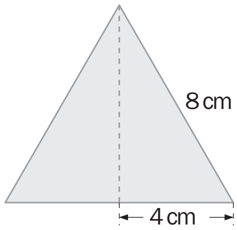


Usando el teorema de Pitágoras calculamos la altura: $h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$ cm

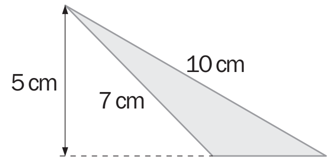
$$A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h = \left(\frac{14 + 8}{2}\right) \cdot 4 = 44 \text{ cm}^2$$

8.42 Calcula el área de estos triángulos.

a)



b)



a) Aplicamos el teorema de Pitágoras para saber la altura: $h^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow h = 6{,}93$ cm

$$A = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ cm}^2$$

b) Por Pitágoras calculamos la medida de la base del triángulo rectángulo de hipotenusa 10 y altura 5 y también la base del triángulo rectángulo de la misma altura y de hipotenusa 7. Restándolas tenemos la medida de la base del triángulo dado.

$b_1^2 = 10^2 - 5^2 \Rightarrow b_1 = 8{,}66$ cm

$b_2^2 = 7^2 - 5^2 \Rightarrow b_2 = 4{,}90$ cm

$b = 8{,}66 - 4{,}90 = 3{,}76 \text{ cm} \Rightarrow A = \dfrac{3{,}76 \cdot 5}{2} = 9{,}4 \text{ cm}^2$

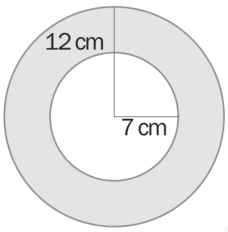
8.43 ¿Cuánto mide el área de un círculo de 20 centímetros de diámetro?

El radio es entonces de 10 centímetros de longitud, luego

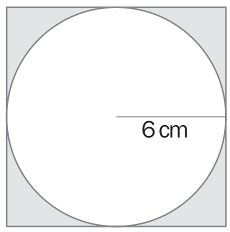
$$A = \pi \cdot 10^2 = 314{,}16 \text{ cm}^2$$

8.44 Determina el área de las regiones sombreadas.

a)



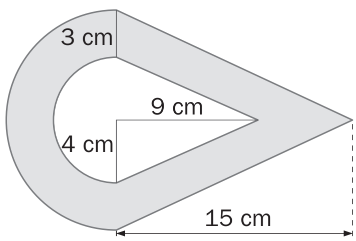
b)



a) $A = \pi(12^2 - 7^2) = 95\pi = 298{,}45 \text{ cm}^2$

b) $A = A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{Círculo}} = 12^2 - \pi \cdot 6^2 = 144 - 113{,}10 = 30{,}9 \text{ cm}^2$

8.45 Halla el área de la región sombreada de la figura.

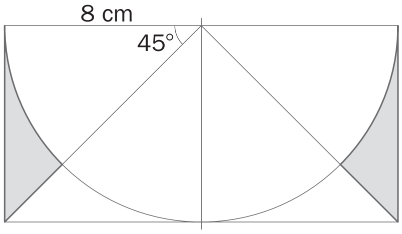


Por un lado, la media corona circular: $\dfrac{\pi(7^2 - 4^2)}{2} = 51{,}84 \text{ cm}^2$

Por otro lado, la zona entre los dos triángulos: $\dfrac{14 \cdot 15}{2} - \dfrac{8 \cdot 9}{2} = 105 - 36 = 69 \text{ cm}^2$

$$A = 51{,}84 + 69 = 120{,}84 \text{ cm}^2$$

8.46 Calcula el área de la región sombreada.



La figura es simétrica, basta con que se calcule el área de una parte y se multiplique por dos para tener el área de la región sombreada.

La parte sombreada es la mitad del área que queda después de restarle al área del cuadrado el área del sector circular de 90°, o lo que es lo mismo, una cuarta parte de la circunferencia.

$$A = 2 \cdot \left(\frac{8^2 - \frac{1}{4}\pi 8^2}{2} \right) = 13{,}74 \text{ cm}^2$$

8.47 El perímetro de un rombo es 40 centímetros y su diagonal mayor mide 16 centímetros. Averigua su área.

El rombo tiene todos sus lados iguales, cada uno de ellos medirá 10 cm. Usando el teorema de Pitágoras averiguamos la medida de la diagonal menor; para ello, el triángulo rectángulo que usamos es el formado por un lado del rombo y la mitad de cada una de las diagonales.

$c^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow c = 6 \text{ cm} \Rightarrow d = 12 \text{ cm}$

$A = \dfrac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$

8.48 Calcula la longitud del arco de circunferencia y el área del sector circular cuyo radio es 6 decímetros y cuyo ángulo mide 160°.

$L = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 160}{360} = 16{,}76 \text{ dm}$

$A = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 160}{360} = 50{,}27 \text{ dm}^2$

8.49 Halla el área de un hexágono regular de 12 centímetros de lado.

Por ser un hexágono regular, los triángulos que se forman al unir dos vértices consecutivos con el centro son equiláteros, y podemos calcular su altura, que coincide con la apotema.

$h^2 = 12^2 - 6^2 = 108 \Rightarrow h \equiv a = 10{,}39 \text{ cm}$

$A = \dfrac{(12 \cdot 6) \cdot 10{,}39}{2} = 374{,}04 \text{ cm}^2$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

8.50 Dos triángulos rectángulos tienen un ángulo que mide 35°. ¿Son semejantes?

Los tres ángulos coinciden, porque si coinciden dos de ellos, el tercero tiene que coincidir, y aplicando el teorema de Tales a los dos triángulos que se escojan, podemos concluir que son semejantes.

8.51 En un triángulo, trazamos desde el vértice *A* la mediana al lado *BC* y medimos su longitud, 18 centímetros. Calcula la distancia del baricentro al vértice *A* y al punto medio del lado *BC*.

Sabemos que el baricentro es el punto que cumple que la distancia al vértice es el doble que la distancia al punto medio del lado opuesto.

La distancia al vértice será $\frac{2}{3}$ de la longitud de la mediana.

De modo que del baricentro al vértice *A* la distancia será de 12 cm, y al punto medio de *BC*, de 6 cm.

8.52 ¿Cuál es la máxima distancia que puede recorrer un jugador de fútbol en un campo cuyas medidas son 100 × 70 metros?

La diagonal del campo, que será la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 100 y 70.

$$d^2 = 100^2 + 70^2 \Rightarrow d = 122{,}07 \text{ m}$$

8.53 En una circunferencia, inscribimos un triángulo equilátero y unimos cada uno de sus vértices con el centro de la circunferencia. ¿Cómo es cada uno de los triángulos que se forman?

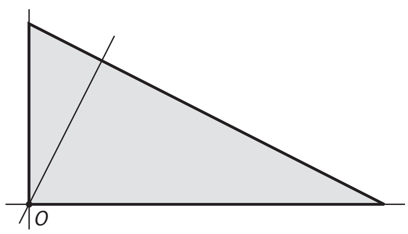
El centro de la circunferencia es el circuncentro del triángulo que está situado a igual distancia de cada uno de los vértices. Así que se forman tres triángulos isósceles. Como partíamos un triángulo equilátero, tendremos tres triángulos isósceles iguales.

8.54 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 9 centímetros, respectivamente. Los catetos de otro triángulo rectángulo miden 10 y 15 centímetros. ¿Son semejantes ambos triángulos?

$\frac{6}{10} = \frac{9}{15}$. Aplicando el teorema de Tales, podemos decir que los triángulos son semejantes, puesto que si estos dos lados son proporcionales, el tercero también lo será.

8.55 ¿Dónde se encuentra situado el ortocentro de cualquier triángulo rectángulo? Ayúdate de un dibujo para encontrar la respuesta.

En el vértice cuyo ángulo es de 90°.



8.56 Tres pueblos *A*, *B* y *C* quieren construir una piscina común para sus habitantes, de forma que quede a la misma distancia de los tres. ¿En qué punto deben construirla?

En el circuncentro del triángulo cuyos vértices son la situación de cada uno de los pueblos.

8.57 La aguja pequeña del reloj de Julia describe un ángulo de 20° en 35 minutos. Razona si Julia tiene un reloj que atrasa o adelanta.

En 60 minutos, la aguja pequeña tiene que recorrer un ángulo de $\frac{360°}{12} = 30°$; entonces, debe describir un ángulo de 20° cuando sean $\frac{2}{3}$ del tiempo, es decir, transcurridos $\frac{2}{3}60 = 40$ minutos.

Como todavía no han pasado estos, eso quiere decir que la aguja va más rápido de lo que debería. Por tanto, adelanta.

PROBLEMAS PARA APLICAR

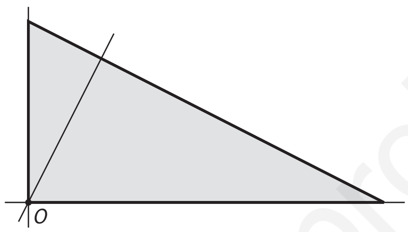
8.58 En un determinado momento del día, un árbol arroja una sombra de 4,23 metros, mientras que, en el mismo momento, la sombra de un palo que mide 1,20 metros es de 0,64 metros. Averigua la altura del árbol.

Aplicamos el teorema de Tales a los triángulos rectángulos formados por el árbol y su sombra y por el palo y la suya.

De modo que $\frac{4{,}23}{0{,}64} = \frac{h}{1{,}2} \Rightarrow h = 7{,}93$.

El árbol tiene una altura de 7,93 metros.

8.59 En la carretera del dibujo se va a poner una gasolinera que se encuentre a la mínima distancia de los pueblos *A* y *B*. ¿Dónde tiene que construirse?



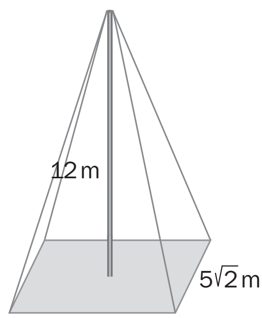
En el punto de corte de la carretera con la mediatriz del segmento que tiene como extremos las ciudades.

8.60 Un hexágono tiene dos ángulos rectos y tres ángulos iguales que miden, cada uno, 132°. Halla el sexto ángulo.

La suma de los ángulos de un hexágono es de $180° \cdot 4 = 720°$. De modo que conocidos cinco ángulos, el último mide $720° - 2 \cdot 90° - 3 \cdot 132° = 144°$.

8.61 Un poste de 12 metros de altura se ha sujetado al suelo mediante cuatro cables, como muestra la figura. Los puntos de amarre de los cables forman un cuadrado de lado $5\sqrt{2}$ metros, en cuyo centro se sitúa el poste.

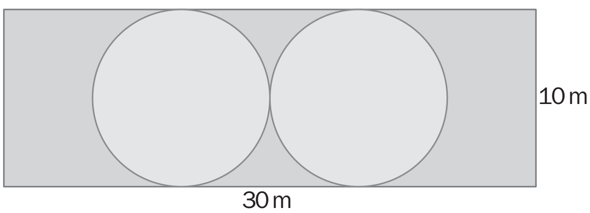
Calcula cuánto cable se ha necesitado en la operación.



Calculamos la diagonal del cuadrado de la base: $d^2 = 2\left(5\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow d = 10$ m.

La distancia del poste al cable es la mitad de la diagonal, es decir, 5 m. Usamos el teorema de Pitágoras para saber cuánto cable hay desde uno de los vértices hasta el poste: $l^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow l = 13$ m. Esta longitud de cable es la misma las otras tres veces, de modo que se necesitan $4 \cdot 13 = 52$ m de cable.

8.62 En un terreno rectangular se construyen dos fuentes circulares, como se muestra en la figura, y se planta césped en el terreno restante. ¿Qué superficie ocupa el césped?



El radio de las fuentes es de 5 m, porque vemos que su diámetro coincide con la altura del rectángulo.

$$A_T = 30 \cdot 10 = 300 \text{ m}^2;\ A_F = \pi \cdot 5^2 = 78{,}54 \text{ m}^2$$

El espacio sobre el que se planta el césped es de $300 - 2 \cdot 78{,}54 = 142{,}92$ m².

8.63 La rueda de un coche tiene un radio de 33 centímetros. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido el coche si la rueda ha dado 80 000 vueltas?

En cada vuelta recorre la longitud de la circunferencia de la rueda.

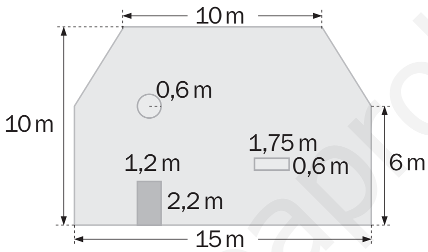
En una vuelta recorre $2 \cdot \pi \cdot 33 = 207{,}35$ cm; en 80 000 recorrerá $80\,000 \cdot 207{,}35 = 16\,588\,000$ cm, que son 165,880 km.

8.64 El parterre de un jardín tiene forma de trapecio circular. Su ángulo mide 135° y los radios de las circunferencias 10 y 6 metros, respectivamente. Calcula la superficie que se puede plantar de césped.

$$A = \frac{\pi \cdot 135 \cdot (10^2 - 6^2)}{360} = 24\pi = 75{,}40$$

Se puede plantar césped en 75,40 m^2.

8.65 Queremos pintar la fachada de la casa de la figura. Calcula cuánta pintura es necesaria si se gastan 2,5 kilogramos de pintura por metro cuadrado.

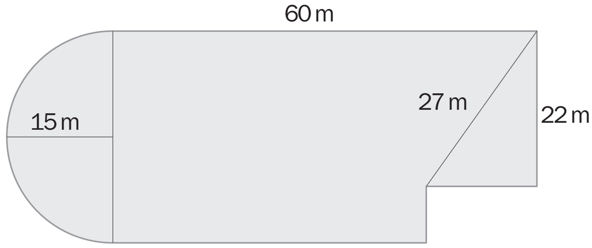


La superficie total de la fachada es de $6 \cdot 15 + \dfrac{(15 + 10) \cdot 4}{2} = 140$ m^2.

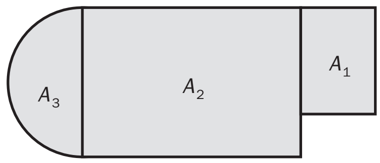
Veamos el área de las superficies que no se van a pintar: $1{,}2 \cdot 2{,}2 + 1{,}75 \cdot 0{,}6 + \pi \cdot 0{,}6^2 = 2{,}64 + 1{,}05 + 1{,}13 = 4{,}82$ m^2.

Hay que pintar $140 - 4{,}82 = 135{,}18$ m^2. La pintura necesaria es: $2{,}5 \cdot 135{,}18 = 337{,}95$ kg.

8.66 La finca de la figura se vende a 200 euros el metro cuadrado. Calcula cuál es su precio total.



Dividimos el terreno en figuras geométricas de las que conocemos cómo calcular el área.



$x = \sqrt{27^2 - 22^2} = 15{,}65$ m

$A_1 = 15{,}65 \cdot 22 = 344{,}5$ m^2

Si el radio de la circunferencia es de 15 m, el diámetro que coincide con la altura de la figura es de 30.

$A_2 = (60 - 15{,}65) \cdot 30 = 1\,330{,}5$ m^2 ; $A_3 = \dfrac{\pi 15^2}{2} = 353{,}43$ m^2

$A = 344{,}5 + 1\,330{,}5 + 353{,}43 = 2\,028{,}43$ m^2

$200 \cdot 2\,028{,}43 = 405\,686$.

La finca tiene un precio de 405 686 €.

8.67 Juan y Miguel quieren medir la anchura del río de su pueblo y proceden de la siguiente manera: Juan se coloca en el borde del río y Miguel a 3 metros de él, alineados ambos con un árbol que está en la otra orilla. La línea que forman es perpendicular al río. Caminan paralelamente al río, Juan 2,8 metros y Miguel 6 metros, hasta que vuelven a estar alineados con el árbol. ¿Qué anchura tiene el río?

Aplicamos el teorema de Tales, de modo que $\dfrac{2{,}8}{6} = \dfrac{a}{3 + a} \Rightarrow 2{,}8\,(3 + a) = 6a \Rightarrow a = 2{,}625$

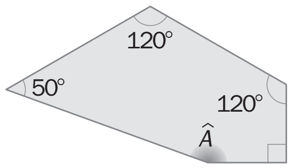
El río tiene un ancho de 2,625 m.

R E F U E R Z O

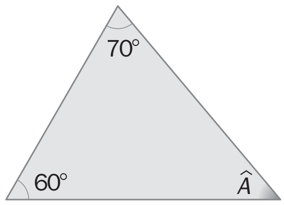
Ángulos y triángulos

8.68 Averigua la medida del ángulo $\widehat{A}$ de la figura.

a)



b)



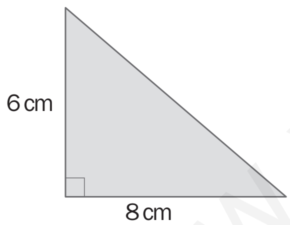
a) $180°(5 - 2) = 50° + 120° + 120° + 90° + \widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = 160°$

b) $180° = 60° + 70° + \widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = 50°$

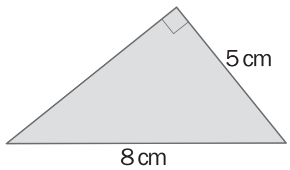
Teorema de Tales. Teorema de Pitágoras

8.69 Calcula el valor desconocido en los siguientes triángulos rectángulos.

a)



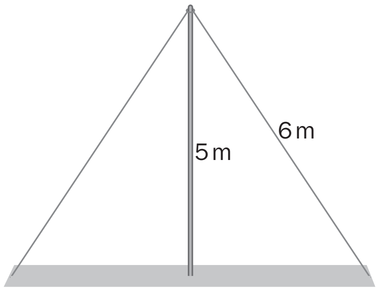
b)



a) $l^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow l = \sqrt{100} = 10$ cm

b) $8^2 = 5^2 + l^2 \Rightarrow l = 6{,}24$ cm

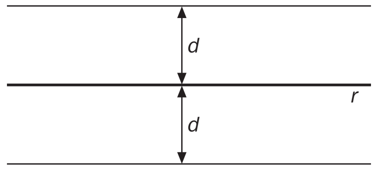
8.70 Un poste de 5 metros de altura se ha sujetado al suelo mediante dos cables de 6 metros de longitud, como muestra la figura. ¿A qué distancia se han sujetado los cables de la base del poste?



El poste forma un triángulo rectángulo con el suelo, de modo que aplicamos el teorema de Pitágoras: $6^2 = 5^2 + b^2 \Rightarrow b = 3{,}32$. Los cables se han sujetado a 3,32 m de la base del poste.

Lugar geométrico

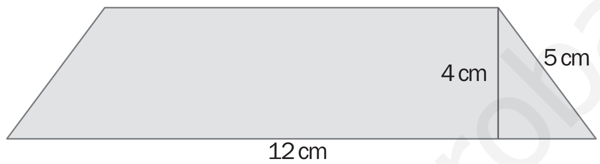
8.71 **Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que están a una distancia *d* de una recta *r* dada.**



El lugar geométrico obtenido son dos rectas paralelas a la recta dada.

Longitudes y áreas

8.72 **Halla el perímetro y el área del trapecio isósceles de la figura.**



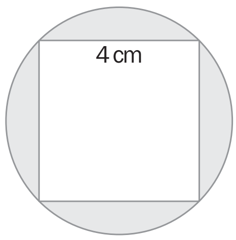
Para saber el valor de la base del triángulo que se forma a los lados del trapecio usamos el teorema de Pitágoras:

$5^2 = 4^2 - x^2 \Rightarrow x = 3$ cm.

$P = 12 + 5 + (12 - 3 - 3) + 5 = 28$ cm

$A = \dfrac{(12 + 6) \cdot 4}{2} = 36$ cm^2

8.73 **Determina el área de la región sombreada de la figura, donde el lado del cuadrado mide 4 centímetros.**

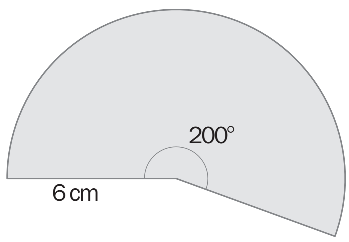


El diámetro del círculo coincide con la diagonal del cuadrado, y la podemos calcular usando el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow d = 5{,}66$ cm $\Rightarrow r = 2{,}83$ cm.

$A = \pi \cdot 2{,}83^2 - 4^2 = 9{,}16$ cm^2

8.74 **Halla el perímetro y el área de la figura.**



$$P = 6 + 6 + \frac{2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 200}{360} = 32{,}94 \text{ cm}; \; A = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 200}{360} = 62{,}83 \text{ cm}^2$$

AMPLIACIÓN

8.75 **Los perímetros de dos triángulos isósceles semejantes miden, respectivamente, 32 y 40 centímetros. Si el lado desigual del menor mide 8 centímetros, ¿cuánto miden los lados del mayor?**

Como los triángulos son semejantes, La longitud de los perímetros es proporcional a la del lado menor:

$$\frac{32}{40} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 10$$

El lado desigual del triángulo mayor mide 10 cm, luego los otros dos lados juntos medirán $40 - 10 = 30$ cm.

Como estos lados deben ser iguales, $30 : 2 = 15$ cm, que es lo que miden los lados iguales del triángulo mayor.

8.76 **Por los vértices *A*, *B* y *C* de un triángulo trazamos una paralela al lado opuesto, formándose el triángulo de vértices *A′*, *B′* y *C′*. Halla:**

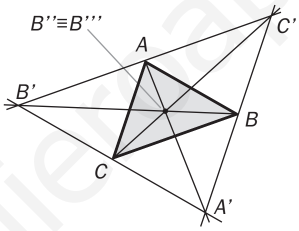
a) La relación entre los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ y $\widehat{A}'$, $\widehat{B}'$, $\widehat{C}'$.

b) La relación entre los baricentros de ambos triángulos.

c) La relación entre los triángulos *ABC*, *AB′C*, *AC′B* y *A′BC*.

a) Los ángulos son iguales a los que les corresponden: $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{C} = \widehat{C}'$.

b) Coinciden en el mismo punto.



c) Son iguales.

8.77 **Dos puntos *A* y *B* están situados en el plano a una distancia de 10 centímetros. Determina todos los puntos que están a 8 centímetros de *A* y a 6 centímetros de *B*.**

Para determinar los puntos que están a 8 cm de *A*, trazamos la circunferencia de centro *A* y que tenga 8 cm de radio.

Para determinar los puntos que están a 6 cm de *B*, trazamos la circunferencia de centro *B* y que tenga 6 cm de radio.

Estas circunferencias, se cortarán en dos puntos que están a 8 cm de *A* y a 6 de *B*, luego cumplen las condiciones del problema.

8.78 **Dos torres *A* y *B*, una de 40 metros y la otra de 30 metros de altura, están separadas por un puente de 60 metros de largo. En un punto *C* del puente hay una fuente. Dos pájaros que están en las almenas de cada una de las torres salen a beber de la fuente a la vez y con la misma velocidad, llegando al mismo tiempo a la fuente. ¿A qué distancia está la fuente de ambas torres?**

Si ambos pájaros salen a la vez y llegan a la vez, ambos con la misma velocidad, es que recorren igual distancia. Si llamamos x a la distancia de la fuente a la base de la torre de 30 m, tendremos que

$$d^2 = 30^2 + x^2 \text{ y } d^2 = 40^2 + (60 - x)^2$$

Así, $30^2 + x^2 = 40^2 + (60 - x)^2$.

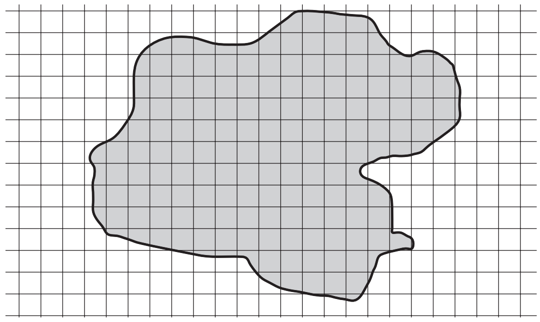
Resolvemos esta igualdad, $x = \frac{215}{6} = 35,83$.

La fuente está a 35,83 m de la torre de 30 m.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

8.79 La superficie de la isla

Para estimar la superficie de una isla, Juan ha dibujado sobre una cuadrícula el contorno de la misma con la ayuda de una fotografía aérea y un mapa.



a) Observa el dibujo y di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no:

- **El número de cuadrados que están totalmente contenidos en el área encerrada por el contorno es una estimación inferior de dicha área.**
- **El número de cuadrados que tocan, al menos en parte, el área encerrada por el contorno es una estimación superior de dicha área**

b) Calcula ambas estimaciones y calcula qué error máximo se cometerá si se toma como nueva estimación la media aritmética de las dos anteriores.

a) Verdadero, ya que no se cuentan todos los cuadrados que contienen superficie de la isla, por lo que es una estimación inferior del área.

Verdadero, ya que se cuentan cuadrados que tocan el área sin estar totalmente contenidos en el área de la isla, por lo que es una estimación superior del área.

b) Estimación inferior 124 cuadrados.

Estimación superior 174 cuadrados.

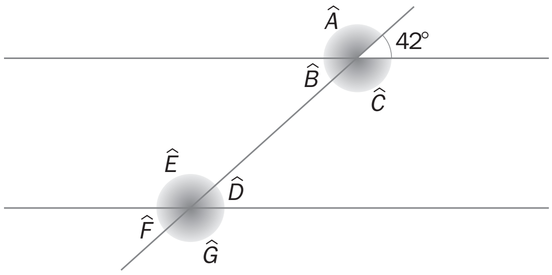
Nueva estimación: $\frac{124 + 174}{2} = 149$ cuadrados

El error máximo cometido es la mitad de la diferencia entre las estimaciones superior e inferior: $\frac{174 - 124}{2} = 25$

Por tanto, el error máximo cometido es 25 unidades.

A U T O E V A L U A C I Ó N

8.A1 **Calcula la medida de los ángulos desconocidos de cada figura.**



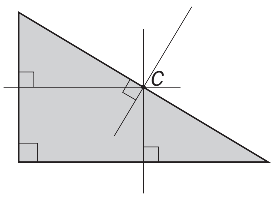
Por el teorema de Tales: $\widehat{B} = \widehat{D} = \widehat{F} = 42°$ y $\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{E} = \widehat{G} = \dfrac{360 - 2 \cdot 42}{2} = 138°$

8.A2 **¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de un octógono regular?**

La suma de los ángulos del octógono es 180° (8 − 2) = 1 080°. Tienen que tener todos los ángulos iguales; así, 1 080° : 8° = 135°.

Cada uno de los ángulos de un octógono regular mide 135°.

8.A3 **Dibuja un triángulo rectángulo y traza su circuncentro. Explica lo que observas.**



El circuncentro de un triángulo rectángulo coincide con el punto medio de la hipotenusa.

8.A4 **Los lados de un triángulo miden 6, 7 y 9 centímetros, respectivamente. Otro triángulo semejante tiene de perímetro 66 centímetros. ¿Cuánto miden sus lados?**

El perímetro del primer triángulo es de 22 cm.

De modo que $\dfrac{22}{66} = \dfrac{6}{a} = \dfrac{7}{b} = \dfrac{9}{c}$

Entonces, $a = 18$ cm, $b = 21$ cm, $c = 27$ cm.

8.A5 **La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 centímetros y la suma de los catetos es 14 centímetros. Halla la medida de cada cateto.**

Usando el teorema de Pitágoras, $10^2 = c^2 + (14 - c)^2$

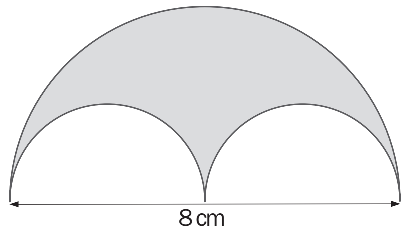
Resolviendo la igualdad tenemos que los catetos miden 8 y 6 cm.

8.A6 Determina la longitud de la circunferencia y el área del círculo de radio 5 centímetros.

$L = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10\pi$ cm

$A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ cm^2

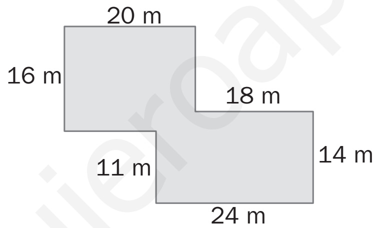
8.A7 Averigua el área de la región roja de la figura.



Es el área de medio círculo de 4 cm de radio menos el área de dos medios círculos (un círculo) de 2 cm de radio.

$$A = \frac{\pi 4^2}{2} - \pi 2^2 = 8\pi - 4\pi = 4\pi \text{ cm}^2$$

8.A8 El terreno de la figura se vende a razón de 250 euros el metro cuadrado. ¿Cuál es su precio total?



Calculamos primero los metros cuadrados del terreno:

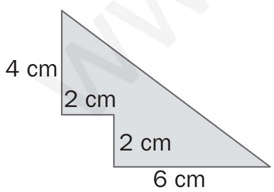
$$A = 20 \cdot 16 + 24 \cdot 14 - 6 \cdot 3 = 638 \text{ m}^2$$

Como cada metro cuadrado vale 250 €, el precio del terreno es:

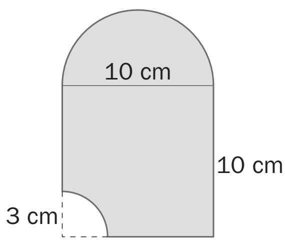
$$638 \cdot 250 = 159\,500 \text{ €}$$

8.A9 Calcula el área de las siguientes figuras.

a)



b)

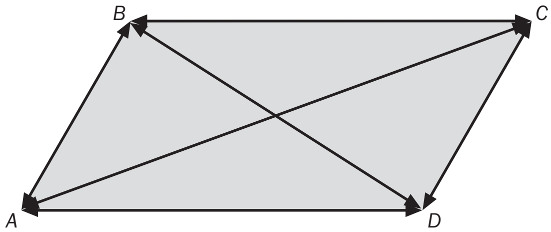


a) $A = \dfrac{(6 + 2) \cdot (4 + 2)}{2} - 2^2 = 20 \text{ cm}^2$

b) $A = 10^2 + \dfrac{\pi \cdot 5^2}{2} - \dfrac{\pi \cdot 3^2}{4} = 132{,}20 \text{ cm}^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

9.1 Dibuja un paralelogramo y razona qué pares de vectores determinados por los vértices son equipolentes.



Son equipolentes los que son paralelos y del mismo sentido, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ y, por último, $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{DA}$.

9.2 Las coordenadas de los vértices de un triángulo son $A(1, 1)$, $B(6, 1)$ y $C(4, 5)$. Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$.

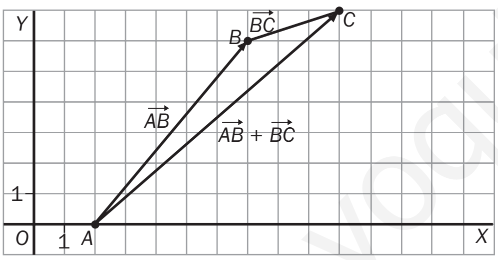
Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son $(6 - 1, 1 - 1) = (5, 0)$, las del vector $\overrightarrow{AC}$ son $(4 - 1, 5 - 1) = (3, 4)$ y las del vector $\overrightarrow{BC}$ son $(4 - 6, 5 - 1) = (-2, 4)$.

9.3 Se sabe que las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ son $(2, -3)$. Determina las coordenadas del extremo $B(x, y)$ si el origen es $A(3, 2)$.

Se cumple que $(x - 3, y - 2) = (2, -3)$, de modo que $x = 5$ e $y = -1$.

Las coordenadas de B son $(5, -1)$.

9.4 Representa los vectores $\overrightarrow{AB}(5, 6)$ y $\overrightarrow{BC}(3, 1)$ y calcula la suma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ si $A(2, 0)$.

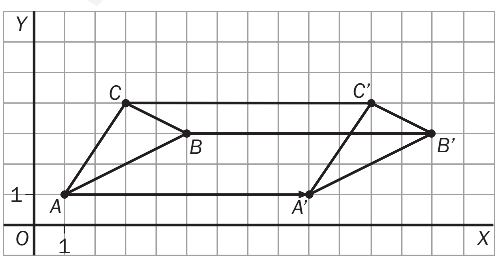


$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (5, 6) + (3, 1) = (5 + 3, 6 + 1) = (8, 7)$

9.5 Las coordenadas de los vértices de un triángulo son $A(1, 1)$, $B(5, 3)$ y $C(3, 4)$.

a) Representa el triángulo.

b) Traslada el triángulo según el vector guía $\vec{u}(8, 0)$.



9.6 Mediante una traslación el punto $A(1, 3)$ se transforma en $A'(6, 8)$. ¿Cuál es el vector guía?

$\overrightarrow{OA} + \vec{u} = (1, 3) + (x, y) = (6, 8) \Rightarrow (x, y) = (5, 5)$

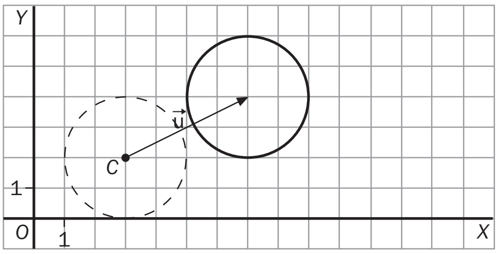
El vector guía es $\vec{u}(5, 5)$.

9.7 Halla las coordenadas del punto $P(x, y)$ si su trasladado según el vector $\vec{u}(6, 5)$ tiene por coordenadas (10, 10).

$\overrightarrow{OP} + \vec{u} = (x, y) + (6, 5) = (10, 10) \Rightarrow (x, y) = (4, 5)$

El punto buscado es $P(4, 5)$.

9.8 El círculo de centro $C(3, 2)$ y radio 2 se traslada según el vector $\vec{u}(4, 2)$. Dibuja el círculo trasladado.



9.9 Se aplica al punto P una traslación de vector $\vec{u}(2, 3)$ y, a continuación, otra de vector $\vec{v}(3, 5)$ y se llega al punto $Q(10, 12)$.

a) ¿Cuál es el vector de la traslación sucesiva?

b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto P?

a $\vec{u} + \vec{v} = (2, 3) + (3, 5) = (5, 8) = \vec{w}$

b) $\overrightarrow{OP} + \vec{w} = (x, y) + (5, 8) = (10, 12) \Rightarrow (x, y) = (5, 4)$

9.10 El producto de dos traslaciones tiene por vector guía $\vec{w}(7, 10)$. Si una de ellas tiene como vector guía $\vec{u}(2, 3)$, ¿cuál es el vector guía de la otra traslación?

$$\vec{u} + \vec{v} = (2, 3) + (x, y) = (7, 10) = \vec{w} \Rightarrow \vec{v}(x, y) = \vec{v}(5, 7)$$

9.11 El triángulo ABC tiene por coordenadas de los vértices $A(3, 5)$, $B(5, 7)$ y $C(5, 2)$. Calcula las coordenadas del triángulo obtenido mediante las traslaciones sucesivas de los siguientes vectores guías $\vec{u}(6, 2)$ y $\vec{v}(7, -2)$.

Calculamos el vector guía que es resultado del producto de las traslaciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$\vec{u} + \vec{v} = (6, 2) + (7, -2) = (13, 0) = \vec{w}$

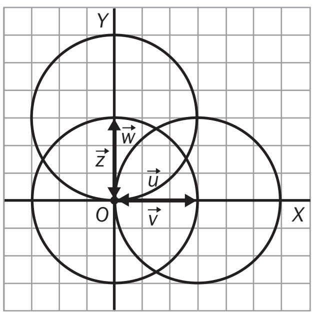
$\overrightarrow{OA} + \vec{w} = (3, 5) + (13, 0) = (16, 5)$

$\overrightarrow{OB} + \vec{w} = (5, 7) + (13, 0) = (18, 7)$

$\overrightarrow{OC} + \vec{w} = (5, 2) + (13, 0) = (18, 2)$

Las coordenadas del triángulo trasladado son $A'(16, 5)$, $B'(18, 7)$ y $C'(18, 2)$.

9.12 Dibuja en unos ejes de coordenadas una circunferencia de centro $O(0, 0)$ y radio 3 unidades. Traslada sucesivamente la circunferencia según los vectores $\vec{u}(3, 0)$, $\vec{v}(-3, 0)$, $\vec{w}(0, 3)$ y $\vec{z}(0, -3)$.

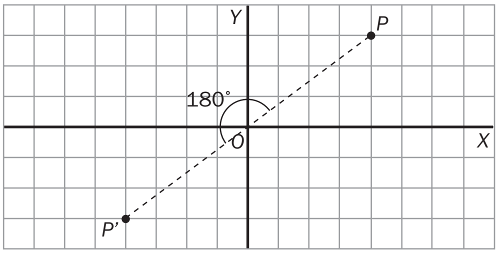


9.13 En una rotonda convergen cuatro calles perpendiculares. ¿Qué ángulos de giro pueden realizar los coches que entran en la rotonda y salen por las calles posibles, sin cometer infracciones?

Pueden girar 90°, 180°, 270° ó 360°.

9.14 Dibuja unos ejes de coordenadas en un papel cuadriculado y señala el punto *P*(4, 3).

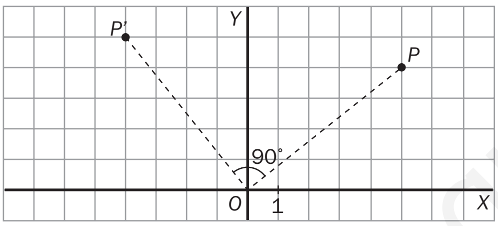
¿Cuáles son las coordenadas del punto *P′* que se obtiene al girar 180° el punto *P* tomando como centro de giro el origen de coordenadas?



P′(−4, −3)

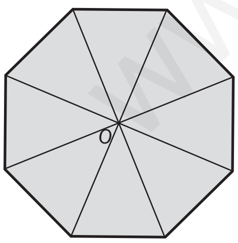
9.15 Dibuja unos ejes de coordenadas en un papel cuadriculado y señala el punto *P*(5, 4).

¿Cuáles son las coordenadas del punto *P′* que se obtiene al girar 90° el punto *P* tomando como centro de giro el origen de coordenadas?



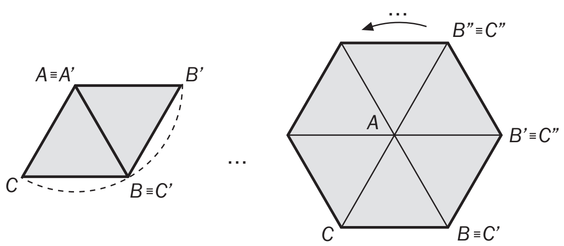
P′ (5, −4)

9.16 Dibuja un octógono regular. ¿Cuáles son los giros posibles que transforman el octógono en sí mismo?



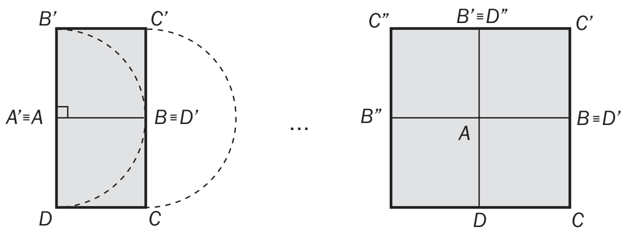
Son los giros de centro *O* y amplitud 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315° y 360°.

9.17 **Dibuja un triángulo equilátero *ABC*. Con centro *A* gira el triángulo un ángulo de 60°. Si repites este proceso con los triángulos que vas obteniendo, ¿qué figura resulta cuando vuelves a la dada?**



La figura que resulta al volver a la dada es un hexágono.

9.18 **Dibuja un cuadrado *ABCD*. Con centro *A* gira el cuadrado un ángulo de 90°. Si repites este proceso con los cuadrados que vas obteniendo, ¿qué figura resulta cuando vuelves a la original?**

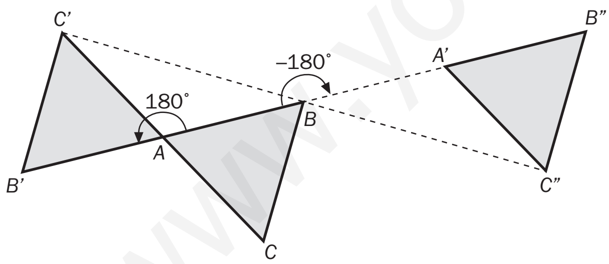


La figura que resulta al volver a la dada es un cuadrado de lado el doble que el inicial.

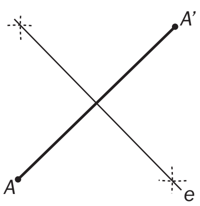
9.19 **A una figura se le aplica un giro de centro *O* y amplitud 200° y, a continuación, un nuevo giro del mismo centro y ángulo α. ¿Qué valor positivo debe tener α para que la figura vuelva a su primera posición?**

Debe tener una amplitud de 160°, porque así el producto de los dos giros sería de 360°, que completaría la circunferencia volviendo a la posición original.

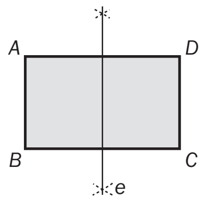
9.20 **Dibuja un triángulo equilátero *ABC*. Con centro *A* gira el triángulo un ángulo de 180°. Después aplica al triángulo obtenido *AB′C′* un giro de centro *B* y amplitud −180°.**



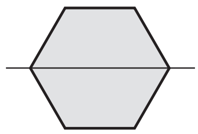
9.21 **Dos puntos *A* y *A′* son simétricos respecto de un eje *e*. Dibuja el eje.**



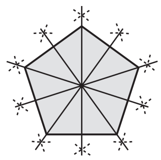
9.22 Dibuja un rectángulo *ABCD*. Construye con regla y compás el eje de simetría que transforma *A* y *B* en *D* y *C,* respectivamente.



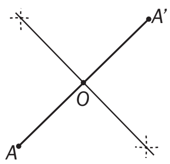
9.23 Dibuja un hexágono regular. Construye con regla y compás un eje de simetría de sus vértices.



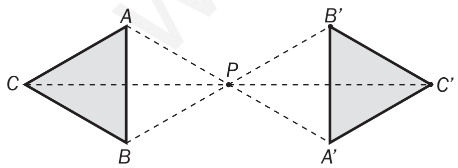
9.24 Dibuja un pentágono regular. Construye con regla y compás sus ejes de simetría.



9.25 Dibuja dos puntos cualesquiera *A* y *A'*, y encuentra su centro de simetría.



9.26 Dibuja un triángulo *ABC*, y su simétrico *A'B'C'* respecto de un punto *P*. ¿Tienen el mismo sentido de giro según el orden de los vértices?



Sí tienen el mismo sentido de giro.

9.27 Comprueba si el centro de simetría es el punto donde se cortan las diagonales:

a) En un cuadrado. **b) En un pentágono.** **c) En un hexágono.**

a) Sí b) No c) Sí

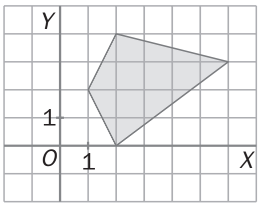
9.28 Halla las coordenadas del punto simétrico a $P(-3, 5)$ respecto del eje OX, del eje OY y del origen.

Punto simétrico respecto del eje OX: $P'(-3, -5)$
Punto simétrico respecto del eje OY: $P''(3, 5)$
Punto simétrico respecto del origen: $P'''(3, -5)$

9.29 Dado el cuadrilátero de vértices $A(2, 4)$, $B(-3, 5)$, $C(-3, -1)$, $D(3, -2)$, halla las coordenadas de su simétrico respecto del eje OX, del eje OY y del origen.

Simétrico respecto del eje OX: $A(2, -4)$, $B(-3, -5)$, $C(-3, 1)$, $D(3, 2)$
Simétrico respecto del eje OY: $A(-2, 4)$, $B(3, 5)$, $C(3, -1)$, $D(-3, -2)$
Simétrico respecto del origen: $A(-2, -4)$, $B(3, -5)$, $C(3, 1)$, $D(-3, 2)$

9.30 Determina las coordenadas de la figura simétrica de esta figura respecto del eje OX, del eje OY y del origen.

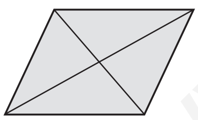


Nombramos los vértices: $A(1, 2)$, $B(2, 4)$, $C(6, 3)$, $D(2, 0)$.
Simetría respecto del eje OX: $A'(1, -2)$, $B'(2, -4)$, $C'(6, -3)$, $D'(2, 0)$
Simetría respecto del eje OY: $A'(-1, 2)$, $B'(-2, 4)$, $C'(-6, 3)$, $D'(-2, 0)$
Simetría respecto del origen: $A'(-1, -2)$, $B'(-2, -4)$, $C'(-6, -3)$, $D'(-2, 0)$

9.31 En un triángulo isósceles, ¿cuál de las tres alturas es eje de simetría? Razona la respuesta.

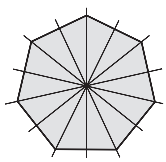
La altura que parte del vértice opuesto al desigual, porque todo punto del triángulo tiene un simétrico respecto de esta altura en el triángulo.

9.32 Traza, si los tiene, los ejes y el centro de simetría de un romboide.



No tiene ejes de simetría. El centro de simetría es el punto de corte de las dos diagonales.

9.33 Traza, si los tiene, los ejes y el centro de simetría de un heptágono.



9.34 ¿Cuáles son los ejes de simetría de los triángulos equiláteros? ¿Y de los triángulos rectángulos?

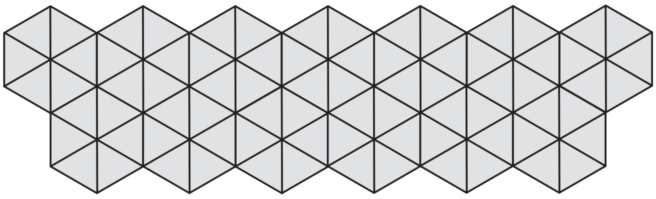
En un triángulo equilátero, los ejes de simetría son las medianas, que coinciden con las alturas y dividen el segmento opuesto al vértice en dos partes iguales. Todos los puntos del triángulo tienen su simétrico respecto a la mediana en el triángulo.

No tiene ejes de simetría a no ser que sea isósceles, es decir, que tenga los dos catetos iguales, y entonces el eje de simetría sería la altura que parte del ángulo recto.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

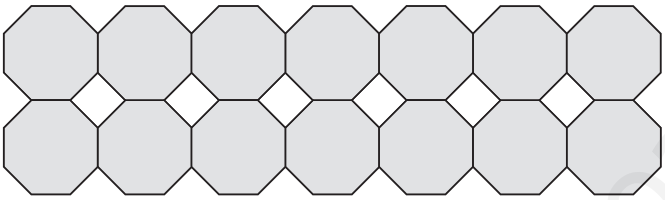
9.35 **Dibuja un mosaico formado por triángulos equiláteros y hexágonos regulares.**

Respuesta abierta, por ejemplo:



9.36 **Dibuja un mosaico formado por cuadrados y octógonos regulares.**

Respuesta abierta, por ejemplo:



EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Vectores en el plano

9.37 Las coordenadas de los vértices de un triángulo son $A(0, 4)$, $B(2, -3)$ y $C(-2, 7)$. Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB}(2 - 0, -3 - 4) = \overrightarrow{AB}(2, -7)$

$\overrightarrow{AC}(-2 - 0, 7 - 4) = \overrightarrow{AC}(-2, 3)$

$\overrightarrow{BC}(-2 - 2, 7 - (-3)) = \overrightarrow{BC}(-4, 10)$

9.38 Considera el vector $\overrightarrow{AB}(3, -5)$. Sabiendo que las coordenadas del punto A son $(1, 5)$, calcula las coordenadas del punto B.

$\overrightarrow{AB}(3, -5) = \overrightarrow{AB}(x - 1, y - 5) \Rightarrow B(x, y) = B(4, 0)$

9.39 Dados los vectores $\vec{u}(-1, 2)$, $\vec{v}(2, 4)$ y $\vec{w}(0, 5)$, realiza estas operaciones.

a) $2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$ b) $\vec{u} - (\vec{w} + \vec{w})$ c) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ d) $\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w})$

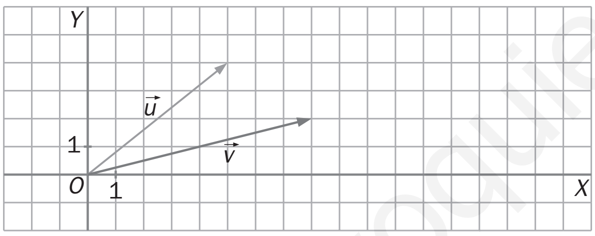
a) $2\vec{u} = 2(-1, 2) = (2 \cdot (-1), 2 \cdot 2) = (-2, 4) = (-1 + (-1), 2 + 2) = (-1, 2) + (-1, 2) = \vec{u} + \vec{u}$

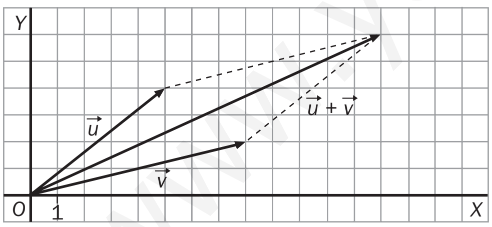
b) $\vec{u} - (\vec{w} + \vec{w}) = (-1, 2) - ((0, 5) + (0, 5)) = (-1, 2) - (0, 10) = (-1, -8)$

c) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (-1, 2) + (2, 4) + (0, 5) = (-1 + 2 + 0, 2 + 4 + 5) = (1, 11)$

d) $\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w}) = (-1, 2) - ((2, 4) - (0, 5)) = (-1, 2) - (2, -1) = (-3, 3)$

9.40 Calcula la suma numérica y geométrica de los vectores del dibujo.

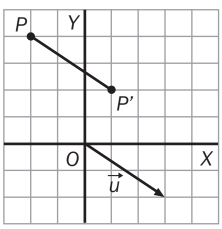




$(5, 4) + (8, 2) = (13, 6)$

Traslaciones

9.41 Halla numérica y geométricamente el trasladado del punto $P(-2, 4)$ según el vector guía $\vec{u}(3, -2)$.



$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \vec{u} = (-2, 4) + (3, -2) = (1, 2)$$

El punto trasladado es $P'(1, 2)$.

9.42 **En una traslación de vector guía $\vec{u}(-3, 2)$, el punto P se ha transformado en el punto $P'(6, 3)$. Halla las coordenadas de P.**

$\overrightarrow{OP'} = (6, 3) = \overrightarrow{OP} + \vec{u} = (x, y) + (-3, 2) \Rightarrow \overrightarrow{OP} = (9, 1)$. El punto de partida es $P(9, 1)$.

9.43 **¿Cuál es el vector guía en una traslación que transforma el punto $A(2, -4)$ en el punto $A'(7, 7)$?**

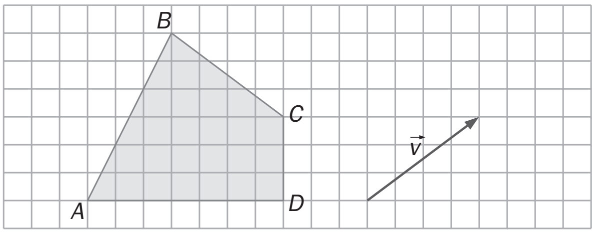
$\overrightarrow{OA'} = (7, 7) = \overrightarrow{OA} + \vec{u} = (2, -4) + (x, y) \Rightarrow \vec{u}(5, 11)$

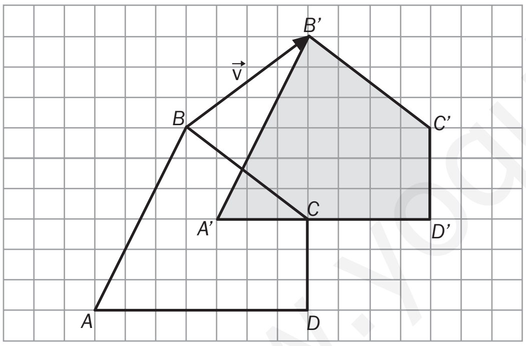
9.44 **En una traslación de vector guía $\vec{u}(-4, 3)$, halla las coordenadas de los transformados de los vértices del triángulo ABC, siendo $A(0, -2)$, $B(1, 3)$ y $C(2, 4)$.**

$\overrightarrow{OA'} = (0, -2) + (-4, 3) = (-4, 1)$ $\quad$ $\overrightarrow{OB'} = (1, 3) + (-4, 3) = (-3, 6)$ $\quad$ $\overrightarrow{OC'} = (2, 4) + (-4, 3) = (-2, 7)$

Las coordenadas del triángulo trasladado son $A'(-4, 1)$, $B'(-3, 6)$, $C'(-2, 7)$.

9.45 **Dibuja la figura trasladada de la dada, según el vector guía $\vec{u}$.**





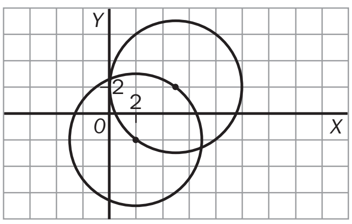
9.46 **Un círculo de centro $O(2, -2)$ y radio 5 se traslada según el vector guía $\vec{u}(3, 4)$.**

a) ¿Cuál es el nuevo centro y el nuevo radio?

b) Dibuja el círculo trasladado.

a) El nuevo centro es $(2, -2) + (3, 4) = (5, 2)$, y el radio sigue siendo 5. Todos los puntos de la circunferencia estarán trasladados según el vector guía.

b)



9.47 Considera el punto $P(2, 5)$. Aplícale sucesivamente las traslaciones de vectores guía $\vec{u}(-1, 5)$ y $\vec{v}(3, -2)$,

a) ¿Cuál es el punto trasladado?

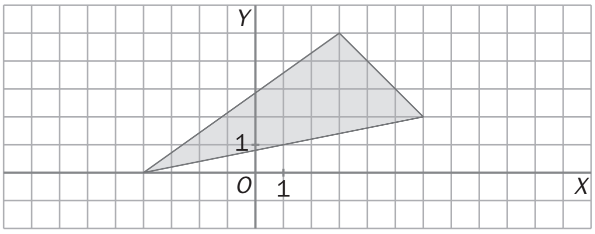
b) ¿Cuál es el vector guía resultante?

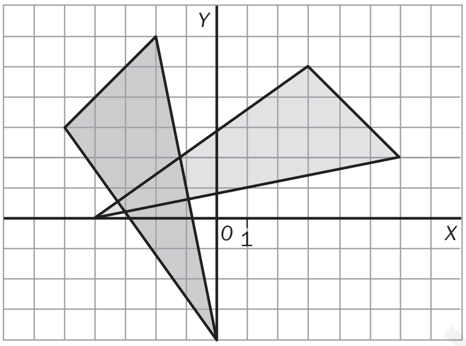
a) $\overrightarrow{OP} + \vec{u} + \vec{v} = (2, 5) + (-1, 5) + (3, -2) = (2 - 1, 5 + 5) + (3, -2) = (1 + 3, 10 - 2) = (4, 8)$

b) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (-1, 5) + (3, -2) = (2, 3)$

Giros

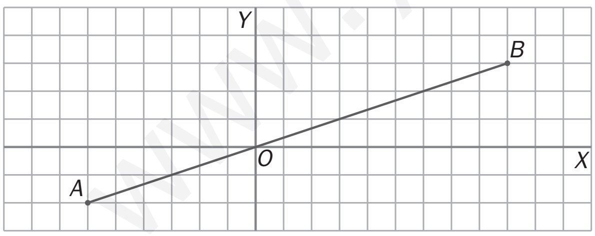
9.48 Considera el triángulo de la figura. Realiza un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 90°.



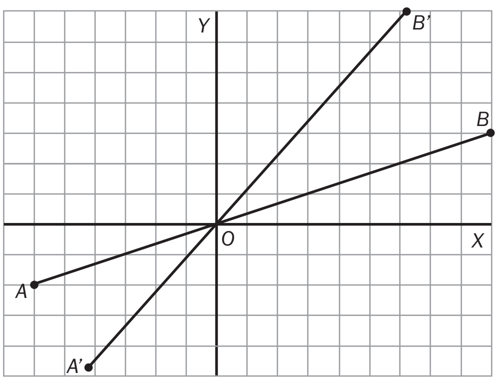


9.49 Dibuja el transformado del segmento AB mediante un giro de centro O y amplitud:

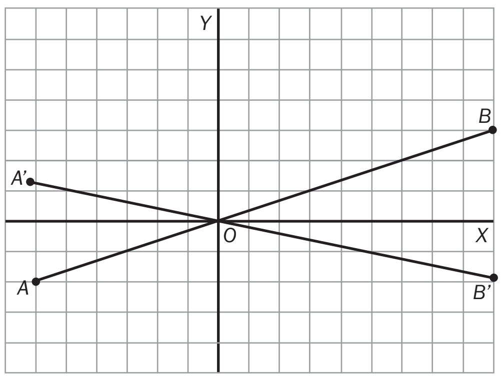
a) 30° **b) −30°**



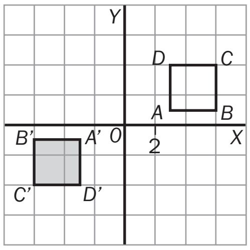
a)



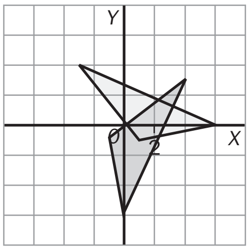
b)



9.50 Dibuja el homólogo del cuadrado de vértices $A(3, 1)$, $B(6, 1)$, $C(6, 4)$ y $D(3, 4)$ en un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 180°.



9.51 Dibuja un triángulo de vértices $A(-3, 4)$, $B(1, -1)$ y $C(6, 0)$ y aplícale un giro de centro el origen y amplitud $-90°$. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del nuevo triángulo?

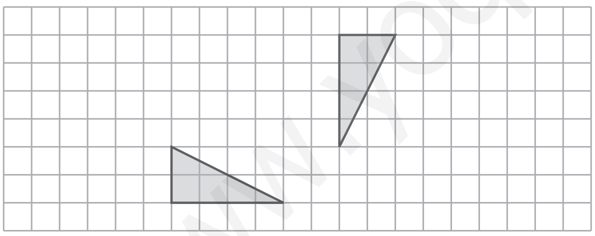


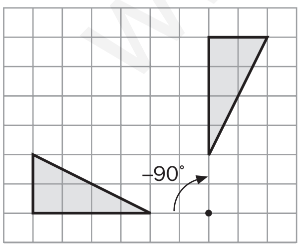
Las coordenadas del nuevo triángulo son:
$A'(4, 3)$, $B'(-1, -1)$ y $C'(0, -6)$.

9.52 Los puntos $A(4, 3)$ y $B(-3, 4)$ son homólogos en un giro de centro el origen de coordenadas. ¿Cuál es la amplitud del giro?

Es un giro de 90°.

9.53 Encuentra el centro y la amplitud del giro que transforma la figura roja en su homóloga azul.

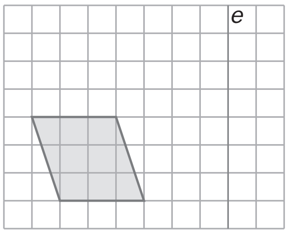




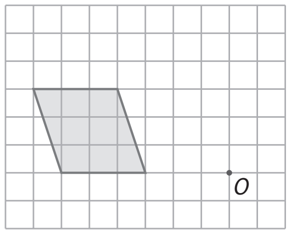
Simetrías

9.54 Dibuja la figura simétrica de la dada:

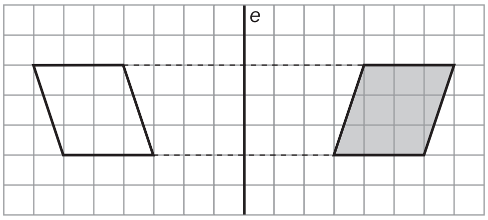
a) Respecto al eje *e*.



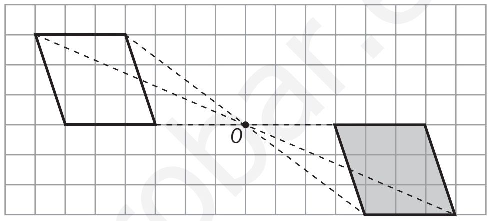
b) Respecto al punto *O*.



a)



b)



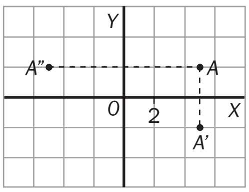
9.55 Construye el punto simétrico del punto $A(5, 2)$ respecto a:

a) El eje *OX*.

b) El eje *OY*.

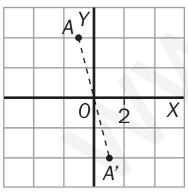
a) $A'(x', y') = A'(x, -y) = A'(5, -2)$

b) $A''(x'', y'') = A'(-x, y) = A'(-5, 2)$



9.56 Construye el punto simétrico del punto $A(-1, 4)$ respecto al origen de coordenadas.

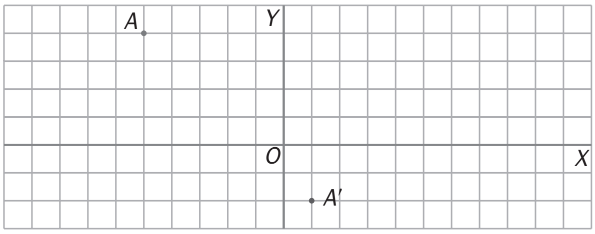
$A'(x', y') = A'(-x, -y) = A'(1, -4)$

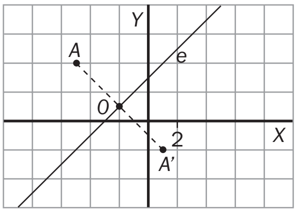


9.57 Dados los puntos *A* y *A′* del dibujo, construye:

a) Su eje de simetría.

b) Su centro de simetría.





9.58 Calcula las coordenadas del simétrico del triángulo de vértices *A*(1, 0), *B*(3, −2) y *C*(1, −4).

a) Respecto al eje *OX*.

b) Respecto al eje *OY*.

a) $A'(1, 0)$, $B'(3, 2)$, $C'(1, 4)$

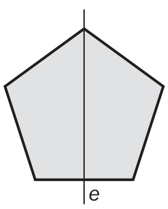
b) $A'(-1, 0)$, $B'(-3, -2)$, $C'(-1, -4)$

9.59 Señala un eje de simetría en un:

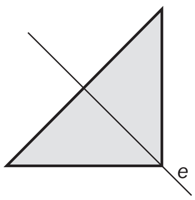
a) Pentágono regular.

b) Triángulo rectángulo isósceles.

a)



b)



9.60 Calcula las coordenadas de los puntos simétricos de los extremos del segmento *AB*, donde *A*(−3, 2) y *B*(2, 1):

a) Respecto al eje *OX*.

b) Respecto al eje *OY*.

c) Respecto al origen de coordenadas.

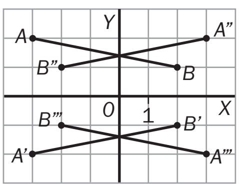
d) Dibuja los apartados anteriores.

a) $A'(-3, -2)$, $B'(2, -1)$

b) $A'(3, 2)$, $B'(-2, 1)$

c) $A'(3, -2)$, $B'(-2, -1)$

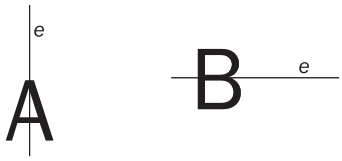
d)



9.61 Determina los ejes de simetría, si los tienen, de las siguientes letras.

A B G K N

Solo *A* y *B* tienen eje de simetría.



9.62 Encuentra los centros de simetría, si los tienen, de las siguientes letras.

C H S T Z

Solo *H*, *S* y *Z* tienen centro de simetría.

CUESTIONES PARA ACLARARSE

9.63 **¿Cuántos vectores determinan dos puntos? ¿Qué relación existe entre dichos vectores?**

Determinan dos vectores con sentidos opuestos.

9.64 **Una traslación lleva el origen de coordenadas al punto $P(5, 3)$. ¿Cuál es su vector guía?**

Su vector guía es $\vec{u} = (5, 3)$.

9.65 **¿En qué recta se transforma una recta paralela al vector guía de una traslación?**

En sí misma.

9.66 **Una traslación de vector guía $\vec{u} = (-2, 5)$ transforma un punto P en otro P'. ¿Cuál es el vector guía que transforma el punto P' en el punto P?**

El vector guía es $\vec{u} = (2, -5)$.

9.67 **En un cuadrado tomamos el punto de corte de sus diagonales como centro de giro. ¿En qué figura se transforma el cuadrado si aplicamos un giro de amplitud 90°? ¿Y de 180°? ¿Y de 270°?**

En todos los casos en el mismo cuadrado, lo que pasa es que los puntos van rotando.

9.68 **¿En qué figura se transforma un círculo al que se le aplica un giro de centro el centro del círculo y de amplitud un ángulo a cualquiera?**

En todos los casos en el mismo círculo, lo que pasa es que los puntos van rotando.

9.69 **Juan y Andrés se encuentran después de mucho tiempo sin verse:**

***¿Cómo te va la vida?* —pregunta Juan.**

***¡Muy diferente!* —le contesta Andrés— *Mi vida ha dado un giro de trescientos sesenta grados*.**

¿Qué error matemático encuentras en la contestación de Andrés?

Si se da un giro de 360°, se completa la circunferencia y se vuelve al punto de partida, es decir, que no se produce ningún cambio.

9.70 **¿En qué se transforma por una simetría axial una recta perpendicular al eje de simetría?**

En sí misma.

9.71 **¿Qué puntos permanecen invariantes (no se mueven) por una simetría axial? ¿Y por una central?**

En simetría axial, los puntos que permanecen invariantes son los del eje, y en simetría central solo permanece invariante el centro.

9.72 **Un punto permanece invariante por una traslación de vector guía $\vec{u}(a, b)$. ¿Cuánto valen a y b?**

$a = 0$, $b = 0$

9.73 **¿Cuántos ejes de simetría tiene un polígono regular?**

Tantos como lados tiene el polígono.

9.74 **En un triángulo rectángulo encontramos un eje de simetría. ¿Qué tipo de triángulo es? ¿Cuál es el eje de simetría?**

Es un triángulo isósceles, el eje de simetría es la altura que va sobre la hipotenusa.

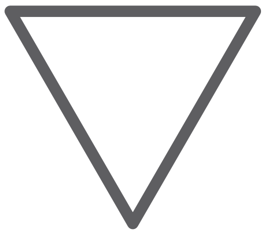
PROBLEMAS PARA APLICAR

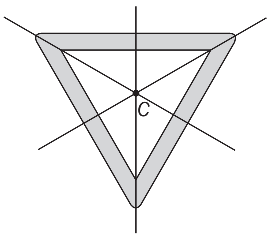
9.75 **¿Qué giro efectúa la aguja pequeña de un reloj desde las doce a las doce y veinticinco?**

La aguja pequeña gira cada hora $\frac{360°}{12} = 30°$, y cada minuto, $\frac{30°}{60} = 0{,}5°$.

Entonces, en 25 minutos girará 25 min · 0,5°/min = 12,5°.

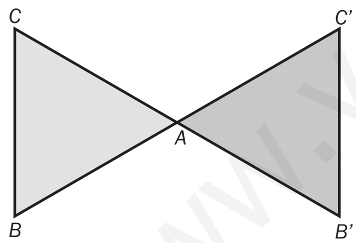
9.76 **Investiga si las siguientes señales de tráfico poseen simetría axial o central y, en su caso, indica un eje o un centro de simetría.**





La señal de STOP no es simétrica por las letras.

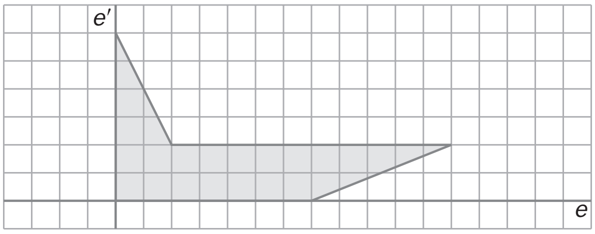
9.77 **Dibuja un triángulo *ABC* y aplícale una simetría central de centro el punto *A*.**

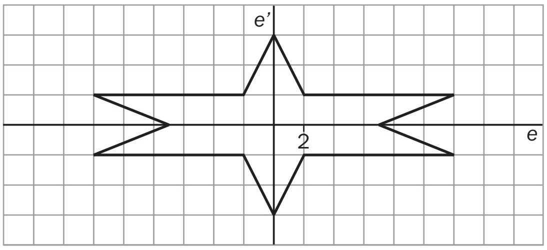


9.78 **A un triángulo de vértices *A*(1, 0), *B*(1, 3) y *C*(−4, 5) se le aplica una traslación de vector guía $\vec{u}$(1, −2). Halla las coordenadas de los puntos homólogos de los vértices y dibuja el triángulo resultante.**

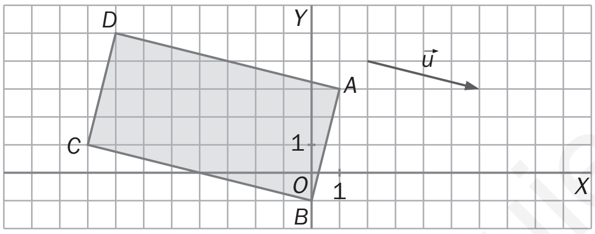
$\overrightarrow{OA}' = \overrightarrow{OA} + \vec{u} = (2, -2)$ $\overrightarrow{OB}' = \overrightarrow{OB} + \vec{u} = (2, 1)$ $\overrightarrow{OC}' = \overrightarrow{OC} + \vec{u} = (-3, 3)$

9.79 Sabemos que una figura, de la que solo tenemos un trozo, es simétrica respecto a los ejes *e* y *e*′. Completa su dibujo.



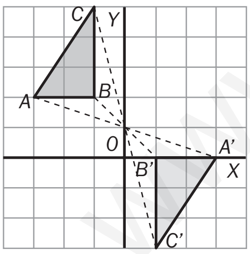


9.80 Aplícale al rectángulo del dibujo una traslación de vector guía $\vec{u}$(4, −1). Escribe las coordenadas de los vértices *A*, *B*, *C*, *D* y sus correspondientes homólogos.



A(1, 3), *A*′(5, 2) *B*(0, −1), *B*′(4, −2) *C*(−8, 1), *C*′(−4, 0) *D*(−7, 5), *D*′(−3, 4)

9.81 A un triángulo de vértices *A*(−3, 2), *B*(−1, 2) y *C*(−1, 5) se le aplica una simetría de centro O(0, 1). Halla las coordenadas de los puntos simétricos de los vértices y dibuja el triángulo resultante.



A′(3, 0), *B*′(1, 0), *C*′(1, −3)

9.82 Dado el punto *P*(4, −4), calcula su simétrico al aplicarle:

a) Una simetría de eje *OX*.

b) Una simetría de eje *OY.*

c) Una simetría de centro el origen de coordenadas.

d) Describe la figura que se obtiene al unir los cuatro puntos.

a) *P*′(4, 4)

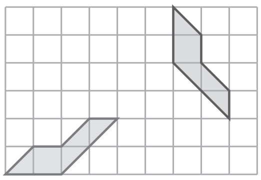
b) *P*″(−4, −4)

c) *P*′(−4, 4)

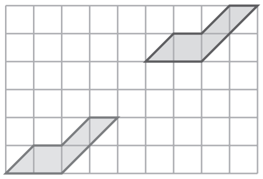
d) Un cuadrado de lado 8 unidades.

9.83 Describe, en cada caso, el movimiento que transforma la figura roja en su homóloga.

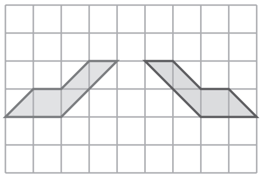
a)



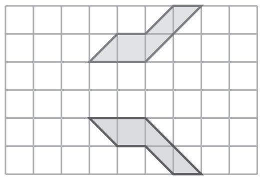
c)



b)



d)



Consideramos el origen como la esquina inferior izquierda.

a) Giro de $-90°$. Centro del giro: (6, 0)

b) Simetría respecto a un eje. Eje $x = 4{,}5$

c) Traslación. Vector guía sería $\vec{u}(5, 4)$

d) Simetría respecto a un eje. Eje $y = 3$

9.84 Dado un segmento *AB*, consideramos su punto medio *M*. Se verifica que los vectores $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{MB}$ son iguales. Con estos datos, busca las coordenadas del punto medio del segmento de extremos *A*(−1, 2) y *B*(5, 6).

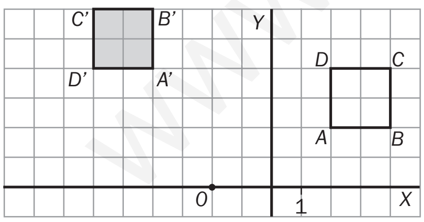
Si $M(x, y)$, $\overrightarrow{AM} = (x + 1, y - 2) = \overrightarrow{MB} = (5 - x, 6 - y) \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 5 - x \\ y - 2 = 6 - y \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 4$

Luego $M(2, 4)$

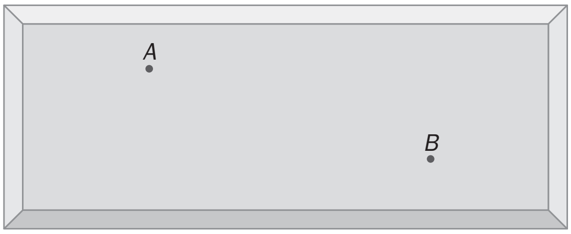
9.85 Se va a hacer una gasolinera en la carretera general de tal modo que esté a la misma distancia de Villablanca que de Villaverde. ¿En qué punto de la carretera debe hacerse?

Trazamos el eje de simetría de esos dos puntos, que será la mediatriz, y corta la carretera en un punto. Como dos puntos equidistan de todos los puntos de su mediatriz, el punto donde el eje de simetría corta la carretera equidista de los dos pueblos, es ahí donde debe construirse la gasolinera.

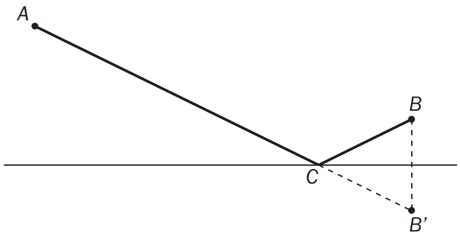
9.86 Calcula las coordenadas del transformado de un cuadrado de vértices *A*(2, 2), *B*(4, 2), *C*(4, 4) y *D*(2, 4) al aplicarle un giro de centro *O*(−2, 0) y ángulo 90°.



9.87 **¿Qué camino debe seguir la bola *B* para que rebotando en la banda oscura golpee la bola *A*?**



Salvo tiros con efecto, la bola sigue la trayectoria natural en la que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión (ley de Snel), y para que se cumpla esto, la bola sigue la trayectoria más corta. Para ello trazamos el simétrico con respecto a la banda oscura de uno de los puntos y lo unimos al otro. El punto de corte con la banda oscura es donde rebota la bola.



REFUERZO

Traslaciones

9.88 ¿Qué traslación transforma la figura *A* en la figura *A'*?

La de vector guía $\vec{u} = (9, 1)$.

9.89 A un punto *P*(2, 6) se le aplica una traslación de vector guía $\vec{u}$ y se obtiene su transformado, *P'*(3, −5). A su vez, a *P'* se le aplica otra traslación de vector guía $\vec{v}$ se btiene *P''*(0, −2). Averigua cuál es el vector guía que traslada *P* a *P''*.

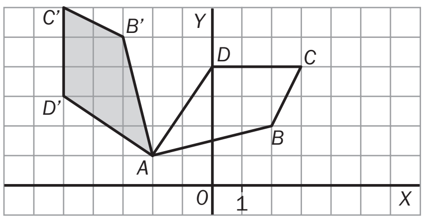
$$\overrightarrow{OP''} = \overrightarrow{OP'} + \vec{v} = (\overrightarrow{OP} + \vec{u}) + \vec{v} = \overrightarrow{OP} + (\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{OP} + \vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = (-2, -8)$$

Giros

9.90 A una figura se le aplica un giro de centro *O* y amplitud de 200° y, a continuación, un nuevo giro con el mismo centro y amplitud 230°. Explica cuál es el giro resultante.

Sería un giro de 200° + 230° = 430°. Como cada 360° volvemos al punto de origen, el resultado al final es un giro de 430° − 360° = 70°.

9.91 Al cuadrilátero de vértices *A*(−2, 1), *B*(2, 2), *C*(3, 4) y *D*(0, 4) se le aplica un giro de centro *A* y amplitud 90°. Dibuja la figura resultante y halla las coordenadas de los puntos homólogos a los dados.



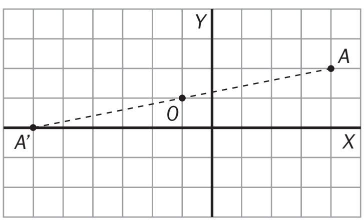
A'(−2, 1), *B'*(−3, 5), *C'*(−5, 6), *D'*(−5, 3)

9.92 Halla las coordenadas del transformado del punto *A*(1, 4) por un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud −90°.

A'(4, −1)

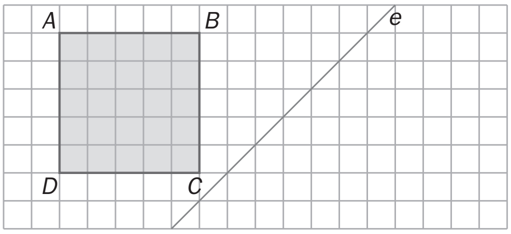
Simetrías

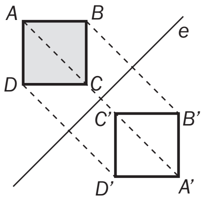
9.93 Halla las coordenadas del punto simétrico al punto *A*(4, 2) por una simetría de centro *O*(−1, 1). Ayúdate de un dibujo para obtener la respuesta.



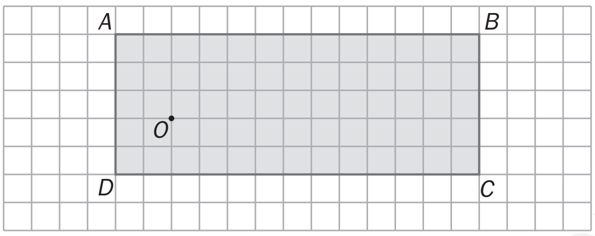
A'(−6, 0)

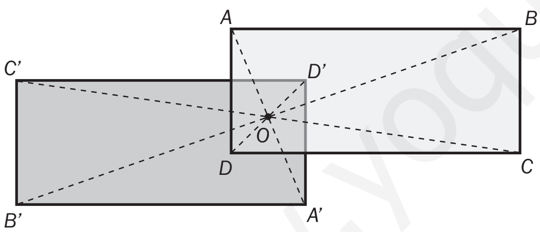
9.94 **Construye la figura simétrica al cuadrado *ABCD*, respecto del eje *e*.**





9.95 **Construye la figura simétrica al rectángulo *ABCD*, respecto del punto *O*.**

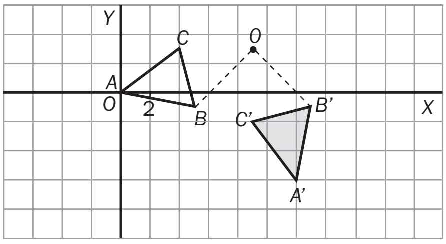




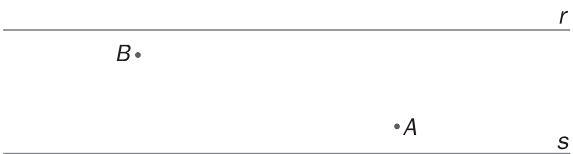
AMPLIACIÓN

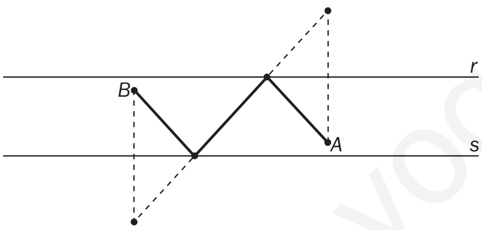
9.96 A un triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(5, -1)$ y $C(4, 3)$ se le ha aplicado un giro de centro $O(9, 3)$, de forma que el punto B se ha transformado en $B'(13, -1)$. Encuentra el ángulo de giro y los transformados de los puntos A y C. Haz un dibujo para obtener la respuesta.

Es un ángulo de 90°. Y los transformados son $A'(12, -6)$ y $C'(9, -2)$.



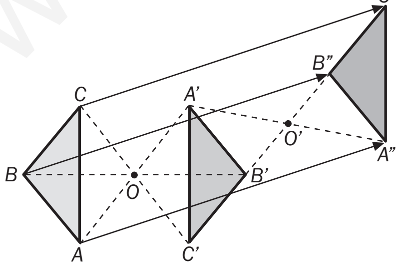
9.97 Describe el camino más corto para ir del punto A al punto B, si previamente se debe pasar primero por la recta r y luego por la recta s.



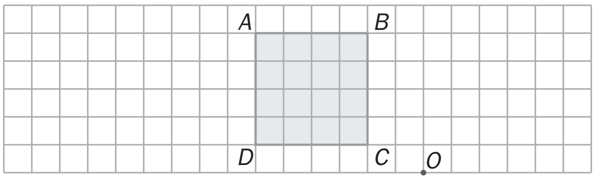


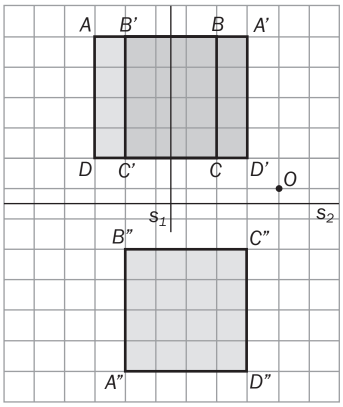
9.98 ¿Qué movimiento se obtiene si se aplican consecutivamente dos simetrías centrales de distinto centro a una figura? Utiliza un dibujo para resolver el problema.

Se obtiene una traslación de vector guía $\overrightarrow{AA''}$.

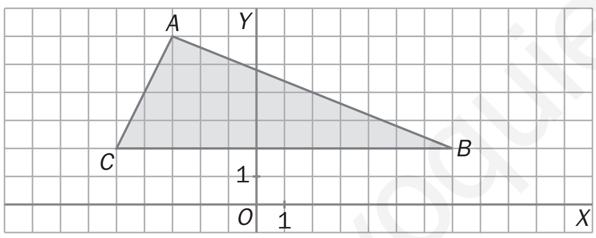


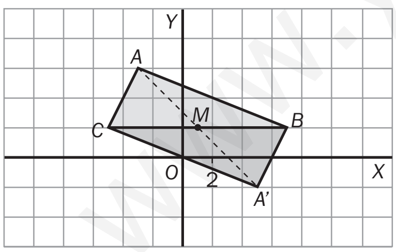
9.99 Al cuadrado se le aplica un giro de centro *O* y amplitud 90°. Encuentra dos simetrías axiales que, aplicadas sucesivamente al cuadrado, dan el mismo resultado que el giro.





9.100 En el triángulo *ABC* se aplica una simetría central de centro *M*, punto medio de *BC*. Calcula las coordenadas de los simétricos de los vértices del triángulo dado, *A′B′C′*. ¿Qué figura forman *ABA′C*?



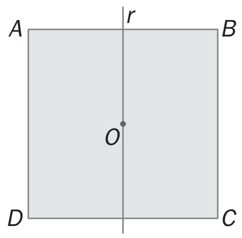


$A'(5, -2)$, $B' \equiv C$, $C' \equiv B$. Forman un paralelogramo.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

9.101 Movimientos del cuadrado

El cuadrado de vértices *ABCD* tiene por centro el punto *O*. La recta *r* pasa por *O* y por los puntos medios de los lados *AB* y *DF*.



a) Dibuja el cuadrado después de haberle aplicado el movimiento *G* determinado por el giro de centro *O* y amplitud 90°.

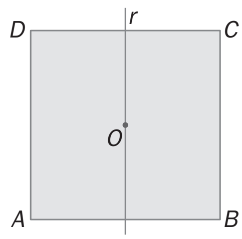
b) Dibuja el cuadrado después de haberle aplicado una simetría, *S*, de eje *r*.

c) Dibuja el cuadrado después de haberle aplicado el movimiento G^3, entendiendo como G^3 el movimiento que resulta de aplicar tres veces consecutivas *G*.

d) Dibuja el cuadrado después de haberle aplicado los movimientos *GS* y SG^3, entendiendo por *GS* el movimiento que resulta de aplicar primero *G* y luego *S*.

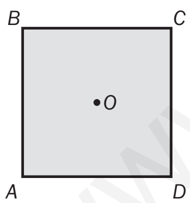
e) Escribe el movimiento que corresponde a la siguiente figura de dos formas diferentes.

Solo puedes utilizar *G* y *S* tantas veces como quieras de forma consecutiva y en el orden que consideres adecuado.

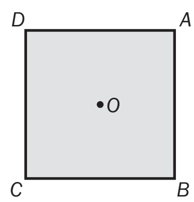


f) ¿Crees que la aplicación de estos movimientos es siempre conmutativa? Pon algún ejemplo que justifique tu respuesta.

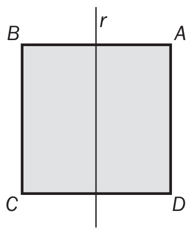
a)



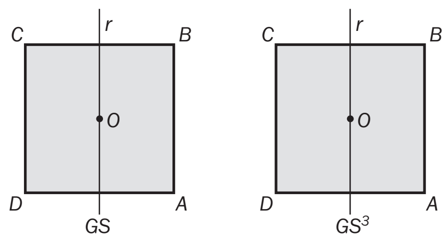
c)



b)



d)



e) G^2S y SG^2.

f) No es siempre conmutativa. Por ejemplo, $GS \neq SG$.

A U T O E V A L U A C I Ó N

9.A1 Considera los vectores $\vec{u}(-5, 4)$ y $\vec{v}(4, 2)$.

a) Calcula: $\vec{u} - \vec{v}$

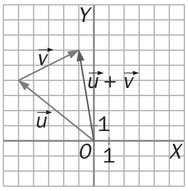
b) Halla: $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{v})$

c) Calcula geométricamente: $\vec{u} + \vec{v}$

a) $\vec{u} - \vec{v} = (-5, 4) - (4, 2) = (-9, 2)$

b) $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{v}) = (-5, 4) - ((4, 2) + (4, 2)) = (-13, 0)$

c)



9.A2 Considera el triángulo de vértices $A(0, -3)$, $B(3, 2)$ y $C(-5, 1)$. Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$.

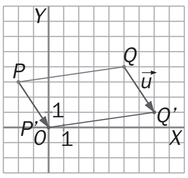
$\overrightarrow{AB} = (3, 2) - (0, -3) = (3, 5)$; $\overrightarrow{BC} = (-5, 1) - (3, 2) = (-8, -1)$; $\overrightarrow{CA} = (0, -3) - (-5, 1) = (5, -4)$

9.A3 Determina, numérica y geométricamente, el trasladado del segmento de extremos $P(-2, 3)$ y $Q(5, 4)$, según el vector guía $\vec{u}(2, -3)$.

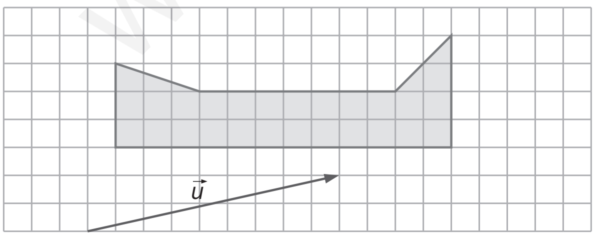
Numéricamente:

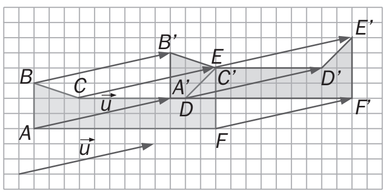
$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \vec{u} = (-2, 3) + (2, -3) = (0, 0)$

$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OQ} + \vec{u} = (5, 4) + (2, -3) = (7, 1)$



9.A4 Aplica geométricamente una traslación de vector guía $\vec{u}$ a la figura del dibujo.





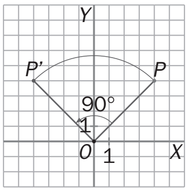
9.A5 **Calcula las coordenadas del punto homólogo de $A(4, 4)$ al aplicarle un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud:**

a) 90°

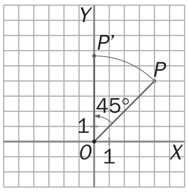
b) 45°

c) −90°

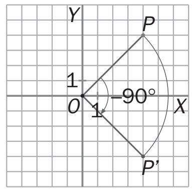
d) 180°

a) 

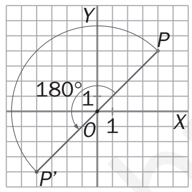
$P'(-4, 4)$

b) 

$P'(0;\ 5{,}66)$

c) 

$P'(4, -4)$

d) 

$P'(-4, -4)$

9.A6 **Dado el segmento de extremos $A(1, 2)$ y $B(3, 6)$, halla las coordenadas de su simétrico respecto a:**

a) El eje *OX*.

b) El eje *OY*.

c) El origen de coordenadas.

a) $A'(1, -2)$, $B'(3, -6)$

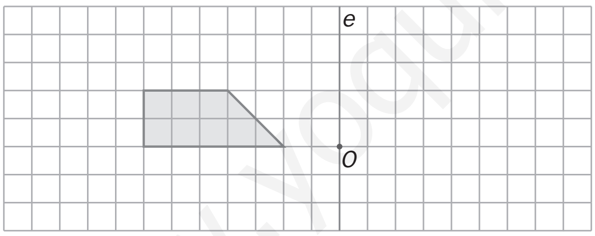
b) $A'(-1, 2)$, $B'(-3, 6)$

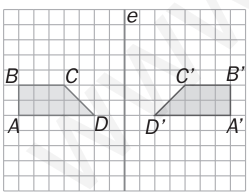
c) $A'(-1, -2)$, $B'(-3, -6)$

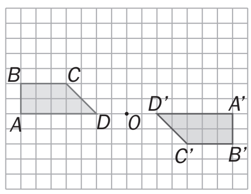
9.A7 **Dibuja la figura simétrica de la dada respecto a:**

a) El eje *e*.

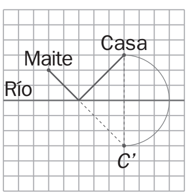
b) El punto *O*.



a) 

b) 

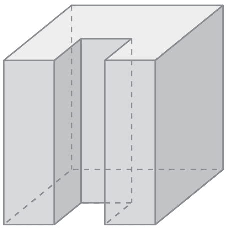
9.A8 **Maite está en el punto *A* dando un paseo con su perra y va a iniciar la vuelta a su casa, pero antes quiere pasar por el río para que su perra pueda beber. ¿Cuál es el camino más corto que puede elegir Maite?**



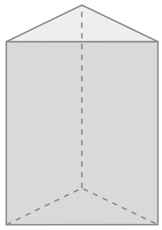
EJERCICIOS PROPUESTOS

10.1 Indica cuál de estos poliedros es cóncavo y cuál es convexo.

a)



b)



a) Cóncavo

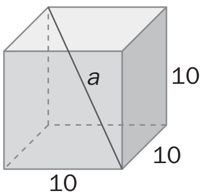
b) Convexo

10.2 Completa la siguiente tabla.

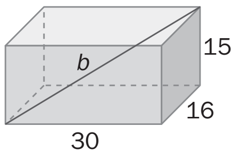
	Caras (C)	Vértices (V)	Aristas (A)	$C + V$	$A + 2$
Tetraedro	4	4	6	8	8
Cubo	6	8	12	14	14
Octaedro	8	6	12	14	14
Dodecaedro	12	20	30	32	32
Icosaedro	20	12	30	32	32

10.3 Halla el elemento desconocido en los siguientes prismas. Las medidas están dadas en centímetros.

a)



b)



a) Hallamos la diagonal de la base: $d = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$ cm

Y ahora la diagonal del prisma, por el teorema de Pitágoras:

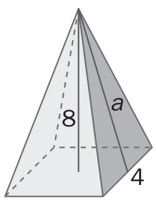
$a = \sqrt{\left(\sqrt{200}\right)^2 + 10^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ cm

b) Hallamos la diagonal de la base: $d = \sqrt{30^2 + 16^2} = \sqrt{1\,156} = 34$ cm

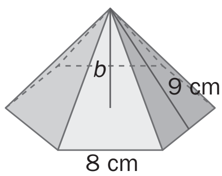
Y ahora la diagonal del prisma, por el teorema de Pitágoras: $b = \sqrt{34^2 + 15^2} = \sqrt{1\,381}$ cm

10.4 Calcula el elemento desconocido en estas pirámides. Las medidas están dadas en centímetros.

a)



b)



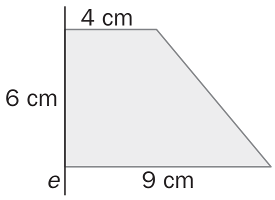
a) La base es un cuadrado, aplicamos el teorema de Pitágoras con catetos: 2 y 8

$a = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 8,25$ cm

b) Sea h la apotema del hexágono, por Pitágoras: $h^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{48} = 6,93$ cm

$b^2 + 6,93^2 = 9^2 \Rightarrow b^2 = 33 \Rightarrow b = 5,74$ cm

10.5 **¿Qué cuerpo geométrico se obtiene al girar el trapecio sobre el eje *e*? Halla la generatriz.**

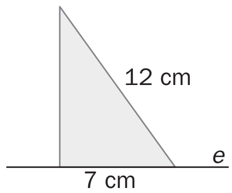


Se obtiene un tronco de cono.

Para el cálculo de la generatriz usamos el teorema de Pitágoras:

$g^2 = 6^2 + 5^2 = 61 \Rightarrow g = 7{,}81$ cm

10.6 **¿Qué cuerpo geométrico se obtiene al girar el triángulo sobre el eje *e*? ¿Cuánto mide el radio de la base?**

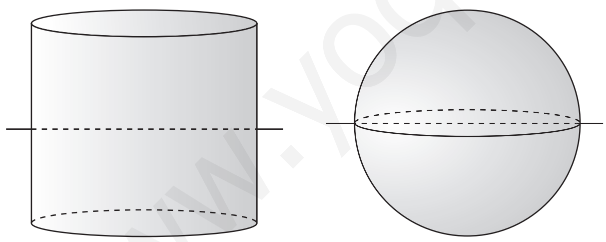


Se obtiene un cono.

El radio de la base es el cateto de longitud desconocida del triángulo, usamos Pitágoras para hallarlo.

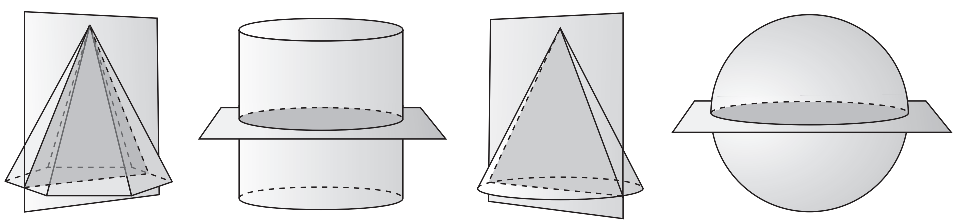
$12^2 = 7^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 95 \Rightarrow x = 9{,}75$ cm

10.7 **Para los cuerpos del ejercicio resuelto 3, traza, si es posible, otros ejes de simetría.**



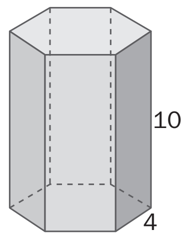
La pirámide y el cono no tienen más ejes de simetría.

10.8 **Para los cuerpos del ejercicio resuelto 3, traza, si es posible, otros planos de simetría.**

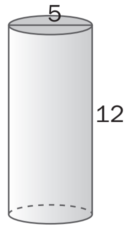


10.9 Halla el área lateral y total de estos cuerpos. Las medidas están dadas en centímetros.

a)



b)



a) $A_{\text{hexágono}} = 6\left(\dfrac{4h}{2}\right) = 12h = 12\sqrt{4^2 - 2^2} = 12\sqrt{12} = 41{,}57 \text{ cm}^2$

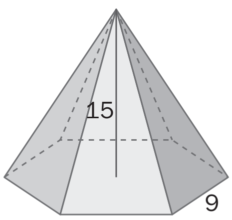
$A_{\text{lateral}} = 10 \cdot 24 = 240 \text{ cm}^2 \quad A_{\text{total}} = 240 + 2 \cdot 41{,}57 = 323{,}14 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{lateral}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 12 = 60\pi = 188{,}4 \text{ cm}^2$

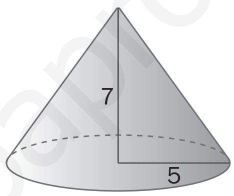
$A_{\text{cilindro}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 60\pi + 2\pi \cdot 2{,}5^2 = 72{,}5\pi = 227{,}77 \text{ cm}^2$

10.10 Calcula el área lateral y total de los siguientes cuerpos, cuyas medidas están dadas en centímetros.

a)



b)



a) Se calcula la longitud de arista lateral de la pirámide: $l = \sqrt{15^2 + 9^2} = 17{,}49$ cm

Se calcula la longitud de la apotema de la pirámide: $A = \sqrt{17{,}49^2 - 4{,}5^2} = 16{,}9$ cm

$A_{\text{lateral}} = \dfrac{p \cdot A}{2} = \dfrac{9 \cdot 6 \cdot 16{,}9}{2} = 456{,}3 \text{ cm}^2$

Se calcula la longitud de la apotema de la base: $a = \sqrt{9^2 - 4{,}5^2} = 7{,}8$ cm

$A_{\text{pirámide}} = \dfrac{p \cdot A}{2} + \dfrac{p \cdot a}{2} = 456{,}3 + \dfrac{9 \cdot 6 \cdot 7{,}8}{2} = 666{,}9 \text{ cm}^2$

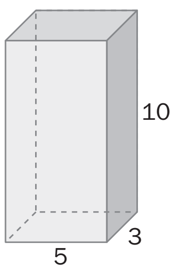
b) Se calcula la longitud de la generatriz: $g = \sqrt{7^2 + 5^2} = 8{,}6$ cm

$A_{\text{lateral}} = \pi rg = \pi \cdot 5 \cdot 8{,}6 = 43\pi = 135{,}02 \text{ cm}^2$

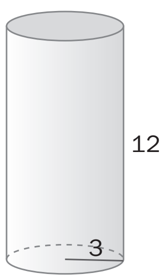
$A_{\text{cono}} = \pi rg + \pi r^2 = 43\pi + \pi \cdot 5^2 = 68\pi = 213{,}62 \text{ cm}^2$

10.11 Calcula el volumen de los siguientes cuerpos. Las medidas están dadas en centímetros.

a)



b)

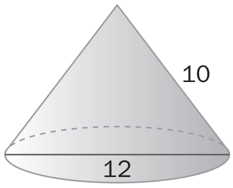


a) $V = A_{\text{base}} \cdot h = 5 \cdot 3 \cdot 10 = 150 \text{ cm}^3$

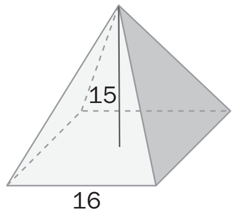
b) $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 339{,}29 \text{ cm}^3$

10.12 Halla el volumen de los siguientes cuerpos, cuyas medidas están dadas en centímetros.

a)



b)



a) $V = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = 301{,}59 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{16^2 \cdot 15}{3} = 1\,280 \text{ cm}^3$

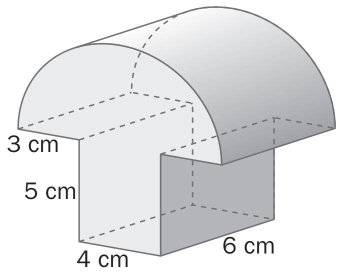
10.13 Halla el volumen de una esfera cuyo diámetro mide 12 centímetros.

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 904{,}78 \text{ cm}^3$

10.14 El volumen de una esfera es de 500 centímetros cúbicos. Calcula el área de dicha esfera.

Se calcula la longitud del radio: $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 500}{4\pi}} = 4{,}9 \text{ cm} \Rightarrow A = 4\pi \cdot r^2 = 301{,}57 \text{ cm}^2$

10.15 Calcula el área y el volumen de este cuerpo.

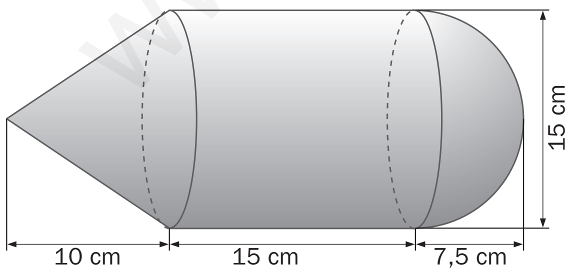


$A_1 = \pi \cdot 5 \cdot 6 + \pi \cdot 5^2 + 36 = 55\pi + 36 = 208{,}7 \text{ cm}^2$; $A_2 = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 40 + 60 + 24 = 124 \text{ cm}^2$

$A = 208{,}7 + 124 = 332{,}7 \text{ cm}^2$

$V_1 = \frac{\pi \cdot r^2 h}{2} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 6}{2} = 235{,}5 \text{ cm}^3$; $V_2 = 5 \cdot 4 \cdot 6 = 120 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 235{,}5 + 120 = 355{,}5 \text{ cm}^3$

10.16 Determina el área y el volumen del siguiente cuerpo.



Se calcula la longitud de la generatriz del cono: $g = \sqrt{10^2 - 7{,}5^2} = 6{,}61 \text{ cm}$

$A_1 = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 7{,}5 \cdot 6{,}61 = 155{,}67 \text{ cm}^2$; $A_2 = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 7{,}5 \cdot 15 = 706{,}5 \text{ cm}^2$; $A_3 = 2\pi \cdot 7{,}5^2 = 353{,}25 \text{ cm}^2$

$A = 155{,}67 + 706{,}5 + 353{,}25 = 1\,215{,}42 \text{ cm}^2$

$V_1 = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 10}{3} = 588{,}75 \text{ cm}^3$; $V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 15 = 2\,649{,}38 \text{ cm}^3$;

$V_3 = \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{2\pi \cdot 7{,}5^3}{3} = 883{,}13 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 588{,}75 + 2\,649{,}38 + 883{,}13 = 4\,121{,}26 \text{ cm}^3$

10.17 **Dos ciudades se encuentran situadas sobre dos meridianos que forman un ángulo de 225°. ¿Cuál será su diferencia horaria?**

$\frac{225}{15} = 15$ horas

10.18 **Halla el área de la superficie terrestre sabiendo que el radio de la Tierra mide, aproximadamente, 6 371 kilómetros.**

$A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,371^2 = 509\,805\,891$ km^2

10.19 **Halla la distancia entre los dos puntos terrestres. *A*(10° O, 25° S) *B*(10° O, 55° S)**

Como están en el mismo meridiano (10° O), la distancia en grados es $55° - 25° = 30°$.

$$\text{dist} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 30° \cdot 6\,371}{360} = 3\,334{,}16 \text{ km}$$

10.20 **Las coordenadas geográficas de una ciudad son (15° E, 45° N). ¿Cuál es la distancia al ecuador medida sobre el meridiano de dicha ciudad?**

Como está a 45° N $\Rightarrow$ $\text{dist} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 45° \cdot 6\,371}{360} = 5\,001{,}24$ km

PROBLEMAS PROPUESTOS

10.21 Una empresa que fabrica caramelos en forma de cubo de 1 centímetro de arista quiere preparar paquetes de 4 caramelos. ¿Qué tipo de envasado deberá realizar para reducir los costes al mínimo?

Se colocan los caramelos de manera que formen un ortoedro de dimensiones $2 \times 2 \times 1$ cm.

10.22 Las medidas, en centímetros, de un tetrabrik de leche son: $16{,}5 \times 9{,}5 \times 6$. Un fabricante quiere empaquetar 12 tetrabriks. ¿Cómo debe envasarlos para que el gasto sea mínimo?

Se colocan de manera que formen un ortoedro de dimensiones $3 \times 2 \times 2$ tetrabriks, donde la altura es 33 cm ($16{,}5 \times 2$), la longitud 19 cm ($9{,}5 \times 2$) y la anchura 18 cm (6×3). La superficie del plástico necesario es 3126 cm^2.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Poliedros y cuerpos redondos. Propiedades

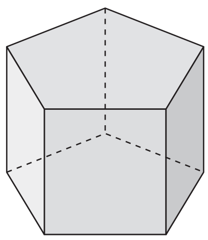
10.23 **Un poliedro regular tiene 8 vértices y 12 aristas. Utiliza la fórmula de Euler para saber de qué poliedro se trata.**

$C + V = A + 2$; $C = A - V + 2 \Rightarrow C = 12 - 8 + 2 = 6$. Se trata de un cubo.

10.24 **Queremos construir con alambre el esqueleto de un tetraedro de 8 centímetros de arista. ¿Cuánto alambre necesitamos?**

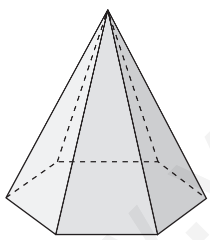
Como el tetraedro tiene 6 aristas, son necesarios $6 \cdot 8 = 48$ cm de alambre.

10.25 **Dibuja un prisma pentagonal recto, e indica cuántas aristas, cuántas caras y cuántos vértices tiene.**



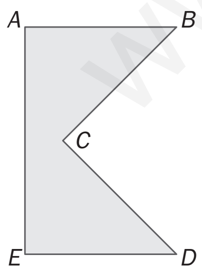
El prisma tiene 15 aristas, 7 caras y 10 vértices.

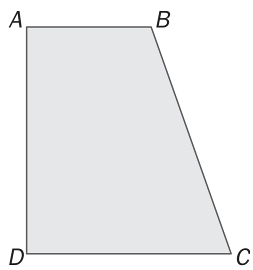
10.26 **Dibuja una pirámide hexagonal recta, e indica cuántas aristas, cuántas caras y cuántos vértices tiene.**



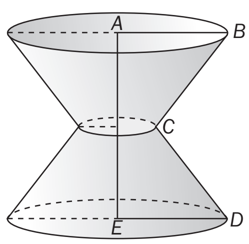
La pirámide tiene 12 aristas, 7 caras y 7 vértices.

10.27 **Dibuja la figura que se obtiene al hacer girar los siguientes polígonos sobre el lado que se indica.**

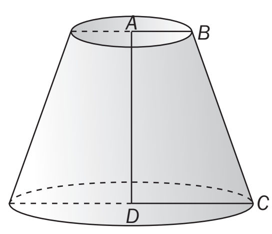




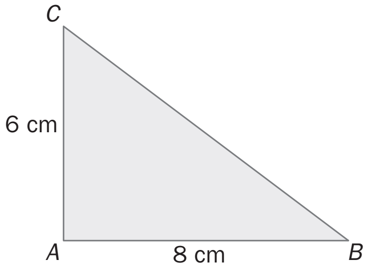
a) Lado *AE*



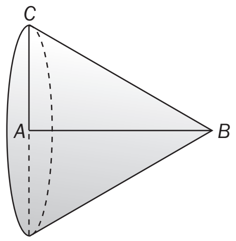
b) Lado *AD*



10.28 **El triángulo rectángulo *BAC* de la figura se hace girar sobre el cateto *AB*. Dibuja el cuerpo que se obtiene y calcula la longitud de su generatriz.**



Generatriz: $g = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm

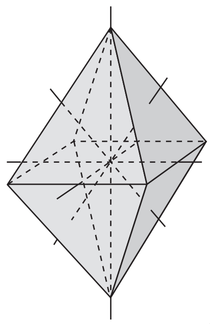


10.29 **Las aristas del ortoedro de la figura miden 12, 4 y 3 centímetros, respectivamente. Halla la longitud de la diagonal *d*.**

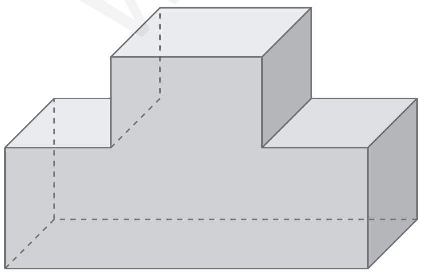
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$ cm

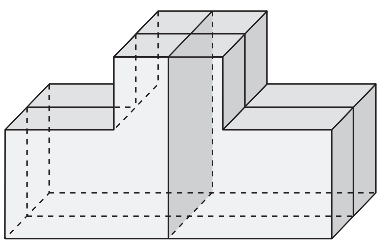
Simetría en poliedros y cuerpos redondos

10.30 **Dibuja todos los ejes de simetría que se pueden trazar en un octaedro.**



10.31 **Queremos cortar el cuerpo de la figura, de manera que quede dividido en dos trozos exactamente iguales. Dibuja todos los posibles planos de simetría para resolver el problema**

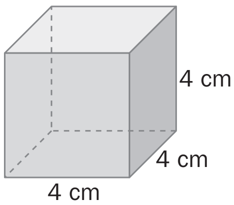




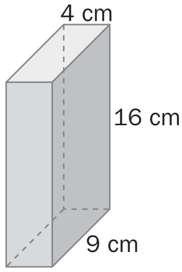
Áreas y volúmenes de poliedros, cilindros y conos

10.32 Calcula el área lateral y el área total de los siguientes cuerpos.

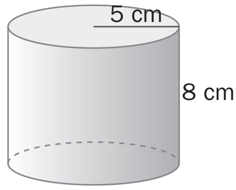
a)



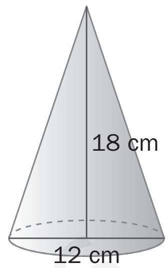
b)



c)



d)



a) $A_{\text{lateral}} = 4a^2 = 4 \cdot 4^2 = 64 \text{ cm}^2$; $A_{\text{cubo}} = 6a^2 = 6 \cdot 4^2 = 96 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{lateral}} = p \cdot h = 2 \cdot (4 + 9) \cdot 16 = 416 \text{ cm}^2$; $A_{\text{poliedro}} = p \cdot h + 2$ Área base $= 416 + 2 \cdot 9 \cdot 4 = 488 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{lateral}} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 8 = 251{,}2 \text{ cm}^2$; $A_{\text{cilindro}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 251{,}2 + 2 \cdot \pi \cdot 5^2 = 251{,}2 + 157 = 408{,}2 \text{ cm}^2$

d) Se calcula la longitud de la generatriz: $g = \sqrt{18^2 + 6^2} = 18{,}97$ cm

$A_{\text{lateral}} = \pi rg = \pi \cdot 6 \cdot 18{,}97 = 357{,}39 \text{ cm}^2$; $A_{\text{cono}} = \pi rg + \pi r^2 = 357{,}39 + \pi \cdot 6^2 = 470{,}43 \text{ cm}^2$

10.33 Un prisma recto, cuya base es un rectángulo de dimensiones 5 y 6 centímetros, tiene una altura de 15 centímetros. Calcula su volumen.

$V =$ Área base $\cdot\, h = 5 \cdot 6 \cdot 15 = 450 \text{ cm}^3$

10.34 La generatriz de un cono mide 6 centímetros y el radio de su base mide 3 centímetros. Calcula:

a) La altura del cono.

b) Su área lateral.

c) Su área total.

d) Su volumen.

a) Se calcula la altura aplicando el teorema de Pitágoras: $\sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2$ cm

b) $A_{\text{lateral}} = \pi rg = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 56{,}52 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{cono}} = \pi rg + \pi r^2 = 56{,}52 + \pi \cdot 3^2 = 84{,}78 \text{ cm}^2$

d) $V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{3{,}14 \cdot 32 \cdot 5{,}2}{3} = 48{,}984 \text{ cm}^3$

10.35 El volumen de un depósito cilíndrico es 1 695,60 metros cúbicos y el radio de su base mide 6 metros. Calcula la altura del depósito.

Se sustituyen los datos en la fórmula:

$V_{\text{cilindro}} =$ Área base $\cdot\, h$; $1\,695{,}6 = \pi \cdot 6^2 \cdot h$

Se despeja la altura: $h = \dfrac{1\,695{,}6}{\pi \cdot 6^2} = 15$ cm

10.36 Las pirámides de los faraones Keops y Micerinos se pueden encontrar muy próximas en Gizeh, aunque con proporciones bien distintas. La pirámide de Keops tiene una base cuadrada de lado 230 metros y de altura 147 metros. El lado de la base cuadrada de la pirámide de Micerinos es 105 metros y la altura 65 metros.

a) Calcula el volumen de cada una de ellas.

b) ¿Cuántas veces es mayor la pirámide de Keops respecto a la de Micerinos?

a) $V_{\text{pirámide Keops}} = \dfrac{230^2 \cdot 147}{3} = 2\,592\,100 \text{ m}^3$

$V_{\text{pirámide Micerinos}} = \dfrac{105^2 \cdot 65}{3} = 238\,875 \text{ m}^3$

b) $\dfrac{2\,592\,100}{238\,875} = 10{,}85$

El volumen de la pirámide de Keops es 10,85 veces mayor que el de la de Micerinos.

La esfera

10.37 Calcula el área de una superficie esférica cuyo radio mide 7 centímetros.

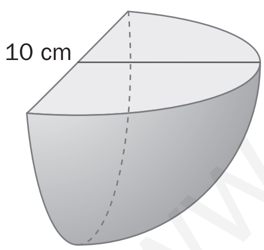
$A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 7^2 = 615{,}44 \text{ cm}^2$

10.38 Halla el volumen de una esfera cuyo diámetro mide 18 centímetros.

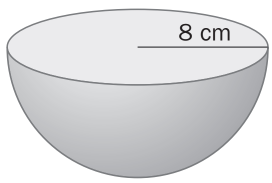
$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 9^3 = 3\,052{,}08 \text{ cm}^3$

10.39 Averigua el volumen de cada uno de estos cuerpos.

a)



b)



a) $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^3 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 10^3 = 1\,047{,}20 \text{ cm}^3$

b) $V = \dfrac{2}{3}\pi \cdot r^3 = \dfrac{2}{3}\pi \cdot 8^3 = 1\,072{,}33 \text{ cm}^3$

10.40 Calcula el volumen de una esfera cuya superficie esférica mide 1 256 centímetros cuadrados.

Se calcula la longitud del radio: $r = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}} = \sqrt{\dfrac{1\,256}{4\pi}} = 10 \text{ cm}$

Se calcula el volumen: $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 4\,186{,}67 \text{ cm}^3$

10.41 En una superficie esférica de radio 10 centímetros, se tiene una circunferencia máxima y una circunferencia menor paralela a ella.

Calcula la distancia entre sus centros sabiendo que el radio de la circunferencia menor es 5 centímetros.

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por los dos radios y el segmento que une los dos centros:

$d = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8{,}66$ cm

La Tierra. Coordenadas geográficas

10.42 Calcula la superficie de cada uno de los husos horarios, sabiendo que el radio de la Tierra es, aproximadamente, 6 371 kilómetros.

$$A = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6\,371}{24} = 21\,252\,686{,}33 \text{ km}^2$$

10.43 Calcula la distancia que recorre un avión que vuela entre un punto de Europa de coordenadas geográficas (8° E, 45° N) y otro de América de coordenadas (70° O, 45° N), siguiendo el paralelo común.

Como tiene la misma latitud y es 45° N, el avión sigue una circunferencia de radio:

$r^2 + r^2 = 6\,371^2 \Rightarrow r = 4\,505$ km

El ángulo que recorre es $70° + 8° = 78°$

$$\text{dist} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4\,505 \cdot 78}{360} = 6\,132{,}91 \text{ km}$$

10.44 Dos puntos *A* y *B* situados sobre el Ecuador tienen de longitud 20° E y 20° O. ¿Cuál es la distancia entre ambos? Recuerda que el Ecuador mide 40 030 km.

$$\text{dist} = \frac{40\,030 \cdot 40}{360} = 4\,447{,}78 \text{ km}$$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

10.45 ¿Qué nombre recibe la pirámide que tiene todas sus caras iguales?

Tetraedro.

10.46 ¿Qué cuerpo geométrico se forma al unir los centros de las caras de un tetraedro?

Un tetraedro.

10.47 Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Los cilindros son poliedros.

b) Un prisma regular recto pentagonal tiene siete caras.

c) El menor número de caras que concurren en el vértice de un poliedro es tres.

d) En cualquier poliedro todas las caras son iguales.

a) Falso, ya que los cilindros no tienen sus caras planas.

b) Verdadero, cinco caras laterales y dos de las bases.

c) Verdadero, ya que de lo contrario no se podría formar el poliedro.

d) Falso, hay poliedros que no tiene todas sus caras iguales.

10.48 ¿Cuántos ejes de simetría puedes trazar en una esfera?

Tantos como se quiera siempre que pasen por el centro de la esfera.

10.49 Describe los planos de simetría de un cilindro.

Todos los planos que incluyan el segmento formado al unir los centros de las circunferencias de las bases son planos de simetría del cilindro. Además el plano paralelo a las bases que divide al cilindro en dos partes iguales también es plano de simetría.

10.50 ¿Qué condición tienen que cumplir los planos de simetría de una esfera?

Que pasen por el centro de la esfera.

10.51 Si el área total de un tetraedro es 48 centímetros cuadrados, ¿cuánto mide el área de su base?

El área del tetraedro está formado por 4 triángulos equiláteros iguales luego el área de la base, es la de uno de los triángulos, por tanto:

$$A_{base} = \frac{48}{4} = 12$$

10.52 Un cilindro y un cono tienen la misma base y el mismo volumen. ¿Qué diferencia de altura existe entre ambos?

El cono debe ser tres veces más alto.

10.53 Disponemos de un cubo y de una esfera que tienen el mismo volumen, 125 centímetros cúbicos. ¿Cuál de ellos tiene mayor superficie?

Calculamos la arista del cubo: $a = \sqrt[3]{125} = 5$

Calculamos la superficie del cubo: $S = 6a^2 = 6 \cdot 5^2 = 150 \text{ cm}^2$

Se calcula la longitud del radio: $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 125}{4\pi}} = 3{,}1 \text{ cm}$

Se calcula el área: $A = 4\pi \cdot r^2 = 120{,}7 \text{ cm}^2$

Tiene mayor superficie el cubo.

10.54 Dos esferas de radios 5 y 7 centímetros tienen un solo punto en común. ¿Qué distancia hay entre sus centros?

Como las circunferencias son tangentes, la distancia entre sus centros es la suma de sus radios.

$5 + 7 = 12$

La distancia entre sus centros es 12 cm.

10.55 Una esfera y una semiesfera tienen el mismo volumen. ¿Qué relación existe entre sus radios?

Se despeja de la fórmula el radio de la esfera: $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

Se despeja de la fórmula el radio de la semiesfera: $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$

Se calcula el cociente de los radios: $\sqrt[3]{\frac{\frac{3V}{4\pi}}{\frac{3V}{2\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Luego el radio de la esfera es $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ el de la semiesfera.

10.56 Encuentra la relación que existe entre los volúmenes de un cono y de un cilindro, cuyas bases y alturas miden lo mismo.

Observando las fórmulas, el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro.

10.57 ¿Existe algún paralelo que mida lo mismo que un meridiano? En caso afirmativo, di cuál es.

Sí. El ecuador.

10.58 ¿Cuántos grados abarca un huso horario?

$\frac{360}{24} = 15°$

10.59 ¿Cuáles son las coordenadas geográficas del polo Norte y del polo Sur?

Polo Norte (0°, 90° N). Polo Sur (0°, 90° S)

PROBLEMAS PARA APLICAR

10.60 Calcula la cantidad de lámina de hojalata necesaria para fabricar un bote de conservas de forma cilíndrica, cuya base tiene un diámetro de 16 centímetros y cuya altura mide 20 centímetros.

$A_{cilindro} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 8 \cdot 20 + 2\pi \cdot 8^2 = 448\pi = 1\,406{,}72 \text{ cm}^2$

Se necesitan 1 406,72 cm² de lámina.

10.61 Una apisonadora tiene un rodillo de 1,20 metros de diámetro y 2,30 metros de largo. ¿Qué superficie de tierra apisona en cada vuelta de rodillo?

La superficie apisonada, es igual al área lateral del cilindro del rodillo:

$A_{lateral} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 0{,}6 \cdot 2{,}3 = 8{,}67 \text{ m}^2$

La superficie que apisona en cada vuelta es 8,67 m².

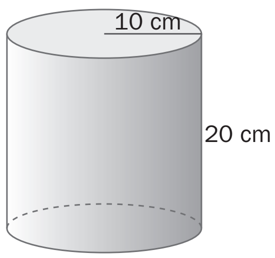
10.62 Una fábrica de bastones recibe un pedido de cajas de 80 centímetros de alto, 7 centímetros de ancho y 3 centímetros de largo. Calcula cuánto mide el bastón más largo que se puede embalar en una de estas cajas.

La distancia mayor que quepa dentro de la caja es la diagonal.

Se calcula la diagonal: $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{7^2 + 3^2 + 80^2} = 80{,}36 \text{ cm}$

El bastón más largo que se puede embalar en las cajas es 80,36 cm

10.63 Una empresa dona a una ONG 1 000 000 centímetros cúbicos de leche en polvo. Para envasarla, utilizan unos botes como los de la figura.



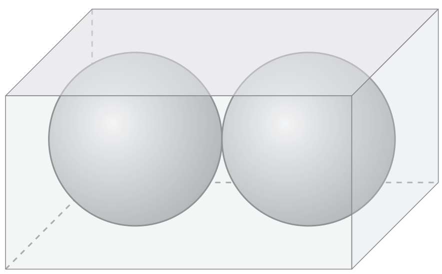
¿Cuántas unidades se necesitan?

Se calcula el volumen del cilindro: $V = \text{Área base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 20 = 6\,280 \text{ cm}^3$

Se calcula el número de botes necesario: $\dfrac{1\,000\,000}{6\,280} = 159{,}2$

Se necesitan 160 unidades.

10.64 En la caja de la figura se quieren guardar dos esferas macizas de 10 centímetros de radio. ¿Qué volumen ocupa el aire que queda en la caja?



$V_{caja} = 20 \cdot 10 \cdot 10 = 2\,000 \text{ cm}^3$; $V_{esferas} = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 5^3}{3} = 1\,047{,}2 \text{ cm}^3$

$V_{aire} = 2\,000 - 1\,047{,}2 = 952{,}8 \text{ cm}^3$

10.65 El volumen de un depósito cilíndrico es 1 695,60 metros cúbicos y el radio de su base mide 6 metros. Calcula la altura del depósito.

Se despeja de la fórmula la altura del cilindro:

$h = \dfrac{V}{\text{Área base}}$ $\qquad h = \dfrac{1\,695{,}6}{\pi \cdot 6^2} = 15 \text{ m}$

La altura del depósito es 15 metros.

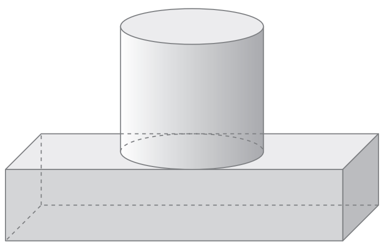
10.66 Un obelisco está formado por un prisma recto de base cuadrada coronado por una pirámide. El lado de la base mide 80 centímetros, mientras que la altura del prisma es de 10 metros y la altura total del obelisco es de 13 metros. Halla su volumen.

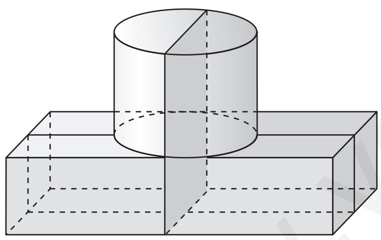
$V_{\text{prisma}} = \text{Área base} \cdot h = 0{,}8^2 \cdot 10 = 6{,}4 \text{ m}^3$

$V_{\text{pirámide}} = \dfrac{\text{Área base} \cdot h}{3} = \dfrac{0{,}8^2 \cdot 3}{3} = 0{,}64 \text{ m}^3$

$V_{\text{obelisco}} = 6{,}4 + 0{,}64 = 7{,}04 \text{ m}^3$

10.67 El pedestal de una estatua como el de la figura, se quiere dividir en dos partes iguales. ¿De cuántas maneras se ç hacer?





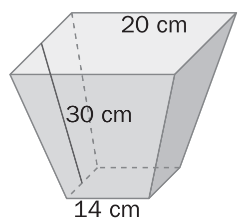
Se puede hacer de dos maneras distintas.

10.68 Un recipiente tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular como el de la figura. Calcula:

a) La altura del recipiente.

b) El área lateral.

c) El área total (observa que está abierto por arriba).

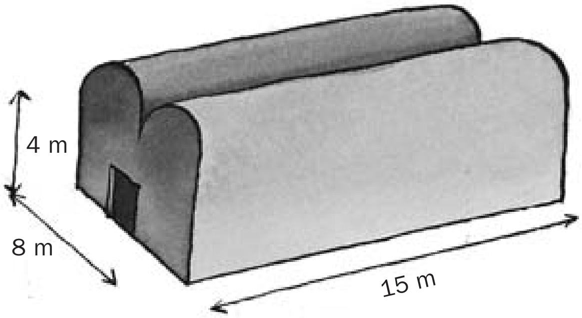


a) Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa la apotema del tronco de pirámide y por catetos la altura del tronco y la mitad de la diferencia de los lados de las bases. $h = \sqrt{30^2 - 3^2} = 29{,}85 \text{ cm}$

b) $A_{\text{lateral}} = \dfrac{\text{Suma perímetros bases} \cdot \text{apotema tronco}}{2} = \dfrac{(4 \cdot 20 + 4 \cdot 14) \cdot 30}{2} = 2\,040 \text{ cm}^2$

c) $A = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = 2\,040 + 14^2 = 2\,236 \text{ cm}^2$

10.69 La nave de un almacén tiene la forma indicada en la figura. Determina el volumen de la nave.



La figura se puede descomponer en dos semicilindros y un ortoedro.

Se calcula el volumen de los semicilindros: V = Área base $\cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 15 = 188{,}4$ m^3

Se calcula el volumen del ortoedro: V = Área base $\cdot h = 15 \cdot 8 \cdot 4 = 480$ m^3

El volumen de la nave es $188{,}4 + 480 = 668{,}4$ m^3

10.70 Dos puntos de la esfera terrestre se dice que están situados en las antípodas cuando son diametralmente opuestos; es decir, el segmento que los une pasa por el centro de la Tierra. Calcula las coordenadas de las antípodas de Roma cuyas coordenadas geográficas son (12° 40′ E, 41° 50′ N).

(12° 40′ O, 41° 50′ S)

R E F U E R Z O

Poliedros

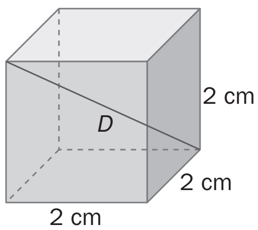
10.71 Señala cuántas caras, aristas y vértices tiene una pirámide hexagonal recta, y comprueba que verifica la fórmula de Euler.

Una pirámide hexagonal recta tiene 7 caras, 12 aristas y 7 vértices.

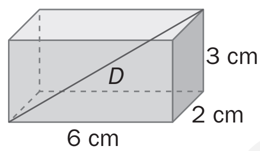
Se comprueba que verifica la fórmula de Euler: $C + V = A + 2$; $7 + 7 = 12 + 2$; $14 = 14$

10.72 Calcula los elementos que están señalados con una letra en los siguientes cuerpos.

a)



b)

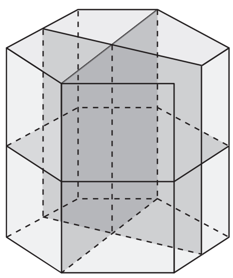


a) Se calcula la diagonal: $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 3{,}46$ cm

b) Se calcula la diagonal: $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7$ cm

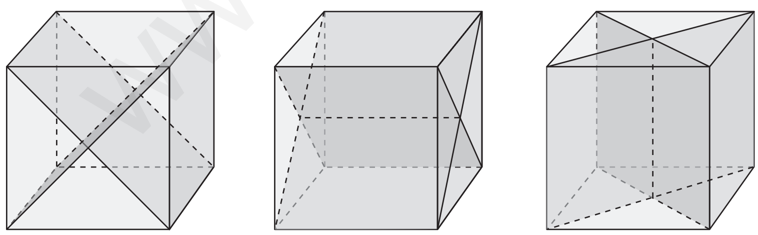
Simetría en poliedros y cuerpos redondos

10.73 Dibuja los planos de simetría de un prisma hexagonal recto.



Además de los de la figura hay otros 4 planos de simetría verticales análogos a los ya representados.

10.74 Dibuja todos los planos de simetría de un cubo que pasen por dos aristas opuestas. ¿Cuántos hay?

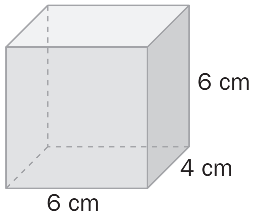


Hay 6 planos de simetría.

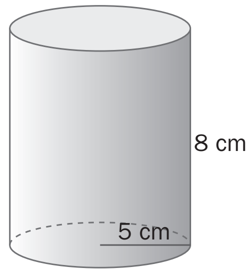
Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

10.75 Halla el área lateral, el área total y el volumen de estos cuerpos geométricos.

a)



b)

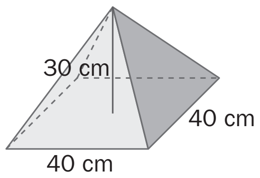


a) $A_l = 20 \cdot 6 = 120$ cm^2; $A_t = 120 + 2 \cdot 6 \cdot 4 = 168$ cm^2, $V = 4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$ cm^3

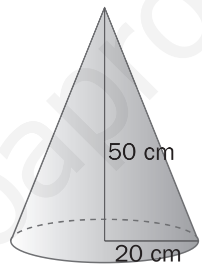
b) $A_l = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 8 = 251{,}2$ cm^2; $A_t = 251{,}2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 = 408{,}2$ cm^2, $V = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 8 = 628$ cm^3

10.76 Averigua el área lateral, el área total y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

a)



b)



a) $h = \sqrt{30^2 + 20^2} = 36{,}1$ cm; $A_l = 4 \cdot \frac{40 \cdot 36{,}1}{2} = 2\,888$ cm^2; $A_t = 2\,888 + 40^2 = 4\,488$ cm^2

$V = \frac{40^2 \cdot 30}{3} = 16\,000$ cm^3

b) $g = \sqrt{20^2 + 50^2} = 53{,}85$; $A_l = \pi \cdot 20 \cdot 53{,}85 = 3\,383{,}6$ cm^2; $A_t = 3\,381{,}78 + \pi \cdot 20^2 = 4\,640{,}24$ cm^2

$V = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 50}{3} = 20\,943{,}95$ cm^3

10.77 Un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 3 y 4 centímetros, respectivamente, gira alrededor del cateto mayor. Calcula el área total y el volumen del cuerpo que genera.

$A_t = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 5 + 3{,}14 \cdot 3^2 = 75{,}36$ cm^2

$V = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 37{,}68$ cm^3

La esfera y la Tierra

10.78 Halla el área y el volumen de las siguientes esferas.

a) Radio = 10 cm **b) Diámetro = 31 cm**

a) $A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^2 = 1\,256$ cm^2; $V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^3}{3} = 4\,186{,}67$ cm^3

b) $A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 15{,}5^2 = 3\,017{,}54$ cm^2; $V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 15{,}5^3}{3} = 15\,590{,}62$ cm^3

10.79 **Una circunferencia, cuya longitud es de 15,70 centímetros, gira alrededor de un diámetro generando una esfera. Calcula el volumen de dicha esfera.**

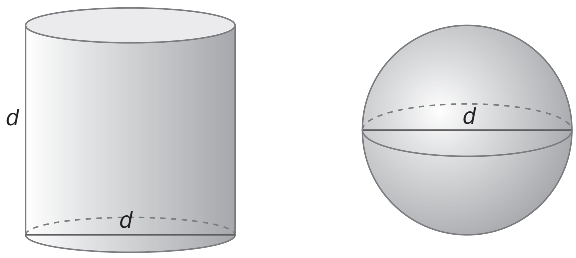
$$15{,}70 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \Rightarrow r = 2{,}5 \text{ cm} \Rightarrow V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5^3}{3} = 65{,}42 \text{ cm}^3$$

10.80 **Dos puntos, *A* y *B*, situados sobre el ecuador, tienen de longitud 30° E y 15° O, respectivamente. ¿Cuál es la distancia entre ambos? Recuerda que el ecuador mide 40 030 kilómetros.**

$$\text{dist} = \frac{40\,030 \cdot 45}{360} = 5\,003{,}75 \text{ km}$$

AMPLIACIÓN

10.81 **Halla la relación que existe entre el volumen de la esfera y el del cilindro de la figura, sabiendo que el diámetro de la base del cilindro, su altura y el diámetro de la esfera miden lo mismo.**



$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot d = \frac{\pi \cdot d^3}{4};\ V_{\text{esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3}{3} = \frac{\pi \cdot d^3}{6} \Rightarrow 2V_{\text{cilindro}} = 3V_{\text{esfera}}$$

10.82 **Un barco está situado en un punto de coordenadas (20° O, 60° S) y avanza en dirección este 15° sobre el mismo paralelo.**

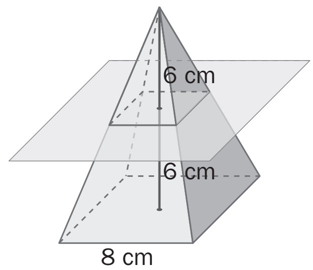
a) ¿En qué punto se encontrará situado? **b) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido?**

a) (5° O, 60° S)

b) $r = \frac{6\,371}{2} = 3\,185{,}5 \text{ km} \Rightarrow \text{dist} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3\,185{,}5 \cdot 15}{360} = 833{,}96 \text{ km}$

10.83 **La pirámide de la figura se corta con un plano paralelo a la base por el punto medio de la altura de la pirámide.**

Calcula la relación que existe entre los volúmenes de las dos figuras resultantes.



Al ser figuras semejantes de razón 2, el volumen de la pirámide mayor es 8 veces (2^3) el de la menor.

$V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{8} V_{\text{pirámide grande}}$ $V_{\text{tronco de pirámide}} = \frac{7}{8} V_{\text{pirámide grande}}$ $V_{\text{tronco de pirámide}} = 7\, V_{\text{pirámide pequeña}}$

10.84 **Una esfera de 20 centímetros de radio se corta con un plano a 12 centímetros del centro. Averigua la longitud de la circunferencia que se origina al cortar la superficie esférica con el plano.**

$r = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ cm} \Rightarrow l = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 16 = 100{,}48 \text{ cm}$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

10.85 **Jardín de piedra**

Se quiere extender 4 toneladas y media de gravilla sobre una superficie rectangular de 15 metros de largo y 3 de ancho.

Se sabe que un metro cúbico de este tipo de gravilla pesa 2 000 kilogramos.

a) ¿Qué altura en centímetros tendrá la capa de gravilla que se va a extender?

b) Si se quiere aumentar en un 25 % la superficie en la que se va a echar la gravilla y conservando la altura de la capa, ¿cuántos kilogramos más de gravilla de deberán comprar?

c) Si utilizamos otra clase de gravilla, menos densa, de 1 500 kilogramos por metro cúbico, ¿qué superficie podremos cubrir si la capa de gravilla alcanza la misma altura que en los casos anteriores?

a) Se cuenta con 4,5 t = 4 500 kg de gravilla que ocupará un volumen de 2,25 m^3

El volumen de la capa será de $15 \cdot 3 \cdot h = 2{,}25 \text{ m}^3 \Rightarrow h = \frac{2{,}25}{15 \cdot 3} = 0{,}05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$

b) La cantidad de kg nuevos que se han de adquirir es el 25 % de los que se tenía inicialmente.

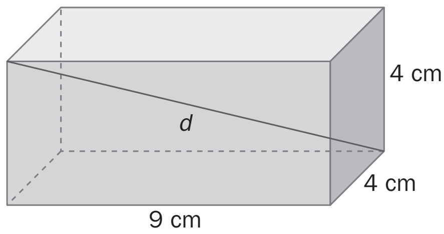
Por tanto $4\,500 \cdot 0{,}25 = 1\,125$ kg

c) En este caso 4,5 t = 4 500 kg de gravilla que ocupará un volumen de 3 m^3

El volumen de la capa será de $15 \cdot 3 \cdot h = 3 \text{ m}^3 \Rightarrow h = \frac{3}{15 \cdot 3} = 0{,}067 \text{ m} = 6{,}7 \text{ cm}$

AUTOEVALUACIÓN

10.A1 Calcula la longitud de la diagonal del prisma cuadrangular recto de la figura.



$d = \sqrt{9^2 + 4^2 + 4^2} = 10{,}63$ cm

10.A2 Queremos pintar el techo y las paredes de una habitación de 4 metros de largo por 3,5 metros de ancho y 3 metros de alto. Sabiendo que la pintura cuesta 3 euros por cada metro cuadrado de pared, ¿cuánto nos costará pintar la habitación?

$A = 4 \cdot 3{,}5 + 2 \cdot 3{,}5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 = 59$ m^2 $\Rightarrow$ Precio $= 59 \cdot 3 = 177$ €

10.A3 En un cubo, cuya arista mide 4 centímetros, introducimos una esfera maciza tangente a las caras del cubo. Determina el volumen del espacio comprendido entre ambos cuerpos.

$V_{\text{cubo}} = 4^3 = 64$ cm^3; $V_{\text{esfera}} = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2^3}{3} = 33{,}49$ cm^3 $\Rightarrow V = 64 - 33{,}49 = 30{,}51$ cm^3

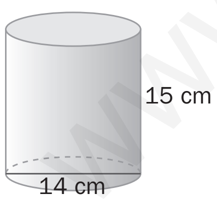
10.A4 Las coordenadas geográficas de dos ciudades son: *A*(10° E, 45° N) y *B*(10° O, 45° N). Calcula la distancia entre ambas, teniendo en cuenta que el radio de la Tierra es 6 371 kilómetros.

Como tiene la misma latitud y es 45° N, $\Rightarrow r^2 + r^2 = 6\,371^2 \Rightarrow r = 4\,505$ km

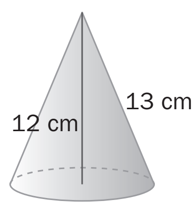
$\text{dist} = \dfrac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4\,505 \cdot 20}{360} = 1\,571{,}74$ km

10.A5 Averigua el área lateral y el área total de estos cuerpos geométricos.

a)



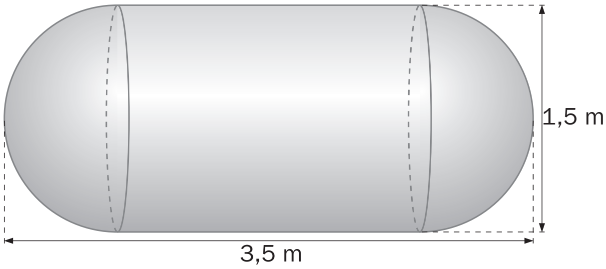
b)



a) $A_l = \pi \cdot 14 \cdot 15 = 659{,}73$ cm^2; $A_t = 659{,}4 + 2 \cdot \pi \cdot 7^2 = 967{,}61$ cm^2

b) $A_l = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 204{,}2$ cm^2; $A_t = 204{,}1 + \pi \cdot 5^2 = 283{,}74$ cm^2

10.A6 **Para abastecer de agua algunas zonas de África, una empresa dona depósitos como el de la figura. Calcula el volumen de cada depósito.**



$$V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}75^3}{3} + 3{,}14 \cdot 0{,}75^2 \cdot 2 = 5{,}3 \text{ m}^3$$

10.A7 **Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.**

a) Pirámide de base cuadrada, de 7 centímetros de altura, cuya base tiene una arista de 6 centímetros.

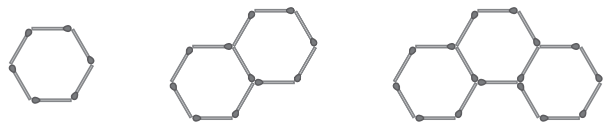
b) Prisma recto de base hexagonal, de 8 centímetros de altura, cuya base tiene una arista de 2 centímetros.

a) $V = \frac{6^2 \cdot 7}{3} = 84 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1{,}73}{2} \cdot 8 = 83{,}04 \text{ cm}^3$

EJERCICIOS PROPUESTOS

11.1 Con cerillas se han construido las figuras.



a) ¿Cuántas cerillas se necesitan para formar una figura con 15 hexágonos?

b) ¿Cuántas cerillas se necesitan para formar una figura con n hexágonos?

a)

Número de hexágonos	1	2	3
Número de cerilla	6	11	16

$+5$ $\quad$ $+5$

$6 + 5(n - 1) = 6 + 5 \cdot 14 = 76$

b) $6 + 5(n - 1) = 5n + 1$

11.2 Halla los tres términos siguientes de cada sucesión.

a) 12, 12, 12, 12, 12 …

b) 21, 23, 25, 27, 29 …

c) 80, 70, 60, 50, 40 …

d) $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 1, 2 …

a) 12, 12, 12. Sucesión constante.
b) 31, 33, 35. Se suma 2 al término anterior.
c) 30, 20, 10. Se resta 10 al término anterior.
d) 4, 8, 16. Se multiplica por 2 el término anterior.

11.3 Encuentra el término □ en cada sucesión.

a) 17, 15, 13, □, 9, 7 …

b) $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{5}$, □, $\frac{81}{5}$ …

c) 60, 56, □, 48, 44, 40 …

d) 16, −8, □, −2, 1 …

a) 11. Se resta 2 al término anterior.

b) $\frac{27}{5}$. Se multiplica por 3 el término anterior.

c) 52. Se resta 4 al término anterior.

d) 4. Se divide entre −2 el término anterior.

11.4 Calcula para cada sucesión los términos pedidos.

a) Los seis primeros de $a_n = \dfrac{n - 2}{n + 1}$

b) Los diez primeros términos de $b_n = 3(n + 1)^2 + 1$

c) c_6 y c_{20} en $c_n = n^2 - n + 3$

d) d_3 y d_{10} en $d_n = +\sqrt{n^2 - 13n + 30}$

a) $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}$

b) 13, 28, 49, 76, 109, 148, 193, 244, 301, 364

c) $c_6 = 33$; $c_{20} = 383$

d) $d_3 = 0$; $d_{10} = 0$

11.5 **Construye la sucesión recurrente definida por:**

$a_1 = -2$ $\qquad a_n = a_{n-1} + 5$

$-2, 3, 8, 13, 18, 23\ldots$

11.6 **Forma la sucesión recurrente dada por:**

$a_1 = \frac{1}{16}$ $\qquad a_n = a_{n-1} \cdot 2$

$\frac{1}{16}; \frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 4; \ldots$

11.7 **Calcula los primeros términos de la sucesión recurrente definida por:**

$a_1 = 1$ $\qquad a_2 = 3$ $\qquad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$

$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\ldots$

11.8 **Dadas las sucesiones**

$(a_n) = (2, 4, 6, 8 \ldots)$ **y** $(b_n) = (2, 5, 8, 11 \ldots)$

halla los cuatro primeros términos de estas sucesiones.

a) $3 \cdot (a_n)$ $\qquad$ **b)** $(a_n) + (b_n)$ $\qquad$ **c)** $(a_n) \cdot (b_n)$

a) $3(a_n) = (3a_n) = (6, 12, 18, 24 \ldots)$

b) $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) = (4, 9, 14, 19 \ldots)$

c) $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) = (4, 20, 48, 88 \ldots)$

11.9 **Los términos generales de dos sucesiones son:**

$a_n = 2n + 1$ $\qquad b_n = 3n + 4$

a) Escribe los cuatro primeros términos de cada sucesión.

b) Halla el término general de las sucesiones $4(a_n)$; $(a_n) + (b_n)$ **y** $(a_n) \cdot (b_n)$.

a) $(a_n) = (3, 5, 7, 9 \ldots)$

$(b_n) = (7, 10, 13, 16 \ldots)$

b) $4 \cdot (a_n) = (4 \cdot a_n) = [4 \cdot (2n + 1)] = (8n + 4)$

$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) = (2n + 1 + 3n + 4) = (5n + 5)$

$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) = [(2n + 1)(3n + 4)] = (6n^2 + 8n + 3n + 4) = (6n^2 + 11n + 4)$

11.10 **Halla el término general de la progresión aritmética:**

$(a_n) = (5, 2, -1, -4 \ldots)$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 5 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 8$

11.11 **En una progresión aritmética** $a_1 = 4$ **y la diferencia es** $d = -7$**. Halla el término octavo.**

$a_8 = 4 + (8 - 1) \cdot (-7) = 4 - 7 \cdot 7 = -45$

11.12 Una ONG que se dedica a la ayuda al Tercer Mundo se inició con 125 personas.
Si todos los meses se incorporan 5 voluntarios, ¿cuántas personas trabajarán en la ONG al cabo de 2 años y medio?

2 años y medio son $24 + 6$ meses $= 30$ meses.

$a_{30} = 125 + (30 - 1) \cdot 5 = 125 + 29 \cdot 5 = 270$ voluntarios

11.13 Halla la suma de los 40 primeros términos de la progresión aritmética.

$(a_n) = (39, 36, 33, 30 \dots)$

$a_{40} = 39 + 39 \cdot (-3) = -78$

$$S_{40} = \frac{39 - 78}{2} \cdot 40 = -780$$

11.14 El primer término de una sucesión aritmética es 1, la diferencia, 2, y la suma de los *n* primeros términos es 900. ¿Cuánto vale *n*?

$$\left.\begin{array}{l} Sn = 900 = \dfrac{1 + a_n}{2} \cdot n \\ a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1 \end{array}\right\} \quad 900 = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2 \rightarrow n = 30$$

11.15 Las edades de tres hermanos están en progresión aritmética de diferencia 4 y su suma es igual a 42 años.

¿Qué edad tiene cada uno?

a_1 = edad del pequeño; a_2 = edad del mediano; a_3 = edad del mayor

$$\left.\begin{array}{l} S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \dfrac{a_1 + a_3}{2} \cdot 3 = 42 \rightarrow a_1 + a_3 = 28 \\ a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_2 = a_1 + 4;\ a_3 = a_1 + 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_1 = 10 \text{ años} \\ a_2 = 14 \text{ años} \\ a_3 = 18 \text{ años} \end{array}$$

11.16 Un ciclista recorrió el primer día 15 kilómetros y cada día aumenta su recorrido en 1 kilómetro.

¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al cabo de los 20 primeros días?

$a_{20} = 15 + 19 \cdot 1 = 34$

$$S_{20} = \frac{15 + 34}{2} \cdot 20 = 420$$

Habrá recorrido 420 km.

11.17 Halla el término general de la progresión geométrica.

$(a_n) = (2, 6, 18, 54 \dots)$

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

11.18 El primer término de una sucesión geométrica es $\frac{7}{3}$ y la razón es $\frac{2}{3}$. Halla el término noveno.

$$a_9 = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{9-1} = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{8} = 0{,}091$$

11.19 Un filántropo muy rico decidió destinar su fortuna a una asociación dedicada a la lucha contra el cáncer. Entregó 10 euros el primer mes, 20 euros el segundo, 40 euros el tercero y así sucesivamente. ¿Qué cantidad entregó a los dos años de su primera donación? (Utiliza tu calculadora.)

2 años $= 24$ meses $\Rightarrow a_{24} = 10 \cdot 2^{24-1} = 83\,886\,080$ €

11.20 Halla la suma de los 20 primeros términos de la progresión geométrica $(a_n) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27} \dots\right)$

$$a_{20} = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{20-1} = \frac{1}{3^{19}} = 8{,}6 \cdot 10^{-10} \Rightarrow S_{20} = \frac{8{,}6 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = 1{,}5$$

11.21 El primer término de una progresión geométrica es 4 y la razón es −2. Halla la suma de los diez primeros términos.

$$a_{10} = 4 \cdot (-2)^{10-1} = -2\,048 \;\Rightarrow\; S_{10} = \frac{-2\,048 \cdot (-2) - 4}{-2 - 1} = -1\,364$$

11.22 Un equipo de ciclismo programa su entrenamiento semanal en cinco etapas. En la primera etapa recorre una distancia de 40 kilómetros y cada etapa sucesiva es $\frac{5}{4}$ más larga que la anterior.
¿Cuántos kilómetros recorre el equipo a lo largo de la semana?

El kilometraje de las etapas forma una progresión geométrica de razón $r = \frac{5}{4}$.

$$a_5 = 40\left(\frac{5}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{2}\right)^5$$

$$S_5 = \frac{a_5 r - a_1}{r - 1} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^5 \cdot \frac{5}{4} - 40}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{4(5^6 - 40 \cdot 2^7)}{2^7} = 328{,}28 \text{ km recorridos a lo largo de la semana.}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

11.23 **Observa la siguiente secuencia de figuras.**
¿Cuántos puntos se necesitarán para construir la figura *n*-ésima?

$a_1 = 1;\ S_1 = 1$

$a_2 = 2;\ S_2 = 1 + 2$

$a_3 = 3;\ S_3 = 1 + 2 + 3$

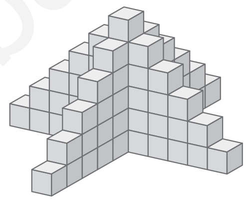
$a_4 = 4;\ S_4 = 1 + 2 + 3 + 4$

Orden de la figura (n)	1	2	3	4
Número de puntos (S_n)	1	3	6	10

+2 +3 +4

$a_n = n;\ S_n = \dfrac{1 + n}{2} \cdot n$ es el número de puntos que se necesitarán para la figura enésima.

11.24 **Observa la torre de cubos de la figura.**
¿Cuántos cubos se necesitan para construir una figura con 10 pisos? ¿Y una figura con *n* pisos?



Número de pisos (n)	1	2	3	4
Número de cubos (S_n)	1	6	15	28

+5 +9 +13

$S_n = S_{n-1} + a_n$

$n = 2 \rightarrow S_2 = 6 = 1 + [4(2 - 1)]$

$n = 3 \rightarrow S_3 = 15 = 1 + [4(2 - 1)] + [1 + 4(3 - 1)]$

$n = 4 \rightarrow S_4 = 28 = 1 + [4(2 - 1)] + [1 + 4(3 - 1)] + [1 + 4(4 - 1)]$

$S_n = 1 + [4(2 - 1)] + [1 + 4(3 - 1)] + [1 + 4(4 - 1)] + \ldots + [1 + 4\,(n - 1)]$

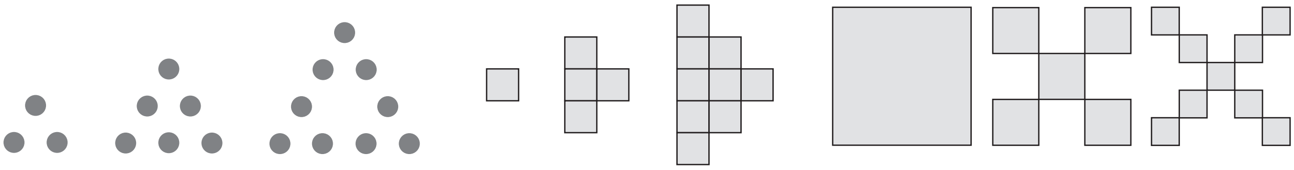
De aquí se deduce que $a_n = 1 + 4(n - 1)$.

Como $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, entonces $S_n = \dfrac{1 + 1 + 4(n - 1)}{2} \cdot n = 2n^2 - \text{n}$

Para $n = 10$, $S_{10} = 2 \cdot (10)^2 - 10 = 190$

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

11.25 Encuentra el término general de las sucesiones estudiando sus regularidades.



$a_1 = 3$ $a_2 = 6$ $a_3 = 9$ $b_1 = 1$ $b_2 = 4$ $b_3 = 9$ $c_1 = 1$ $c_2 = 5$ $c_3 = 9$

a) $a_1 = 3$; $a_2 = 6$; $a_3 = 9$; $a_4 = 12$; ...; $a_n = 3n$

b) $b_1 = 1$; $b_2 = 4$; $b_3 = 9$; $b_4 = 16$; ...; $b_n = n^2$

c) $c_1 = 1$; $c_2 = 5$; $c_3 = 9$; $c_4 = 13$; ...; $c_n = 4n - 3$

11.26 Completa el término que falta en cada sucesión.

a) 8, 10, 12, □, 16 ...

b) 35, □, 25, 20, 15 ...

c) 0, 3, □, 9, 12 ...

d) $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \square, \frac{5}{81}$ ...

a) 14 b) 30 c) 6 d) $\frac{5}{27}$

11.27 Dadas las sucesiones:

$a_n = 4n - 3$

$b_n = (-1)^n \cdot 2n$

$c_n = n^2 + 2$

a) Escribe los cinco primeros términos de cada sucesión.

b) Halla el término general de las sucesiones:

$(a_n) + (b_n)$ $3 \cdot (a_n)$ $(b_n) \cdot (c_n)$ $a_n \cdot (b_n + c_n)$

a) $a_n = 4n - 3$; $a_1 = 1$; $a_2 = 5$; $a_3 = 9$; $a_4 = 13$; $a_5 = 17$

$b_n = (-1)^n \cdot 2n$; $b_1 = -2$; $b_2 = 4$; $b_3 = -6$; $b_4 = 8$; $b_5 = -10$

$c_n = n^2 + 2$; $c_1 = 3$; $c_2 = 6$; $c_3 = 11$; $c_4 = 18$; $c_5 = 27$

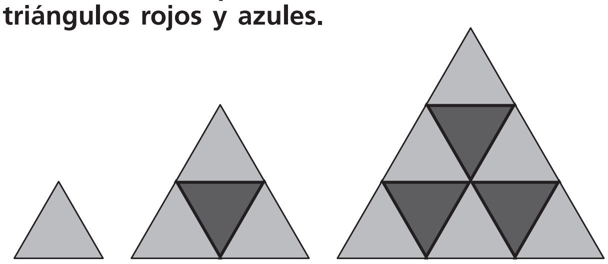
b) $a_n + b_n = 4n - 3 + (-1)^n \cdot 2n$

$3 \cdot a_n = 3 \cdot (4n - 3) = 12n - 9$

$b_n \cdot c_n = ((-1)^n \cdot 2n)(n^2 + 2) = (-1)^n \cdot 2n^3 + 2(-1)^n$

$a_n \cdot (b_n + c_n) = (4n - 3)((-1)^n \cdot 2n + n^2 + 2) = (-1)^n \cdot 8n^2 + 4n^3 + 8n - 6n \cdot (-1)^n - 3n^2 - 6$

11.28 Escribe los cinco primeros elementos de las sucesiones que determinan, respectivamente, el número de triángulos rojos y azules.



Rojos: 1, 3, 6, 10, 15 Azules: 0, 1, 3, 6, 10

11.29 Escribe los diez primeros términos de la sucesión cuyo primer término es 2 y los restantes términos se obtienen multiplicando por 5 y restándole 3 al término anterior.

$a_1 = 2$; $a_2 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$; $a_3 = 7 \cdot 5 - 3 = 32$; $a_4 = 32 \cdot 5 - 3 = 157$; $a_5 = 5 \cdot 157 - 3 = 782$; $a_6 = 5 \cdot 782 - 3 = 3\,907$; $a_7 = 5 \cdot 3\,907 - 3 = 19\,532$; $a_8 = 5 \cdot 19\,532 - 3 = 97\,657$; $a_9 = 488\,282$; $a_{10} = 2\,441\,407$

11.30 Construye las sucesiones recurrentes dadas por:

a) $a_1 = 2;\ a_n = a_{n-1} - 4$

b) $a_1 = 6;\ a_n = a_{n-1} + 2$

c) $a_1 = 2;\ a_2 = 3;\ a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2}$

d) $a_1 = 1;\ a_2 = 2;\ a_3 = 3;\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

a) 2, −2, −6, −10, −14, −18 …

b) 6, 8, 10, 12, 14, 16 …

c) 2, 3, 13, 62, 297, 1 423, 6 818 …

d) 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, 68, 125 …

Progresiones aritméticas

11.31 Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas y, en caso afirmativo, halla el término general:

a) −8, −4, 0, 4, 8 …

b) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$ …

c) 3, 9, 27, 81, 243 …

d) 1, 1, 1, 1, 1 …

a) $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = 4 = d$. Sí es una progresión aritmética. $an = -8 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 12$

b) $b_2 - b_1 = b_3 - b_2 = ... = \frac{1}{2} = d$. Sí es una progresión aritmética. $bn = \frac{1}{2} + (n - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$

c) $c_2 - c_1 = 6$; $c_3 - c_2 = 18 \Rightarrow$ No es una progresión aritmética.

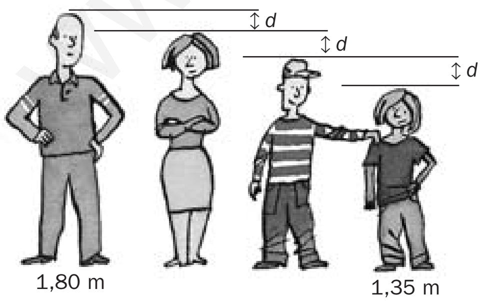
d) $d_2 - d_1 = d_3 - d_2 = ... = 0$. Sí es una progresión aritmética. $d_n = 1$

11.32 Halla el primer término y el término general de una progresión aritmética cuyo quinto término es 19 y la diferencia es 3.

$a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot 3 = 19 \Rightarrow a_1 = 19 - 12 = 7$

$a_n = 7 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 4$

11.33 El dibujo representa las alturas de los miembros de una familia. ¿Cuánto mide la madre?, ¿y el hijo?



La sucesión formada por las alturas de los miembros de la familia es una progresión aritmética de diferencia $d = 0{,}15$ m $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Altura de la madre = 1,65 m; Altura del hijo = 1,50 m.

11.34 Halla el primer término de la progresión aritmética cuyo término vigésimo es 100 y la suma de los 20 primeros términos es 1 050.

$$S_{20} = \frac{20 \cdot (a_1 + 100)}{2} = 1\,050 \Rightarrow 20a_1 = 100 \Rightarrow a_1 = 5$$

11.35 Al comienzo del año, Juan decide ahorrar para comprarse una consola de videojuegos. En enero mete en su hucha 10 euros y cada mes introduce la misma cantidad que el mes anterior y 1 euro más. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado al finalizar el año?

El año tiene 12 meses. El dinero que introduce cada mes en la hucha es una progresión aritmética de

$d = 1$; $a_1 = 10 \cdot a_{12} = 10 + (12 - 1) \cdot 1 = 21$

Dinero ahorrado $\equiv S_{12} = \dfrac{12 \cdot (10 + 21)}{2} = 6 \cdot 31 = 186$ €

11.36 ¿Cuántos términos de la progresión aritmética 4, 8, 12, 16 … hay que tomar para que el resultado de su suma sea 220?

$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 4 = 4n$

$S_n = \dfrac{n \cdot (4 + a_n)}{2} = 220 \Rightarrow 4n + 4n = 440 \Rightarrow 8n = 440 \Rightarrow n = 55$ es el número de términos.

11.37 Las anotaciones obtenidas por las cinco jugadoras de un equipo de baloncesto están en progresión aritmética. Si el equipo consiguió 70 puntos y la máxima anotadora obtuvo 24 puntos, ¿cuántos puntos anotaron las restantes jugadoras?

$S_5 = \dfrac{5 \cdot (a_1 + 24)}{2} = 70 \Rightarrow 5a_1 = 20 = a_1 = 4$

$a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot d = 24 \Rightarrow d = \dfrac{20}{4} = 5$

$a_1 = 4$; $a_2 = 9$; $a_3 = 14$; $a_4 = 19$; $a_5 = 24$ son las anotaciones de las jugadoras del equipo.

Progresiones geométricas

11.38 Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, halla el término general.

a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81} \dots$

b) 1, 2, 4, 8, 16 …

c) 4, 8, 12, 16, 20 …

d) $5, 3, \frac{9}{5}, \frac{27}{25}, \frac{81}{125} \dots$

a) $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \dots = \dfrac{1}{3} = r$. Sí es una progresión geométrica; $a_n = 1 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{3^{n-1}}$

b) $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b_3}{b_2} = \dots = 2 = r$. Sí es una progresión geométrica; $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

c) $\dfrac{c_2}{c_1} \neq \dfrac{c_3}{c_2} \Rightarrow$ No es una progresión geométrica.

d) $\dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{d_3}{d_2} = \dots = \dfrac{3}{5} = r$. Sí es una progresión geométrica; $d_n = 5 \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1} = \dfrac{3^{n-1}}{5^{n-2}}$

11.39 De una progresión geométrica sabemos que su cuarto término es $\frac{27}{8}$ y que la razón es $\frac{3}{2}$. Halla el primer término.

$a_4 = a_1 \cdot r^3 = \dfrac{27}{8} \Rightarrow a_1 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8} \Rightarrow a_1 = 1$

11.40 **El primer término de una progresión geométrica es 2 y la razón es 4. ¿Qué lugar ocupa en la progresión el término cuyo valor es 131 072?**

$a_n = 2 \cdot 4^{n-1} = 131\,072 \Rightarrow 4^{n-1} = 65\,536 = 4^8 \Rightarrow n - 1 = 8 \Rightarrow n = 9$

11.41 **Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica 63, 21, 7, $\frac{7}{3}$ ...**

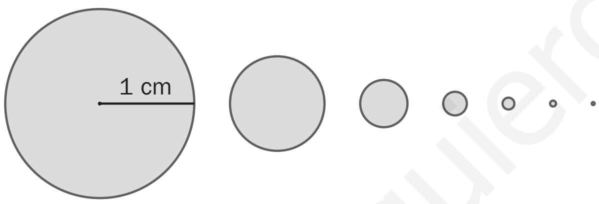
$$a_{10} = 63 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{63}{3^9} = \frac{3^2 \cdot 7}{3^9} = \frac{7}{3^7};\ S_{10} = \frac{\frac{7}{3^7} \cdot \frac{1}{3} - 63}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{413\,336}{4\,374} \approx 94{,}5$$

11.42 **El cuarto término de una progresión geométrica es 225 y la razón es 3. Halla la suma de los 8 primeros términos.**

$$a_4 = a_1r^3 = 27a_1 = 225 \Rightarrow a_1 = \frac{25}{3};\ a_8 = a_1r^7 = 25 \cdot 3^6 = 18\,225$$

$$S_8 = \frac{a_8r - a_1}{r - 1} = \frac{18\,225 \cdot 3 - \frac{25}{3}}{3 - 1} = \frac{82\,000}{3} = 27\,333{,}\widehat{3}$$

11.43 **El radio de cada círculo es la mitad que el del anterior.**



Calcula:

a) El área del círculo que ocupa el quinto lugar.

b) La suma de las áreas de los 6 primeros círculos de la sucesión.

a) La sucesión de los círculos es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$; $a_5 = \pi\left(\frac{1}{2^4}\right)^2 = \frac{\pi}{2^8} = 0{,}012\ \text{cm}^2$.

b) La sucesión formada por las áreas de los círculos es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{4}$.

$$a_6 = \pi\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{\pi}{2^{10}};\ S_6 = \frac{\frac{\pi}{2^{10}} \cdot \frac{1}{2^2} - \pi}{\frac{1}{2^2 - 1}} = \frac{4\pi(1 - 2^{12})}{2^{12} \cdot (-3)} = 4{,}18\ \text{cm}^2$$

11.44 **Toma un folio y dóblalo por la mitad. Obtienes dos cuartillas que juntas tendrán un grosor doble del grosor del folio. Ahora dobla nuevamente las dos cuartillas y obtienes cuatro octavillas, con un grosor cuádruple que el del folio. Si la hoja inicial tuviera un grosor de 0,1 milímetros y fuese tan grande que pudieras repetir la operación 100 veces, ¿qué grosor tendría el fajo resultante?**

$a_{100} = 0{,}1 \cdot (2)^{99} = 6{,}34 \cdot 10^{28}$ mm

CUESTIONES PARA ACLARARSE

11.45 ¿Qué nombre recibe la sucesión tal que cada término se obtiene del anterior sumándole una constante?

Aritmética.

11.46 ¿Qué nombre recibe la sucesión tal que cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por una constante?

Geométrica.

11.47 ¿La sucesión que resulta al multiplicar término a término dos progresiones geométricas es una progresión geométrica? En caso afirmativo, ¿cuál es su razón?

Sí lo es.

Sean las progresiones geométricas: $\begin{cases} a_n = a_1 r^{n-1} \\ b_n = b_1 s^{n-1} \end{cases}$ de razones r y s, respectivamente.

$a_n \cdot b_n = (a_1 \cdot b_1) \cdot (r \cdot s)^{n-1}$ es una progresión geométrica de razón $r \cdot s$.

11.48 ¿Puede existir alguna progresión geométrica que tenga todos sus términos negativos? Razona la respuesta.

Sí existe, y la condición que ha de cumplir es que el primer término de la progresión sea negativo y que la razón sea un número positivo.

Si a_1 es negativo, entonces:

$a_2 = a_1 \cdot r \Rightarrow a_2 \begin{cases} < 0 \text{ si } r > 0 \\ > 0 \text{ si } r < 0 \end{cases}$

Con r negativo, $a_3 = a_2 \cdot r$ será negativo, y así sucesivamente.

11.49 Escribe los primeros términos de la sucesión de los números pares. ¿Cuál es su término general?

2, 4, 6, 8, 10 … Su término general es $p_n = 2n$.

11.50 Escribe los primeros términos de la sucesión de los números impares. ¿Cuál es su término general?

1, 3, 5, 7, 9 … Su término general es $i_n = 2n - 1$.

11.51 Escribe los primeros términos de la sucesión suma de la sucesión de los números pares y la de los números impares. ¿Cuál es su término general?

$(p_n) = (2, 4, 6, 8, 10 \dots)$; $(i_n) = (1, 3, 5, 7, 9 \dots)$; $(s_n) = (p_n) + (i_n) = (3, 7, 11, 15, 19 \dots)$

Su término general es $s_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$.

11.52 ¿Qué puede decirse de una sucesión cuyo término general se puede expresar así?:

a) $a_n = a_{n-1} + 10$

b) $a_n = a_{n-1} - 10$

c) $a_n = a_{n-1} \cdot 10$

d) $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{10}$

a) $a_n = a_{n-1} + 10 = a_{n-2} + 10 + 10 = \dots = a_1 + (n - 1) \cdot 10$. Progresión aritmética con diferencia 10

b) $a_n = a_{n-1} - 10 = a_{n-2} - 10 - 10 = \dots = a_1 + (n - 1) \cdot (-10)$. Progresión aritmética con diferencia -10

c) $a_n = a_{n-1} \cdot 10 = a_{n-2} \cdot 10 \cdot 10 = \dots = a_1 \cdot (10)^{n-1}$. Progresión geométrica con razón 10

d) $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{10} = \dfrac{a_{n-2}}{10 \cdot 10} = \dots = \dfrac{a_1}{10^{n-1}}$. Progresión geométrica con razón $\dfrac{1}{10}$

11.53 ¿Cómo es una sucesión aritmética de diferencia 0? ¿Y una progresión geométrica de razón 1?

Una sucesión aritmética de diferencia 0 es constante: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 0 = a_1$.

Una progresión geométrica de razón 1 también es constante: $a_n = a_1 \cdot 1^{n-1} = a_1$.

11.54 ¿Cómo tiene que ser la razón de una progresión geométrica para que todos sus términos vayan cambiando alternativamente de signo?

Negativa.

11.55 Varios términos de una sucesión están en progresión aritmética. ¿Qué propiedad cumplen los términos que estén a la misma distancia del primero y del último término?

Sean los términos en progresión aritmética $a_1, a_2, ..., a_n$. Dos términos que estén a la misma distancia del primero y último término pueden ser $a_2 = a_1 + d$ y $a_{n-1} = a_n - d$.

La suma de ambos es igual a: $a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$, es decir, la suma del primero y último término.

11.56 Varios términos de una sucesión están en progresión geométrica. ¿Qué le ocurre al producto de dos términos que estén a la misma distancia del primero y del último término?

Sean los términos en progresión geométrica $a_1, a_2, ..., a_n$. Dos términos que estén a la misma distancia del primero y último término pueden ser $a_2 = a_1 \cdot r$ y $a_{n-1} = a_n : r$.

El producto de ambos es igual a: $a_1 \cdot r \cdot \frac{a_n}{r} = a_1 \cdot a_n$, es decir, el producto del primero y último término.

PROBLEMAS PARA APLICAR

11.57 Averigua la posición que ocupan los términos $\frac{8}{6}$, $\frac{71}{12}$ y $\frac{143}{16}$ en la sucesión cuyo término general es: $a_n = \frac{3n^2 - 4}{2n + 2}$.

$$\frac{3n^2 - 4}{2n + 2} = \frac{8}{6} \Rightarrow 6(3n^2 - 4) = 8(2n + 2) \Rightarrow n = 2$$

$$\frac{3n^2 - 4}{2n + 2} = \frac{71}{12} \Rightarrow 12(3n^2 - 4) = 71(2n + 2) \Rightarrow n = 5$$

$$\frac{3n^2 - 4}{2n + 2} = \frac{143}{16} \Rightarrow 16(3n^2 - 4) = 143(2n + 2) \Rightarrow n = 7$$

11.58 Halla el término general de una progresión aritmética de la que se conocen $a_3 = 13$ y $a_7 = 28$.

$$\begin{matrix} a_3 = 13 \Leftrightarrow \\ a_7 = 28 \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} a_1 + 2d = 13 \\ a_1 + 6d = 28 \end{cases} \Rightarrow 4d = 15 \Rightarrow d = \frac{15}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{11}{2}$$

El término general es: $a_n = \frac{11}{2} + (n - 1) \cdot \frac{15}{4} = \frac{7}{4} + \frac{15}{4}n$

11.59 La progresión 6, 11, 16, 21, …, 126, ¿cuántos términos tiene?

La sucesión es una progresión aritmética, ya que $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = 5 = d$.

$a_n = 6 + (n - 1) \cdot 5 = 1 + 5n = 126 \Rightarrow 5n = 125 \Rightarrow n = 25$ términos tiene la sucesión.

11.60 Halla el término general de una progresión geométrica de la que se conocen $a_2 = 12$ y $a_5 = 324$.

$$\begin{matrix} a_2 = 12 \Leftrightarrow \\ a_5 = 324 \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} a_1 \cdot r = 12 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{r} \\ a_1 \cdot r^4 = 324 \end{cases} \Rightarrow \frac{12}{r} \cdot r^4 = 324 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{3} = 4$$

El término general es: $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$.

11.61 Las longitudes de los lados de un triángulo están en progresión aritmética de diferencia 2 y su perímetro es de 15 centímetros.
¿Cuánto miden los lados del triángulo?

Tres términos en progresión aritmética de diferencia 2 son de la forma: a_k, $a_k + 2$, $a_k + 4$.

Perímetro $= 3a_k + 6 = 15 \Rightarrow a_k = \frac{9}{3} = 3$. Las longitudes de los lados son 3, 5 y 7.

11.62 Calcula la suma de todos los números de dos cifras que son divisibles por tres.

Los múltiplos de tres forman una progresión aritmética: $a_n = 3n$.

El primer término de 2 cifras divisible por tres es $a_4 = 12$. El último número de 2 cifras divisible por tres es $a_{33} = 99$.

La suma de los 33 primeros términos de la progresión es $S_{33} = \frac{(a_{33} + a_1) \cdot 33}{2} = \frac{(99 + 3) \cdot 33}{2} = 1\,683$.

A esta suma hay que restar la suma de los 3 primeros términos: $S_3 = 3 + 6 + 9 = 18$.

La suma pedida es $S_{33} - S_3 = 1\,683 - 18 = 1\,665$.

11.63 La suma de los términos segundo, tercero y cuarto de una progresión aritmética es 12, y la suma de sus términos tercero, cuarto y quinto es 21. Halla el primer término y la diferencia de la progresión.

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = 12 \\ a_3 + a_4 + a_5 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 12 \\ (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 6d = 12 \\ 3a_1 + 9d = 21 \end{cases} \Rightarrow 3d = 9 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_1 = -2$$

11.64 Cierta ONG ha construido un pozo para abastecer de agua potable a una población de Somalia. Su coste ha sido de 2 190 euros.
¿Qué profundidad tiene el pozo si se sabe que el primer metro costó 15 euros y cada metro restante costó 4 euros más que el anterior?

El coste de cada metro del pozo es una progresión aritmética con $a_1 = 15$ y $d = 4$.

$a_n = 15 + (n - 1) \cdot 4 = 11 + 4n$. El coste del pozo es igual a la suma de los n primeros términos de la progresión:

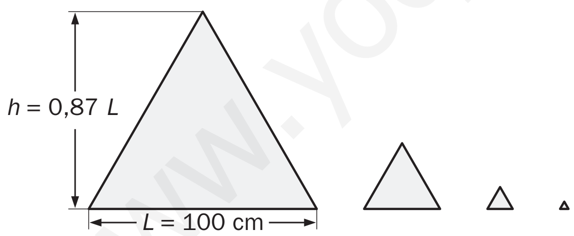
$$S_n = \frac{(11 + 4n + 15) \cdot n}{2} = 2\,190 \Leftrightarrow 26n + 4n^2 = 4\,380 \Leftrightarrow 2n^2 + 13n - 2\,190 = 0 \Rightarrow n = 30.$$

La solución negativa no tiene sentido por tratarse de una longitud. El pozo tiene 30 metros de profundidad.

11.65 La asociación de vecinos de un barrio realiza un "rastrillo" de venta de objetos usados cuya recaudación donarán a la gente necesitada del barrio. ¿Cuánto dinero recaudaron a lo largo de una semana si las recaudaciones de cada día forman una progresión geométrica de razón 2 y el primer día recaudaron 15 euros?

El último día de la semana recaudaron $a_7 = a_1 r^6 = 15 \cdot 2^6 = 960$. Para hallar cuánto recaudaron a lo largo de la semana hemos de calcular la suma de los siete primeros términos de la progresión: $S_7 = \dfrac{960 \cdot 2 - 15}{2 - 1} = 1\,905$ €.

11.66 Calcula la suma de las áreas de los cuatro triángulos equiláteros de la figura sabiendo que el lado de cada uno es tres veces menor que el siguiente triángulo.



Las áreas de los triángulos forman una progresión geométrica de razón $\frac{1}{9}$. Hallamos el área del primer triángulo.

$$a_1 = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{L \cdot 0{,}87\,L}{2} = 4\,350 \text{ cm}^2,\ a_4 = a_1 r^3 = \frac{4\,350}{9^3} \text{ cm}^2$$

La suma de las áreas es la suma de los cuatro primeros términos de la progresión:

$$S_4 = \frac{\dfrac{4\,350}{9^3} \cdot \dfrac{1}{9} - 4\,350}{\dfrac{1}{9} - 1} = 4\,893{,}75$$

11.67 ¿Cuál es la diferencia entre la suma de los múltiplos de 3 y la suma de los múltiplos de 5 comprendidos entre 100 y 1 000?

Los múltiplos de tres forman una progresión aritmética: $a_n = 3n$.

Los múltiplos de cinco forman una progresión aritmética: $b_n = 5n$.

Los múltiplos primero y último de tres buscados son: $a_{34} = 102$ y $a_{333} = 999$.

Los múltiplos primero y último de cinco buscados son: $b_{21} = 105$ y $b_{199} = 995$.

Las sumas de los 33 y 333 primeros múltiplos de tres son:

$$S_{33} = \frac{(99 + 3) \cdot 33}{2} = 1\,683 \quad \text{y} \quad S_{333} = \frac{(999 + 3) \cdot 333}{2} = 166\,833$$

Las sumas de los 20 y 199 primeros múltiplos de cinco son:

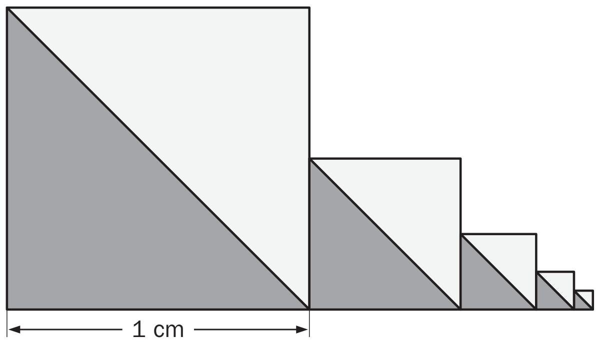
$$S_{20} = \frac{(100 + 5) \cdot 20}{2} = 1\,050 \quad \text{y} \quad S_{199} = \frac{(995 + 5) \cdot 199}{2} = 99\,500$$

La suma de los múltiplos de tres buscados: $S_{333} - S_{33} = 166\,833 - 1\,683 = 165\,150$.

La suma de los múltiplos de cinco buscados: $S_{199} - S_{20} = 99\,500 - 1\,050 = 98\,450$.

La diferencia entre los múltiplos de tres y de cinco pedida es: $165\,150 - 98\,450 = 66\,700$.

11.68 Calcula el área de la región coloreada teniendo en cuenta que el lado de cada cuadrado es la mitad del anterior.



La sucesión de los catetos de los triángulos rectángulos es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. Por otro lado, la sucesión de las áreas de los triángulos es una progresión geométrica con $a_1 = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{4}$.

Finalmente, $a_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{2^9} \Rightarrow S_5 = \frac{a_5 r - a_1}{r - 1} = \frac{\frac{1}{2^9} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2} - 1} = 0{,}67\ \text{cm}^2$

11.69 Los lados de un pentágono están en progresión aritmética, el lado mayor mide 12 centímetros y el perímetro es de 40 centímetros. Calcula las longitudes de los lados del pentágono.

Los términos de la progresión aritmética son: a_k, $a_k + d$, $a_k + 2d$, $a_k + 3d$, $a_k + 4d$.

$$\begin{matrix} \text{Perímetro} \equiv \\ \text{Lado} \equiv \end{matrix} \begin{cases} 5a_k + 10d = 40 \\ a_k + 4d = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a_k + 20d = 60 \\ 5a_k + 10d = 40 \end{cases} \Rightarrow d = 2 = a_k = 4$$

Los lados miden 4, 6, 8, 10 y 12 cm.

11.70 La presa de Assuán situada sobre el río Nilo, en Egipto, contiene $164 \cdot 10^9$ litros de agua el día del comienzo del verano. Teniendo en cuenta que cada día pierde el 0,2 % de su capacidad, ¿cuántos litros contendrá tras haber pasado 90 días? Utiliza la calculadora.

Progresión geométrica de razón $r = 1 - 0{,}002$

$a_{90} = 164 \cdot 10^9 \cdot 0{,}998^{89} = 1{,}37 \cdot 10^{11}$ litros

11.71 Interpolar *m* números entre dos números dados cualesquiera es hallar los *m* términos intermedios de una progresión aritmética cuyos primero y último término son los números dados.

Interpola cuatro números entre el 10 y el 100.

$a_1 = 10$; $a_6 = 100 = 10 + 5 \cdot d \rightarrow d = 18$ $\qquad$ $a_2 = 28$; $a_3 = 46$; $a_4 = 64$; $a_5 = 82$

11.72 Interpolar *m* medios proporcionales entre dos números dados cualesquiera es hallar los *m* términos de una progresión geométrica cuyos primero y último término son los números dados.

Interpola dos medios proporcionales entre 1 y 16.

$a_1 = 1$; $a_4 = 16 = a_1 \cdot r^3 = r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$ $\qquad$ $a_2 = 2\sqrt[3]{2}$; $a_3 = 4\sqrt[3]{4}$

REFUERZO

Sucesiones y operaciones

11.73 Escribe los siguientes cinco términos de cada sucesión.

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$ **b)** $-4, -2, 0 \ldots$ **c)** $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1 \ldots$

a) $\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$ b) 2, 4, 6, 8, 10 c) 3, 9, 27, 81, 243

11.74 Dadas las sucesiones $(a_n) = (1, 3, 5, 7 \ldots)$, $(b_n) = (2, 4, 6, 8 \ldots)$, $(c_n) = (-15, -10, -5{,}0 \ldots)$, halla:

a) $(a_n + b_n)$ **b)** $2 \cdot (a_n) - (c_n)$ **c)** $(a_n - c_n) \cdot (b_n)$

a) $(a_n + b_n) = 2n - 1 + 2n = 4n - 1$

b) $2 \cdot (a_n) - c_n = 2 \cdot (2n - 1) - (5n - 20) = 4n - 2 - 5n + 20 = -n + 18$

c) $(a_n - c_n) \cdot (b_n) = (2n - 1 - 5n + 20) \cdot 2n = (-3n + 19) \cdot 2n = -6n^2 + 38n$

11.75 Averigua cuál es el término que falta en las siguientes sucesiones.

a) $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \square, \frac{16}{3}, \frac{32}{3} \ldots$ **c)** $27, -9, \square, -1, \frac{1}{3} \ldots$

b) $-9, -6, -3, \square, 3 \ldots$ **d)** $\square, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625} \ldots$

a) $\frac{8}{3}$ b) 0 c) 3 d) 1

11.76 Determina si los números $1, \frac{1}{2}, \frac{8}{5}, \frac{11}{7}$ son términos de la sucesión de término general $a_n = \frac{3n - 1}{n + 3}$.

$\frac{3n - 1}{n + 3} = 1 \Rightarrow 3n - 1 = n + 3 \Rightarrow n = 2$. Sí, es el segundo término.

$\frac{3n - 1}{n + 3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(3n - 1) = n + 3 \Rightarrow n = 1$. Sí, es el primer término.

$\frac{3n - 1}{n + 3} = \frac{8}{5} \Rightarrow n = 3$. Sí, es el tercer término.

$\frac{3n - 1}{n + 3} = \frac{11}{7} \Rightarrow 7(3n - 1) = 11(n + 3) \Rightarrow n = 4$. Sí, es el cuarto término.

11.77 Halla los términos primero, décimo y vigésimo de cada sucesión.

$a_n = n^2 + 1$ $b_n = \frac{3n + 2}{2n - 1}$

$a_n = n^2 + 1 \Rightarrow a_1 = 2;\ a_{10} = 101;\ a_{20} = 401$

$b_n = \frac{3n + 2}{2n - 1} \Rightarrow b_1 = 5;\ b_{10} = \frac{32}{19};\ b_{20} = \frac{62}{39}$

11.78 Calcula los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones recurrentes.

a) $a_1 = -3;\ a_n = 2a_{n-1} + 2$ **b)** $a_1 = 5;\ a_2 = -5;\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

a) $-3, -4, -6, -10, -18, -34 \ldots$ b) $5, -5, -25, -65, -145, -305, -625 \ldots$

Progresiones aritméticas y geométricas

11.79 Escribe el término general de cada progresión aritmética.

a) $-5, -1, 3, 7 \ldots$

b) $-4, \frac{-7}{2}, -3, \frac{-5}{2} \ldots$

a) $a_n - 5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 9$

b) $b_n = -4 + (n - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{-9 + n}{2}$

11.80 El sexto término de una progresión aritmética es 6, y la diferencia es igual a 3. Calcula:

a) El valor del primer término de la progresión.

b) La suma de los 10 primeros términos.

a) $a_6 + a_1 + 5d \Rightarrow 6 = a_1 + 5 \cdot 3 \Rightarrow a_1 = 6 - 15 \Rightarrow a_1 = -9$

b) $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(-9 + 18) \cdot 10}{2} = 45$

11.81 El número de donantes de sangre en un hospital el primer día de cierto mes fue de 30 personas. Si cada día el número de donantes aumentó en 7 personas, ¿cuántas personas donaron sangre el último día del mes?

El número de donantes es una progresión aritmética con $a_1 = 30$ y $d = 7$. $a_{31} = a_1 + 30d = 30 + 210 = 240$

El número de donantes es la suma de los 31 primeros términos: $S_{31} = \frac{(30 + 240) \cdot 31}{2} = 4\,185$ donantes

11.82 Halla el décimo término de una progresión aritmética cuyo primer término es 4 y la suma de los 10 primeros términos es 355.

$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(4 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 355 \Rightarrow 4 + a_{10} = 71 \Rightarrow a_{10} = 67$

11.83 ¿Cuál es la suma de los múltiplos de 7 comprendidos entre 1 y 100?

Los múltiplos de siete forman una progresión aritmética: $a_n = 7n$

El primer múltiplo de siete es $a_1 = 7$.

El último múltiplo de siete menor que 100 es $a_{14} = 7 \cdot 14 = 98$.

La suma buscada es $S_{14} = \frac{(7 + 98) \cdot 14}{2} = 735$.

11.84 Halla el término general de las progresiones geométricas.

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{75}, \frac{1}{375} \ldots$

b) $5, -1, \frac{1}{5}, \frac{-1}{25} \ldots$

a) $a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

b) $5\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1}$

11.85 Calcula el primer término de una progresión geométrica cuyo tercer término es 192 y la razón es 8.

$a_3 = a_1r^2 = a_1 \cdot 8^2 = 192 \Rightarrow a_1 = \frac{192}{64} = 3$

11.86 Halla cuánto vale la suma de los 30 primeros términos de la progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, 16 ...

La razón es: $r = 2 \Rightarrow a_{30} = 2^{29}$

La suma de los 30 primeros términos es: $S_{30} = \frac{2^{29} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 1\,073\,741\,823$

11.87 El tercer término de una progresión geométrica es 144 y la razón es 6. ¿Qué posición ocupa dentro de la progresión el número 5 184?

$a_3 = a_1r^2 = a_1 \cdot 6^2 = 144 \Rightarrow a_1 = \frac{144}{36} = 4$

Buscamos un n que verifique: $a_n = 4 \cdot 6^{n-1} = 5\,184 \Rightarrow 6^{n-1} = 1\,296 = 6^4 \Rightarrow n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5$

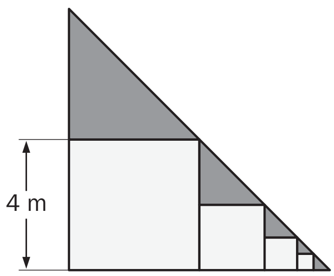
AMPLIACIÓN

11.88 **Calcula** $\dfrac{\mathbf{1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^9}}{\mathbf{3^{10} - 1}}$

El numerador es la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica de razón

$$r = 3 \Rightarrow \frac{1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^9}{3^{10} - 1} = \frac{\dfrac{3^9 \cdot 3 - 1}{3 - 1}}{3^{10} - 1} = \frac{3^{10} - 1}{2(3^{10} - 1)} = \frac{1}{2}$$

11.89 **Halla el área de la figura sombreada.**



Los triángulos rectángulos de la figura son isósceles, con lo que los dos catetos son iguales.

La sucesión de las áreas de los triángulos rectángulos es una progresión geométrica de razón $\dfrac{1}{4}$ y cuyo primer término es:

$$a_1 = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8; \qquad a_6 = a_1 r^5 = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{8}{4^5}$$

La suma de las áreas es igual a la suma de los seis primeros términos de la progresión:

$$S_6 = \frac{\dfrac{8}{4^5} \cdot \dfrac{1}{4} - 8}{\dfrac{1}{4} - 1} = 10{,}7 \text{ m}^2$$

11.90 **Un reloj da tantas campanadas como indica la hora y además en las medias da una campanada. Halla el número de campanadas que da en un día.**

La suma de las campanadas que se dan a las horas en punto es el doble de la suma de los 12 primeros términos de una progresión aritmética de diferencia 1 y primer término: $a_1 = 1$:

$$a_{12} = a_1 + 11d = 12; \; S_{12} = \frac{(1 + 12) \cdot 12}{2} = 13 \cdot 6 = 78 \Rightarrow 2 \cdot S_{12} = 2 \cdot 78 = 156 \text{ campanadas a las horas en punto.}$$

Finalmente, como se da una campanada a las medias y el día tiene 24 horas, se dan 24 campanadas a esas horas; con lo que el número total de campanadas es de $156 + 24 = 180$.

11.91 En un cuadrado se inscribe un círculo. Sobre el círculo se inscribe un cuadrado, y se repite el proceso hasta obtener 10 cuadrados y 10 círculos. Si el lado del cuadrado inicial mide 4 centímetros, calcula:

a) La suma de las áreas de los 10 círculos obtenidos.

b) La suma de las áreas de los 10 cuadrados obtenidos.

La sucesión formada por las áreas de los cuadrados es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$ y $a_1 = 16$. La sucesión formada por las áreas de los círculos es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$ y $b_1 = 4\pi$.

a) La suma de las áreas de los cuadrados es $S_{10} = \dfrac{\frac{16}{2^9} \cdot \frac{1}{2} - 16}{\frac{1}{2} - 1} \approx 31{,}97 \text{ cm}^2$

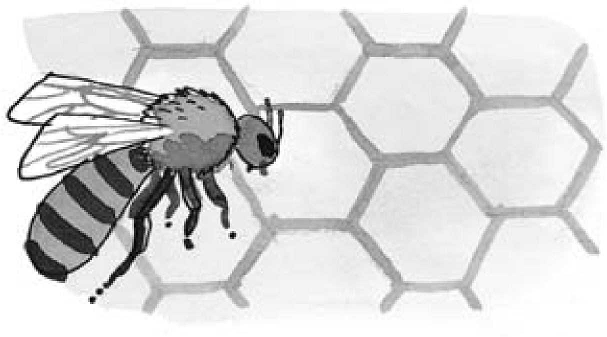
b) La suma de las áreas de los círculos es $S_{10} = \dfrac{4\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} - 4\pi}{\frac{1}{2} - 1} \approx 25{,}11 \text{ cm}^2$

11.92 La suma de los términos primero y tercero de una progresión geométrica es 10 y la suma de los términos segundo y cuarto es 20. Calcula el primer término y la razón de la progresión.

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 10 \\ a_2 + a_4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1r^2 = 10 \\ a_1r + a_1r^3 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1 + r^2) = 10 \\ a_1r(1 + r^2) = 20 \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{a_1} = \frac{20}{a_1r} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow a_1 = 2$$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

11.93 **Los panales**



Las abejas construyen panales con formas hexagonales. El segundo hexágono que construyen lo hacen utilizando un lado del primero. A partir del tercer hexágono, lo construyen utilizando siempre dos lados de hexágonos ya construidos.

Si se entiende como unidad de cera la cantidad de este material necesaria para construir un lado de un hexágono, se verificará que:

- **Para construir un panal de una celda se necesitan 6 unidades de cera.**
- **Para construir un panal de dos celdas se necesitan 11 unidades de cera.**
- **Para construir un panal de tres celdas se necesitan 15 unidades de cera.**

¿Cuántas celdas tendrá un panal que precisa de 51 unidades de cera para su construcción?

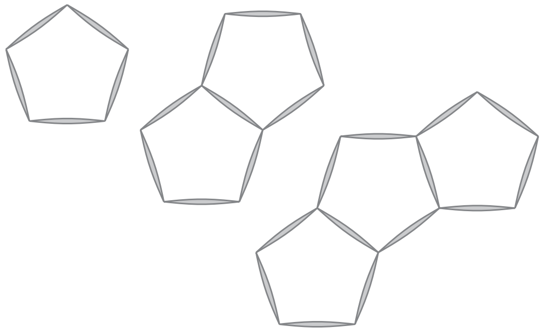
A partir de $n = 2$, un panal con n celdas precisa de $4n + 3$ unidades de cera.

$$51 = 4n + 3 \Rightarrow n = \frac{51 - 3}{4} = 12$$

Por tanto, un panal de 12 celdas precisará de 51 unidades de cera para su construcción.

AUTOEVALUACIÓN

11.A1 Construimos con palillos las siguientes figuras.



¿Cuántos palillos se necesitan para formar una figura con *n* pentágonos?

$a_1 = 5$; $a_2 = 9$; $a_3 = 13$; ...; $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 1$

11.A2 Calcula los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = 3n^3 - 4n + 2$

b) $b_n = 4 - n^2$

c) $a_1 = 5$; $a_n = -3a_{n-1} + 8$

a) 1, 18, 71, 178, 357

b) 3, 0, −5, −12, −21

c) 3, −7, 29, −79, 245

11.A3 En una progresión aritmética, el segundo término es 9 y el cuarto es 15. Calcula la suma de los 20 primeros términos.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 9 \\ a_4 = a_1 + 3d = 15 \end{cases} \Rightarrow 2d = 4 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow a_1 = 7$$

$$a_{20} = a_1 + 19d = 7 + 19 \cdot 2 = 45; \ S_{20} = \frac{(7 + 45) \cdot 20}{2} = 520$$

11.A4 En una progresión geométrica el segundo término es 12 y el quinto 324. Calcula la suma de los 8 primeros términos.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 r = 12 \\ a_5 = a_1 r^4 = 324 \end{cases} \Rightarrow r^3(a_1 r) = 324 \Rightarrow 12r^3 = 324 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow a_1 = 4$$

$$a_8 = a_1 r^7 = 4 \cdot 3^7 = 8\,748; \ S_8 = \frac{8\,748 \cdot 3 - 4}{2} = 13\,120$$

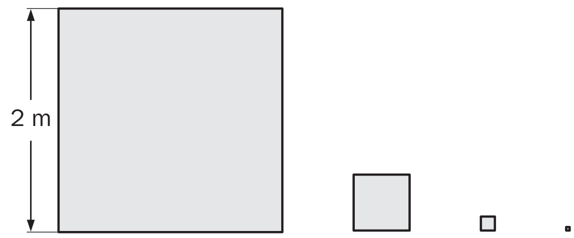
11.A5 Los ángulos de cierto triángulo rectángulo están en progresión aritmética. Halla la medida de los ángulos.

Ya que el triángulo es rectángulo, uno de sus ángulos es de 90° y los ángulos serían: $90 - 2d$, $90 - d$, 90.

Suma $\equiv 90 - 2d + 90 - d + 90 = 180 \Rightarrow 270 - 3d = 180 \Rightarrow d = 30$

Los ángulos son: 30°, 60°, 90°.

11.A6 Halla la suma de las áreas de los cuatro cuadrados de la figura, sabiendo que el lado de cada uno es cuatro veces mayor que el del siguiente cuadrado.



Las áreas de los cuadrados forman una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{16}$ y $a_1 = 4$.

$a_4 = a_1r^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 = \frac{4}{16^3} = \frac{1}{4^5}$

La suma de las áreas de los cuatro cuadrados es la suma de los cuatro primeros términos de la progresión geométrica:

$$S_4 = \frac{\frac{1}{4^5} \cdot \frac{1}{16} - 4}{\frac{1}{16} - 1} = 4{,}27 \text{ cm}^2$$

11.A7 La suma de los dos primeros términos de cierta progresión geométrica es igual a −1 y la suma de sus dos términos siguientes es igual a −4.
Calcula la suma de los primeros 6 términos de esta progresión.

$$\begin{cases} a_1 + a_1r = -1 \\ a_1r^2 + a_1r^3 = -4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1 + r) = -1 \\ a_1(r^2 + r^3) = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{1 + r} = \frac{-4}{r^2 + r^3} \Rightarrow r^3 + r^2 - 4r - 4 = 0 \Rightarrow r = -2 \text{ y } r = 2$$

($r = -1$ no da una solución coherente).

$$r = -2 \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a_6 = a_1r^5 = (-2)^5 = -2^5 \Rightarrow S_6 = \frac{a_6r - a_1}{r - 1} = \frac{2^6 - 1}{-3} = \frac{1 - 2^6}{3} = -21$$

$$r = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{-1}{3} \Rightarrow a_6 = a_1r^5 = \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot 2^5 \Rightarrow S_6 = \frac{a_6r - a_1}{r - 1} = \frac{1 - 2^6}{3} = -21$$

Para ambos valores de r sale la misma solución.

11.A8 La suma de las edades de cuatro hermanos es igual a 38 años y la diferencia entre el pequeño y el tercero es de 3 años. Averigua la edad de cada hermano sabiendo que las edades están en progresión aritmética.

$a_3 - a_1 = 3 \Leftrightarrow a_1 + 2d - a_1 = 3 \Leftrightarrow 2d = 3 \Rightarrow d = 1{,}5$

$S_4 = 38 \Leftrightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 4a_1 + 6d = 4a_1 + 9 = 38 \Rightarrow 4a_1 = 29 \Rightarrow a_1 = 7{,}25$

Las edades de los cuatro hermanos son de 7,25, 8,75, 10,25 y 11,75 años.

11.A9 Calcula el número de términos de la siguiente sucesión: 7, 14, 28, 56, …, 896.

La sucesión es una progresión geométrica, ya que: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = 2 = r$.

$an = a_1r^{n-1} \Leftrightarrow 896 = 7 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow 128 = 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^7 = 2^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 7 \Rightarrow n = 8$.

La sucesión tiene 8 términos.

11.A10 Halla el término general de una progresión aritmética cuyo tercer término es 13 y el quinto es 21.

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 13 \\ a_5 = a_1 + 4d = 21 \end{cases} \Rightarrow 2d = 8 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_1 = 5$$

El término general buscado es: $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 1$.

11.A11 Halla el término general de una progresión geométrica que verifica que $a_2 = 15$ y $a_4 = 135$.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 r = 15 \\ a_4 = a_1 r^3 = 135 \end{cases} \Rightarrow a_1 r \cdot (r^2) \Leftrightarrow 135 \Rightarrow 15r^2 = 135 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \text{ y } r = -3$$

Si $r = -3 \Rightarrow a_1 = -5 \Rightarrow a_n = -5 \cdot (-3)^{n-1}$

Si $r = 3 \quad \Rightarrow a_1 = 5 \quad \Rightarrow a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

12.1 Un kilogramo de azúcar cuesta 1,10 euros. Completa la siguiente tabla que relaciona las magnitudes número de kilogramos y precio en euros.

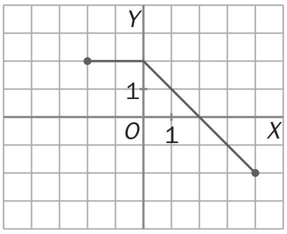
N.º de kilogramos	**2**	**5**	10	**20**
Precio €	2,20	5,50	**11**	22

12.2 Expresa el volumen de un cubo en función de su arista.

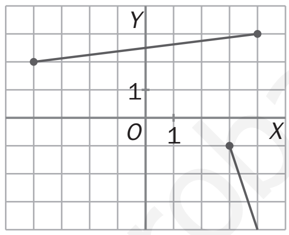
$V = a^3$

12.3 Indica si estas gráficas son funciones y, en caso afirmativo, halla su dominio y recorrido.

a)



b)



a) Sí es función. Dominio: $[-2, 4]$. Recorrido: $[-2, 2]$.

b) No es función porque en $[3, 4]$ toma más de un valor.

12.4 En algunos países se utilizan las pulgadas para expresar longitudes. Para pasar de centímetros a pulgadas se multiplica por 2 y se divide por 5.

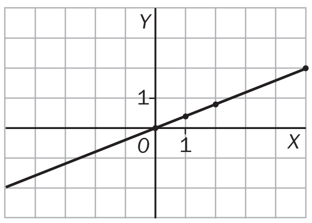
a) ¿Es una función la relación entre los centímetros y las pulgadas?

b) Forma una tabla, representa la gráfica y expresa la fórmula.

a) Sí, porque para un valor en pulgadas existe un único valor en centímetros.

b)

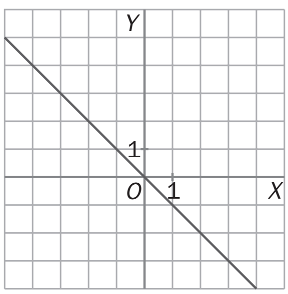
***x* (cm)**	0	1	2	5
***f*(*x*) (pulgadas)**	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	2



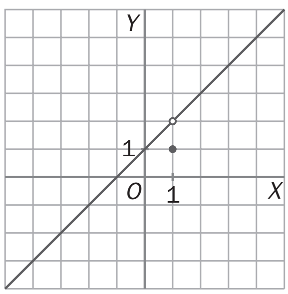
La fórmula que expresa la función es: $f(x) = \frac{2}{5}x$

12.5 Estudia si son continuas las siguientes funciones.

a)



b)

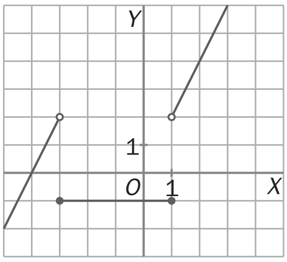


a) Sí

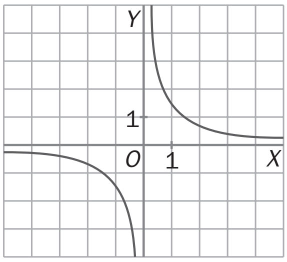
b) No

12.6 Indica en qué puntos son discontinuas estas funciones.

a)



b)

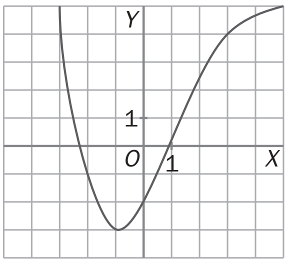


a) $x = -3$, $x = 1$

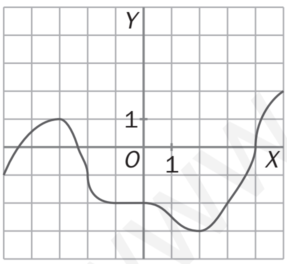
b) $x = 0$

12.7 Halla la tasa de variación de estas funciones en el intervalo [−2, 3].

a)



b)



a) $TV[-2, 3] = f(3) - f(-2) = 4 - (-1) = 5$

b) $TV[-2, 3] = f(3) - f(-2) = -2 - (-1) = -1$

12.8 Para las funciones siguientes, halla la tasa de variación en los intervalos [0, 1] y [3, 4].

a) $f(x) = 5$

b) $f(x) = 2x + 3$

c) $f(x) = x^3$

a) $TV[0, 1] = f(1) - f(0) = 5 - 5 = 0$

$TV[3, 4] = f(4) - f(3) = 5 - 5 = 0$

b) $TV[0, 1] = f(1) - f(0) = 5 - 3 = 2$

$TV[3, 4] = f(4) - f(3) = 11 - 9 = 2$

c) $TV[0, 1] = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$

$TV[3, 4] = f(4) - f(3) = 64 - 27 = 37$

12.9 Dibuja un ejemplo de una función:

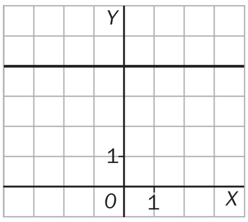
a) Con tasa de variación nula en cualquier intervalo.

b) Con tasa de variación constante y negativa.

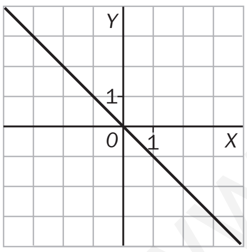
c) Con tasa de variación constante y positiva.

Respuesta abierta:

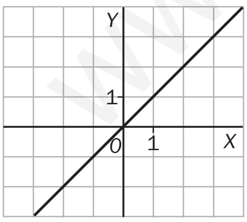
a)



b)



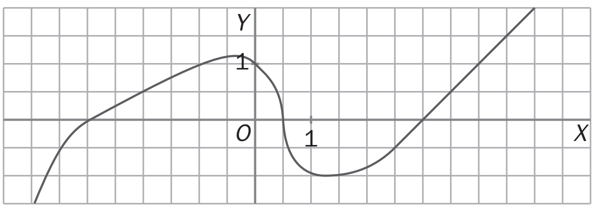
c)



12.10 Analiza el crecimiento o decrecimiento de esta función en los intervalos.

a) [−3, −1]

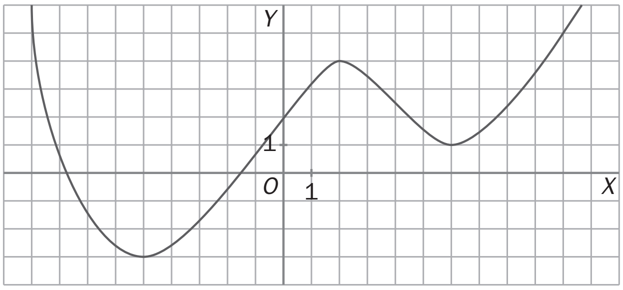
b) [0, 1]



a) Creciente

b) Decreciente

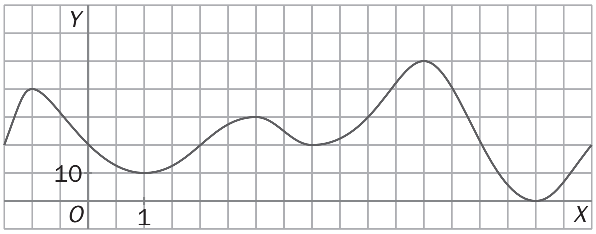
12.11 Indica dónde crece o decrece la siguiente función.



Crece: $[-5, 2] \cup [6, +\infty)$

Decrece: $(-\infty, -5] \cup [2, 6]$

12.12 Determina los máximos y mínimos de la función.



Máximos relativos: $(-1, 40)$, $(3, 30)$, $(6, 50)$

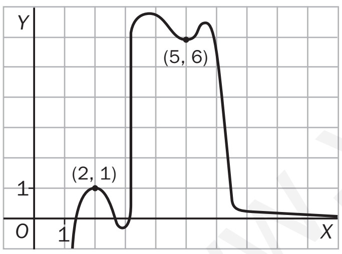
Máximo absoluto: $(6, 50)$

Mínimos relativos: $(1, 10)$, $(4, 20)$, $(8, 0)$

Mínimo absoluto: $(8, 0)$

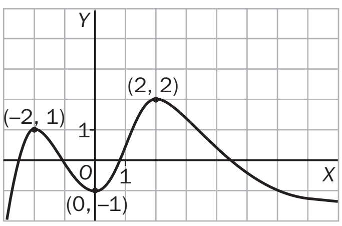
12.13 Dibuja la gráfica de una función continua que tenga un máximo en el punto (2, 1) y un mínimo en el punto (5, 6).

Respuesta abierta.



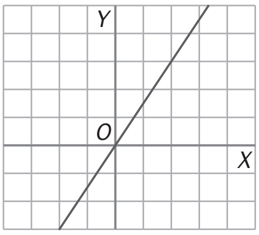
12.14 Representa una función continua que tenga:
– Un máximo en el punto (−2, 1).
– Un máximo absoluto en el punto de abscisa $x = 2$.
– Un mínimo en el punto de abscisa $x = 0$.
– Sin mínimo absoluto.

Respuesta abierta.

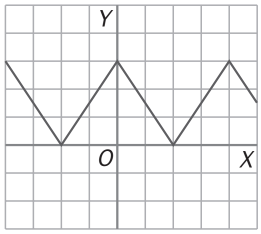


12.15 Indica si las siguientes funciones son simétricas.

a)



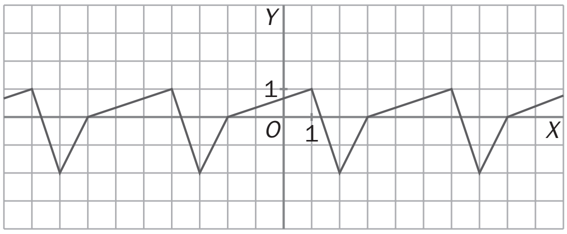
b)



a) Sí, es simétrica respecto al origen.

b) Sí, es simétrica respecto al eje de ordenadas.

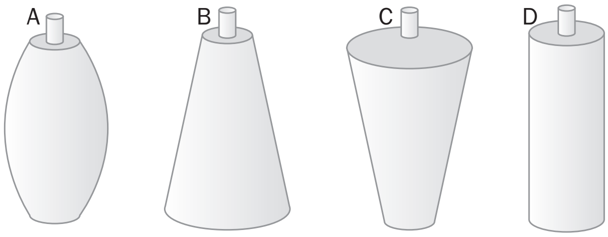
12.16 Determina si es periódica la función y, en caso afirmativo, halla su período.



Es periódica, con período 5.

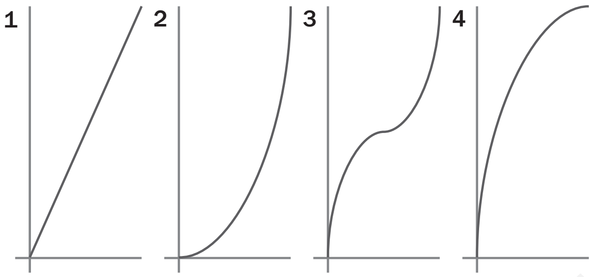
PROBLEMAS PROPUESTOS

12.17 En un laboratorio hay 4 probetas de igual capacidad.



Se procede a llenar las 4 probetas con un grifo y se va anotando el volumen de agua y la altura alcanzada en cada probeta.

Posteriormente, se representan estos datos y se obtienen las siguientes gráficas.



Asigna a cada probeta su gráfica correspondiente.

*A*3, *B*2, *C*4, *D*1.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Concepto de dependencia y función

12.18 **¿Qué dos magnitudes están relacionadas en cada una de estas fórmulas?**

a) $L = 2\pi \cdot r$ | **c)** $A = l^2$

b) $A = \pi \cdot r^2$ | **d)** $E = 166{,}386\ p$

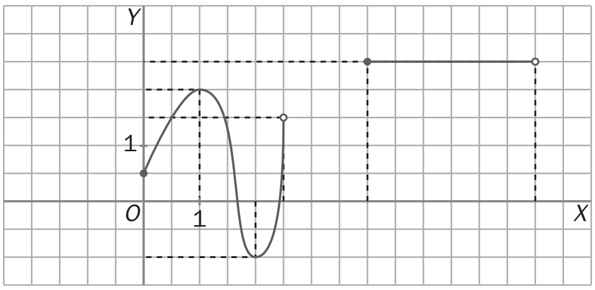
a) La longitud de la circunferencia y su radio.

b) El área del círculo y su radio.

c) El área del cuadrado y su lado.

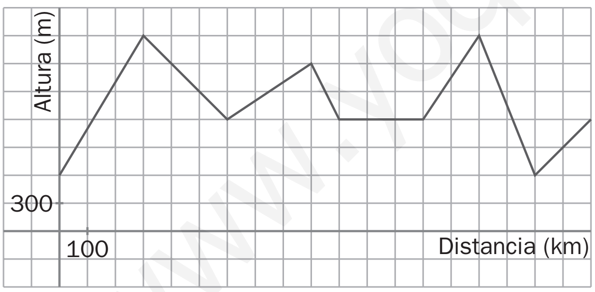
d) El valor de los euros y el de las pesetas.

12.19 **Averigua el dominio y el recorrido de la siguiente función expresada por una gráfica.**



Dominio $= [0, 2{,}5) \cup [4, 7)$; recorrido $= [-1, 2{,}5]$

12.20 **La gráfica muestra el perfil de una etapa de una vuelta ciclista.**



¿Entre qué kilómetros la altura permanece constante?

La altura permanece constante entre los 100 y 130 kilómetros.

12.21 **Escribe la fórmula que convierte hectómetros en decámetros y a la inversa. Indica en cada caso cuáles son las variables dependiente e independiente.**

Paso de hm a dam: 1 hm = 10 dam

Variable independiente: hm; variable dependiente: dam

Paso de dam a hm: 1 dam $= \dfrac{1}{10}$ hm

Variable independiente: dam; variable dependiente: hm

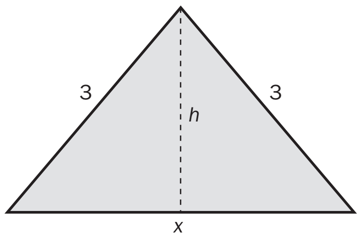
12.22 Halla la fórmula que permite obtener el área de un triángulo isósceles de lados 3, 3 y *x* centímetros, en función del lado desigual.

$A_{\text{triángulo}} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{x \cdot h}{2}$

Aplicamos el teorema de Pitágoras a cualquiera de los dos triángulos rectángulos que se obtienen al trazar la altura desde el vértice que une los lados iguales:

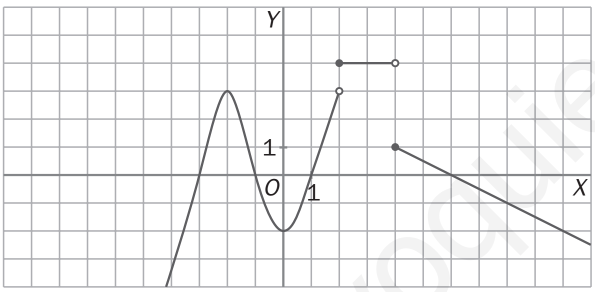
$3^2 = h^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow 9 = h^2 + \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{36 - x^2}}{2}$

Con lo que el área buscada es: $A_{\text{triángulo}} = \dfrac{\dfrac{x \cdot \sqrt{36 - x^2}}{2}}{2} = \dfrac{x \cdot \sqrt{36 - x^2}}{4}$



Continuidad y variación de una función

12.23 Estudia la continuidad de la siguiente función.



Continua en: $(-\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$; discontinua en: $\{2, 4\}$

12.24 ¿Cuál de las siguientes funciones tiene la tasa de variación mayor en el intervalo $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$?

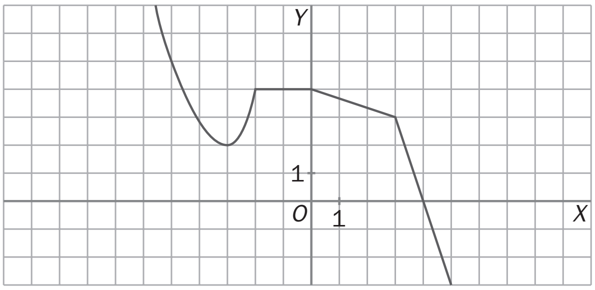
a) $y = x^2$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = 2x$

	$y = x^2$	$y = 2x$	$y = 2^x$
$f(0)$	0	0	1
$f\left(\dfrac{1}{4}\right)$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt[4]{2}$
Tasa	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{2}$	0,189
En decimales	0,0625	0,5	0,189

La mayor tasa la tiene la función $y = 2x$.

12.25 Calcula la tasa de variación de la función en estos intervalos.

a) [−3, −2] **b) [−2, 0]** **c) [3, 4]**



a) $TV[-3, -2] = f(-2) - f(-3) = 4 - 2 = 2$

b) $TV[-2, 0] = f(0) - f(-2) = 4 - 4 = 0$

c) $TV[3, 4] = f(4) - f(3) = 0 - 3 = -3$

12.26 Un anuncio por palabras en un diario cuesta 2,80 euros por palabra y se establece un mínimo de tres palabras para poder ser admitido.

a) Elabora una tabla y una gráfica de la función que relaciona el número de palabras con el precio del anuncio.

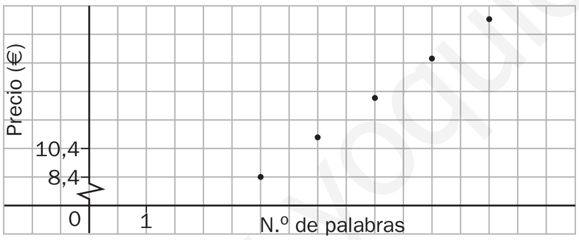
b) ¿Es continua la función?

c) ¿Dónde se producen discontinuidades?

d) ¿Existe algún intervalo donde la función sea continua?

a)

N.º de palabras	3	4	5	...
Precio (€)	8,4	11,2	14	...

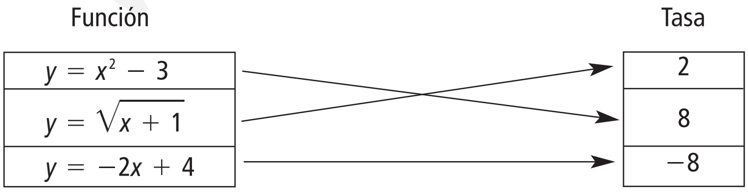


b) No.

c) En todos los puntos.

d) No.

12.27 Une cada función con su tasa de variación en el intervalo [−1, 3].



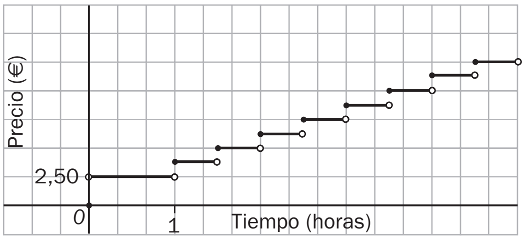
12.28 Un parking público expone este anuncio con sus tarifas.

a) Elabora una tabla y una gráfica de la situación.

b) ¿Es continua la función? ¿Dónde se producen discontinuidades?

a)

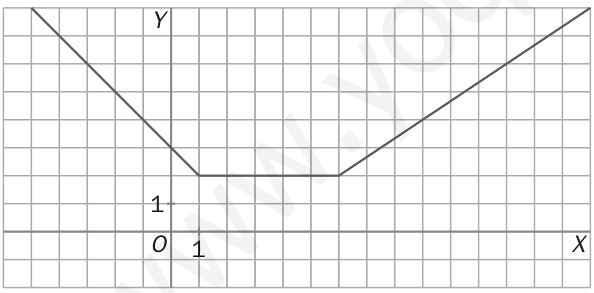
N.º de horas	0	$\frac{1}{2}$	1	1,5	2	2,5	3	...	19	20
Precio (€)	0	2,5	2,5	3,75	5	6,25	7,5	...	25	25



b) No es continua. Las discontinuidades se producen en {1}, {1,5}, {2}, {2,5}, …

Crecimiento, simetría y periodicidad

12.29 Una función viene dada por esta gráfica.



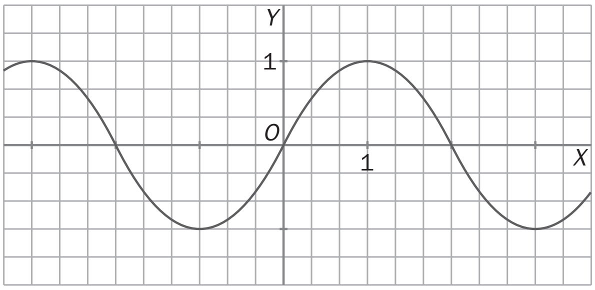
a) Indica los intervalos donde la función es creciente, constante o decreciente.

b) ¿Qué signo tiene la tasa de variación en los intervalos [2, 3], [6, 10] y [-5, -1]?

a) Crece en $(6, +\infty)$; decrece en $(-\infty, 1)$; es constante en (1, 6).

b) La tasa en [2, 3] es igual a 0; en [6, 10] es positiva, y en [-5, -1] es negativa.

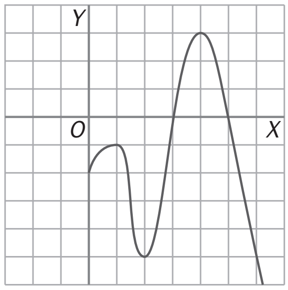
12.30 Observa esta función y contesta a las preguntas.



a) ¿Cuáles son los máximos y mínimos de la función en el intervalo [−2, 2]? ¿Son absolutos o relativos?
b) Sabiendo que la función es periódica, ¿cuántos máximos y mínimos tiene la función?

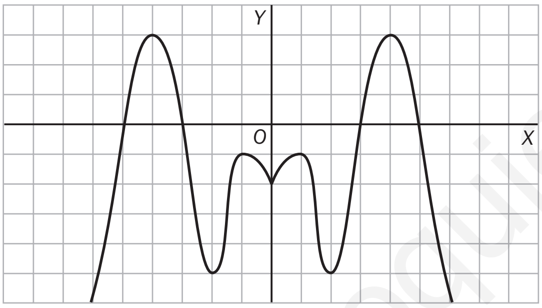
a) Máximo en (1, 1) y mínimo en (−1, −1). Son absolutos y relativos.
b) Infinitos.

12.31 Completa la gráfica de la siguiente función para que tenga la simetría que se indica.

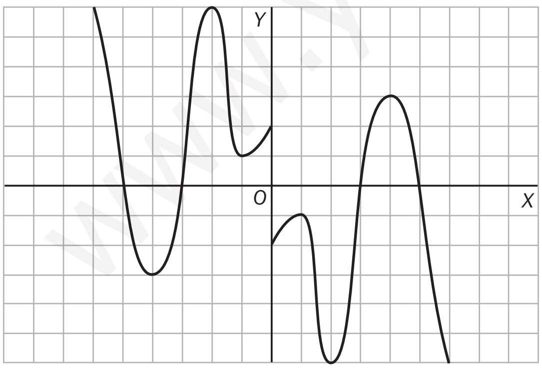


a) Par **b) Impar**

a)



b)



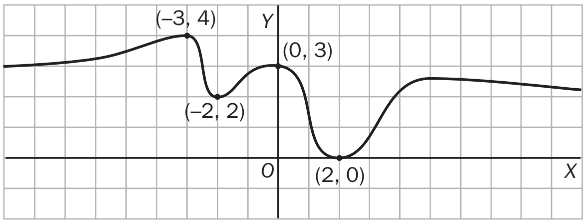
12.32 Indica si estas funciones tienen simetría par o impar.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

a) Impar. $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -f(x)$ b) Impar. $g(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 + 1} = -g(x)$ c) Par. $h(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^4 + 1} = h(x)$

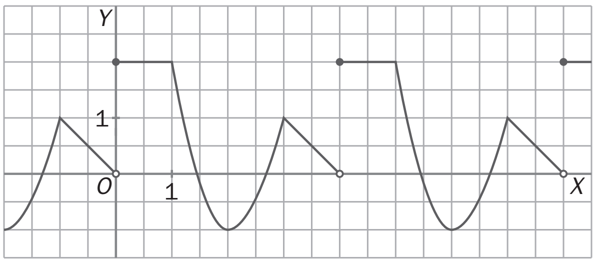
12.33 Representa la gráfica de una función continua con un máximo absoluto en (−3, 4), un máximo relativo en (0, 3), un mínimo absoluto en (2, 0) y un mínimo relativo en (−2, 2).

Respuesta abierta.



12.34 Halla el valor de la siguiente función periódica en estos puntos.

a) 17 **b) −6** **c) −34** **d) 121**



a) $f(17) = 2$ b) $f(-6) = -1$ c) $f(-34) = -1$ d) $f(121) = 2$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

12.35 ¿Cuáles de estas relaciones corresponden a funciones?

a) A cada número le hacemos corresponder sus divisores.

b) A cada persona, el día de su nacimiento.

c) A cada persona, el nombre de sus hijos.

d) A cada hijo, el nombre de su padre.

e) A cada número, su raíz cúbica.

Son funciones b y e.

12.36 Completa la tabla de esta función, sabiendo que tiene simetría impar.

x	-3	2	0	-2	3	5	$-\sqrt{25}$
y	$\frac{1}{2}$	-5	1	5	$-\frac{1}{2}$	-7	7

12.37 ¿Dónde alcanzará los máximos y los mínimos una función cuyo estudio del crecimiento es el siguiente?

Crece en los intervalos $(-\infty, -5)$ y $(-2, 4)$.

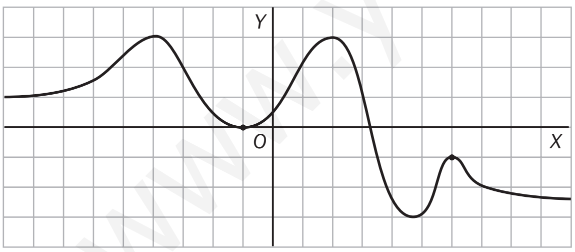
Decrece en los intervalos $(-5, -2)$ y $(4, +\infty)$.

Alcanza un máximo en $x = -5$ y otro en $x = 4$.

Alcanza un mínimo en $x = -2$.

12.38 ¿Puede existir un mínimo con ordenada mayor que la ordenada en un máximo? ¿Y un máximo con ordenada menor que la ordenada en un mínimo? Dibuja las situaciones anteriores con gráficas de funciones.

Sí, ambas situaciones son posibles, como se ve en la gráfica de esta función.

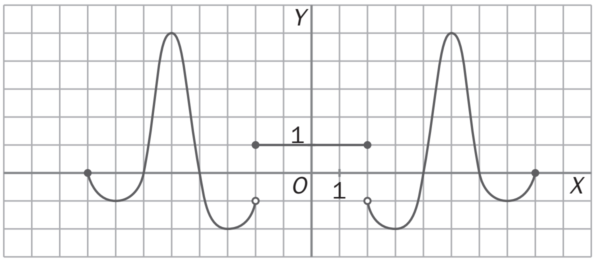


12.39 Si se establece la relación "*A cada número le corresponden sus factores primos*", ¿cuál tendría que ser su dominio para que fuera una función?

El dominio de la función tendría que ser {1}, ya que es el único valor al que le correspondería una sola imagen.

PROBLEMAS PARA APLICAR

12.40 Observa la gráfica y estudia las siguientes propiedades.



a) Dominio y recorrido.

b) Intervalos de continuidad y discontinuidades.

c) Tasa de variación en los intervalos [−5, −3], [−2, 0] y [4, 5].

d) Crecimiento y decrecimiento.

e) Máximos y mínimos absolutos y relativos.

f) Simetrías.

a) Dom $= [-8, 8]$. Rec $= [-2, 5]$

b) Es continua en $[-8, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 8]$ y discontinua en $\{-2, 2\}$.

c) $TV[-5, -3] = -2 - 5 = -7$
$TV[-2, 0] = 1 - 1 = 0$
$TV[4, 5] = 5 - 0 = 5$

d) Crece en $(-7, -5) \cup (-3, -2) \cup (3, 5) \cup (7, 8)$.
Decrece en $(-8, -7) \cup (-5, -3) \cup (2, 3) \cup (5, 7)$.
Es constante en $(-2, 2)$.

e) Máximos absolutos y relativos: $(-5, 5)$ y $(5, 5)$
Mínimos absolutos y relativos: $(-3, -2)$ y $(3, -2)$

f) Simetría par.

12.41 Con un solo litro de gasolina se contaminan 750 000 litros de agua. Tenemos una inmensa piscina de 0,5 kilómetros de ancho, 2 kilómetros de largo y 10 metros de profundidad.

a) ¿Cuántos litros de gasolina contaminan toda el agua de la piscina?

b) Un petrolero tiene una capacidad, aproximada, de 80 000 toneladas de gasolina. ¿Cuántas piscinas de las anteriores contaminaría si sus tanques se rompiesen?

c) Representa la función que relaciona los litros de gasolina y los litros de agua contaminada.

a) Capacidad de la piscina $= 2\,000 \cdot 500 \cdot 10$ m $= 10\,000\,000$ de m^3 $= 10\,000\,000\,000$ de L

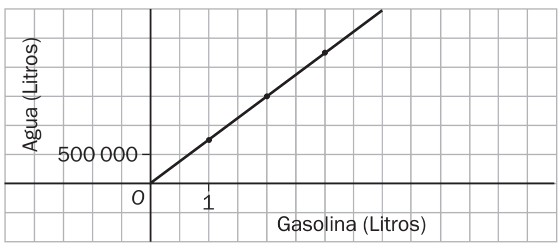
Número de litros $= \dfrac{10\,000\,000\,000}{750\,000} = 13\,333,\widehat{3} \cong 13\,333$ litros hacen falta para contaminar toda la piscina.

b) Con 80 000 toneladas de fuel tenemos 80 000 000 litros de fuel.

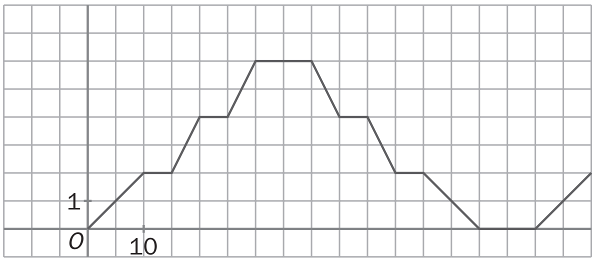
Número de piscinas $= \dfrac{80\,000\,000}{13\,333} \cong 6\,000$

c)

x	y
1	750 000
2	1 500 000
3	2 250 000
...	...



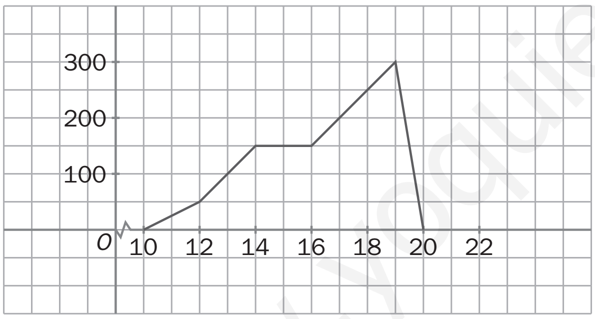
12.42 Un autobús universitario realiza cada día dos paradas, además de la inicial, para recoger estudiantes. La gráfica muestra su recorrido diario.



a) Es periódica la función? Si la respuesta es afirmativa indica el período.
b) ¿A cuántos kilómetros está la universidad?
c) ¿Cuánto tiempo tarda en realizar el trayecto a la universidad?
d) ¿Cuánto tiempo está parado en todo su recorrido?
e) ¿Qué significa el decrecimiento de la gráfica?

a) Sí. El período es de 80 minutos.
b) A 6 kilómetros.
c) 30 minutos.
d) 40 minutos.
e) Significa que vuelve a la estación.

12.43 La afluencia a una piscina pública, a lo largo de un día de verano, viene dada por esta gráfica.



Observa la gráfica y determina estos datos.
a) El horario de la piscina.
b) El máximo número de personas en la piscina y la hora en que se produce.
c) Los períodos de decrecimiento de afluencia de personas.

a) De 10.00 a 20.00
b) 300 personas a las 19.00
c) De 14.00 a 16.00, porque la gente está comiendo, y de 19.00 a 20.00, porque se van marchando.

12.44 La tabla relaciona el volumen de los cilindros de 10 centímetros de altura con el radio de su base.

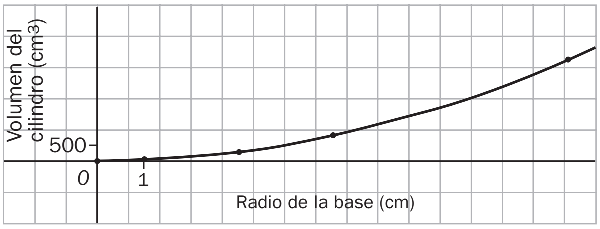
***x* (radio base)**	1	3	5	10
***y* (volumen cilíndrico)**	10π	90π	250π	$1\,000\pi$

a) Halla la ecuación de la relación.

b) Construye la gráfica de la función que relaciona el volumen de los cilindros con el radio de la base.

a) $y = \pi \cdot x^2 \cdot 10 = 10\pi x^2$

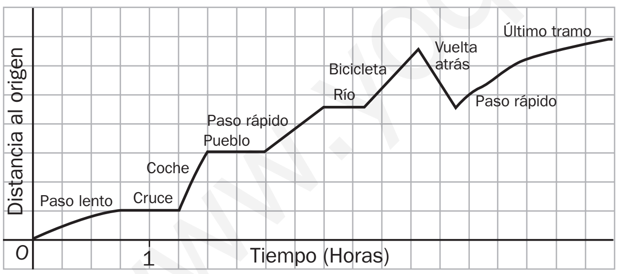
b)



12.45 Un peregrino explica a otro cómo había transcurrido la etapa del camino de Santiago que acababa de terminar:

«Comencé a caminar con todo el grupo charlando tranquilamente hasta llegar a una encrucijada de caminos donde no se distinguían las señales auténticas. Estuvimos allí media hora hasta que Ricardo encontró un cruceiro con la flecha amarilla. Como andábamos retrasados, a María y a mí un lugareño nos acercó en coche hasta el siguiente pueblo. Ya descansados, y cuesta abajo, hicimos un tramo a bastante ritmo hasta un bosque de hayas con un río donde nos dimos un chapuzón con unos franceses. Como los franceses marchaban en bicicleta nos llevaron "de paquete" unos kilómetros, pero Ricardo se olvidó su carné de peregrino en el río y tuvimos que volver con los franceses a buscarlo. Les dijimos que nos llevaran las mochilas para ir más ligeros hasta el final de la etapa. Fuimos bastante rápido hasta llegar al último tramo del puerto del Cebreiro, donde llegamos exhaustos.»

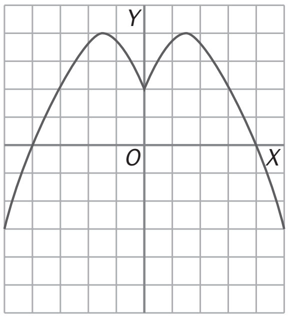
Dibuja la gráfica que indica la trayectoria del peregrino.

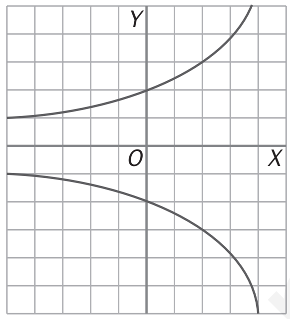


REFUERZO

Función. Continuidad y tasa de variación

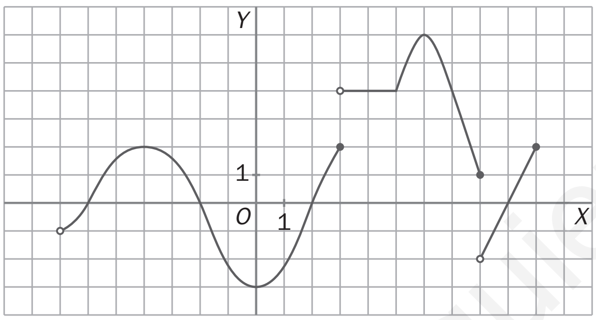
12.46 ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan una función?





Solo la gráfica del apartado a.

12.47 Observa la gráfica y estudia las siguientes propiedades.



a) Dominio y recorrido.

b) Calcula $f(-3)$, $f(4)$ y $f(8)$.

c) Intervalos de continuidad y discontinuidad.

d) Tasa de variación en los intervalos $[-4, -2]$, $[0, 3]$ y $[6, 8]$.

a) Dominio: $(-7, 10]$; recorrido: $[-3, 6]$

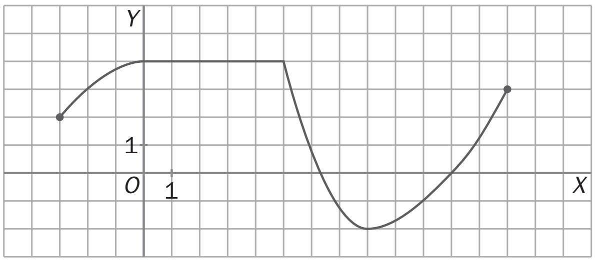
b) $f(-3) = 1{,}5$; $f(4) = 4$; y $f(8) = 1$

c) Intervalos de continuidad: $(-7, 3) \cup (3, 8) \cup (8, 10)$, Las discontinuidades están en $x = 3$ y $x = 8$

d) $TV[-4, -2] = 0 - 2 = -2$; $TV[0, 3] = 2 - (-3) = 5$; $TV[6, 8] = 1 - 6 = -5$

Crecimiento, simetrías y periodicidad

12.48 **Indica los intervalos donde la función es creciente, constante y decreciente.**

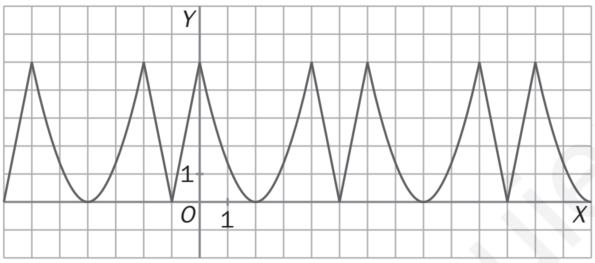


Creciente: $[-3, 0) \cup (8, 13)$

Constante: $(0, 5)$

Decreciente: $(5, 8)$

12.49 **La gráfica de una función tiene el siguiente aspecto.**

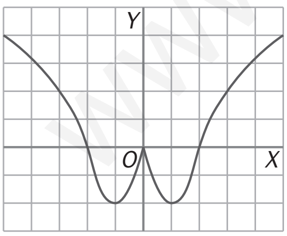


¿Es periódica? En caso afirmativo, indica su período.

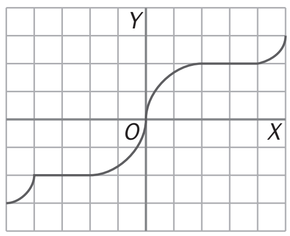
Sí, con período 6.

12.50 **Indica la simetría de estas funciones.**

a)



b)



a) Simétrica respecto al eje OY.

b) Simétrica respecto al origen.

AMPLIACIÓN

12.51 Dibuja la gráfica de una función que se ajusta a las siguientes características.

Dominio: $(-3, 3)$

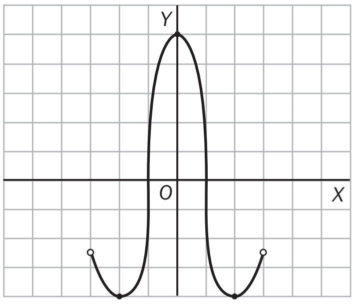
Recorrido: $[-4, 5]$

Mínimos: en $(-2, -4)$ y $(2, -4)$

Máximo: en $(0, 5)$

Simetría: par

Respuesta abierta.



12.52 La fórmula $y = -x^2 + 5x$ expresa el área de una familia de rectángulos de un determinado perímetro en función de la base. ¿Cuál es el perímetro de la familia de rectángulos?

Área $=$ base $\cdot$ altura

$y = -x^2 + 5x = x(5 - x) \rightarrow$ Altura $= (5 - x)$

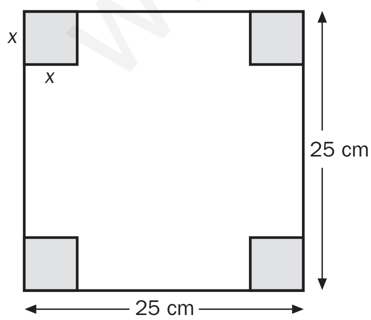
Perímetro $= 2 \cdot$ base $+ 2 \cdot$ altura

Perímetro $= 2x + 2(5 - x) = 2x + 10 - 2x = 10$

12.53 Dentro del grupo de cilindros de 2 centímetros cúbicos de volumen, halla la fórmula del área del cilindro en función del radio de la base.

Área $= 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \dfrac{2}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \dfrac{4}{x}$

12.54 Con un cartón cuadrado de 25 centímetros de lado, se construyen cajas sin tapa recortando de cada esquina cuadrados pequeños de lado x. Calcula la expresión algebraica del volumen de la caja en función del lado x.



Observando la figura se tiene:

$a = 25 - 2x$

$b = 25 - 2x$

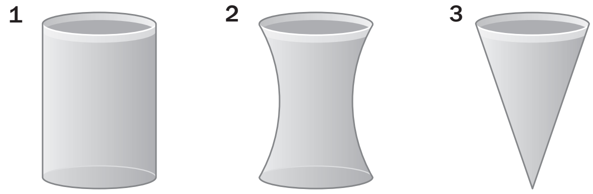
$c = x$

$v = (25 - 2x)^2 \cdot x$ cm^3

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

12.55 **Vaciado de depósitos**

Los siguientes depósitos están llenos con la misma cantidad de agua y contienen en su base un dispositivo mecánico y un grifo que hacen que se arrojen, en los tres casos, 5 litros por minuto de forma constante.



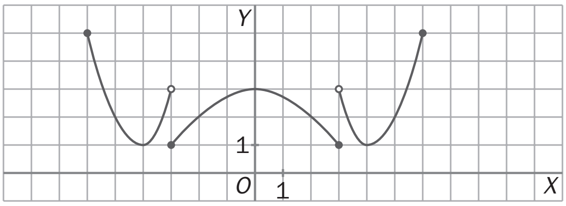
Las gráficas representan la altura del nivel del agua en función del tiempo que ha pasado desde que se ha abierto el grifo.

Indica cuál es la gráfica intrusa y señala a qué depósito corresponde cada una de las otras tres.

La gráfica a corresponde al recipiente 3.
La gráfica c corresponde al recipiente 1.
La gráfica d corresponde al recipiente 2.
La gráfica b es la intrusa.

AUTOEVALUACIÓN

12.A1 Halla el dominio, recorrido, máximos y mínimos, discontinuidades, crecimiento y decrecimiento, y simetrías de la siguiente función.



Dominio: $[-6, 6]$
Recorrido: $[1, 5]$
Mínimos: $(-4, 1)$, $(-3, 1)$, $(3, 1)$ y $(4, 1)$
Máximo: $(-6, 5)$, $(6, 5)$ y $(0, 3)$
Discontinuidades: $\{-3, 3\}$
Creciente: $(-4, -3) \cup (-3, 0) \cup (4, 6)$
Decreciente: $(-6, -4) \cup (0, 3) \cup (3, 4)$
Simetría: par.

12.A2 En un triángulo equilátero de lado *x*, expresa mediante una fórmula la altura en función del lado.

Sea h la altura y x el lado de la base.
Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

Altura: $h = \sqrt{x^2 - \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

12.A3 Un agente de seguros de una empresa aseguradora *A* gana un mínimo de 400 euros al mes y, además, 12 euros por cada seguro que vende. El agente de otra aseguradora *B* gana 20 euros por cada seguro vendido, pero no tiene sueldo fijo.

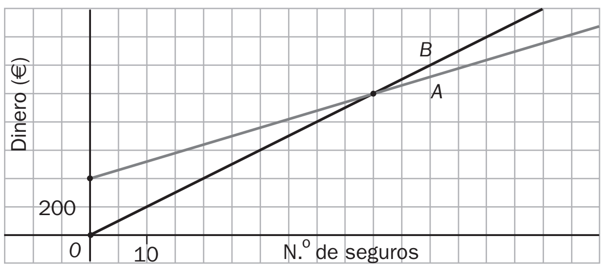
a) Expresa la ecuación de la función que relaciona el número de seguros vendidos con el sueldo, en cada aseguradora.

b) Dibuja sus gráficas.

c) ¿A partir de cuántos seguros vendidos gana más el de la aseguradora *B*?

a) Llamaremos x al número de seguros vendidos.
La función $f(x)$ representa el sueldo de un empleado de la aseguradora A, y $g(x)$, el sueldo de un empleado de la aseguradora B.
$f(x) = 400 + 12x$
$g(x) = 20x$

b)



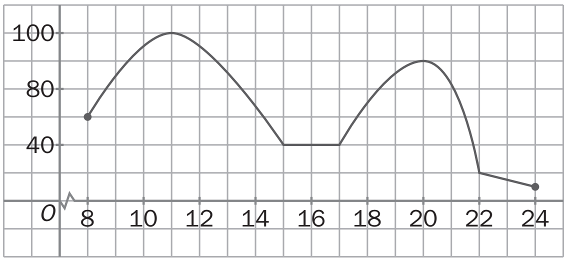
c) $20x \geqslant 400 + 12x \rightarrow x \geqslant 50$
A partir de 50 seguros.

12.A4 Indica el tipo de simetría que existe en la siguiente función expresada por una tabla.

x	−3	1	4	0	−1	3	−4
y	7	2	−6	0	−2	−7	6

Simetría impar.

12.A5 Esta gráfica estudia el rendimiento de los escolares en función de la hora del día.



a) ¿Cuándo se produce el máximo rendimiento? ¿Y el menor rendimiento?
b) ¿En qué período de la mañana se tiene mayor concentración?
c) ¿En qué momento de la tarde consideras que se deben hacer los deberes?

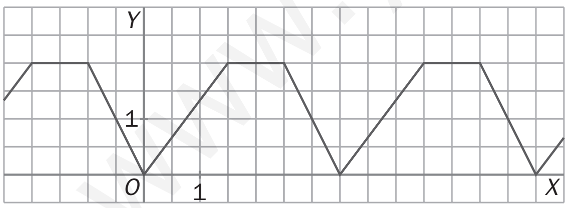
a) El máximo se produce a las 11.00, y el mínimo, a las 24.00.
b) De 9.30 a 11.00
c) A las 8.00

12.A6 Si una función continua, sin ser constante en ningún intervalo, tiene un solo máximo en (−2, 5) y un solo mínimo en (1, −3), ¿en qué intervalos crece y en cuáles decrece?

Crece en $(-\infty, -2)$ y en $(1, +\infty)$.

Decrece en $(-2, -1)$.

12.A7 Observa la gráfica de esta función.



¿Es periódica? En caso afirmativo, indica el período.

Sí, es periódica, y su período es 3,5.

EJERCICIOS PROPUESTOS

13.1 **Indica cuáles de las siguientes funciones son lineales.**

a) $y = -5$

b) $y = 0{,}04 + 23x$

c) $y = 1 - x^2$

d) $y = 0{,}3x$

e) $y = -2x^2$

f) $y = -0{,}5x + 2$

Son lineales a, b, d y f.

13.2 **Expresa cada una de estas funciones mediante una fórmula e indica cuáles son lineales.**

a) **A cada número real le corresponde su doble.**

b) **A cada número real le corresponde su doble más cinco.**

c) **A cada número real le corresponde su cuadrado.**

a) $y = 2x$

b) $y = 2x + 5$

c) $y = x^2$

Son lineales a y b.

13.3 **Indica la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones lineales.**

a) $y = 3x$

b) $y = -5x + 2$

c) $y = 3x + 1$

d) $y = \frac{1}{2}x + 3$

a) $m = 3,\ n = 0$

b) $m = -5,\ n = 2$

c) $m = 3,\ n = 1$

d) $m = \frac{1}{2},\ n = 3$

13.4 **Halla la ecuación de la función lineal que pasa por el punto $A(2, 9)$ y tiene pendiente -3.**

$$m = -3 \rightarrow y = -3x + n$$

Si pasa por $A(2, 9)$, entonces: $9 = -3 \cdot 2 + n \rightarrow n = 15,\ y = -3x + 15$.

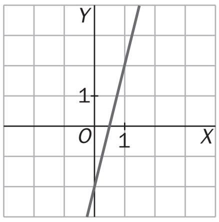
13.5 **Determina la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(5, 4)$.**

$$\left.\begin{aligned} -1 &= 2 \cdot m + n \\ 4 &= 5 \cdot m + n \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} m &= \frac{5}{3} \\ n &= -\frac{13}{3} \end{aligned}$$

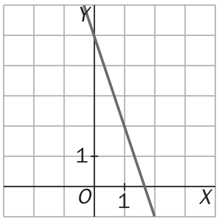
La ecuación es: $y = \frac{5}{3}x - \frac{13}{3}$.

13.6 Representa estas funciones lineales.

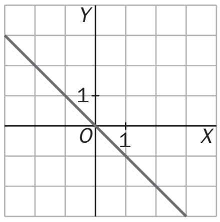
a) $y = 4x - 2$



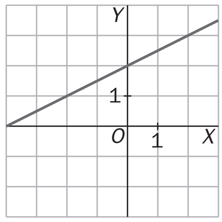
b) $y = -3x + 5$



c) $y = -x$



d) $y = \frac{1}{2}x + 2$



13.7 Escribe la ecuación de dos rectas que sean paralelas a cada una de estas funciones lineales.

a) $y = 2x - 3$

b) $y = 3x$

c) $y = -x + 1$

d) $y = -5x + 7$

a) $y = 2x$; $y = 2x + 3$

b) $y = 3x + 1$; $y = 3x + 10$

c) $y = -x + 2$; $y = -x - 7$

d) $y = -5x$; $y = -5x + 4$

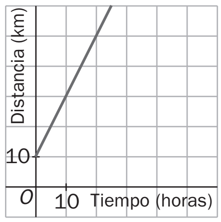
13.8 Un ciclista parte del kilómetro 10 de una carretera a una velocidad constante de 20 kilómetros hora.

a) Halla la expresión algebraica de la función que relaciona el punto kilométrico de la carretera con el tiempo transcurrido desde el inicio.

b) Representa la función.

a) $y = 20x + 10$, donde y es el punto kilométrico de la carretera, y x, el tiempo transcurrido, en horas.

b)



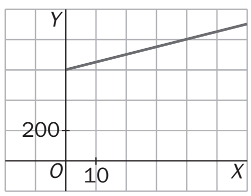
13.9 Se ha realizado una campaña de vacunación en una comunidad autónoma. Los gastos de distribución son 600 euros y los gastos de vacunación son 5 euros por cada vacuna puesta.

a) Determina la expresión algebraica de esta función.

b) Representa la función.

a) $y = 5x + 600$, donde y es el dinero que se gasta en la campaña, y x, el número de vacunas puestas.

b)



13.10 Entre las siguientes funciones, indica cuáles son cuadráticas.

a) $y = 3x^2$ **b)** $y = -2x + 3$ **c)** $y = 5 + x^2$ **d)** $y = x^3$

Son cuadráticas a y c.

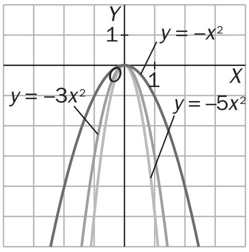
13.11 Dadas las funciones:

$y = -x^2$ $\qquad$ $y = -3x^2$ $\qquad$ $y = -5x^2$

a) Represéntalas en un mismo gráfico.

b) ¿Qué relación existe entre el coeficiente de la parábola y la aproximación al eje *OY*?

a)

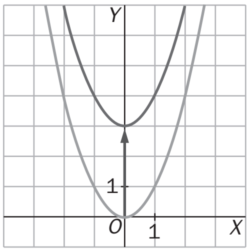


b) Cuanto mayor es el coeficiente, más se aproxima la parábola al eje *OY*.

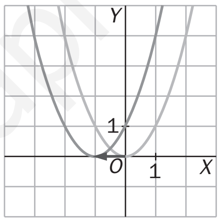
13.12 Representa por traslación estas funciones.

a) $y = x^2 + 3$ $\qquad$ b) $y = x^2 - 2$ $\qquad$ c) $y = (x + 1)^2$ $\qquad$ d) $y = (x - 4)^2$

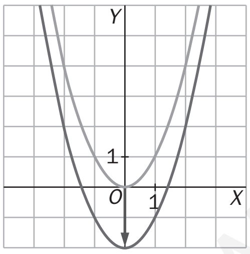
a)



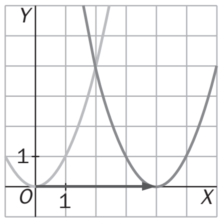
c)



b)



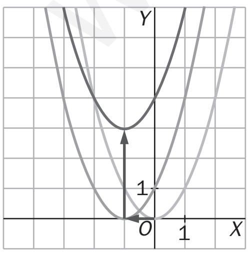
d)



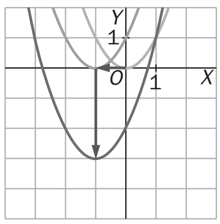
13.13 Representa por traslación las siguientes funciones.

a) $y = (x + 1)^2 + 3$ $\qquad$ b) $y = (x - 4)^2 - 2$ $\qquad$ c) $y = (x + 1)^2 - 3$ $\qquad$ d) $y = (x + 4)^2 - 2$

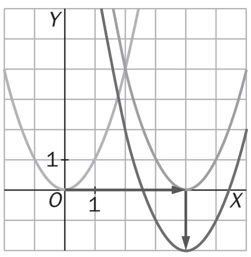
a)



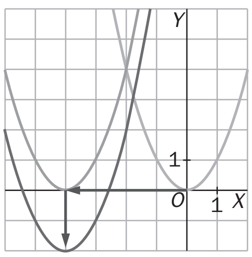
c)



b)



d)



13.14 Representa estas funciones cuadráticas y estudia las gráficas que obtengas.

a) $y = 2x^2 - 4x - 6$ **b)** $y = -x^2 - 6x + 27$

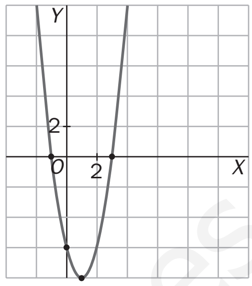
a) Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = -6 \rightarrow (0, -6)$

Hallamos el vértice de la parábola: $-6 = 2x^2 - 4x - 6 \rightarrow$

$x = 0$ o $x = 2$

El vértice está en $x = 1$, $y = -8 \rightarrow V(1, -8)$



Puntos de corte con el eje OX:

$y = 0 \rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \rightarrow (3, 0) \text{ y } (-1, 0)$$

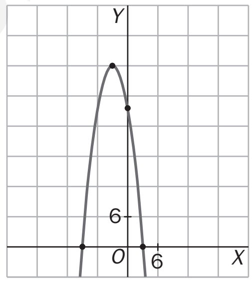
b) Abierta hacia abajo, $a < 0$

Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = 27 \rightarrow (0, 27)$

Hallamos el vértice de la parábola: $27 = -x^2 - 6x + 27 \rightarrow$

$x = 0$ o $x = -6$

El vértice está en $x = -3$, $y = 36 \rightarrow V(-3, 36)$



Puntos de corte con el eje OX:

$y = 0 \rightarrow -x^2 - 6x + 27 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{-2} = \frac{6 \pm 12}{-2} = \begin{cases} -9 \\ 3 \end{cases} \rightarrow (-9, 0) \text{ y } (3, 0)$$

13.15 Representa las siguientes funciones cuadráticas y analiza las gráficas obtenidas.

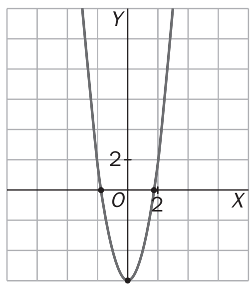
a) $y = 2x^2 - 6$ **b)** $y = x^2 - 5x$

a) Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = -6 \rightarrow (0, -6)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{4} = 0$

El vértice es $V(0, -6)$



Puntos de corte con el eje OX:

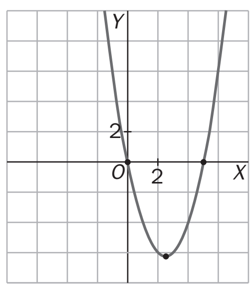
$y = 0 \rightarrow 2x^2 - 6 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow (\sqrt{3}, 0)$ y $(-\sqrt{3}, 0)$

b) Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

El vértice es $V(2{,}5; 6{,}25)$

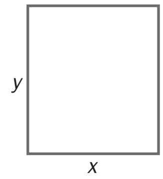


Puntos de corte con el eje OX:

$y = 0 \rightarrow x(x - 5) = 0 \rightarrow x = 0$ o $x = 5 \rightarrow (0, 0)$ y $(5, 0)$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

13.16 **Con 5 metros de moldura se quiere construir un marco de forma rectangular y área máxima. ¿Cuáles serán sus dimensiones?**



Perímetro $= 2x + 2y = 5 \rightarrow y = \dfrac{5 - 2x}{2}$

Área $= f(x) = x \cdot y$

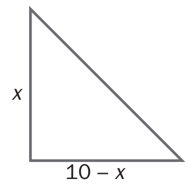
$f(x) = x\dfrac{5 - 2x}{2} = -x^2 + \dfrac{5}{2}$

La parábola $f(x)$ es abierta hacia abajo porque $a = -1 < 0$.

El máximo de la función está en el vértice. La abscisa del vértice es $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-\frac{5}{2}}{-2} = \dfrac{5}{4}$.

La ordenada del vértice es $y = \dfrac{5 - 2\frac{5}{4}}{2} = \dfrac{5}{4}$. Por tanto, el marco es un cuadrado de $\dfrac{5}{4}$ m de lado.

13.17 **De todos los triángulos rectángulos cuya suma de catetos es 10 centímetros, ¿cuál es el que tiene mayor superficie?**



$$\text{Área} = A(x) = \frac{x(10 - x)}{2} = -\frac{x^2}{2} + 5x$$

La gráfica de esta función $A(x)$ es una parábola abierta hacia abajo. Su máximo está en el vértice.

Hallamos la abscisa del vértice: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-5}{-2 \cdot \frac{1}{2}} = 5$

El triángulo rectángulo con mayor superficie es el que tiene los dos catetos son iguales y miden 5 cm cada uno.

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

Definición y caracterización de una función lineal

13.18 **Una función viene dada por la siguiente tabla.**

x	0	1	2	3
y	10	13	16	19

Expresa la función mediante una fórmula, utilizando como ayuda esta otra tabla.

x	0	1	2	3
y	10	10 + 3	10 + 6	10 + 9
y	10	$10 + 3 \cdot \mathbf{1}$	$10 + 3 \cdot \mathbf{2}$	$10 + 3 \cdot \mathbf{3}$

Luego la expresión algebraica es: $y = 10 + 3x$

13.19 **Relaciona cada tabla con su ecuación correspondiente.**

x	5	−10
y	6	−1

x	4	8
y	−5	−8

x	5	−3
y	−1	1

$y = \dfrac{-x + 1}{4}$

$y = 0{,}2x + 1$

$y = \dfrac{-3x}{4} - 2$

13.20 **Indica cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a funciones lineales. En los casos que sí lo sean halla la pendiente y la ordenada en el origen.**

a) $y = \dfrac{8x - 3}{5}$ **b)** $y = -\dfrac{x}{9} + \dfrac{3}{4}$ **c)** $y = x^2 + x - 3$ **d)** $y = \dfrac{5}{x} - 1$

a) Lineal: $m = \dfrac{8}{5}$, $n = -\dfrac{3}{5}$

b) Lineal: $m = -\dfrac{1}{9}$, $n = \dfrac{3}{4}$

c) No lineal

d) No lineal

13.21 **¿Cuáles de estas relaciones son funciones lineales?**

a) A cada número le hacemos corresponder el triple del siguiente.

b) A cada número real le hacemos corresponder el mismo menos el 10 % de su mitad.

c) A cada número real le hacemos corresponder el producto de su anterior por su posterior.

a) $y = 3(x + 1) = 3x + 3$

b) $y = x - \dfrac{10}{100}\dfrac{x}{2} = x - \dfrac{1}{20}x = \dfrac{19}{20}x$

c) $y = (x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1$

Son lineales a y b.

13.22 **¿Cuál de las siguientes rectas no es paralela a las otras?**

a) $y = \dfrac{-3x + 1}{6}$ **b)** $x + 2y - 3 = 0$ **c)** $y = \dfrac{-x}{2}$ **d)** $y = \dfrac{1}{2}x + 6$

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.

a) $m = -\dfrac{1}{2}$

b) $y = \dfrac{-x + 3}{2} \rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$

c) $m = -\dfrac{1}{2}$

d) $m = \dfrac{1}{2}$,no es paralela a las otras.

13.23 **¿Están alineados los puntos (−1, 7), (2, −5) y (0, 3)?**

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por dos de los puntos: (−1, 7) y (2, −5). Si el tercer punto, (0, 3), pertenece a esa recta, es que sí están alineados.

$$\begin{cases} -7 = m + n \\ -5 = 2m + n \end{cases} \rightarrow m = -4,\ n = 3 \rightarrow y = -4x + 3$$

Si $x = 0 \rightarrow y = 3$. El punto (0, 3) pertenece a esta recta. Sí, los tres puntos están alineados.

13.24 **Halla la ecuación de la recta paralela a $y = \dfrac{-x + 1}{5}$ que pasa por el punto $A(-3, 4)$.**

Si la recta que buscamos es paralela a $y = \dfrac{-x + 1}{5}$, entonces su pendiente debe ser $m = -\dfrac{1}{5}$.

Su ecuación tendrá la forma $y = -\dfrac{1}{5}x + n$.

Sustituimos las coordenadas del punto A en la ecuación de la recta para hallar la coordenada en el origen n.

$$4 = -\frac{1}{5} \cdot (-3) + n \rightarrow n = \frac{17}{5}$$

La ecuación de la recta es:

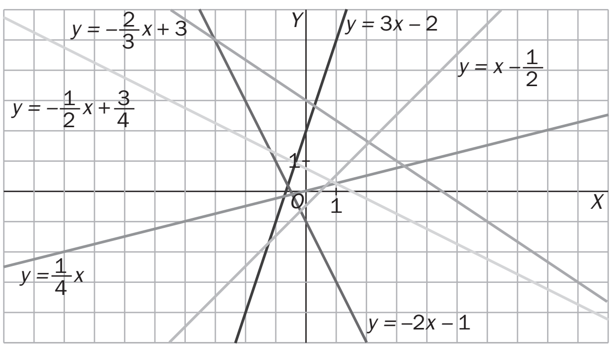
$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$$

Representación y aplicación de una función lineal

13.25 **Representa las siguientes funciones lineales.**

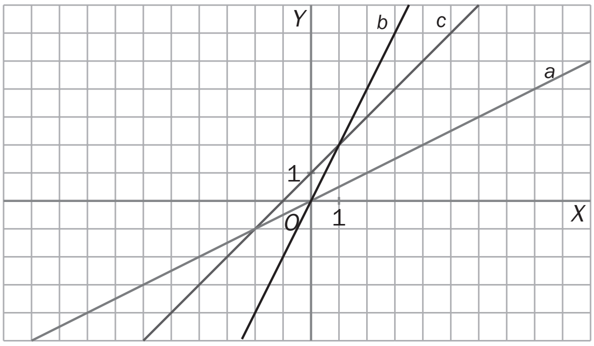
a) $y = 3x - 2$ **c)** $y = \dfrac{1}{4}x$ **e)** $y = x - \dfrac{1}{2}$

b) $y = -2x - 1$ **d)** $y = -\dfrac{2}{3}x + 3$ **f)** $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$



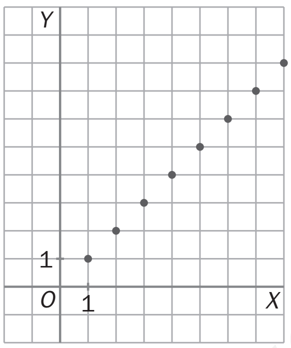
13.26 **Relaciona cada gráfica con su ecuación.**

a) $y = \frac{1}{2}x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = x + 1$

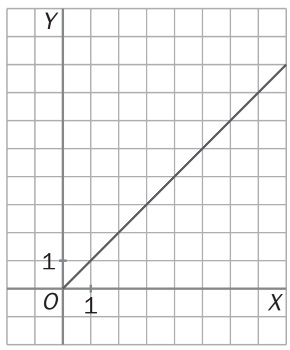


13.27 **Una cooperativa agrícola vende el vinagre a granel a 1 euro el litro y las bolsas de patatas a 1 euro la bolsa.**

¿Cuál de las siguientes representaciones corresponde a cada una de las funciones lineales que relacionan la cantidad de producto y el precio?



Precio de las bolsas de patatas



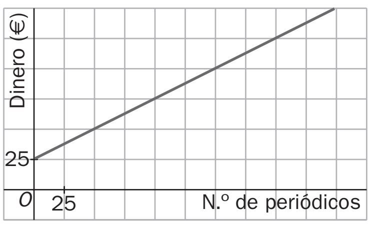
Precios de los litros de vinagre

13.28 **Para colaborar con las personas sin techo, una ONG elabora un periódico de reparto callejero. Cada vendedor recibe un fijo de 25 euros al mes y, además, 50 céntimos por ejemplar vendido.**

a) **Escribe la fórmula y representa la gráfica de la función que relaciona el número de periódicos vendidos con el dinero recibido al mes.**

b) **¿Cuántos ejemplares tiene que vender un "sin techo" para cobrar en un mes 185 euros?**

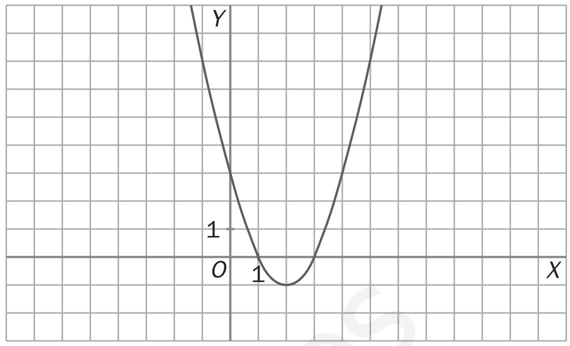
a)



b) $185 = 25 + 0{,}5x \rightarrow x = 320$ periódicos

Función cuadrática

13.29 Dada la siguiente parábola.



a) ¿Cuál es su vértice?

b) Halla la ecuación del eje de simetría.

c) ¿Cuál es la ordenada del punto de abscisa $x = 4$?

d) Escribe su ecuación.

a) $(2, -1)$

b) $x = 2$

c) $y = 3$

d) La ecuación tendrá la forma $y = ax^2 + bx + c$

La función pasa por (0, 3), de donde se deduce que $c = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \text{También pasa por (1, 0), de donde: } 0 = a + b + 3 \rightarrow a + b = -3 \\ \text{Conocemos la abscisa del vértice: } x = \dfrac{-b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -4 \end{array}$$

La ecuación es $y = x^2 - 4x + 3$

13.30 Una función cuadrática tiene su vértice en el punto (4, −4). Completa la tabla utilizando la simetría de la función.

x	**2**	**6**	**5**	−3
y	**0**	0	**−3**	**−3**

Como tiene su vértice en $(4, -4)$, el eje de simetría es $x = 4$. Entonces:

$x = 2$ es un punto simétrico a $x = 6$ respecto al eje, con lo que $f(6) = f(2) = 0$

$x = 5$ es un punto simétrico a $x = 3$ respecto al eje, con lo que $f(5) = f(3) = -3$

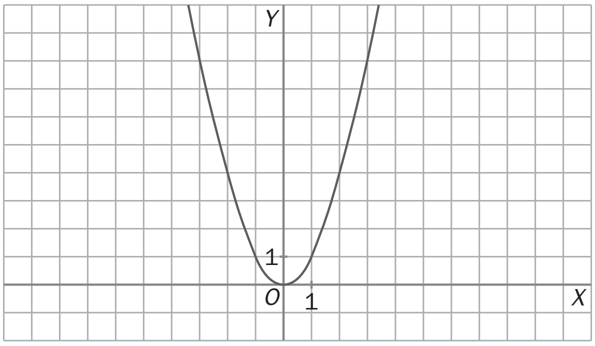
13.31 La parábola de ecuación $y = (x + a)^2 - 5$ tiene el vértice en el punto $V(-3, b)$. Halla el valor de a y b.

$y = x^2 + 2ax + a^2 - 5$

$-3 = x_v = -a \rightarrow a = 3$

$$\begin{cases} y = x^2 + 6x + 4 \\ x_v = -3 \end{cases} \rightarrow y_v = -5 \rightarrow b = -5$$

13.32 **Dada esta gráfica de una parábola.**



Traslada la gráfica, sin variar la orientación ni la abertura, de forma que el vértice sea el indicado en cada caso.

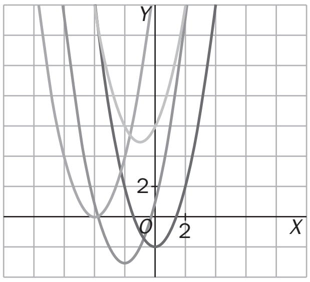
a) (0, −2)

b) (−4, 0)

c) (−1, 5)

d) (−2, −3)

Escribe, en cada caso, la ecuación de la parábola.



a) $y = x^2 - 2$

b) $y = (x + 4)^2$

c) $y = (x + 1)^2 + 5$

d) $y = (x + 2)^2 - 3$

13.33 **Representa las siguientes parábolas.**

a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = x^2 + 6x + 10$

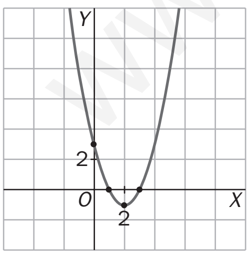
c) $y = x^2 - 5x + 6$

d) $y = x^2 - 6x + 10$

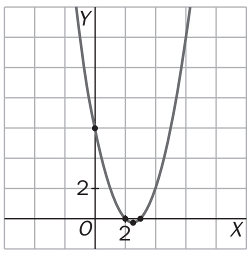
e) $y = 2x^2 - 10x$

f) $y = x^2 - 16$

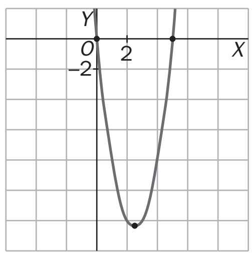
a)



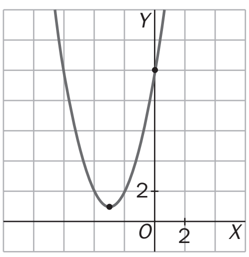
c)



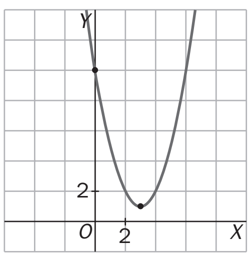
e)



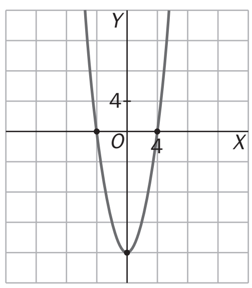
b)



d)



f)



CUESTIONES PARA ACLARARSE

13.34 **¿Pertenece el punto (2, 3) a la recta de ecuación $y = 2x - 1$? ¿Por qué?**

$3 = 2 \cdot 2 - 1$. Sí, verifica la ecuación.

13.35 **Dadas estas ecuaciones de funciones lineales.**

I) $y = 3x$

II) $y = 4x + 1$

III) $y = 3x + 2$

IV) $y = -2x + 1$

Indica:

a) Cuáles son paralelas entre sí.

b) Cuál es decreciente.

c) Cuál pasa por el origen.

d) Cuál es más inclinada.

e) Cuáles tienen la misma ordenada en el origen.

a) I y II

b) IV

c) I

d) II

e) II y IV

13.36 **Dadas las siguientes parábolas.**

I) $y = 2x^2$

II) $y = 2x^2 - 3$

III) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

IV) $y = 5(x + 2)^2$

Indica:

a) Cuál es la única parábola cuyas ramas se abren hacia abajo.

b) Cuáles tienen igual abertura.

c) Cuál es la más cerrada.

d) Cuál tiene el vértice en el punto (−2, 0).

a) III

b) I y II

c) IV

d) IV

13.37 **¿Cuál es el único punto de una parábola que es simétrico a sí mismo con respecto al eje de la parábola?**

El vértice

13.38 **Indica las condiciones que debe tener una parábola para que:**

a) No corte al eje de abscisas.

b) Corte una sola vez al eje de abscisas.

c) No corte al eje *OY*.

a) Que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tenga solución.

b) Que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tenga una única solución.

c) No es posible que una parábola no corte al eje *OY*.

La condición debería ser que no pasase por $x = 0$, es decir, que no fuera continua.

13.39 **¿Pueden tener un mínimo las siguientes funciones? Justifica tu respuesta.**

a) $y = -4x^2 - 2x + 1$

b) $y = 3(x + 1)^2 - 4$

a) No, al ser la parábola abierta hacia abajo.

b) Sí, el vértice es un mínimo de la función.

13.40 **Dada la parábola de ecuación $y = -2x^2 - 4x - 5$, comprueba si también se puede expresar de la forma $y = -2(x + 1)^2 - 3$.**

¿Qué ventajas observas en esta manera de expresar la ecuación?

Sí, son la misma parábola, ya que: $-2(x + 1)^2 - 3 = -2(x^2 + 2x + 1) - 3 = -2x^2 - 4x - 5$.

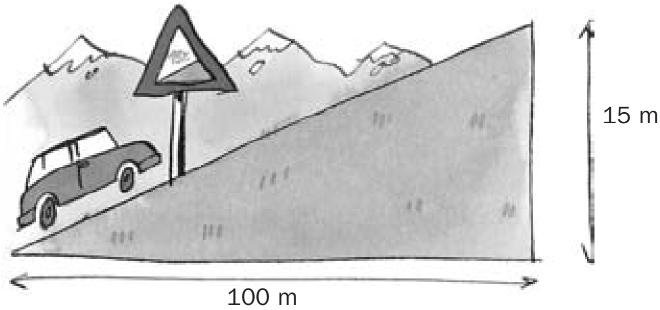
En la segunda expresión se puede apreciar que se trata de una traslación de x^2.

13.41 **Si el eje de una parábola fuera $y = 3$, ¿podríamos decir que corresponde a una función cuadrática? Justifica tu respuesta.**

No, ya que en ese caso no tendríamos una función, porque para un solo valor de x habría dos valores de y.

PROBLEMAS PARA APLICAR

13.42 **Observa el dibujo.**



a) Calcula la pendiente de la recta sobre la que está ubicada la carretera por la que asciende el coche.

b) Explica el significado de la señal de tráfico que aparece en la carretera.

a) $m = \frac{15}{100} = 0{,}15$

b) Por cada 100 m que se avanza en la horizontal se ascienden 15 m.

13.43 **Juan recibe una factura mensual de 100 minutos de teléfono. Dos nuevas compañías telefónicas le realizan las siguientes ofertas.**

a) ¿Cuál es más beneficiosa para Juan?

b) ¿Existe algún número de minutos consumidos en el que la factura sea la misma en las dos compañías?

a) Compañía A: $y = 10 + 0{,}05x$

Si $x = 100 \rightarrow y = 15$ €

Compañía B: $y = 0{,}1x$

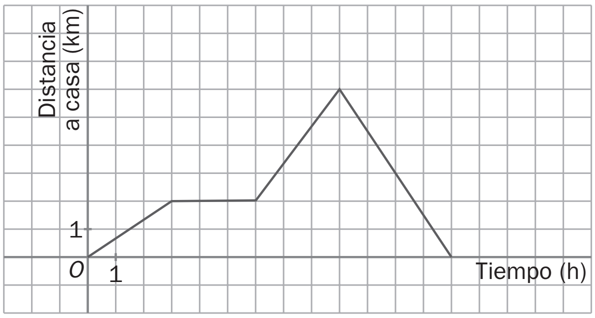
Si $x = 100 \rightarrow y = 10$ €

Es mejor la B para Juan.

b) $10 + 0{,}05x = 0{,}1x \rightarrow x = 200$ min

13.44 La siguiente gráfica muestra el recorrido que sigue una persona a lo largo del día.

Indica la fórmula de la función de cada tramo.



Primer tramo: $y = \frac{2}{3}x$

Segundo tramo: $y = 2$

Tercer tramo: $y = \frac{4}{3}x - 6$

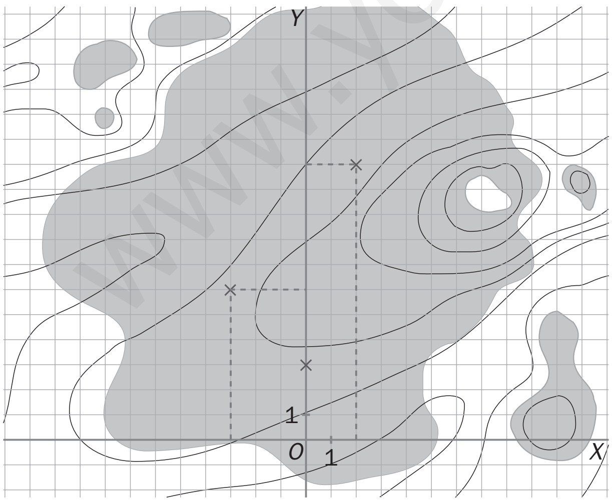
Pasa por (6, 2) y por (9, 6) $\rightarrow \begin{cases} 6m + n = 2 \\ 9m + n = 6 \end{cases} \rightarrow m = \frac{4}{3}, n = -6$

Cuarto tramo: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{39}{2}$

Pasa por (9, 6) y por (13, 0) $\rightarrow \begin{cases} 9m + n = 6 \\ 13m + n = 0 \end{cases} \rightarrow m = -\frac{3}{2}, n = \frac{39}{2}$

13.45 En una zona de mucha arboleda de la Sierra de Cazorla, la Agencia de Medio Ambiente decide abrir un cortafuegos, por el peligro existente de incendios en la campaña de verano. Para su mayor efectividad tendrá que tener un trazado parabólico y atravesar tres sitios estratégicos.

Observa el mapa de la zona, con los puntos de paso señalados, y halla la ecuación de la línea del cortafuegos.



Los puntos de paso son (0, 3); (2, 11) y (−3, 6).

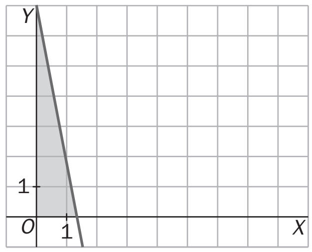
Sustituimos estos puntos en la ecuación de la parábola:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow c = 3 \\ 11 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \rightarrow b = 4 - 2a \\ 6 = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c \rightarrow 3a - b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2 \end{matrix}$$

La ecuación de la línea del cortafuegos es $y = x^2 + 2x + 3$.

13.46 Calcula el área del triángulo que forma la recta de ecuación $y = -5x + 7$ con los ejes coordenados.

La recta corta los ejes en los puntos (0, 7) y $\left(\frac{7}{5}, 0\right)$.



$x = 0 \rightarrow y = 7$

$y = 0 \rightarrow -5x + 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{5}$

El área es: $A = \dfrac{\frac{7}{5} \cdot 7}{2} = \dfrac{49}{10} u^2$

13.47 La ecuación del espacio recorrido por un móvil es $s = 5 + 3t + 2t^2$, donde s se expresa en metros y t en segundos.

a) ¿Qué longitud ha recorrido el móvil al cabo de 5 segundos de iniciar el movimiento?

b) ¿Cuál es la longitud recorrida durante el quinto segundo?

c) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando ha recorrido 157 metros desde el inicio?

a) $t = 5 \rightarrow s = 5 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 = 70$ m

b) $t = 4 \rightarrow s = 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 = 49$ m

Durante el 5.º segundo recorre una longitud que es la diferencia entre las distancias recorridas al cabo de 5 y de 4 segundos: $70 - 49 = 21$ m.

c) $157 = 5 + 3t + 2t^2 \rightarrow 2t^2 + 3t - 152 = 0 \rightarrow t = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 1\,216}}{4} = 8$ s

(La respuesta negativa no tiene sentido).

13.48 Expresa el área de un triángulo equilátero en función de su lado. ¿De qué tipo de función se trata?

Llamamos L al lado, y h a la altura.

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + h^2 = L^2 \rightarrow h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = L\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{L \cdot L\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$$

Es una función cuadrática.

13.49 Averigua cuál es el punto simétrico del punto $(-2, -5)$ con respecto al eje de simetría de la parábola $y = -2x^2 - 16x - 29$.

$x_v = -\dfrac{b}{2a} = -4$

El eje de simetría es $x = -4$.

El punto simétrico a $(-2, -5)$ es $(-6, -5)$.

13.50 **Halla los vértices y el área del triángulo cuyos lados cumplen las siguientes ecuaciones.**

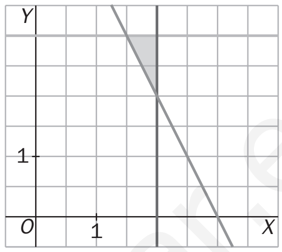
$y = 3$ $\qquad$ $x = 2$ $\qquad$ $y -2x + 6$

El problema se resuelve hallando los puntos de corte entre las tres rectas definidas por las ecuaciones, para encontrar los vértices del triángulo.

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow \text{Vértice } (2, 3)$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = -2x + 6 \end{cases} \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow \text{Vértice } \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = -2x + 6 \end{cases} \rightarrow y = 2 \rightarrow \text{Vértice } (2, 2)$$



Se dibuja el triángulo en los ejes de coordenadas.

Es un triángulo rectángulo con las siguientes dimensiones.

$$\text{Base} \equiv b = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Altura} \equiv h = 3 - 2 = 1$$

El área del triángulo será: $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{1}{4}u^2$.

R E F U E R Z O

Funciones lineales

13.51 **Escribe la ecuación de la función lineal paralela a $y = -7x + 1$, y que tiene la misma ordenada en el origen que $y = 4x - \frac{1}{3}$.**

$$\begin{cases} \text{Paralela a } y = -7x + 1 \rightarrow m = -7 \\ \text{Misma ordenada en el origen que } y = 4x - \frac{1}{3} \rightarrow n = -\frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow y = -7x - \frac{1}{3}$$

13.52 **Halla la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos $(-5, 3)$ y $(-1, -1)$.**

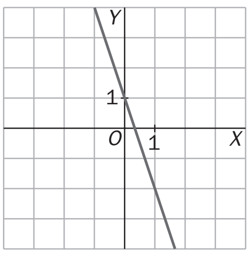
$y = mx + n$

$$\begin{cases} \text{Pasa por } (-5, 3) \rightarrow 3 = -5m + n \\ \text{Pasa por } (-1, -1) \rightarrow -1 = -m + n \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} m = -1 \\ n = -2 \end{matrix} \rightarrow y = -x - 2$$

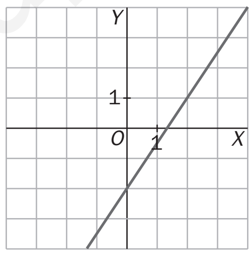
13.53 **Representa las siguientes funciones lineales.**

a) $y = -3x + 1$ **b) $y = \frac{3}{2}x - 2$**

a)



b)



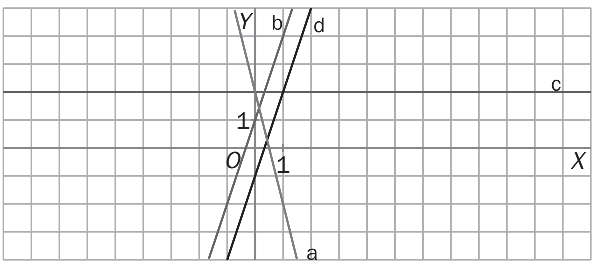
13.54 **Determina el valor de m para que la recta $y = (2m - 1)x + 2$ pase por el punto $A(-3, 2)$.**

Sustituimos las coordenadas de $A(-3, 2)$ en la ecuación de la recta.

$2 = (2m - 1) \cdot (-3) + 2 \rightarrow m = \frac{1}{2}$

13.55 **Relaciona cada gráfica con su ecuación.**

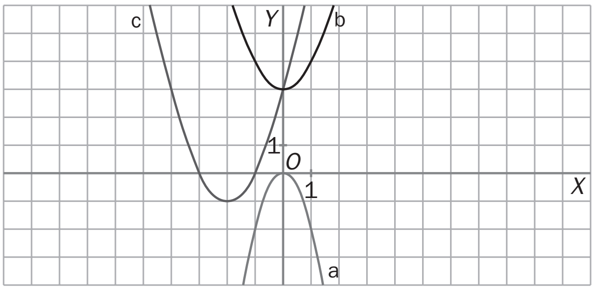
a) $y = -4x + 2$ **b) $y = 3x + 1$** **c) $y = 2$** **d) $y = 3x - 1$**



Funciones cuadráticas

13.56 Relaciona cada parábola con su ecuación.

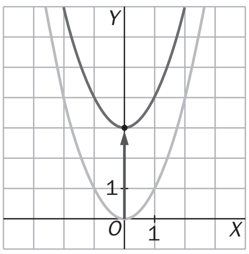
a) $y = -2x^2$ **b)** $y = x^2 + 3$ **c)** $y = (x + 2)^2 - 1$



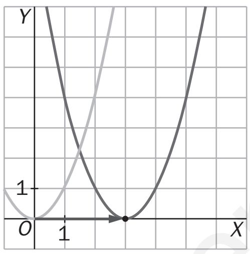
13.57 Representa, mediante una traslación de la parábola $y = x^2$, la gráfica de cada función.

a) $y = x^2 + 3$ **b)** $y = (x - 3)^2$ **c)** $y = x^2 - 2$ **d)** $y = (x + 1)^2 - 5$

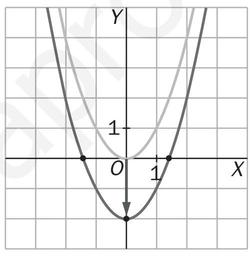
a)



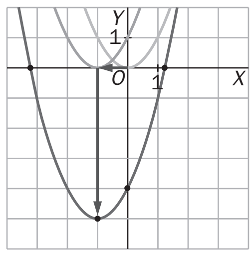
b)



c)



d)



13.58 Una parábola pasa por los puntos (−1, 3) y (−5, 3). Escribe la ecuación de su eje.

La ecuación del eje se puede hallar mediante estos dos puntos, pues son simétricos (tienen la misma imagen 3). Por tanto, el eje pasará por el punto intermedio entre $x = -5$ y $x = -1$.

$$\frac{-5 + (-1)}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \rightarrow \text{Eje } x = -3$$

13.59 Representa las siguientes funciones cuadráticas y estudia la gráfica obtenida.

a) $y = -2x^2 + 12x - 10$ **b)** $y = x^2 - 2x + 4$ **c)** $y = 2x^2 - 8x + 6$ **d)** $y = 3x^2 + 1$

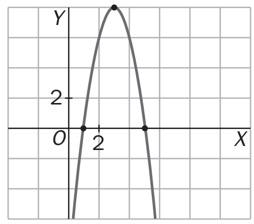
a) Abierta hacia abajo, $a < 0$

Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = -10 \rightarrow (0, -10)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 3 \rightarrow y_v = 8 \rightarrow V(3, 8)$

Puntos de corte con el eje OX: $y = 0 \rightarrow -2x^2 + 12x - 10 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{-4} = \frac{-12 \pm 8}{-4} = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases} \rightarrow (1, 0), (5, 0)$$



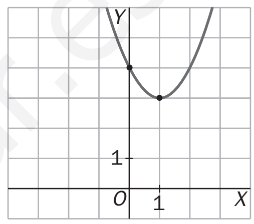
b) Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 1 \rightarrow y_v = 3 \rightarrow V(1, 3)$

Puntos de corte con el eje OX: $y = 0 \rightarrow 2x^2 - 2x + 4 = 0$

$(x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$



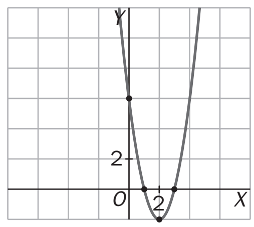
c) Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow (0, 6)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 2 \rightarrow y_v = -2 \rightarrow V(2, -2)$

Puntos de corte con el eje OX: $y = 0 \rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \rightarrow (3, 0), (1, 0)$$



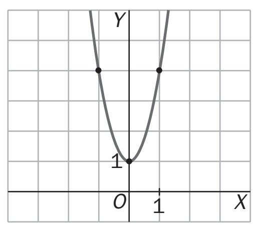
d) Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 0 \rightarrow y_v = 1 \rightarrow V(0, 1)$

Puntos de corte con el eje OX: $y = 0 \rightarrow 3x^2 + 1 = 0$

No es posible. La parábola no corta el eje OX.



AMPLIACIÓN

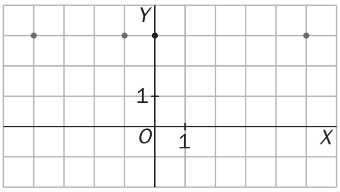
13.60 Observa las dos tablas.

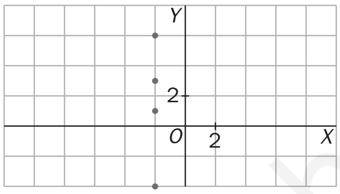
x	−1	−4	5	0
y	3	3	3	3

x	−2	−2	−2	−2
y	1	6	3	−4

a) Dibuja las gráficas que les corresponden.
b) Halla sus ecuaciones.
c) ¿Son las dos funciones lineales? Justifica tu respuesta.

a)





b) $y = 3$, $x = -2$

c) No, la segunda no es siquiera función porque $f(x)$ no tiene una única solución para $x = -2$.

13.61 Expresa el área de un hexágono regular en función de su lado.

¿Qué tipo de función es?

El hexágono regular está formado por seis triángulos equiláteros. En cada uno de ellos, la altura se expresa así en función del lado L: $h = \frac{\sqrt{3}L}{2}$

El área del hexágono es seis veces la del triángulo: $A = 6\frac{b \cdot h}{2} = 6\frac{L \cdot \frac{\sqrt{3}L}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$

Es una función cuadrática.

13.62 Averigua la ecuación de la función cuadrática que cumple las siguientes condiciones:

– El eje es $x = -2$.

– El recorrido es el intervalo $[-4, \infty)$.

– La gráfica pasa por el punto (0, 8).

Eje $x = -2 \rightarrow \frac{-b}{2a} = -2 \rightarrow b = 4a$

Recorrido $[-4, \infty) \rightarrow f(-2) = -4 \rightarrow -4 = a(-2)^2 + b(-2) + c \rightarrow 4a + -2b + c = -4 \rightarrow -4a + c = -4$

Pasa por $(0, 8) \rightarrow 8 = a0^2 + b0 + c \rightarrow c = 8$

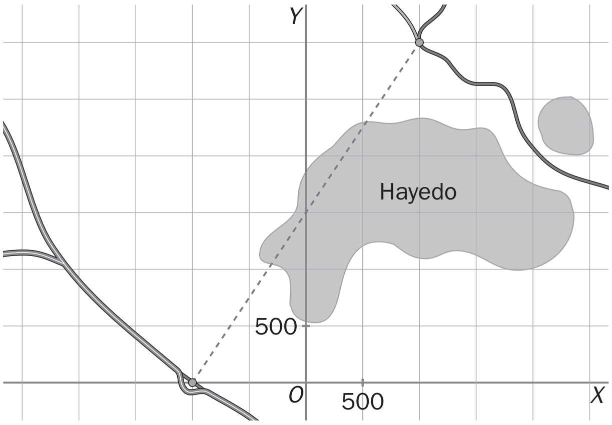
Como $4a + c = -4$, y $c = 8 \rightarrow a = 3$

Como $b = 4a \rightarrow b = 12$

La ecuación es $y = 3x^2 + 12x + 8$

13.63 **El proyecto de un tramo de carretera para unir dos localidades tiene un informe de impacto ambiental negativo, por atravesar un hayedo centenario. La decisión que toman los ingenieros es la de realizar un tramo paralelo al proyectado, pero 500 metros más arriba; así se evitaría la tala de árboles.**

¿Cuál es la expresión algebraica del nuevo tramo?



Actualmente pasa por (1 000, 3 000) y (−1 000, 0). Hallamos la expresión del tramo actual.

$$\begin{cases} 3\,000 = 1\,000\,m + n \\ 0 = -1\,000\,m + n \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} m = \dfrac{3}{2} \\ n = 1\,500 \end{array}$$

La expresión del tramo actual es $y = \dfrac{3}{2}x + 1\,500$.

El nuevo tramo está 500 metros más arriba y pasa por (0, 2 000).

De donde su expresión será: $y = \dfrac{3}{2}x + 2\,000$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

13.64 La cola del supermercado

Los gerentes de un conocido supermercado han realizado un estudio sobre el tiempo que tenían que esperar los clientes en la cola de caja.

Llegaron a las siguientes conclusiones:

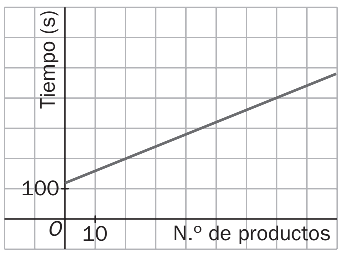
- **El tiempo en marcar todos los productos de un cliente era proporcional al número de productos que llevaba en el carro.**
- **El tiempo que tardaba la cajera en marcar un producto era de 4 segundos.**
- **Entre cada dos clientes se precisaba de 2 minutos para imprimir y entregar el tique, cobrar el dinero y devolver el cambio.**

a) Calcula el tiempo que tiene que esperar un cliente si delante tiene tres personas con 20, 15 y 25 productos, respectivamente.

b) Escribe una expresión matemática que sirva para calcular el tiempo que tiene que esperar un cliente si delante tiene una única persona con x productos en su carro. Dibuja la gráfica de la función correspondiente.

a) $(20 + 15 + 25) \cdot 4 + 3 \cdot 120 = 600 \text{ s} = 10 \text{ min}$

b) $f(x) = 4x + 120$



13.65 Variación de la temperatura

La temperatura, en grados centígrados, durante el 21 de mayo en París se puede expresar mediante la función: $f(x) = \dfrac{-9x^2 + 200x + 1\,000}{100}$

Donde x **es la hora comprendida en el intervalo [0, 24].**

a) Calcula la temperatura que había al comenzar y al terminar el día.
b) Calcula la hora en la que hubo mayor temperatura y el valor de esta.
c) Indica la hora en que hubo menor temperatura y el valor de esta.
d) ¿Cómo varió la temperatura entre las 12.00 y las 18.00?

a) Al comenzar el día: $f(0) = \dfrac{1\,000}{100} = 10\ °\text{C}$

Al acabar el día: $f(24) = \dfrac{9 \cdot 24^2 + 100 \cdot 24 + 1\,000}{100} = 6\ °\text{C}$

b) La máxima temperatura se alcanzó en el vértice de la parábola:

$x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{200}{18} = 11\text{h} \qquad f(11) = \dfrac{9 \cdot 11^2 + 200 \cdot 11 + 1\,000}{100} = 21\ °\text{C}$

c) La mínima temperatura se alcanzó al acabar el día con un valor de 6 8C.

d) La variación fue:

$f(18) - f(12) = \dfrac{9 \cdot 18^2 + 200 \cdot 18 + 1\ 000}{100} - \dfrac{9 \cdot 12^2 + 200 \cdot 12 + 1\ 000}{100} = 75{,}16 - 46{,}96 = 28{,}2°$

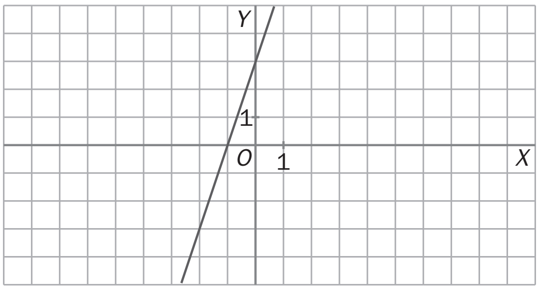
AUTOEVALUACIÓN

13.A1 Indica cuáles de las siguientes funciones son lineales y cuáles son cuadráticas.

a) $y = \frac{3x - 1}{2}$ **b)** $y = \frac{x^2}{3} - x$ **c)** $x^2 = y - 1$ **d)** $y = -3x - 1 + x$

Las funciones a y d son lineales, y las b y c, cuadráticas.

13.A2 ¿Cuál es la ecuación de esta gráfica de función?



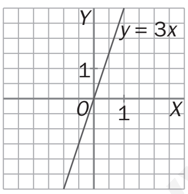
Pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 3)$, con cuyas coordenadas hallamos m y n:

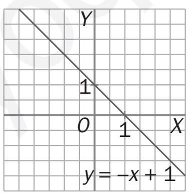
$$\begin{cases} 0 = -m + n \\ 3 = n \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} m = 3 \\ n = 3 \end{matrix} \rightarrow y = 3x + 3$$

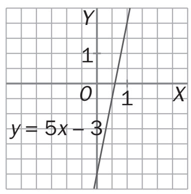
13.A3 Representa las siguientes funciones lineales.

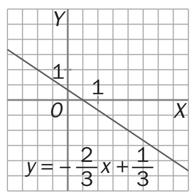
a) $y = 3x$ **c)** $y = 5x - 3$

b) $y = -x + 1$ **d)** $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

a)


b)


c)


d)


13.A4 Halla la ecuación de la función en cada caso.

a) Pasa por los puntos $(-3, 0)$ y $(0, -1)$.

b) Es paralela a $y = \frac{-3x + 1}{4}$, y corta al eje de ordenadas en el -4.

a) Con las coordenadas de los puntos $(-3, 0)$ y $(0, -1)$ hallamos m y n para $y = mx + n$:

$$\begin{cases} 0 = -3m + n \\ -1 = n \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} m = -\frac{1}{3} \\ n = -1 \end{matrix} \rightarrow y = -\frac{1}{3}x - 1$$

b) Si es paralela a $y = \frac{-3x + 1}{4}$, entonces tiene pendiente: $m = -\frac{3}{4}$

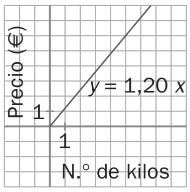
Con este dato, solo queda hallar n, y sabiendo que la recta pasa por el punto $(0, -4)$: $n = -4$

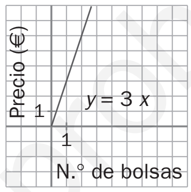
$y = -\frac{3}{4}x - 4$

13.A5 Una frutería coloca en el escaparate una oferta de naranjas por kilos y otra por bolsas.

a) Representa la gráfica de la función que relaciona el número de kilos de naranjas comprados y el precio de la compra.

b) Dibuja la gráfica de la función que relaciona el número de bolsas de naranjas compradas y el precio de la compra.

a) 

b) 

13.A6 Halla el vértice y la ecuación del eje de cada una de estas parábolas.

a) $y = 2x^2 - 6x - 1$

b) $y = -3x^2 + 2x + 9$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$

d) $y = 2x^2 + 5$

a) $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; $y_v = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 1 = -\frac{11}{2} \rightarrow V\left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$. Eje $x = \frac{3}{2}$

b) $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$; $y_v = -3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 9 = \frac{28}{3} \rightarrow V\left(\frac{1}{3}, \frac{28}{3}\right)$. Eje $x = \frac{1}{3}$

c) $x_v = \frac{b}{2a} = \frac{3}{1} = 3$; $y_v = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = -\frac{7}{2} \rightarrow V\left(3, -\frac{7}{2}\right)$. Eje $x = 3$

d) $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$; $y_v = 2 \cdot 0^2 + 5 = 5 \rightarrow V(0, 5)$. Eje $x = 0$

13.A7 Determina la ecuación de la parábola que resulta de trasladar el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (2, 1).

$y = ax^2 + bx + c$

Sabemos que $a = 1$ porque la parábola buscada es una traslación de $y = x^2$.

$x_v = -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4$

$y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + c = 1 \rightarrow c = 5$

$y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 5$

13.A8 **Representa la parábola $y = 2x^2 + 12x + 16$, y estudia la gráfica obtenida.**

Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje *OY*:

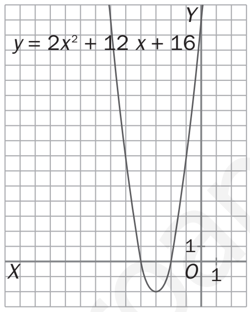
$$x = 0 \rightarrow y = 16 \rightarrow (0, 16)$$

Hallamos el vértice de la parábola:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -3 \rightarrow y_v = -2 \rightarrow V(-3, -2)$$

Puntos de corte con el eje *OX*:

$$y = 0 \rightarrow 2x^2 + 12x + 16 = 0 \rightarrow x = -2 \text{ o } x = -4 \rightarrow (-2, 0), (-4, 0)$$



EJERCICIOS PROPUESTOS

14.1 Para hacer un estudio sobre intención de voto en una población formada por 5 millones de votantes, de los cuales 2 900 000 son mujeres, se elige una muestra formada por 3 000 personas.

¿Cuántas mujeres y cuántos hombres deberá haber en la muestra elegida?

De 5 000 000 de votantes, 2 900 000 son mujeres.

$$\frac{2\,900\,000}{5\,000\,000} = 0{,}58$$

El número de mujeres representa el 58 % de los votantes.

Tenemos que hallar el 58 % de 3 000 para saber el número de mujeres de la muestra.

$$\frac{3\,000 \cdot 58}{100} = 1\,740 \text{ mujeres}$$

$$3\,000 - 1\,740 = 1\,260 \text{ hombres}$$

En la muestra deberá haber 1 740 mujeres y 1 260 hombres.

14.2 Entre los 1 250 alumnos de un colegio, de los que 610 son chicos, se elige una muestra formada por 100 personas.

a) ¿Cómo se deberá elegir la muestra para que sea representativa de la población?

b) ¿Cuántos chicos y chicas deberán formar la muestra?

a) La muestra se deberá elegir con los mismos porcentajes que los de la población:

$$100 \cdot \frac{610}{1\,250} = 48{,}8\,\% \text{ de chicos}$$

$$100 - 48{,}8 = 51{,}2\,\% \text{ de chicas}$$

b) Calculamos el número de chicos y chicas de la muestra formada por 100 personas utilizando los porcentajes de unos y otras en la población.

Serían 48,8 chicos y 51,2 chicas, pero como las personas no se pueden dividir, redondeamos a enteros: 49 chicos y 51 chicas.

14.3 Clasifica los siguientes caracteres estadísticos.

a) Número de hermanos.

b) Profesión de la madre.

c) Idioma que estudia.

a) Cuantitativo discreto

b) Cualitativo

c) Cualitativo

14.4 Pon dos ejemplos en cada caso.

a) Carácter estadístico cuantitativo que dé lugar a una variable discreta.

b) Carácter estadístico cuantitativo que dé lugar a una variable continua.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) Número de hojas escritas en el cuaderno de matemáticas, número de anillos del tronco de un árbol.

b) Longitud de las raíces de un árbol, masa de las hojas escritas en el cuaderno de matemáticas.

14.5 El número de consultas al dentista de un grupo de alumnos en el último año ha sido:

1 0 2 1 0 0 0 2 1 1 2 3 6 0 1 2 1 3 1 0
2 1 1 1 0 3 1 2 0 1 1 2 0 0 1 2 1 3 0 1
4 0 1 2 0 0 1 2 0 5

a) Efectúa el recuento. **b) Calcula las frecuencias absolutas y relativas.**

a)

0	1	2	3	4	5	6
15	18	10	4	1	1	1

b) Las frecuencias relativas se obtienen dividiendo el valor de la frecuencia absoluta entre el número total de elementos de la muestra, en este caso, 50.

Número de consultas	Recuento	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
0	///// ///// /////	15	0,30
1	///// ///// ///// ///	18	0,36
2	///// /////	10	0,20
3	////	4	0,08
4	/	1	0,02
5	/	1	0,02
6	/	1	0,02
		50	1

14.6 Se ha realizado una encuesta a 600 chicos y chicas, que asisten a un polideportivo, sobre su deporte preferido, dándoles a escoger entre los que figuran en un formulario.

Se han obtenido los siguientes porcentajes: fútbol, 40 %; atletismo, 18 %; baloncesto, 12 %; natación, 26 % y ciclismo, 4 %. Halla las frecuencias absolutas y relativas de cada deporte.

Para hallar las frecuencias relativas, se dividen los porcentajes entre 100, ya que $h_i = \frac{f_i}{N}$

Para hallar las frecuencias absolutas para una muestra de $N = 600$ personas: $f_i = h_i \cdot N = h_i \cdot 600$

Deporte	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
Fútbol	240	0,40
Atletismo	108	0,18
Baloncesto	72	0,12
Natación	156	0,26
Ciclismo	24	0,04
	600	1

14.7 El número de intervenciones que ha realizado el servicio de bomberos a lo largo de un mes ha sido:

2 1 5 3 4 0 1 1 2 3 4 3 4 5 2 4 3 5 6 1 2 3 4 3 2 4 1 3 4 3

Efectúa el recuento y elabora la tabla de frecuencias completa.

Número de intervenciones	Recuento	f_i	h_i	F_i	H_i
0	/	1	$\frac{1}{30} = 0{,}033$	1	$\frac{1}{30} = 0{,}033$
1	/////	5	$\frac{5}{30} = 0{,}167$	6	$\frac{6}{30} = 0{,}200$
2	/////	5	$\frac{5}{30} = 0{,}167$	11	$\frac{11}{30} = 0{,}367$
3	///// ///	8	$\frac{8}{30} = 0{,}267$	19	$\frac{19}{30} = 0{,}633$
4	///// //	7	$\frac{7}{30} = 0{,}233$	26	$\frac{26}{30} = 0{,}867$
5	///	3	$\frac{3}{30} = 0{,}100$	29	$\frac{29}{30} = 0{,}967$
6	/	1	$\frac{1}{30} = 0{,}033$	30	1
		30	1		

14.8 El número de mensajes recibidos por Gonzalo en su móvil durante una quincena ha sido:

5 3 4 2 3 6 9 4 3 6 7 5 7 3 4

Realiza el recuento y forma la tabla de frecuencias completa.

Número de mensajes	Recuento	f_i	h_i	F_i	H_i
2	/	1	$\frac{1}{15} = 0{,}067$	1	$\frac{1}{15} = 0{,}067$
3	////	4	$\frac{4}{15} = 0{,}267$	5	$\frac{5}{15} = 0{,}333$
4	///	3	$\frac{3}{15} = 0{,}200$	8	$\frac{8}{15} = 0{,}533$
5	//	2	$\frac{2}{15} = 0{,}133$	10	$\frac{10}{15} = 0{,}667$
6	//	2	$\frac{2}{15} = 0{,}133$	12	$\frac{12}{15} = 0{,}800$
7	//	2	$\frac{2}{15} = 0{,}133$	14	$\frac{14}{15} = 0{,}933$
8		0	0	14	$\frac{14}{15} = 0{,}933$
9	/	1	$\frac{1}{15} = 0{,}067$	15	1
		15	1		

14.9 Se ha pasado un test de 90 preguntas a 100 alumnos de Primaria y se han obtenido estos resultados.

Respuestas correctas	Número de alumnos
[0, 30)	25
[30, 60)	45
[60, 90)	30

Elabora la tabla estadística

Respuestas correctas	Marca de clase x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[0, 30)	15	25	$\frac{25}{100} = 0{,}25$	25	$\frac{25}{100} = 0{,}25$
[30, 60)	45	45	$\frac{45}{100} = 0{,}45$	70	$\frac{70}{100} = 0{,}70$
[60, 90)	75	30	$\frac{30}{100} = 0{,}30$	100	1
		100	1		

14.10 Las llamadas telefónicas de una empresa, un determinado día, han tenido la siguiente duración, en segundos:

120	131	142	157	15	27	94	57	62	12	49	58
149	210	120	131	97	84	61	32	15	7	21	32
238	210	48	56	138	24	64	31	23	58	69	234
13	66	54	214	156	179	231	204	147	32	15	7
64	124	56	73	114	169	201	134	62	93	42	58

a) Agrupa los datos en 8 clases. **b) Forma la tabla de frecuencias completa.**

Llamadas telefónicas	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[0, 30)	15	11	$\frac{11}{60} = 0{,}183$	11	$\frac{11}{60} = 0{,}183$
[30, 60)	45	14	$\frac{14}{60} = 0{,}233$	25	$\frac{25}{60} = 0{,}417$
[60, 90)	75	8	$\frac{8}{60} = 0{,}133$	33	$\frac{33}{60} = 0{,}550$
[90, 120)	105	5	$\frac{5}{60} = 0{,}083$	38	$\frac{38}{60} = 0{,}633$
[120, 150)	135	10	$\frac{10}{60} = 0{,}167$	48	$\frac{48}{60} = 0{,}800$
[150, 180)	165	4	$\frac{4}{60} = 0{,}067$	52	$\frac{52}{60} = 0{,}867$
[180, 210)	195	2	$\frac{1}{60} = 0{,}017$	54	$\frac{54}{60} = 0{,}900$
[210, 240)	225	6	$\frac{6}{60} = 0{,}100$	60	1
		60	1		

14.11 La distribución del gasto en alimentación de una familia viene dada por los siguientes porcentajes: carne, 26 %; pescado, 14 %; pastas y cereales, 14 %; patatas y hortalizas, 8 %; frutas, 9 %, y otros 29 %. Construye un diagrama de sectores.

Para hacer el diagrama calculamos cuántos grados del círculo ocupa cada uno de los alimentos:

Carne: $\frac{26}{100} \cdot 360 = 93{,}6°$

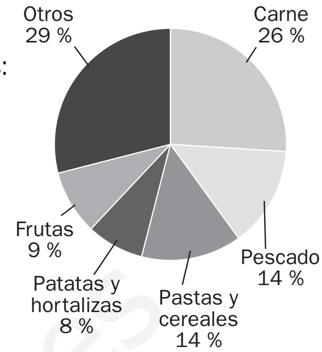
Pescado: $\frac{14}{100} \cdot 360 = 50{,}4°$

Pastas y cereales: $\frac{14}{100} \cdot 360 = 50{,}4°$

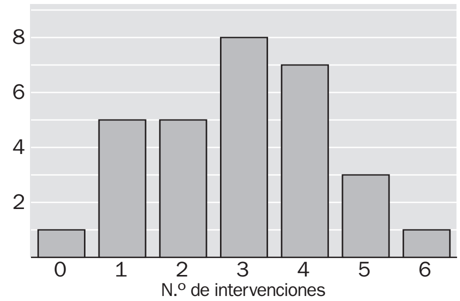
Patatas y hortalizas: $\frac{8}{100} \cdot 360 = 28{,}8°$

Frutas: $\frac{9}{100} \cdot 360 = 32{,}4°$

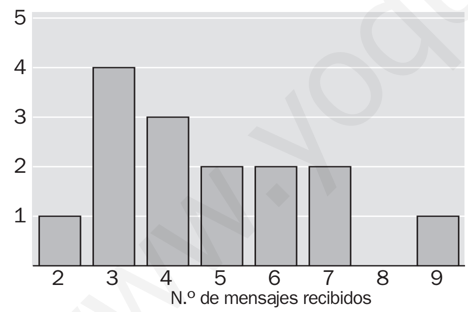
Otros: $\frac{29}{100} \cdot 360 = 104{,}4°$



14.12 Representa gráficamente la distribución del ejercicio propuesto número 7 del epígrafe 4.



14.13 Representa gráficamente la distribución del ejercicio propuesto número 8 correspondiente al epígrafe 4.



PROBLEMAS PROPUESTOS

14.14 **Las edades de las personas que pertenecen a una asociación son:**

34	**21**	**45**	**64**	**23**	**32**	**50**	**47**	**49**	**23**	**32**	**50**
18	**51**	**23**	**42**	**51**	**34**	**23**	**21**	**32**	**35**	**37**	**32**
40	**21**	**32**	**33**	**19**	**40**	**52**	**30**	**35**	**43**	**27**	**34**

Representa esta distribución mediante un diagrama de tallos y hojas.

Tallo	Hojas
1	8 9
2	1 3 3 3 3 1 1 7
3	4 2 2 4 2 5 7 2 2 3 0 5 4
4	5 7 9 2 0 0 3
5	0 0 1 1 2
6	4

→

Tallo	Hojas
1	8 9
2	1 1 1 3 3 3 3 7
3	0 2 2 2 2 2 3 4 4 4 5 5 7
4	0 0 2 3 5 7 9
5	0 0 1 1 2
6	4

14.15 **El número de horas de duración de unas pilas es:**

18	**23**	**31**	**14**	**24**	**32**	**45**	**51**	**32**	**34**	**37**	**28**
23	**50**	**27**	**34**	**39**	**42**	**46**	**52**	**33**	**37**	**42**	**27**
44	**37**	**38**	**42**	**31**	**29**	**33**	**27**	**38**	**40**		

Representa esta distribución mediante un diagrama de tallos y hojas.

Tallo	Hojas
1	8 4
2	3 4 8 3 7 7 9 7
3	1 2 2 4 7 4 9 3 7 7 8 1 3 8
4	5 2 6 2 4 2 0
5	1 0 2

→

Tallo	Hojas
1	4 8
2	3 3 4 7 7 7 8 9
3	1 1 2 2 3 3 4 4 7 7 7 8 8 9
4	0 2 2 2 4 5 6
5	0 1 2

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

Caracteres y variables estadísticos

14.16 Según un estudio realizado en 800 hogares de una ciudad, elegidos al azar, en el 28 % de las viviendas hay, al menos, un perro o un gato. Identifica en este estudio:

a) La población y la muestra.

b) El carácter estadístico y si es cuantitativo o cualitativo.

a) Población: todos los hogares de la ciudad. Muestra: 800 hogares

b) Carácter: "tener un perro o un gato". Es cualitativo.

14.17 Clasifica, en cualitativos y cuantitativos, estos caracteres estadísticos de un grupo de alumnos.

a) Grupo sanguíneo.

b) Profesión del padre.

c) Llamadas telefónicas semanales.

d) Paga semanal que reciben.

e) Color de los ojos.

f) Comunidad autónoma en la que han nacido.

a) Cualitativo

b) Cualitativo

c) Cuantitativo

d) Cuantitativo

e) Cualitativo

f) Cualitativo

14.18 Clasifica las siguientes variables estadísticas en discretas y continuas.

a) Edad de la madre de los alumnos de una clase de 3.º de ESO.

b) Número de calzado de los alumnos de una clase de 3.º de ESO.

c) Cotización diaria de las acciones de una empresa en el mercado de valores.

d) Número de viviendas en los edificios de una ciudad.

e) Salto de longitud de los atletas en unos juegos olímpicos.

a) Discreta

b) Discreta

c) Continua

d) Discreta

e) Continua

14.19 En el peaje de una autopista, se está realizando un estudio sobre el color de los coches que pasan, su número de ocupantes y la velocidad máxima a la que circulan.

Indica, en cada caso, si el carácter estudiado es cuantitativo o cualitativo y, si procede, si las variables son continuas o discretas.

El color del coche es un carácter cualitativo. El número de pasajeros es un carácter cuantitativo, con variable discreta. La velocidad es un carácter cuantitativo con variable continua.

Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas

14.20 Se realizó una encuesta a un grupo de 25 jóvenes sobre el número de horas que dedican diariamente a hacer deporte, y se obtuvieron los siguientes resultados:

3 4 2 0 1 2 2 1 0 1 1 2 0 4 3 1 4 3 2 0 0 2 3 2 2

Efectúa el recuento y construye la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

x_i	f_i	h_i
0	5	0,20
1	5	0,20
2	8	0,32
3	4	0,16
4	3	0,12
	$N = 25$	1

14.21 Se ha pedido a un grupo de 20 alumnos que valoren, de 0 a 5, las actividades extraescolares que se organizan en su centro escolar y se han obtenido los siguientes resultados: 3, 2, 3, 5, 1, 4, 2, 3, 0, 1, 4, 5, 3, 1, 0, 4, 2, 3, 5, 5.

a) Construye la tabla de frecuencias absolutas y relativas.
b) ¿Qué porcentaje de alumnos ha puesto un 2?
c) ¿Qué porcentaje de alumnos las ha valorado con menos de un 4?
d) ¿Qué porcentaje de alumnos las ha valorado con más de un 3?

a)

x_i	f_i	h_i
0	2	0,10
1	3	0,15
2	3	0,15
3	5	0,25
4	3	0,15
5	4	0,20
	$N = 20$	1

b) Multiplicando por 100 la frecuencia relativa correspondiente al 2, se obtiene el porcentaje: 15 %

c) Se suman todas las frecuencias absolutas correspondientes a valores menores que 4 y se multiplica el resultado por 100 para obtener el porcentaje: 65 %

d) Se suman todas las frecuencias absolutas correspondientes a valores mayores que 3 y se multiplica el resultado por 100 para obtener el porcentaje: 35 %

14.22 Una encuesta sobre el tipo de transporte que utilizan los habitantes de un barrio, para ir a su centro de trabajo o de estudio, ha aportado los resultados que se muestran en la siguiente tabla.

x_i	f_i
Caminando	**10**
Metro	**14**
Autobús	**20**
Coche particular	**30**
Taxi	**4**

a) ¿Cuántas personas componen la muestra?
b) ¿Qué porcentaje utiliza el autobús en sus desplazamientos?
c) ¿Qué porcentaje utiliza transporte público?

a) $N = 78$ b) 25,64 % c) 48,71 %

14.23 **La profesora de Lengua ha contabilizado el número de faltas de ortografía que han cometido los alumnos de un grupo de 3.º de ESO, en un trabajo que le han entregado, y estos son los resultados: 3, 4, 5, 1, 0, 2, 4, 3, 6, 3, 4, 5, 2, 6, 4, 3, 5, 4, 5, 2, 1, 0, 1, 1, 5, 6, 4.**

a) Construye la tabla de frecuencias absolutas y relativas.
b) ¿Cuántos alumnos forman el grupo?
c) ¿Qué porcentaje de alumnos cometieron 4 faltas?
d) ¿Qué porcentaje de alumnos cometieron menos de 5 faltas?
e) ¿Qué porcentaje de alumnos cometieron 6 o menos faltas?

a)

x_i	f_i	h_i
0	2	0,07
1	4	0,15
2	3	0,11
3	4	0,15
4	6	0,22
5	5	0,19
6	3	0,11
	$N = 27$	1

b) $N = 27$
c) 22 %
d) 70 %
e) 100 %

14.24 **Construye una tabla de frecuencias absolutas y relativas de las vocales que aparecen en el siguiente párrafo:**

En un lugar de la Mancha, de cuyo nombre no quiero acordarme, no ha mucho tiempo que vivía un hidalgo de los de lanza en astillero, adarga antigua, rocín flaco y galgo corredor.

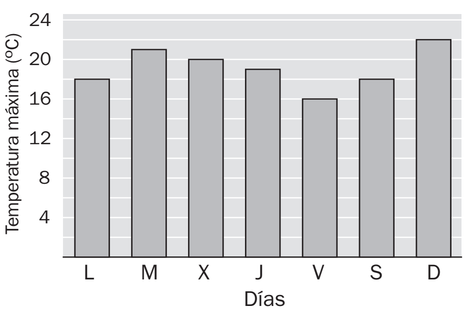
x_i	f_i	h_i
A	19	0,30
E	13	0,20
I	8	0,13
O	16	0,25
U	8	0,13
	$N = 64$	$\cong 1$

Tablas y gráficos estadísticos

14.25 **La tabla recoge las temperaturas máximas alcanzadas en una ciudad durante la última semana.**

Día	**L**	**M**	**X**	**J**	**V**	**S**	**D**
T (°C)	**18**	**21**	**20**	**19**	**16**	**18**	**22**

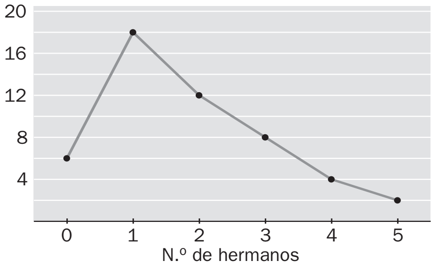
Elabora con estos datos un diagrama de barras.



14.26 **El número de hermanos que tienen los 50 alumnos de 3.º de ESO de un centro escolar está dado en la siguiente tabla.**

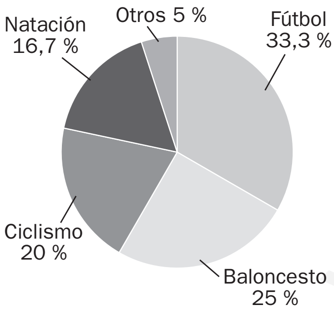
N.º hermanos	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	6	18	12	8	4	2

Representa estos datos mediante un polígono de frecuencias.



14.27 **La tabla resume las aficiones deportivas de un grupo de 60 personas. Dibuja un diagrama de sectores de la distribución.**

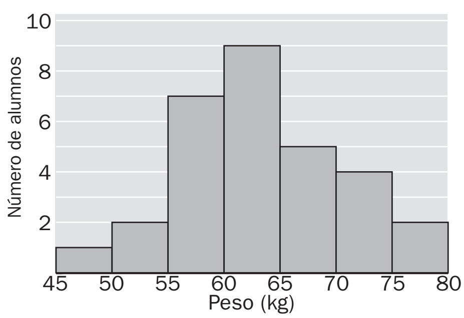
Deporte	Frecuencia
Fútbol	20
Baloncesto	15
Ciclismo	12
Natación	10
Otros	3



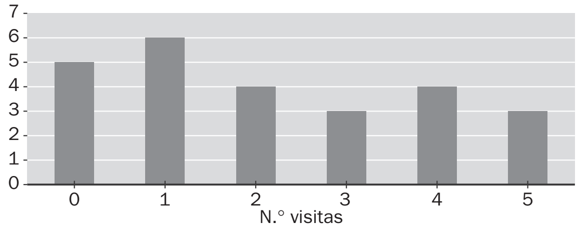
14.28 **El peso de 30 estudiantes de 3.º de ESO se distribuye según la tabla.**

Peso	N.º alumnos
[45, 50)	1
[50, 55)	2
[55, 60)	7
[60, 65)	9
[65, 70)	5
[70, 75)	4
[75, 80]	2

Representa los datos de la tabla mediante un histograma.



14.29 **El diagrama de barras refleja las frecuencias absolutas del número de veces que un grupo de 25 personas visitaron un museo el pasado año.**



a) ¿Cuántas personas no visitaron un museo en el último año?

b) ¿Cuántas lo visitaron, al menos, 2 veces?

c) ¿Cuántas lo visitaron más de 3 veces?

a) 5

b) 14

c) 7

CUESTIONES PARA ACLARARSE

14.30 ¿Cuánto vale la suma de las frecuencias relativas de los valores de una variable en una distribución estadística?

La suma de las frecuencias relativas es 1.

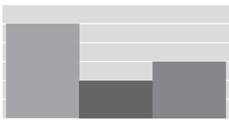
14.31 ¿Tiene sentido hablar de marcas de clase cuando el carácter de un estudio estadístico es cualitativo?

No, porque el carácter no es numérico.

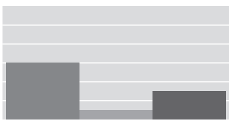
14.32 El diagrama de sectores de una distribución estadística es el siguiente.

¿Cuál de estos histogramas representa la misma distribución?

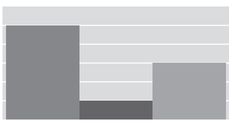
a)



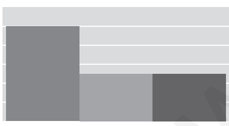
b)



c)

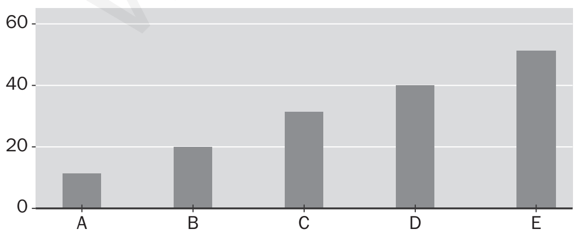


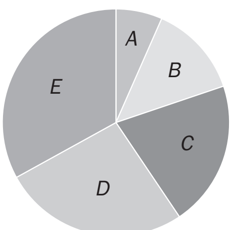
d)



El a

14.33 Transforma este diagrama de barras en otro de sectores.





14.34 **Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.**

a) El color del pelo es un carácter cualitativo.
b) La suma de las frecuencias relativas acumuladas es 1.
c) Una muestra tiene que estar formada por, al menos, la mitad de la población.
d) Para una variable discreta, la frecuencia absoluta acumulada del último valor es igual a la suma de las frecuencias absolutas.

a) Verdadero
b) Falso
c) Falso
d) Verdadero

14.35 **En un estudio estadístico, la frecuencia relativa de un dato es 0,25. Si su frecuencia absoluta es 40, ¿cuál es el número total de datos del estudio?**

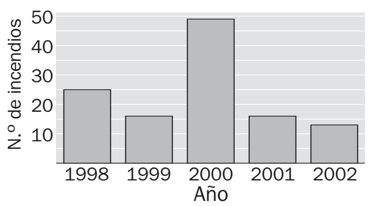
$$h_i = \frac{f_i}{N} \Rightarrow 0{,}25 = \frac{40}{N} \Rightarrow N = 160$$

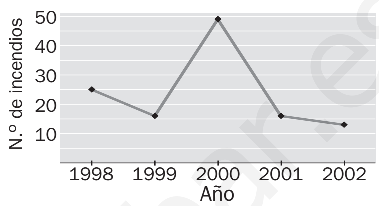
PROBLEMAS PARA APLICAR

14.36 **El número de grandes incendios forestales, donde la superficie quemada superó las 500 hectáreas, ocurridos en España entre 1998 y 2002, se refleja en la siguiente tabla (datos del Ministerio de Medio Ambiente).**

Año	1998	1999	2000	2001	2002
N.º incendios	25	16	49	16	13

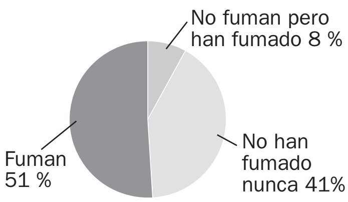
A partir de estos datos, construye un diagrama de barras y un polígono de frecuencias.





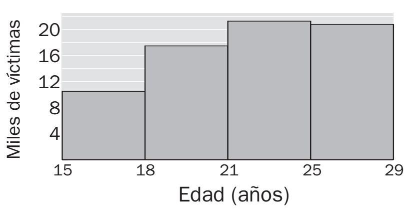
14.37 **Según el estudio "Calidad de vida de los jóvenes españoles", realizado por el Instituto Nacional de la Juventud, el porcentaje de jóvenes de entre 15 y 29 años que no fuman ni han fumado nunca regularmente es del 41 %, los que actualmente fuman son el 51 %, y el 8 % no fuman pero han fumado con anterioridad.**

Dibuja un diagrama de sectores que refleje los resultados de este estudio.



14.38 **La población, de entre 15 y 29 años, víctima de accidentes de tráfico en España, heridos o muertos, en el año 2000 se refleja en la siguiente tabla (Fuente: INE). Representa el número total de víctimas, por edades, mediante un histograma.**

Edad	Víctimas accidentes tráfico
15 a 17 años	10 423
18 a 20 años	17 390
21 a 24 años	21 152
25 a 29 años	20 767

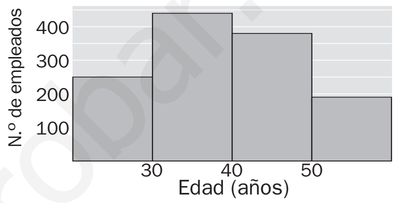


14.39 **El 20 % de los empleados de una empresa tiene menos de 30 años, el 35 % tiene entre 30 y 39 años, el 30 % tiene entre 40 y 49 años y el resto tiene 50 años o más. Sabiendo que la empresa tiene 1 260 empleados, elabora la tabla completa de frecuencias absolutas y relativas, y de frecuencias acumuladas absolutas y relativas.**

Edades	f_i	h_i	F_i	H_i
< 30 [30, 39] [40, 49] > 49				
	N = 1 260	1		

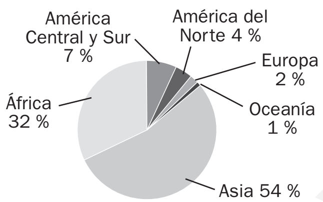
Construye el histograma de las frecuencias absolutas correspondiente a la distribución anterior.

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
< 30	252	0,20	252	0,20
[30, 39]	441	0,35	693	0,55
[40, 49]	378	0,30	1 071	0,85
> 49	189	0,15	1 260	1
	N = 1 260	1		



14.40 **La Organización Internacional del Trabajo estima que el número de niños de 5 a 14 años que trabaja en el mundo asciende a unos 250 millones, la mayoría en condiciones peligrosas y de explotación. De ellos, alrededor del 54 % se encuentran en Asia, el 32 % en África, el 7 %, en América Central y del Sur, el 4 % en América del Norte, el 2 % en Europa y el 1 % en Oceanía.**

Representa estos datos utilizando un gráfico de sectores.



14.41 **Según datos del Ministerio de Educación (año 2000), los porcentajes de alumnado extranjero matriculado en escuelas españolas, clasificados por la zona de procedencia, son los siguientes.**

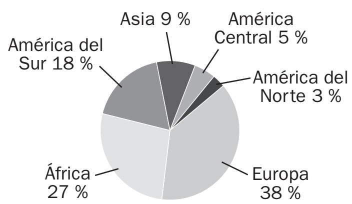
Europa: 38 %	**Asia: 9 %**
África: 27 %	**América Central: 5 %**
América del Sur: 18 %	**América del Norte: 3 %**

a) Haz un diagrama de sectores de esta distribución.

b) ¿En qué proporción están los inmigrantes africanos respecto a los asiáticos?

c) ¿Superan los inmigrantes americanos a los africanos?

a)



b) $\frac{27}{9} = 3$ (3 a 1)

c) No, de americanos hay un 26 %, y de africanos, un 27 %.

14.42 En un centro escolar, se preguntó a un grupo de alumnos qué número de horas estudia semanalmente, y se obtuvieron las siguientes respuestas.

4	**12**	**16**	**2**	**15**	**9**	**20**	**14**	**12**	**23**
25	**4**	**7**	**12**	**23**	**26**	**5**	**18**	**6**	**19**
21	**10**	**9**	**20**	**13**	**18**	**5**	**14**	**7**	**16**
13	**7**	**21**	**8**	**20**	**19**	**8**	**12**	**3**	**19**

a) Agrupa los datos en 5 intervalos de igual amplitud (fíjate que el dato menor es 2 y el mayor es 26).

b) Elabora la tabla de frecuencias absolutas, relativas y acumuladas de la distribución.

c) ¿Qué porcentaje de alumnos estudian más de 16 horas semanales?

a) y b)

Intervalo	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[2, 7)	4,5	7	0,18	7	0,18
[7, 12)	9,5	8	0,20	15	0,38
[12, 17)	14,5	11	0,28	26	0,66
[17, 22)	19,5	10	0,25	36	91
[22, 27)	24,5	4	0,10	40	101
		$N = 40$	$\cong 1$		

c) 14 %

14.43 Se ha lanzado 20 veces un dado y estos son los resultados que se han obtenido.

5	**4**	**1**	**1**	**2**	**6**	**4**	**2**	**5**	**4**
1	**2**	**6**	**6**	**2**	**4**	**3**	**2**	**4**	**4**

a) Construye la tabla de frecuencias absolutas y relativas de los resultados.

b) ¿Qué resultado ha sido el más frecuente?

c) ¿En qué porcentaje de tiradas ha salido un 2?

d) ¿En cuántos resultados se ha obtenido una puntuación mayor que 3?

e) Representa la distribución mediante un diagrama de barras.

a)

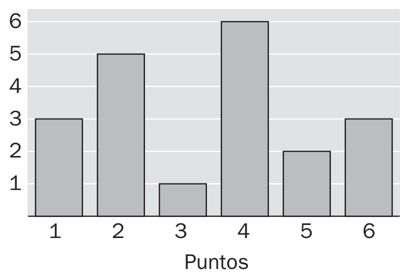
x_i	f_i	h_i
1	3	0,15
2	5	0,25
3	1	0,05
4	6	0,30
5	2	0,10
6	3	0,15
	$N = 20$	1

b) El 4

c) 25 %

d) En 11

e)



R E F U E R Z O

Variables estadísticas y tablas de datos

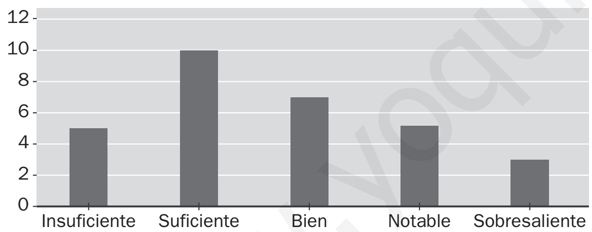
14.44 **Se ha medido el ritmo cardíaco de un grupo de 40 alumnos de 3.º de ESO y se han obtenido las siguientes pulsaciones por minuto.**

56	71	66	79	81	57	72	83	50	54
66	50	73	84	51	88	69	78	82	56
66	54	64	75	71	89	67	83	71	76
87	53	72	61	74	53	68	69	86	52

Agrupa los resultados en ocho intervalos de clase y construye su tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Intervalo	x_i	f_i	h_i
[50, 55)	52,5	8	0,20
[55, 60)	57,5	3	0,08
[60, 65)	62,5	2	0,05
[65, 70)	67,5	7	0,18
[70, 75)	72,5	7	0,18
[75, 80)	77,5	4	0,10
[80, 85)	82,5	5	0,13
[85, 90)	87,5	4	0,10
		$N = 40$	$\cong 1$

14.45 **La gráfica representa los resultados obtenidos, en la primera evaluación de Matemáticas, por un grupo de alumnos de 3.º de ESO.**



Construye una tabla con las frecuencias absolutas y relativas de cada dato.

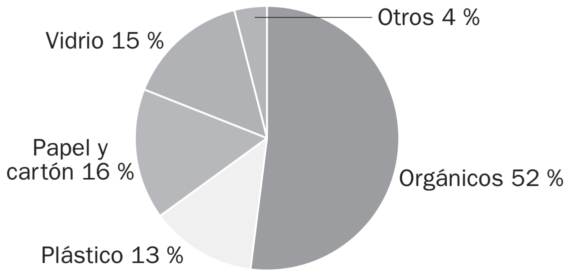
Nota: x_i	f_i	h_i
IS	5	0,17
SF	10	0,33
BI	7	0,23
NT	5	0,17
SB	3	0,10
	$N = 30$	1

Gráficos estadísticos

14.46 **Pregunta a tus compañeros el número de horas semanales que dedican a ver la televisión. A partir de sus respuestas, elabora una tabla de frecuencias absolutas y relativas, así como un diagrama de barras.**

Respuesta abierta.

14.47 **Este diagrama de sectores refleja, en porcentajes, la composición media de los residuos domésticos generados en España diariamente.**



a) ¿Qué tipo de residuos se genera en mayor cantidad?

b) Si en una casa se generan en un día 2 kilogramos de residuos de papel y cartón, ¿cuántos kilogramos se generan, por término medio, de residuos orgánicos?

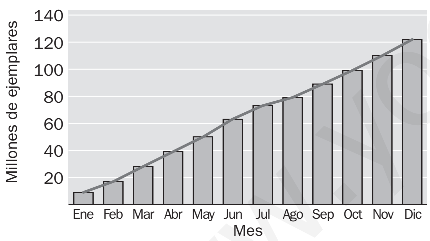
a) Orgánicos

b) $\frac{2}{16} = \frac{x}{52} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 52}{16} = 6{,}5$ kg

14.48 **En la tabla, se resumen las ventas mensuales, durante el pasado año, de un periódico de tirada nacional, en millones de ejemplares.**

E	**F**	**M**	**Ab**	**My**	**Jn**
9,1	**8,4**	**10,2**	**11**	**10,8**	**12,8**
Jl	**Ag**	**S**	**O**	**N**	**D**
9,7	**7,1**	**10,1**	**9,8**	**11,6**	**10,2**

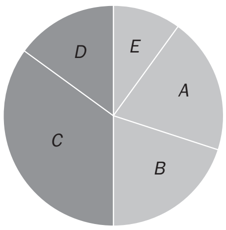
Construye el diagrama de barras y el polígono de frecuencias absolutas acumuladas.



AMPLIACIÓN

14.49 **La siguiente tabla de datos está incompleta. Rellena los datos que faltan y obtén el correspondiente diagrama de sectores.**

x_i	f_i	h_i
A	**8**	0,20
B	8	**0,20**
C	**14**	0,35
D	**6**	0,15
E	4	0,10
	$N = 40$	**1**



14.50 **Las edades de un grupo de socios de un club deportivo son las siguientes.**

29	**18**	**35**	**46**	**32**	**15**	**69**	**26**	**41**	**17**
37	**43**	**56**	**72**	**19**	**24**	**30**	**25**	**30**	**22**
52	**41**	**36**	**29**	**68**	**35**	**45**	**25**	**17**	**23**
32	**56**	**63**	**24**	**73**	**14**	**57**	**39**	**16**	**40**
23	**48**	**17**	**60**	**49**	**33**	**51**	**38**	**45**	**17**

Representa esta distribución mediante un diagrama de tallos y hojas.

Tallo	Hojas
1	4 5 6 7 7 7 7 8 9
2	2 3 3 4 4 5 5 6 9 9
3	0 0 2 2 3 5 5 6 7 8 9
4	0 1 1 3 5 5 6 8 9
5	1 2 6 6 7
6	0 3 8 9
7	2 3

14.51 Construye una tabla de frecuencias absolutas y acumuladas con el número de provincias de cada comunidad autónoma española.

a) ¿Qué comunidad tiene más provincias?

b) ¿Cuántas provincias tiene España en total?

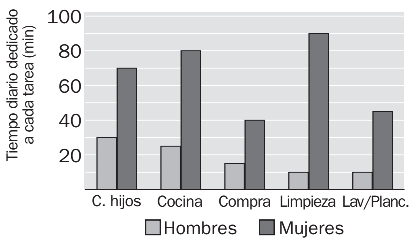
Comunidad	Número de provincias
Andalucía	8
Aragón	3
Asturias	1
Canarias	2
Cantabria	1
Castilla y León	9
Castilla-La Mancha	5
Cataluña	4
Comunidad de Madrid	1
Comunidad Valenciana	3
Extremadura	2
Galicia	4
Islas Baleares	1
Navarra	1
País Vasco	3
La Rioja	1
Región de Murcia	1

a) La comunidad con más provincias es Castilla y León.

b) España tiene 50 provincias y dos ciudades autónomas: Ceuta y Melilla.

14.52 El tiempo medio diario, en minutos, que dedican los hombres y las mujeres a las tareas del hogar se refleja en la siguiente tabla. Representa esos datos en un único diagrama de barras, dibujando diferentes barras para hombres y mujeres.

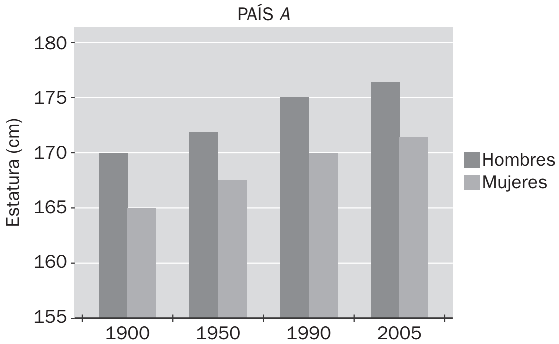
Tarea	Hombres	Mujeres
Cuidado hijos	**30**	**70**
Cocina	**25**	**80**
Compra	**15**	**40**
Limpieza	**10**	**90**
Lavado/plancha	**10**	**45**

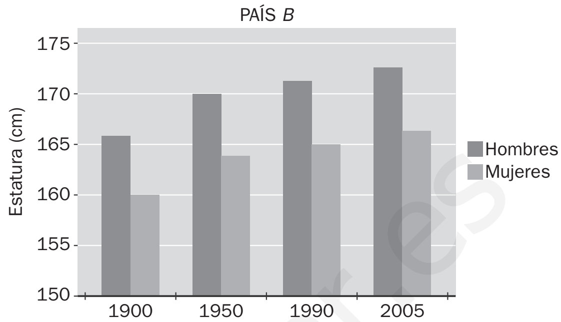


PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

14.53 Variación de altura

Los siguientes diagramas de barras representan la media de altura de los habitantes de dos países durante los años 1900, 1950, 1990 y 2005 diferenciando el sexo.





a) Indica en cuál de los dos países crecieron más relativamente los hombres considerando el período entre 1900 y 2005.

b) Indica en cuál de los dos países crecieron más relativamente las mujeres considerando el período entre 1950 y 1990.

a) La altura de los hombres en el país *A* pasó de ser 170 cm en 1900 a 177 cm en 2005: $\frac{177}{170} = 1{,}041$

Es decir, crecieron en un 4,1 %.

La altura de los hombres en el país *B* pasó de ser 166 cm en 1900 a 173 cm en 2005: $\frac{173}{166} = 1{,}042$

Es decir, crecieron en un 4,2 %.

Por tanto, crecieron más los hombres de *B*.

b) La altura de las mujeres en el país *A* pasó de ser 168 cm en 1950 a 170 cm en 1990: $\frac{170}{168} = 1{,}0119$

Es decir, crecieron en un 1,19 %.

La altura de las mujeres en el país *B* pasó de ser 163 cm en 1950 a 165 cm en 1990: $\frac{165}{163} = 1{,}0122$

Es decir, crecieron en un 1,22 %.

Por tanto, crecieron más o menos igual, aunque un poco más las mujeres de *B*.

A U T O E V A L U A C I Ó N

14.A1 **Clasifica, en cualitativos y cuantitativos, los siguientes caracteres estadísticos y, en su caso, indica si la variable es discreta o continua.**

a) Viajeros que suben a un autobús en una determinada parada a lo largo del día.
b) Marca de los coches que pasan en un día por un túnel de lavado.
c) Peso de un grupo de personas.
d) Número de nacimientos semanales que se producen en una ciudad.

a) Cuantitativo, variable discreta
b) Cualitativo
c) Cuantitativo, variable continua
d) Cuantitativo, variable discreta

14.A2 **Las notas obtenidas en una asignatura, por un grupo de 20 alumnos de 3.º de ESO han sido:**

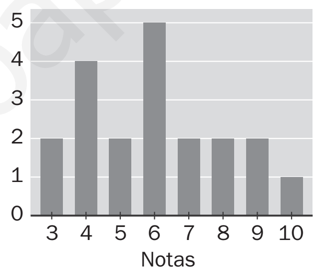
3	7	5	4	8	6	6	10	6	9
9	8	6	5	6	4	4	7	4	3

a) Construye una tabla de la distribución con las frecuencias absolutas y relativas de los datos.
b) ¿Qué porcentaje de alumnos sacaron un 5 en el examen? ¿Qué porcentaje de alumnos han suspendido?
c) Representa la distribución mediante un diagrama de barras.

a)

x_i	f_i	h_i
3	2	0,10
4	4	0,20
5	2	0,10
6	5	0,25
7	2	0,10
8	2	0,10
9	2	0,10
10	1	0,05
	$N = 20$	1

c)



b) Sacaron un 5 el 10 % y suspendieron el 30 %.

14.A3 **Un centro escolar ha recibido el siguiente número de llamadas telefónicas a lo largo de un mes.**

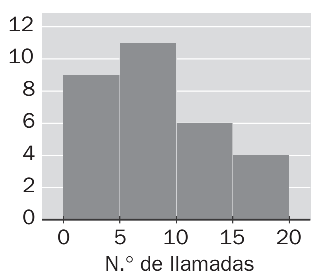
8	5	9	2	0	11	13	8	9	14
3	1	16	4	8	9	11	5	2	19
9	13	17	10	4	0	3	7	18	6

a) Elabora una tabla de la distribución, con las frecuencias absolutas y acumuladas, agrupando los datos en intervalos de amplitud 5 e indicando la marca de clase en cada intervalo.
b) Representa la distribución de las frecuencias absolutas mediante un histograma.

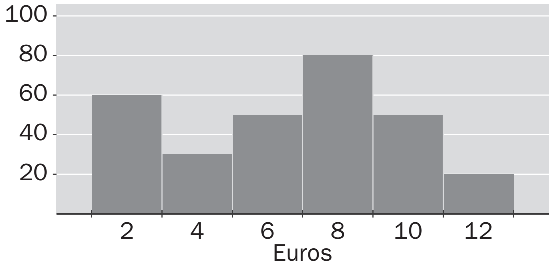
a)

Intervalo	x_i	f_i	F_i
[0, 5)	2,5	9	9
[5, 10)	7,5	11	20
[10, 15)	12,5	6	26
[15, 20)	17,5	4	30
		$N = 30$	

b)



14.A4 **Este diagrama de barras representa el número de artículos vendidos en una tienda en una semana, clasificados según su precio: igual a 2 euros, 4 euros, 6 euros…**



a) Construye la tabla de frecuencias absolutas y relativas de la distribución.

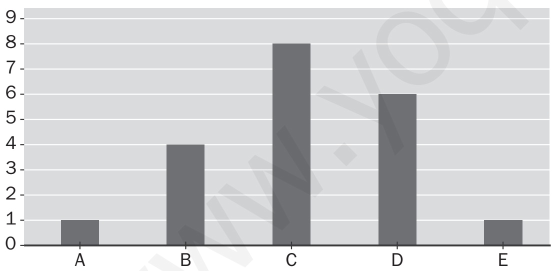
b) ¿Qué grupo de artículos tuvo mayor venta? ¿Cuántos artículos de precio menor o igual a 4 euros se han vendido?

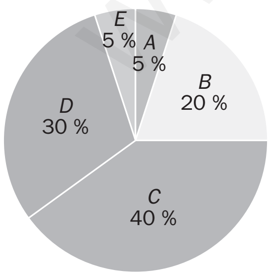
b)

Intervalo	f_i	h_i
[0, 2]	60	0,21
(2, 4]	30	0,10
(4, 6]	50	0,17
(6, 8]	80	0,28
(8, 10]	50	0,17
(10, 12]	20	0,07
	$N = 290$	1

b) Mayor venta tuvieron los artículos de 6 a 8 euros. Se vendieron 90 artículos de precio menor o igual a 4 euros.

14.A5 **Dado el siguiente diagrama de barras de una distribución, dibuja el correspondiente diagrama de sectores en porcentajes**





EJERCICIOS PROPUESTOS

15.1 **El número de libros leídos por los miembros de un círculo de lectores en un mes se resume en esta tabla.**

N.º de libros leídos x_i	N.º de personas f_i
1	5
2	12
3	18
4	11
5	7
6	4
7	1

Halla la media de libros leídos a lo largo de un mes.

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 18 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 1}{5 + 12 + 18 + 11 + 7 + 4 + 1} = 3{,}3 \text{ libros}$$

15.2 **Estas son las edades de los niños que acuden al Servicio de Urgencias de un hospital pediátrico.**

Edad (años)	Número de niños
[0, 2)	12
[2, 4)	8
[4, 6)	5
[6, 8)	7
[8, 10)	3

Calcula la edad media de los niños.

Utilizando las marcas de clase: $\overline{x} = \dfrac{1 \cdot 12 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + 9 \cdot 3}{12 + 8 + 5 + 7 + 3} = 3{,}9$ años

15.3 **El número de libros leídos por los miembros de un círculo de lectores, a lo largo de un mes, viene dado por la siguiente tabla. Halla la moda.**

N.º de libros x_i	1	2	3	4	5	6	7
N.º de personas f_i	5	12	18	11	7	4	1

La moda es el valor con mayor frecuencia, por tanto: Mo 5 3 libros

15.4 **Estas son las edades de los niños que acuden al servicio de Urgencias de un hospital pediátrico. Halla la moda.**

Edad (años)	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)
N.º de niños	12	8	5	7	3

En este caso, la moda es la marca de la clase con mayor frecuencia, por tanto: $M_o = 1$ año.

15.5 **Halla la mediana de estas series estadísticas.**

a) 15, 10, 13, 9, 17, 14, 23 **b) 4, 3, 7, 9, 11, 21, 43, 17**

a) La serie ordenada de menor a mayor es 9, 10, 13, 14, 15, 17, 23. La mediana es el valor central: $M = 14$

b) La serie ordenada de menor a mayor es 3, 4, 7, 9, 11, 17, 21, 43. La mediana es la media de los dos valores centrales $M = \dfrac{9 + 11}{2} = 10$.

15.6 Determina la mediana de la distribución.

Altura (cm)	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)
N.º de plantas	3	6	7	4

Se realiza una tabla con las frecuencias absolutas acumuladas F_i:

Altura	N.º de plantas	F_i
[0, 5)	3	3
[5, 10)	6	9
[10, 15)	7	16
[15, 20)	4	20

La mitad del número de datos es $\frac{20}{2} = 10$, luego la clase mediana es [10, 15), ya que es la primera cuya frecuencia acumulada supera ese valor. La mediana es la marca de esta clase: $M = 12{,}5$.

15.7 El número de libros leídos por los alumnos de 3.º de ESO durante el curso viene dado por la siguiente tabla. Halla los cuartiles.

N.º de libros x_i	1	2	3	4	5	6	7
N.º de alumnos f_i	5	12	18	11	7	4	1

Se realiza una tabla con las frecuencias absolutas acumuladas F_i:

N.º de libros x_i	1	2	3	4	5	6	7
N.º de alumnos f_i	5	12	18	11	7	4	1
F_i	5	17	35	46	53	57	58

La cuarta parte del número de datos es $\frac{58}{4} = 14{,}5$. El primer cuartil es el primer valor cuya frecuencia acumulada supera ese valor: $Q_1 = 2$ libros

La mitad del número de datos es $\frac{58}{2} = 29$. El segundo cuartil es el primer valor cuya frecuencia acumulada supera ese valor: $Q_2 = 3$ libros

Tres cuartos del número de datos es $3 \cdot \frac{58}{4} = 43{,}5$. El tercer cuartil es el primer valor cuya frecuencia acumulada supera ese valor: $Q_3 = 4$ libros

15.8 Estas son las edades de los niños que acuden al Servicio de Urgencias de un hospital pediátrico. Halla los cuartiles.

Edad (años)	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)
N.º de niños	12	8	5	7	3

Se realiza una tabla con las frecuencias absolutas acumuladas F_i:

Edad (años)	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)
N.º de niños	12	8	5	7	3
F_i	12	20	25	32	35

$\frac{35}{4} = 8{,}75$. Q_1 es la marca de la primera clase cuya frecuencia acumulada supera ese valor, que es [0, 2): $Q_1 = 1$año

$\frac{35}{2} = 17{,}5$. Q_2 es la marca de la primera clase cuya frecuencia acumulada supera ese valor, que es [2, 4): $Q_2 = 3$ años

$\frac{3}{4} \cdot 35 = 26{,}25$. Q_3 es la marca de la primera clase cuya frecuencia acumulada supera ese valor, que es [6, 8): $Q_3 = 7$ años

15.9 Determina el rango de esta distribución.

N.º de libros x_i	1	2	3	4	5	6	7
N.º de personas f_i	5	12	18	11	7	4	1

El rango es la diferencia entre el valor mayor y el menor: rango $= 7 - 1 = 6$ libros.

15.10 Halla el rango de la distribución.

Edad (años)	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)
N.º de niños	12	8	5

Rango $= 6 - 0 = 6$ años

15.11 Calcula la varianza y la desviación típica de esta distribución.

N.º de libros x_i	1	2	3	4	5	6	7
N.º de personas f_i	5	12	18	11	7	4	1

$$\overline{x} = \frac{5 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 7}{5 + 12 + 18 + 11 + 7 + 4 + 1} = 3{,}33 \text{ libros}$$

$$s^2 = \frac{5 \cdot 1^2 + 12 \cdot 2^2 + 18 \cdot 3^2 + 11 \cdot 4^2 + 7 \cdot 5^2 + 4 \cdot 6^2 + 1 \cdot 7^2}{5 + 12 + 18 + 11 + 7 + 4 + 1} - 3{,}33^2 = 1{,}99$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1{,}99} = 1{,}41 \text{ libros}$$

15.12 Determina la varianza y la desviación típica de la siguiente distribución.

Edad (años)	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)
N.º de niños	12	8	5

Utilizamos las marcas de clase para los cálculos:

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 18 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 5}{18 + 8 + 5} = 2{,}16 \text{ años}$$

$$s^2 = \frac{18 \cdot 1^2 + 8 \cdot 3^2 + 5 \cdot 5^2}{18 + 8 + 5} - 2{,}16^2 = 2{,}27$$

$$s = 2{,}27 = 1{,}51 \text{ años}$$

15.13 Calcula el coeficiente de variación de esta distribución.

N.º de libros x_i	1	2	3	4	5	6	7
N.º de personas f_i	5	12	18	11	7	4	1

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 18 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 1}{5 + 12 + 18 + 11 + 7 + 4 + 1} = 3{,}33$$

$$s = \sqrt{\frac{1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 12 + 3^2 \cdot 18 + 4^2 \cdot 11 + 5^2 \cdot 7 + 6^2 \cdot 4 + 7^2 \cdot 1}{5 + 12 + 18 + 11 + 7 + 4 + 1} - 3{,}33^2} = 1{,}41$$

$$CV = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{1{,}41}{3{,}33} = 0{,}42$$

15.14 Halla el coeficiente de variación de la siguiente distribución.

Altura (cm)	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)
N.º de plantas	3	6	7	4

Utilizamos las marcas de clase para los cálculos:

$$\overline{x} = \frac{2{,}5 \cdot 3 + 7{,}5 \cdot 6 + 12{,}5 \cdot 7 + 17{,}5 \cdot 4}{20} = 10{,}5 \text{ cm}$$

$$s = \sqrt{\frac{2{,}5^2 \cdot 3 + 7{,}5^2 \cdot 6 + 12{,}5^2 \cdot 7 + 17{,}5^2 \cdot 4}{20} - 10{,}5^2} = 4{,}85 \text{ cm}$$

$$CV = \frac{4{,}85}{10{,}5} = 0{,}46$$

15.15 Halla la media y la desviación típica de la distribución.

x_i	6	7	9	11	13	15
f_i	4	6	7	5	2	1

Dispón los cálculos en forma de tabla.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$f_i \cdot x_i^2$
6	4	24	36	144
7	6	42	49	294
9	7	63	81	567
11	5	55	121	605
13	2	26	169	338
15	1	15	225	225
	25	225		2 173

$$\overline{x} = \frac{225}{25} = 9$$

$$s^2 = \frac{2\,173}{25} - 9^2 = 5{,}92$$

$$s = \sqrt{5{,}92} = 2{,}43$$

15.16 Calcula la media y la varianza de esta distribución.

Talla (cm)	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)
N.º de piezas	7	12	16	5

Utiliza la calculadora científica.

$\overline{x} = 9{,}88$ cm $\qquad s^2 = 21{,}14$

15.17 Calcula la media aritmética trucada al 20 % del siguiente conjunto de datos.

300, 298, 295, 802, 4, 303, 302, 297, 623, 21

Ordenamos los datos de menor a mayor: 4, 21, 295, 297, 298, 300, 302, 303, 623, 802

Como el 20 % de los 10 datos es 2, quitamos dos valores por la derecha y otros 2 por la izquierda.

La media de los seis valores restantes es:

Media trucada al 20 %: $\frac{295 + 297 + 298 + 300 + 302 + 303}{6} = 299{,}1\widehat{6}$

15.18 **Para los datos del ejercicio anterior, calcula, aplicando el criterio dado en el epígrafe, los valores atípicos.**

Como $Q_1 = 295$, $Q_3 = 300$

$Q_3 + 1{,}5(Q_3 - Q_1) = 300 + 1{,}5(300 - 295) = 307{,}5$ $\qquad Q_1 - 1{,}5(Q_3 - Q_1) = 295 - 1{,}5(300 - 295) = 287{,}5$

Los valores atípicos por la derecha son los mayores de 307,5: 623 y 802.

Los valores atípicos por la izquierda son los menores de 287,5: 4 y 21.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

15.19 **Al abrir la biblioteca del Centro Cultural de un pueblo, entran 11 personas cuya edad media es 32 años. Una hora más tarde, no había salido nadie y habían entrado 7 personas más, siendo ahora 39 años la edad media. Entonces, entra un joven y la edad media se reduce a 38 años. ¿Cuántos años tiene el joven?**

Calculamos las sumas de las edades de las personas que hay en cada momento. De los incrementos de estas sumas se deduce la edad de la última persona que entra.

$32 \cdot 11 = 352$; $39 \cdot 18 = 702$; $38 \cdot 19 = 722$; $722 - 702 = 20$ años

15.20 **Un equipo de fútbol tiene 11 jugadores y su talla media es de 1,74 metros. La talla media del equipo contrario es de 1,76 metros.**

a) ¿Cuál es la talla media del conjunto de los dos equipos?

b) Al salir el árbitro, la talla media de todos asciende a 1,76. ¿Cuál es la talla del árbitro?

a) $\overline{h} = \dfrac{11 \cdot 1{,}74 + 11 \cdot 1{,}76}{22} = 1{,}75$ m

b) Cuando el árbitro sale a la pista hay 23 personas en total, siendo la suma de la talla de todos: $23 \cdot 1{,}76 = 40{,}48$ m
Por tanto, el árbitro mide $40{,}48 - 38{,}5 = 1{,}98$ m.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Parámetros de centralización

15.21 **Calcula la media aritmética, la moda y la mediana de los siguientes datos: −3, 0, 2, 2, 6.**

$$\overline{x} = \frac{-3 + 2 \cdot 2 + 6}{5} = 1,4 \qquad M_o = 2 \qquad M = 2$$

15.22 **Se ha preguntado a un grupo de 20 jóvenes el número de horas que dedican semanalmente al estudio y se han obtenido los siguientes resultados.**

8 10 4 0 12 20 16 8 12 14
3 6 8 3 10 15 8 2 10 7

a) Efectúa el recuento y construye la tabla de frecuencias absolutas.
b) Calcula la media de la distribución.
c) Determina la mediana y la moda.
d) Calcula los cuartiles.

a)

x_i	0	2	3	4	6	7	8	10	12	14	15	16	20
f_i	1	1	2	1	1	1	4	3	2	1	1	1	1

c) $M = M_o = 8$ h

b) $\overline{x} = \dfrac{2 + 6 + 4 + 6 + 7 + 32 + 30 + 24 + 14 + 15 + 16 + 20}{20} = 8,9$ h

d) $Q_1 = 6$ h, $Q_2 = 8$ h y $Q_3 = 12$ h

15.23 **En un garaje están guardados 7 coches de color blanco, 5 de color rojo, 3 grises y 8 negros.**

a) ¿Cuál es la moda de los colores de los coches?

b) ¿Podemos calcular la media aritmética?

a) M_o = "negro"

b) No se puede calcular la media porque el carácter no es cuantitativo.

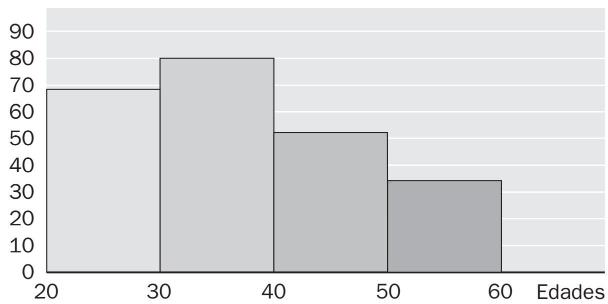
15.24 **Las edades de los socios de un club deportivo son las siguientes.**

Edad (años)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)
N.º de socios	68	80	52	34

a) Elabora la tabla de frecuencias absolutas y el histograma correspondiente.
b) Calcula la media, la mediana y la moda de la distribución.
c) Calcula los cuartiles.

a)

	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)
x_i	25	35	45	55
f_i	68	80	52	34
F_i	68	148	200	234



b) $\overline{x} = 37,\widehat{2}$

La clase mediana y la clase modal es [30, 40), por tanto $M = M_o = 35$

c) $\dfrac{234}{4} = 58,5 \Rightarrow Q_1 = 25$

$Q_2 = M = 35$

$3 \cdot \dfrac{234}{4} = 175,5 \Rightarrow Q_3 = 45$

15.25 Las notas de un examen de Lengua de un grupo de 25 alumnos de 3.º de ESO han sido las siguientes.

7	**6**	**4**	**5**	**3**
9	**0**	**3**	**6**	**8**
8	**5**	**9**	**0**	**6**
10	**6**	**4**	**7**	**6**
3	**6**	**5**	**7**	**2**

a) Calcula la nota media del grupo.
b) Determina la nota media del grupo sin contar a los dos alumnos que han sacado un cero.
c) Calcula la nota media de los alumnos que han aprobado.

a) $\overline{x} = \dfrac{7 \cdot 3 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 16 + 10 + 2}{25} = \dfrac{135}{25} = 5{,}4$

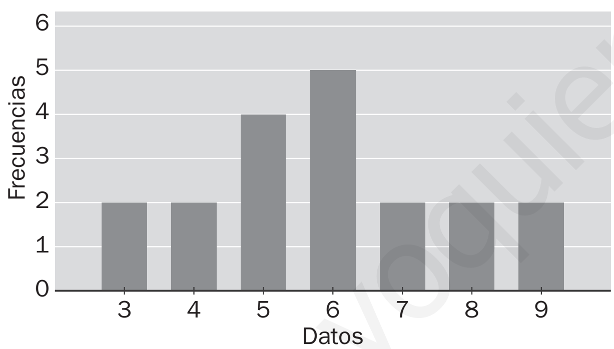
b) $\overline{x} = \dfrac{135}{23} = 5{,}87$

c) $\overline{x} = \dfrac{7 \cdot 3 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 16 + 10}{17} = \dfrac{116}{17} = 6{,}82$

15.26 La media aritmética de cuatro números es 5. Si añadimos un nuevo número, el 8, ¿cuál será la media aritmética de los cinco datos?

$\overline{x} = \dfrac{5 \cdot 4 + 8}{5} = \dfrac{28}{5} = 5{,}6$

15.27 Observa el siguiente diagrama de barras.



Halla la media, la mediana y la moda de la distribución.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
3	2	6
4	2	8
5	4	20
6	5	30
7	2	14
8	2	16
9	2	18
	19	112

$\overline{x} = \dfrac{112}{19} = 5{,}89$

$M = 6$

$M_o = 6$

Parámetros de dispersión

15.28 Calcula el rango, la varianza y la desviación típica de los siguientes datos: −3, 0, 2, 4, 5.

$\overline{x} = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$

Rango $= 5 - (-3) = 8$

$s^2 = \dfrac{(-3)^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2}{5} - 1{,}6^2 = 8{,}24$

$s = \sqrt{8{,}24} = 2{,}87$

15.29 **Estas son las notas obtenidas por Susana y Pedro en cinco exámenes.**

Susana	**3**	**5**	**8**	**4**	**7**
Pedro	**7**	**2**	**9**	**4**	**5**

Halla la nota media, el rango y la desviación típica de ambos.

$\overline{x}_S = \dfrac{27}{5} = 5{,}4$ $\quad$ $\text{rango}_S = 8 - 3 = 5$ $\quad$ $s_S = \sqrt{\dfrac{3^2 + 5^2 + 8^2 + 4^2 + 7^2}{5} - 5{,}4^2} = 1{,}85;$

$\overline{x}_P = \dfrac{27}{5} = 5{,}4$ $\quad$ $\text{rango}_P = 9 - 2 = 7$ $\quad$ $s_P = \sqrt{\dfrac{7^2 + 2^2 + 9^2 + 4^2 + 5^2}{5} - 5{,}4^2} = 2{,}42$

15.30 **Las edades de diez niños que asisten a una fiesta son: 8, 7, 9, 5, 6, 5, 8, 7, 9, 10.**

a) Calcula la media aritmética de los datos.
b) Determina el rango y la desviación típica.

a) $\overline{x} = \dfrac{74}{10} = 7{,}4$ años

b) Rango $= 10 - 5 = 5$ años $\quad$ $s = \sqrt{\dfrac{8^2 + 7^2 + 9^2 + 5^2 + 6^2 + 10^2}{10} - 7{,}4^2} = 1{,}62$ años

15.31 **Las temperaturas mínimas registradas en una ciudad a lo largo de una semana, se recogen en esta tabla.**

L	M	X	J	V	S	D
1	**−2**	**3**	**8**	**10**	**12**	**7**

Halla la media y la desviación típica de estos datos.

$\overline{x} = \dfrac{39}{7} = 5{,}57$ °C $\quad$ $s = \sqrt{\dfrac{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2 + 7^2}{7} - 5{,}57^2} = 4{,}69$ °C

15.32 **Calcula el rango, la varianza y la desviación típica de la siguiente distribución.**

x_i	f_i
5	**8**
6	**9**
7	**5**
8	**2**
9	**1**

Rango $= 9 - 5 = 4$ $\quad$ $s^2 = \dfrac{5^2 \cdot 8 + 6^2 \cdot 9 + 7^2 \cdot 5 + 8^2 \cdot 2 + 9^2 \cdot 1}{25} - \left(\dfrac{154}{25}\right)^2 = 1{,}17$ $\quad$ $s = \sqrt{1{,}17} = 1{,}08$

15.33 El número de llamadas telefónicas diarias recibidas por Carolina en su móvil durante el último mes son las siguientes.

8	**1**	**6**	**3**	**7**	**4**	**8**	**5**	**6**	**6**
2	**8**	**5**	**8**	**5**	**2**	**7**	**5**	**5**	**3**
8	**6**	**2**	**6**	**4**	**6**	**7**	**6**	**7**	**6**

a) Agrupa los datos en cuatro clases, señalando la marca de clase en cada caso.
b) Calcula el rango, la varianza y la desviación típica de la distribución.

a)

Intervalo	[1, 3)	[3, 5)	[5, 7)	[7, 9)	
x_i	2	4	6	8	
f_i	4	4	13	9	30
$x_i \cdot f_i$	8	16	78	72	174

b) Rango $= 8 - 1 = 7$ llamadas

$s^2 = 3,84$

$s = \sqrt{3,79} = 1,96$ llamadas

Interpretación conjunta de *x* y *s*

15.34 En una serie de datos, se sabe que $\overline{x} - 23,4$ y $s = 6,2$. Calcula el coeficiente de variación y exprésalo en porcentajes.

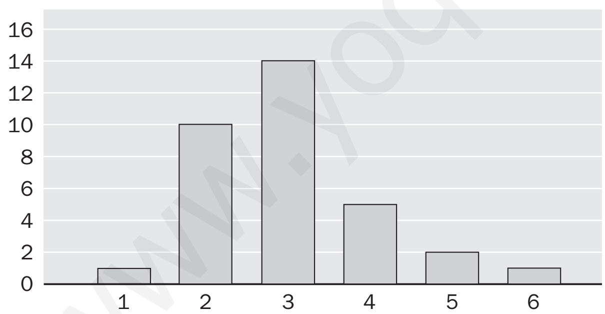
$$CV = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{6,2}{23,4} = 0,26 = 26\,\%$$

15.35 Dada la siguiente distribución.

x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
f_i	**1**	**10**	**14**	**5**	**2**	**1**

a) Elabora la tabla de frecuencias absolutas y el diagrama de barras correspondiente.
b) Calcula la media y la desviación típica.
c) Halla el coeficiente de variación.
d) ¿Consideras que la desviación típica es grande o pequeña respecto de la media?

a)



b) $$\overline{x} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 14 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1}{33} = 3$$

$$s = \sqrt{\frac{1^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 10 + 3^2 \cdot 14 + 4^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 1}{33} - 3^2} = 1,04$$

c) $$CV = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{1,04}{3} = 0,35 = 35\,\%$$

d) Es bastante grande.

15.36 Para ir a su trabajo, María puede optar por usar su coche o utilizar el transporte público. Durante los diez últimos días ha utilizado, alternativamente, uno u otro medio de transporte y ha anotado los minutos que tarda en cada uno.

Coche	17	25	16	28	26
T. público	21	23	22	24	20

a) Calcula la media y la desviación típica de los tiempos utilizados en cada caso.
b) Determina los coeficientes de variación.
c) ¿Cuál crees que es el más regular de los dos medios de transporte?

a) $\overline{x}_C = \dfrac{112}{5} = 22{,}4$ $\quad s_C = \sqrt{\dfrac{17^2 + 25^2 + 16^2 + 28^2 + 26^2}{5} - 22{,}4^2} = 4{,}92$ min

$\overline{x}_P = \dfrac{110}{5} = 22$ min $\quad s_P = \sqrt{\dfrac{21^2 + 23^2 + 22^2 + 24^2 + 20^2}{5} - 22^2} = 1{,}41$ min

b) $CV_C = \dfrac{4{,}92}{22{,}4} = 22\,\%$ $\quad CV_P = \dfrac{1{,}41}{22} = 6\,\%$

c) El transporte público es más regular, pues su coeficiente de variación es menor.

Valores atípicos

15.37 Calcula la media truncada al 10 % del siguiente conjunto de datos:

63, 62, 60, 20, 65, 80, 82, 110, 70, 75

Ordenamos de menor a mayor: 20, 60, 62, 63, 65, 70, 75, 80, 82, 110

Como el 10 % de los 10 datos es 1, quitamos un valor por la derecha y otro por la izquierda.

Media truncada al 10 %: $\dfrac{60 + 62 + 63 + 65 + 70 + 75 + 80 + 82}{8} = 69{,}625$

15.38 El número de operaciones de apendicitis de un hospital durante 15 días ha sido:

7, 8, 3, 2, 5, 4, 6, 5, 6, 43, 7, 9, 5, 6, 8

a) A partir de esta muestra, calcula la media incluyendo y excluyendo el valor atípico.

b) ¿Cuál de los dos valores obtenidos te parece más representativo de las operaciones de apendicitis en el hospital?

a) El valor atípico es 43. Las medias son:

Incluyendo el valor atípico: $\overline{x} = \dfrac{124}{15} = 8{,}2\widehat{6}$

Excluyendo el valor atípico: $\overline{x} = \dfrac{81}{14} = 5{,}79$

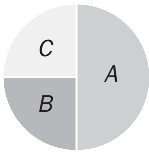
b) Es más representativa la media que se obtiene excluyendo el valor atípico.

C U E S T I O N E S P A R A A C L A R A R S E

15.39 **Si la media de cinco datos es 7 y cuatro de ellos son 5, 6, 9 y 12, ¿cuál es el quinto dato?**

$$\frac{5 + 6 + 9 + 12 + x}{5} = 7 \Rightarrow \overline{x} = 3$$

15.40 **Observa el siguiente diagrama de sectores.**



a) ¿Cuál es la frecuencia relativa del dato *B*?

a) 0,25

b) ¿Y cuál es la moda de la distribución?

b) $M_o = A$

15.41 **La desviación típica en una distribución es 2,4. ¿Cuál es la varianza?**

$$s^2 = 2{,}4^2 = 5{,}76$$

15.42 **Razona si son verdaderas o falsas estas afirmaciones.**

a) La desviación típica de una distribución estadística nunca puede ser negativa.

b) La mediana y la moda de una distribución siempre tienen que coincidir.

a) Verdadera. La desviación típica es, por definición, la raíz positiva de la varianza.

b) Falsa. La mediana es el valor central o la media de los dos valores centrales, mientras que la moda es el valor más frecuente.

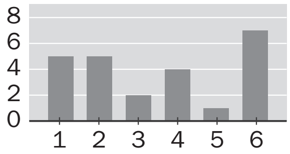
15.43 **¿Puede coincidir el cuartil medio de un grupo de datos con la media aritmética? Razónalo.**

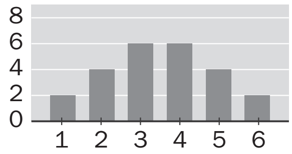
Sí. Por ejemplo, en una distribución constante. Además, el cuartil medio es la mediana, y esta puede coincidir con la media aritmética.

15.44 **Los salarios mensuales de los cuatro empleados de una pequeña empresa son 700, 800, 900 y 1 100 euros, respectivamente, mientras que el dueño de la empresa se ha asignado un sueldo al mes de 3 500 euros. ¿Qué medida te parece más representativa de los valores centrales de esta distribución, la media o la mediana? Razona la respuesta.**

La mediana, 900 € ya que la media, $\overline{x} = 1\,400$ €, está muy influida por la diferencia entre el sueldo del jefe y los de sus empleados.

15.45 Observa estas dos distribuciones.





a) Ambas tienen la misma media. ¿Cuál es su valor?

b) Las desviaciones típicas son: *s* = 1,38 y *s* = 1,94. Asocia estos valores a cada distribución.

a) $\overline{x} = \dfrac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 7}{24} = 3{,}5$

b) La desviación típica menor, 1,38 corresponde a la primera distribución por ser sus datos más simétricos.

15.46 ¿Afecta un valor atípico al rango de la distribución? Explica la respuesta.

Sí, ya que el valor atípico tendrá que ser un extremo de la distribución, y es precisamente con los valores extremos con los que se obtiene el rango.

PROBLEMAS PARA APLICAR

15.47 **Arturo se ha medido diez veces su frecuencia cardiaca, en latidos por minuto, y los resultados que ha obtenido se reflejan en la siguiente tabla.**

70	82	77	74	80	81	72	79	82	73

a) ¿Cuál es la media de latidos por minuto de estas mediciones?

b) Determina la mediana y la moda.

a) $\overline{x} = 77$ latidos/min

b) $M = \frac{77 + 79}{2} = 78$ latidos/min $\qquad M_o = 82$ latidos/min

15.48 **Las notas de Julia en los controles de Inglés que ha hecho en esta evaluación han sido 2, 4, 5, 6 y 6, pero todavía tiene que hacer un último control. ¿Qué nota debe sacar para que la media de todos sea un 5?**

$\frac{2 + 4 + 5 + 6 + 6 + x}{6} = 5$

$x + 23 = 30$

$\overline{x} = 7$

15.49 **En una prueba de 100 metros lisos, la profesora de Educación Física ha cronometrado los siguientes tiempos, en segundos, de sus alumnos.**

11,6	13,8	14,4	14,2	12,6	14,5	11,9	16,1
11,4	12,9	12,3	15,4	11,6	13,7	14,4	12,5

a) Calcula la media, la mediana y la moda de los tiempos.

b) Determina el rango.

a) $\overline{x} = 13{,}33$ s $\quad$ Es bimodal: $M_o = 11{,}6$ s y $M_o = 14{,}4$ s $\quad M = \frac{12{,}9 + 13{,}7}{2} = 13{,}3$ s

b) Rango $= 16{,}1 - 11{,}4 = 4{,}7$ s

15.50 **La distribución de los sueldos de los 60 empleados de una empresa se refleja en esta tabla.**

Euros	N.º de empleados
$600 \leq s < 900$	8
$900 \leq s < 1\,200$	12
$1\,200 \leq s < 1\,500$	20
$1\,500 \leq s < 1\,800$	14
$1\,800 \leq s < 2\,100$	6

a) Halla el sueldo medio de los empleados de la empresa, la mediana y la moda.

b) Calcula el rango y la desviación típica.

Euros	x_i	f_i
$600 \leq s < 900$	750	8
$900 \leq s < 1\,200$	1 050	12
$1\,200 \leq s < 1\,500$	1 350	20
$1\,500 \leq s < 1\,800$	1 650	14
$1\,800 \leq s < 2\,100$	1 950	14

a) $\overline{x} = 1\,340$ € $\qquad M_o = 1\,350$ € $\qquad M = 1\,350$ €

b) Rango $= 1\,950 - 750 = 1\,200$ € $\qquad s = 350{,}57$ €

15.51 **Se ha preguntado a un grupo de 35 jóvenes por el número de horas que han practicado deporte durante el pasado mes, obteniéndose el siguiente resultado.**

0 4 6 6 6 8 8 9 9 9 9 10 12 14 14 15 16 16

19 21 26 28 31 31 32 35 36 40 41 46 52 58 71 74 85

Agrupa los datos en intervalos de longitud 15, calcula la media, la mediana y los cuartiles superior e inferior de la distribución de datos agrupados, y compáralos con los resultados que se obtienen sin agrupar los datos.

Edad (años)	[0, 15)	[15, 30)	[30, 45)	[45, 60)	[60, 75)	[75, 90)
Número de socios	15	7	7	3	2	1

Utilizando las marcas de clase se obtiene:

Datos agrupados:

$\overline{x} = 25{,}93$ h $M = 22{,}5$ h $Q_1 = 7{,}5$ h $Q_3 = 37{,}5$ h

Datos sin agrupar:

$\overline{x} = 25{,}63$ h $M = 16$ h $Q_1 = 9$ h $Q_3 = 36$ h

La media es muy parecida en ambos casos, y la media y los cuartiles que obtenemos sin agrupar los datos pertenecen a la misma clase que los obtenidos agrupando los datos.

15.52 **Hemos tirado un dado dieciséis veces, y estos son los resultados que hemos obtenido.**

1 5 4 3 2 6 4 4

5 1 2 4 3 2 6 1

a) ¿Cuál es la media de los resultados?

b) ¿Y el rango?

c) Calcula la desviación típica.

a) $\overline{x} = \dfrac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2}{16} = 3{,}31$ veces

b) Rango $= 6 - 1 = 5$ veces

c) $s = \sqrt{\dfrac{1^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 4 + 5^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 2}{16} - 3{,}31^2} = 1{,}65$ veces

15.53 **Se ha medido el tiempo de espera, en minutos, en una parada de autobús durante una semana a la misma hora del día y los resultados han sido los siguientes.**

Día	L	M	X	J	V	S	D
Tiempo	5	5	4	27	4	5	6

a) Calcula la media y la mediana de la distribución.

b) ¿Cuál de las dos medidas te parece más representativa, teniendo en cuenta el valor atípico del jueves?

a) $\overline{x} = 8{,}5$ y $M = 5$

b) La mediana, porque la media se ve muy afectada por el valor atípico.

15.54 **Se ha realizado un test a 20 personas. Este es el número de fallos de cada una de ellas.**

6 5 7 6 8 8 9 7 4 6 7 5 7 7 6 8 8 4 4 9

a) Averigua el porcentaje de personas que se encuentran en el intervalo ($\overline{x} - s$, $\overline{x} + s$)

b) Calcula el porcentaje de personas que tuvieron un número de fallos inferior a $\overline{x} - 2s$.

a) $\overline{x} = \dfrac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 2}{20} = 6{,}55$ fallos

$s = \sqrt{\dfrac{905}{20} - 6{,}55^2} = 1{,}53$ fallos

$(\overline{x} - s, \overline{x} + s) = (5{,}02;\ 8{,}08)$ en dicho intervalo hay 13 datos $\Rightarrow$ 65 %

b) $\overline{x} - 2s = 3{,}49$. No hay datos menores que este valor $\Rightarrow$ 0 %

15.55 **En la tabla se resumen las temperaturas máximas en una ciudad durante el mes de abril.**

12	**15**	**10**	**8**	**9**	**11**	**15**	**17**	**20**	**16**
14	**10**	**10**	**12**	**11**	**9**	**8**	**8**	**7**	**8**
10	**12**	**12**	**11**	**13**	**12**	**15**	**15**	**18**	**17**

a) ¿Cuál es la temperatura media del mes?

b) Halla el rango y la desviación típica.

c) Calcula el número de días en los que las temperaturas se encontraron en el intervalo ($x - 2s$, $x + 2s$).

a) $\overline{x} = \dfrac{365}{30} = 12{,}17$ °C

b) Rango $= 20 - 7 = 13$

$$s = \sqrt{\frac{4\,773}{30} - 12{,}17^2} = 3{,}32$$

c) En $(\overline{x} - 2s, \overline{x} + 2s) = (5{,}53; 18{,}81)$ hay 29 datos, el 97 %.

15.56 **Los porcentajes de aciertos en tiros libres, de dos jugadores en los diez últimos partidos de baloncesto vienen dados en la tabla.**

Jugador *A*	**30**	**22**	**34**	**76**	**12**	**10**	**22**	**40**	**30**	**42**
Jugador *B*	**38**	**44**	**22**	**54**	**44**	**32**	**60**	**28**	**30**	**40**

a) ¿Cuál de los dos tiene mejor media?

b) Calcula la desviación típica de cada jugador.

c) Utiliza la desviación típica para saber cuál de los dos es más regular.

a) El jugador *B*, $\overline{x}_A = \dfrac{318}{10} = 31{,}8\ \%$ $\qquad \overline{x}_B = \dfrac{392}{10} = 39{,}20\ \%$

b) $s_A = \sqrt{\dfrac{30^2 \cdot 2 + 22^2 + 34^2 + 76^2 + 12^2 + 10^2 + 22^2 + 40^2 + 42^2}{10} - 31{,}8^2} = 17{,}88\ \%$

$s_B = \sqrt{\dfrac{38^2 + 44^2 \cdot 2 + 22^2 + 54^2 + 32^2 + 60^2 + 28^2 + 30^2 + 40^2}{10} - 39{,}2^2} = 11{,}21\ \%$

c) $CV_A = \dfrac{s_A}{\overline{x}_A} = \dfrac{17{,}88}{31{,}8} = 56\ \%$ $\qquad CV_B = \dfrac{s_B}{\overline{x}_B} = \dfrac{11{,}21}{39{,}2} = 29\ \%$

El jugador *B* es más regular.

REFUERZO

Parámetros de centralización

15.57 Las edades de las personas que van en un autobús de línea en un momento determinado son: 52, 71, 17, 40, 62, 19, 67, 27, 5, 48, 8, 32, 51, 75, 9, 24, 40, 35, 56, 45.

a) Agrupa los datos en intervalos de amplitud 13.

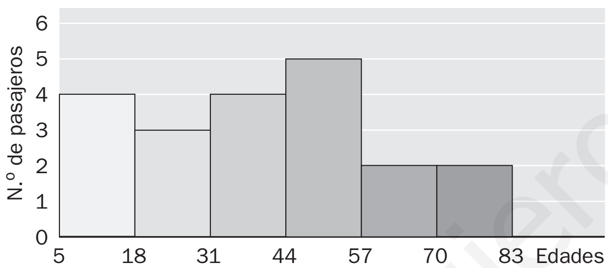
b) Representa los datos según un histograma.

c) Halla la media, la mediana y la moda de la distribución.

a)

Edades	x_i	f_i
[5, 18)	11,5	4
[18, 31)	24,5	3
[31, 44)	37,5	4
[44, 57)	50,5	5
[57, 70)	63,5	2
[70, 83)	76,5	2

b)

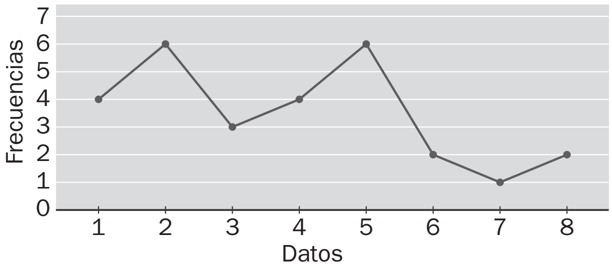


c) $\overline{x} = \dfrac{802}{20} = 40{,}1$ años $\qquad M_o = 50{,}5$ años $\qquad M = 37{,}5$ años

15.58 La media aritmética de 4 números es 10,25, y la media de otros 6 números es 8,5. ¿Cuál es la media de todos juntos?

$$\overline{x} = \frac{41 + 51}{4 + 6} = 9{,}2$$

15.59 **Determina la media, la mediana, la moda y los cuartiles de la distribución representada en el siguiente polígono de frecuencias.**



Con los datos que tenemos, elaboramos la tabla de frecuencias:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	4	6	3	4	6	2	1	2

$\overline{x} = \dfrac{4 + 12 + 9 + 16 + 30 + 12 + 7 + 16}{28} = 3{,}79$ $\qquad M = 4$

Bimodal: $M_o = 2$ y $M'_o = 5$ $\qquad Q_1 = 2$; $Q_2 = M = 4$ y $Q_3 = 5$

15.60 **La tabla muestra las frecuencias acumuladas de una serie de datos. ¿Cuál es la mediana de la distribución?**

x_i	A	B	C	D
F_i	3	6	11	13

Calculamos las frecuencias absolutas:

x_i	A	B	C	D
f_i	3	3	5	2

La mediana es el valor que ocupa el séptimo lugar, *C*.

Parámetros de dispersión

15.61 **La plantilla de un equipo de fútbol está compuesta por 25 jugadores, cuyas edades son las siguientes.**

19	**22**	**24**	**26**	**28**
20	**22**	**25**	**26**	**29**
20	**23**	**25**	**27**	**30**
20	**24**	**25**	**28**	**30**
21	**24**	**26**	**28**	**33**

a) Construye la tabla de frecuencias absolutas agrupando los datos en cinco intervalos.

b) Halla el rango y la desviación típica.

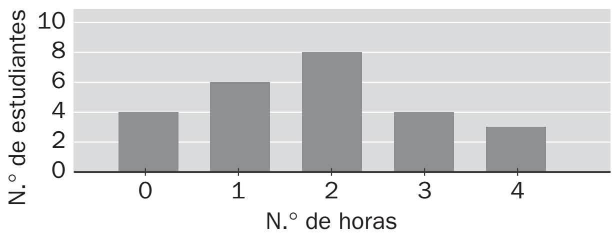
a)

Edades	x_i	f_i
[19, 22)	20,5	5
[22, 25)	23,5	6
[25, 28)	26,5	7
[28, 31)	29,5	6
[31, 34)	32,5	1

b) Rango = 33 − 19 = 14 años

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 f_i}{N} - \overline{x}^2} = 3{,}47 \text{ años}$$

15.62 El siguiente diagrama de barras muestra el número de horas que dedica diariamente a practicar deporte un grupo de 25 estudiantes.



a) Calcula la media, la mediana y la moda de la distribución.
b) Halla el rango y la desviación típica.
c) Calcula el coeficiente de variación.

a) $\overline{x} = \dfrac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{25} = 1{,}84$ h $\qquad M = 2$ h $\qquad M_o = 2$ h

b) Rango $= 4 - 0 = 4$ h $\qquad s = \sqrt{\dfrac{1^2 \cdot 6 + 2^2 \cdot 8 + 3^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 3}{25} - 1{,}84^2} = 1{,}22$ h

c) $CV = \dfrac{s}{\overline{x}} = \dfrac{1{,}22}{1{,}84} = 0{,}66 = 66\,\%$

Valores atípicos

15.63 Dados los siguientes datos: 2, 3, 5, 6, 7, 10, 30.
Calcula el coeficiente de variación de la distribución sin tener y teniendo en cuenta el último valor.

Sin valor atípico:

$\overline{x} = \dfrac{2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 10}{6} = 5{,}5 \qquad s = \sqrt{\dfrac{2^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 10^2}{6} - 5{,}5^2} = 2{,}63$

$CV = \dfrac{2{,}63}{5{,}5} = 0{,}478 = 47{,}8\,\%$

Con valor atípico:

$\overline{x} = \dfrac{2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 10 + 30}{7} = 9 \qquad s = \sqrt{\dfrac{2^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 10^2 + 30^2}{7} - 9^2} = 8{,}91$

$CV = \dfrac{8{,}91}{9} = 0{,}99 = 99\,\%$

AMPLIACIÓN

15.64 **La media de un conjunto de 6 números es 5,8. Si añadimos los números 4,4 y 6,4, ¿cuál será la nueva media?**

$$\overline{x} = \frac{5{,}8 \cdot 6 + 4{,}4 + 6{,}4}{8} = 5{,}7$$

15.65 **La media aritmética de cinco números es 15. Calcula dichos números, sabiendo que son proporcionales a 1, 4, 5, 7 y 8.**

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 15 \\ \dfrac{x_1}{1} = \dfrac{x_2}{4} = \dfrac{x_3}{5} = \dfrac{x_4}{7} = \dfrac{x_5}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + 4x_1 + 5x_1 + 7x_1 + 8x_1 = 75 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 12,\ x_3 = 15,\ x_4 = 21,\ x_5 = 24$$

15.66 **Un coche recorrió 500 kilómetros en tres trayectos. En el primero, de 200 kilómetros, mantuvo una velocidad de 100 km/h; en el segundo, de 150 kilómetros, su velocidad fue de 80 km/h, y en el tercero rodó a una velocidad de 90 km/h. ¿Cuál fue su velocidad media?**

El tiempo empleado en cada trayecto fue $t_1 = \frac{200}{100} = 2$ h; $t_2 = \frac{150}{80} = \frac{15}{8}$ h; $t_3 = \frac{150}{90} = \frac{5}{3}$ h.

El tiempo total del viaje es $t_1 + t_2 + t_3 = 2 + \frac{15}{8} + \frac{5}{3} = \frac{133}{24}$ h.

La velocidad media es $\overline{v} = 500 : \frac{133}{24} = \frac{500 \cdot 24}{133} = 90{,}23$ km/h.

15.67 **¿Puede ser cero la desviación típica de una distribución estadística? Indica en este supuesto cómo son los datos de la distribución.**

Sí, si las desviaciones respecto a la media son cero, es decir, si todos los datos tienen el mismo valor.

15.68 **En el último examen de Sociales, la nota media de un grupo de 30 alumnos fue 5,4. Si la nota media de las chicas fue un 6 y la de los chicos fue un 5, averigua cuántas chicas y cuántos chicos hay en la clase.**

Si x son las chicas e y son los chicos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 30 \\ \dfrac{6x + 5y}{30} = 5{,}4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 30 \\ 6x + 5y = 162 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 12,\ y = 18$$

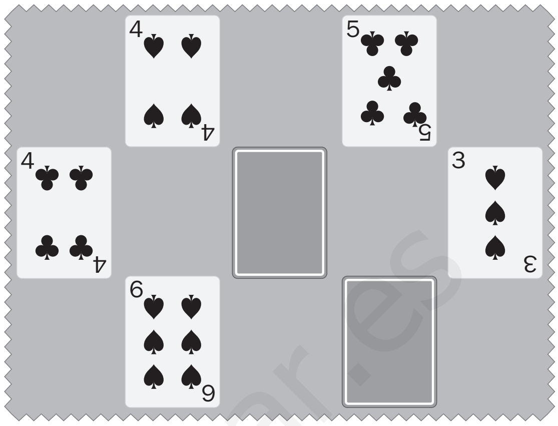
15.69 **Manuel ha hecho tres exámenes de Matemáticas en esta evaluación. Sus notas han sido 3, 4 y 6, respectivamente. El profesor ha decidido que el segundo examen tiene doble valor que el primero, y el tercero, doble que el segundo. ¿Qué nota le corresponde a Manuel?**

$$\overline{x} = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 4}{7} = 5$$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

15.70 Siete cartas

Observa las cartas siguientes, en las que dos de ellas aparecen vueltas sin mostrar su número.



a) Halla la suma de los números de las cartas desconocidas sabiendo que la media aritmética de todas las cartas es 4.

b) Halla el valor de cada una de las cartas desconocidas si se sabe, además, que las medias de las tres filas son 3,5; 4 y 4,5, aunque no necesariamente en este orden

c) ¿Qué valor debería aparecer en la carta del centro para que el valor de la media de esa fila fuera dos tercios de la media de la primera fila?

a) Llamemos S a la suma de los números de las cartas desconocidas. Como la media de todas las cartas es 4,

$$\frac{4 + 5 + 4 + 3 + 6 + S}{7} = 4$$

$22 + S = 28 \Rightarrow S = 6$

Los números de las cartas suman 6.

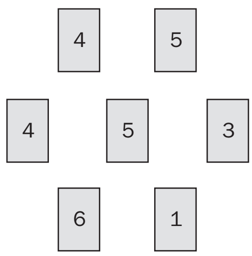
b) La media de la primera fila es 4,5, por tanto la media de la segunda fila será 3,5 ó 4.

Si llamamos x al número de la carta desconocida de la segunda fila e y a la de la carta de la tercera fila, si la media fuera 3,5 tendríamos:

$\dfrac{4 + x + 3}{3} = 3{,}5 \Rightarrow x = 3{,}5$ esta solución es absurda puesto que los números de las cartas son enteros.

La media de la segunda fila es 4, por tanto:

$\dfrac{4 + x + 3}{3} = 4 \Rightarrow x = 5$ La carta de la segunda fila es un 5.



La media de la tercera fila es 3,5. Entonces: $\dfrac{6 + y}{2} = 3{,}5 \Rightarrow y = 1$

La carta de la tercera fila es un as.

c) $\dfrac{4 + x + 3}{3} = \dfrac{2}{3} \cdot 4{,}5 \Rightarrow x = 2$ Tendría que aparecer un 2.

AUTOEVALUACIÓN

15.A1 **La media aritmética de cinco datos es 5,2. Sabemos que los cuatro primeros datos son 3, 8, 4 y 5. Averigua el quinto dato.**

$$\overline{x} = \frac{3 + 8 + 4 + 5 + x}{5} = 5{,}2 \Rightarrow x = 6$$

15.A2 **En un albergue de la Sociedad Protectora de Animales se ha observado el alumbramiento de los cachorros de varias perras, obteniéndose el siguiente número de crías por camada: 2, 4, 4, 5, 6, 4, 3, 1, 5, 3, 2, 5, 6, 3, 6, 5, 2, 5, 5 y 4.**

a) Efectúa el recuento y construye la tabla de frecuencias absolutas.

b) Halla la media, la moda y la mediana de la distribución.

c) Calcula el primer y el tercer cuartil.

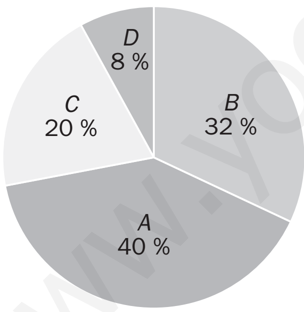
a)

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	1	3	3	4	6	3

b) $\overline{x} = \dfrac{1 + 6 + 9 + 16 + 30 + 18}{20} = 4$ cachorros; $M_o = 5$ cachorros y $M = 4$ cachorros

c) $Q_1 = 3$ y $Q_3 = 5$

15.A3 **En un Ayuntamiento están presentes cuatro formaciones políticas: *A*, *B*, *C* y *D*. El gráfico representa el porcentaje de concejales que pertenecen a cada una de ellas. El número total de concejales del Ayuntamiento es 25.**



a) Construye la tabla de frecuencias absolutas y relativas de la distribución.

b) Halla la moda.

a)

x_i	f_i	h_i
A	10	0,40
B	8	0,32
C	5	0,20
D	2	0,08

b) $M_o = A$

15.A4 **Las alturas, en centímetros, de 10 alumnos de 3.º de ESO son 162, 168, 154, 170, 176, 166, 178, 174, 170, 164.**

a) ¿Cuál es la altura media?

b) Calcula el rango y la desviación típica.

a) $\overline{x} = \frac{1\,682}{10} = 168{,}2$ cm

b) Rango $= 178 - 154$ cm

$$s = \sqrt{\frac{162^2 + 168^2 + 154^2 + 170^2 \cdot 2 + 176^2 + 166^2 + 178^2 + 174^2 + 164^2}{10} - 168{,}2^2} = 6{,}78 \text{ cm}$$

15.A5 **Se ha controlado durante un mes el paso de camiones por una determinada carretera, agrupándose los resultados por intervalos según se refleja en la siguiente tabla.**

N.º de camiones/día	N.º de días
[100, 150)	4
[150, 200)	6
[200, 250)	10
[250, 300)	7
[300, 350)	3

a) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.

b) Halla el coeficiente de variación.

Camiones/día	x_i	f_i
[100, 150)	125	4
[150, 200)	175	6
[200, 250)	225	10
[250, 300)	275	7
[300, 350)	325	3

a) $\overline{x} = \frac{6\,700}{30} = 223{,}33$ camiones/día

$$s = \sqrt{\frac{125^2 \cdot 4 + 175^2 \cdot 6 + 225^2 \cdot 10 + 275^2 \cdot 7 + 325^2 \cdot 3}{10} - 223{,}33^2} = 58{,}44 \text{ camiones/día}$$

b) $CV = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{58{,}44}{223{,}33} = 0{,}26 = 26\,\%$

15.A6 **Durante dos semanas consecutivas, se contabilizó el número de accidentes de tráfico producidos en una carretera.**

	L	M	X	J	V	S	D
Semana *A*	**30**	**22**	**34**	**76**	**12**	**10**	**22**
Semana *B*	**38**	**44**	**22**	**54**	**44**	**32**	**60**

Compara la dispersión del número de accidentes en las dos semanas, mediante los respectivos coeficientes de variación.

$\overline{x}_A = \dfrac{206}{7} = 29{,}43$ accidentes

$s_A = \sqrt{\dfrac{10^2 + 12^2 + 22^2 \cdot 2 + 30^2 + 34^2 + 76^2}{7} - 29{,}43^2} = 20{,}64$ accidentes

$CV_A = \dfrac{s_A}{\overline{x}_A} = \dfrac{20{,}64}{29{,}43} = 70\ \%$

$\overline{x}_B = \dfrac{294}{7} = 42$ accidentes

$s_B = \sqrt{\dfrac{22^2 + 32^2 + 38^2 + 44^2 \cdot 2 + 54^2 + 60^2}{7} - 42^2} = 11{,}91$ accidentes

$CV_B = \dfrac{s_B}{\overline{x}_B} = \dfrac{11{,}91}{42} = 28\ \%$

Es mayor la dispersión en la semana *A*.

EJERCICIOS PROPUESTOS

16.1 Indica si estos experimentos son aleatorios y, en caso afirmativo, forma el espacio muestral.

a) Se extrae, sin mirar, una carta de una baraja española.

b) Se lanza un dado tetraédrico regular, cuyas caras están numeradas del 1 al 4, y anotamos el resultado de la cara oculta.

c) Se mide la longitud del perímetro de un cuadrado de 4 centímetros de lado.

a) Aleatorio. $E = \{$cartas de la baraja española$\}$

b) Aleatorio. $E = \{1, 2, 3, 4\}$

c) No aleatorio

16.2 Expresa el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios.

a) Se lanza una moneda y se anota el resultado de la cara superior.

b) Se lanza un dado de quinielas, que tiene tres caras con un 1, dos caras con una X y una cara con un 2, se espera que se pose sobre una cara y se anota el resultado de la cara superior.

c) Se extrae, sin mirar, una bola de una urna que contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8, y se anota el número de la bola extraída.

a) $E = \{$cara, cruz$\}$ b) $E = \{1, X, 2\}$ c) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

16.3 Se lanza una moneda de un euro y se anota el resultado de la cara superior.

a) Establece los distintos tipos de sucesos.

b) Escribe el espacio de sucesos.

a) Suceso elemental: {cara} o {cruz}. Suceso compuesto: {cara, cruz}. Suceso seguro: {cara, cruz}
Suceso imposible: ϕ

b) $S = \{\phi, \{$cara$\}, \{$cruz$\}, \{$cara, cruz$\}\}$

16.4 Se lanza un dado con las caras numeradas del 1 al 6, y se anota el número de la cara superior.

Determina estos tres sucesos y sus contrarios.

A = "salir impar"; B = "salir número menor que 4"; C = "salir número mayor que 8".

$A = \{1, 3, 5\}$ $\quad \overline{A} = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 2, 3\}$ $\quad \overline{B} = \{4, 5, 6\}$

$C = \phi$ $\quad \overline{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$

16.5 Se realiza un experimento que consiste en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6, y anotar el número de la cara superior. Dados estos sucesos: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5, 6\}$ y $C = \{3\}$; halla los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$ y $B \cap C$.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$; $\quad A \cap B = \{2\}$; $\quad B \cup C = \{2, 3, 5, 6\}$; $\quad B \cap C = \phi$

16.6 En el experimento del ejercicio anterior considera los sucesos $F = \{2, 4\}$ y $G = \{1, 4, 5, 6\}$.

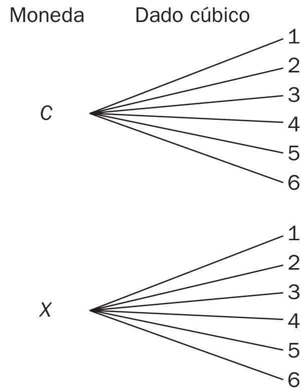
a) Determina los sucesos contrarios de F y G.

b) Obtén los sucesos $F \cup \overline{F}$, $F \cap \overline{F}$, $G \cup \overline{G}$ y $G \cap \overline{G}$.

a) $\overline{F} = \{1, 3, 5, 6\}$; $\overline{G} = \{2, 3\}$

b) $F \cup \overline{F} = G \cup \overline{G} = E$; $\qquad F \cap \overline{F} = G \cap \overline{G} = \phi$

16.7 Se lanzan una moneda y un dado cúbico. Forma el espacio muestral, construyendo previamente el diagrama en árbol.



$E = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, X1, X2, X3, X4, X5, X6\}$

16.8 Se extrae una carta de una baraja española, y se lanza un dado tetraédrico y una moneda. ¿Cuántos resultados diferentes podemos obtener?

Para cada una de las 40 cartas de la baraja hay 4 posibles valores del dado y 2 de la moneda.

$40 \cdot 4 \cdot 2 = 320$ resultados

16.9 En una clase de 3.º de ESO hay 16 chicas y 14 chicos. Se escribe el nombre de cada uno de ellos en una tarjeta y se introducen en una caja las 30 tarjetas. A continuación, se extrae una tarjeta. Halla las siguientes probabilidades.

a) La tarjeta extraída tiene el nombre de un chico.

b) La tarjeta extraída tiene el nombre de una chica.

a) $P = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$ b) $P = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

16.10 En una caja de caramelos hay 10 de menta, 6 de fresa y 5 de anís. Se escoge un caramelo al azar. Halla las siguientes probabilidades.

a) Que el caramelo sea de menta.

b) Que el caramelo sea de fresa.

c) Que el caramelo sea de anís.

a) $P = \frac{10}{21}$ b) $P = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ c) $P = \frac{5}{21}$

16.11 Determina la probabilidad de que al extraer al azar una carta de una baraja española:

a) Sea un caballo.

b) No sea un caballo.

c) Sea una de espadas.

d) No sea una de espadas.

a) $P = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

b) $1 - 0{,}1 = 0{,}9$

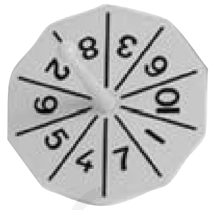
c) $P = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

d) $1 - 0{,}25 = 0{,}75$

16.12 La probabilidad de que mañana llueva es $\frac{2}{7}$. ¿Cuál es la probabilidad de que mañana no llueva?

$P = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

16.13 Se gira la perindola y se anota el número sobre el que se apoya. Si A = "salir número mayor de 3", B = "salir número par" y C = "salir múltiplo de 5", calcula $P(A \cup B)$ y $P(B \cup C)$.



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{10} + \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

16.14 Se lanza un dado octaédrico regular cuyas caras están numeradas del 1 al 8, y anotamos el número de la cara oculta. Si A = "salir número múltiplo de 3", B = "salir número par" y C = "salir número impar", calcula:

a) $P(A \cup B)$ **b) $P(B \cup C)$**

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

b) $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - 0 = 1$

16.15 Se lanzan 3 dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6.

a) Determina la probabilidad de obtener 3 cincos.

b) Halla la probabilidad de obtener 3 números impares.

a) $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ b) $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

16.16 En un juego de ordenador aparecen 3 frutas al azar, por ejemplo: PERA - MANZANA - PIÑA.

Si hay programadas 5 frutas diferentes para cada una de las 3 posiciones, calcula la probabilidad de obtener el resultado del ejemplo.

$P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$

16.17 Se extraen sucesivamente 2 bolas de una urna que contiene 12 bolas amarillas y 7 bolas negras. Halla la probabilidad de que ambas sean amarillas si la primera bola extraída:

a) Se devuelve a la urna.

b) No se devuelve a la urna.

a) $P = \frac{12}{19} \cdot \frac{12}{19} = 0{,}40$ b) $P = \frac{12}{19} \cdot \frac{11}{18} = \frac{22}{57} = 0{,}39$

16.18 En una bolsa hay 10 bolas numeradas del 0 al 9. Se realiza un experimento que consiste en extraer sucesivamente 2 bolas.

Halla la probabilidad de que ambas correspondan a un número impar si la primera bola extraída:

a) Se devuelve a la bolsa.

b) No se devuelve a la bolsa.

a) $P = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{25}{100} = 0{,}25$ b) $P = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90} = 0{,}22$

16.19 **Un dado se ha lanzado 20 veces y se ha obtenido 9 veces la cara 6. Después se ha lanzado 10 000 veces y se ha obtenido 1 650 veces la cara 6.**

a) ¿Crees que el dado está trucado?

b) ¿Cuál es la probabilidad asignada al suceso "obtener la cara 6"?

a) No

b) $P = \frac{1\,650}{10\,000} = 0{,}165$

16.20 **Con la ayuda de una calculadora, elige ocho números del 0 al 99. Explica detalladamente el proceso seguido.**

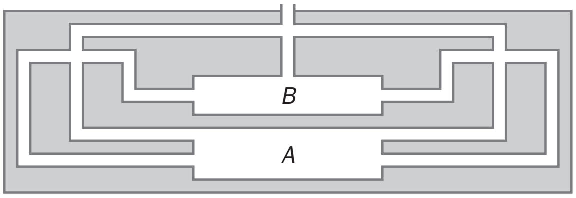
Respuesta abierta. Se obtiene un número aleatorio (entre 0 y 1) usando la tecla RAN# de la calculadora. Se multiplica por 100 dicho número. Se suprime la parte decimal.

16.21 **Simula con tu calculadora el resultado de una quiniela de 15 partidos.**

Respuesta abierta.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

16.22 **En una caseta del parque de atracciones los usuarios tienen la posibilidad de entrar gratis en este laberinto.**

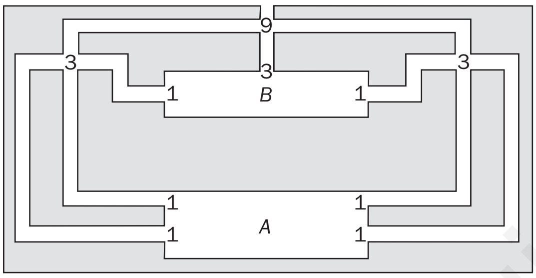


Si acaban en el recinto *A*, no tienen que pagar la atracción, pero si acaban en el recinto *B*, han de pagar el doble. ¿Cuál es la probabilidad de acabar en el recinto *A*? ¿Y en el recinto *B*?

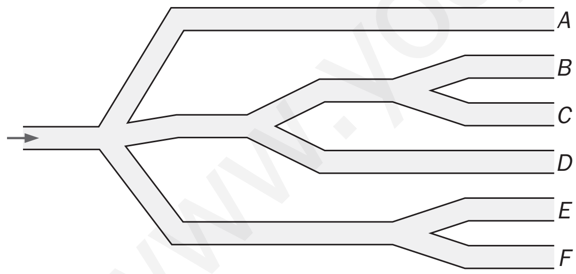
El diagrama tiene 9 bifurcaciones. Partimos de 9 visitantes al principio del laberinto. Distribuimos las personas a partes iguales en cada bifurcación del laberinto.

En el recinto A entrarán 4 personas: $P(A) = \frac{4}{9}$.

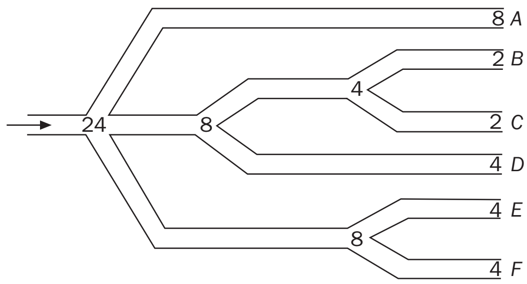
En el recinto B entrarán las otras 5 restantes: $P(B) = \frac{5}{9}$.



16.23 **Una persona entra en el laberinto de la figura.**



Halla la probabilidad de que llegue a cada uno de los extremos.



$P(A) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ $P(D) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

$P(B) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ $P(E) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

$P(C) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ $P(F) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

Experimentos y sucesos aleatorios

16.24 Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios.

a) Número de personas que suben a un autobús en una parada.

b) Aplicar el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo.

c) Conocer el ganador de la Liga de Campeones.

d) Calcular la raíz cuadrada de un número.

a) Aleatorio b) No aleatorio c) Aleatorio d) No aleatorio

16.25 Se considera el experimento aleatorio consistente en sacar una bola de una urna en la que hay 9 bolas numeradas del 1 al 9. Determina:

a) El espacio muestral.

b) El suceso A = "sacar un número par".

c) El suceso B = "sacar un número mayor que 3".

d) Los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$. ¿Son A y B incompatibles?

e) El suceso contrario de B.

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) $A = \{2, 4, 6, 8\}$

c) $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

d) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{4, 6, 8\}$, A y B no son incompatibles.

e) $\overline{B} = \{1, 2, 3\}$

16.26 Se lanza un dado cúbico. Indica los sucesos elementales que forman cada uno de estos sucesos.

a) Sacar un múltiplo de 3.

b) Sacar un número menor que 4.

c) Sacar un 0.

d) Sacar un número primo mayor que 3.

e) Sacar un número menor que 7.

a) $A = \{3, 6\}$

b) $B = \{1, 2, 3\}$

c) Suceso imposible: ϕ

d) $D = \{5\}$

e) Suceso seguro: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Técnicas de recuento

16.27 Un experimento consiste en lanzar sucesivamente una moneda y un dado octaédrico. ¿Cuántos resultados posibles tiene este experimento? Utiliza un diagrama en árbol para orientarte.

Resultados posibles: 16. $E = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7, X8\}$

16.28 Sonia tiene 2 pantalones de deporte, 4 camisetas y 3 pares de zapatillas. ¿De cuántas formas distintas se puede vestir para hacer ejercicio?

Resultados posibles: $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

16.29 Con las letras de la palabra AMOR formamos todas las palabras posibles de cuatro letras, tengan o no sentido, sin repetir ninguna. ¿Cuántos resultados posibles podemos obtener?

Resultados posibles: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

16.30 ¿Cuántos números de dos cifras se pueden escribir utilizando los dígitos {2, 4, 6, 8}?

Resultados posibles: $4 \cdot 4 = 16$

Probabilidad de sucesos

16.31 Elegida una persona al azar, calcula la probabilidad de que la última cifra de su DNI sea:

a) El 8. **b) Un número par.** **c) Un múltiplo de 4.**

a) $P(A) = \frac{1}{10}$ b) $P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ c) $P(C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

16.32 En una urna hay 30 bolas numeradas del 1 al 30. Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que la bola extraída:

a) Sea un número par.

b) Sea un número que termina en 0.

c) Sea un múltiplo de 5.

d) No sea un múltiplo de 3.

a) $P(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

b) $P(B) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

c) $P(C) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

d) $P(D) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

16.33 Se elige al azar una carta de la baraja española de 40 cartas. Halla la probabilidad de que la carta extraída:

a) Sea un rey.

b) No sea un rey.

c) Sea una copa.

d) Sea el rey de copas.

e) Sea un rey o una copa.

f) Sea un rey y no sea copa.

a) $P(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

b) $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

c) $P(C) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

d) $P(D) = \frac{1}{40}$

e) $P(E) = \frac{13}{40}$

f) $P(F) = \frac{3}{40}$

16.34 En una caja hay 2 bolas negras, 4 bolas azules y 3 verdes. Calcula la probabilidad de que al extraer una bola al azar:

a) Sea negra.

b) Sea negra o azul.

c) No sea roja.

d) Sea roja

e) No sea azul.

f) Sea azul y negra.

a) $P(A) = \frac{2}{9}$

b) $P(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

c) $P(C) = \frac{9}{9} = 1$

d) $P(D) = 0$ (suceso imposible)

e) $P(E) = \frac{5}{9}$

f) $P(F) = 0$ (suceso imposible)

16.35 Calcula la probabilidad de que la última cifra de un número de teléfono sea:

a) Un 7.

b) Un múltiplo de 3.

c) Mayor que 5.

d) Menor que 2.

a) $P(A) = \frac{1}{10}$

b) $P(B) = \frac{3}{10}$

c) $P(C) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

d) $P(D) = \frac{3}{10}$

16.36 Se lanza un dado al aire y se consideran estos sucesos:

A = "sacar un número par"

B = "sacar menos que 3"

C = "sacar un 5"

Forma los siguientes sucesos y halla su probabilidad.

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A \cup B \cup C$

d) $B \cup C$

e) $A \cap C$

f) $A \cap B \cup C$

a) $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$, $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

b) $A \cap B = \{2\}$, $P = \frac{1}{6}$

c) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, $P = \frac{5}{6}$

d) $B \cup C = \{1, 2, 5\}$, $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

e) $A \cap C = \phi$, $P = 0$

f) $A \cap B \cup C = \{2, 5\}$, $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Experimentos compuestos

16.37 Calcula la probabilidad de que, al sacar sucesivamente dos cartas de una baraja española, las dos sean caballo.

a) Si se devuelve al mazo la primera.

b) Si no se devuelve.

a) $P(A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$

b) $P(B) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

16.38 Una bolsa contiene 4 bolas rojas, 3 azules y 2 verdes. Se extraen, sin devolución, 2 bolas de la bolsa. Calcula la probabilidad de estos sucesos.

a) Se extraen las dos rojas.

b) No se extrae ninguna bola verde.

a) $P(A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$

b) $P(B) = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{12}$

16.39 En una clase de 3.º de ESO hay 12 chicas y 16 chicos. Se eligen dos personas al azar.

Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean chicas.

b) Sean una chica y un chico.

a) $P(A) = \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} = \frac{11}{63}$

b) $P(B) = \frac{12}{28} \cdot \frac{16}{27} + \frac{16}{28} \cdot \frac{12}{27} = \frac{32}{63}$

16.40 En una urna hay 5 bolas blancas y 4 negras. Sacamos una bola y, sin devolverla a la urna, sacamos otra. Calcula:

a) La probabilidad de que ambas sean de distinto color.

b) La probabilidad de que ambas sean blancas.

c) La probabilidad de que ambas sean del mismo color.

d) La probabilidad de que ambas sean de distinto color, considerando que ha habido devolución a la urna de la bola extraída.

a) $P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{9}$

b) $P(B) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$

c) $P(C) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{4}{9}$

d) $P(D) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{40}{81}$

Probabilidad experimental y simulación

16.41 Una señora está esperando un hijo. Se trata de buscar experimentalmente la probabilidad de que sea una niña. ¿Cuáles de las siguientes simulaciones son válidas para la comprobación experimental de dicha probabilidad?

a) Lanzar un dado, y si sale par, representa un niño, y si sale impar, una niña.

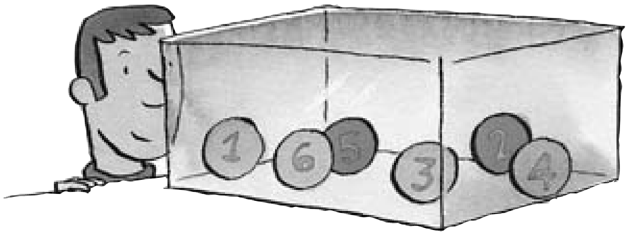
b) Meter en una urna 3 bolas verdes y 4 rojas. Si sale una bola verde, representa un niño, y si sale roja, una niña.

c) Tirar una moneda al aire. Si sale cara, representa un niño, y si sale cruz, una niña.

La a y la c

CUESTIONES PARA ACLARARSE

16.42 Sacamos una bola de la urna de la figura.



Completa la siguiente tabla.

Suceso	Resultados favorables	Probabilidad
Sea azul	**{1, 3, 4, 6}**	**4/6 = 2/3**
Sea par	{2, 4, 6}	3/6 = 1/2
Sea naranja impar	{5}	1/6
Sea naranja	{2, 5}	2/6 = 1/3

16.43 Dos sucesos contrarios, ¿son incompatibles? Dos sucesos incompatibles, ¿son contrarios? Razona las respuestas.

Los sucesos contrarios son siempre incompatibles porque no se pueden dar a la vez, pero dos sucesos incompatibles no tienen por qué ser contrarios. Por ejemplo, ser hombre es incompatible con tener un embarazo, pero los dos sucesos no son contrarios.

16.44 El suceso intersección de dos sucesos contrarios, ¿es el suceso imposible?

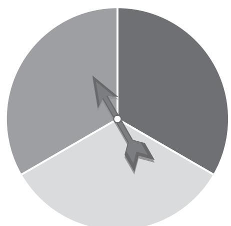
Sí, porque $P(A \cap \overline{A}) = 0$

16.45 Calcula la probabilidad de que al hacer girar la ruleta, se pare en uno de estos colores.

a) Rojo.

b) Amarillo.

c) Azul o rojo.



a) $P(R) = \frac{1}{3}$ b) $P(Am) = \frac{1}{3}$ c) $P(Az \cup R) = \frac{2}{3}$

16.46 En cada uno de los siguientes experimentos aleatorios, señala si los sucesos elementales que forman el espacio muestral son o no equiprobables.

a) Al tirar un dado, que salga un número par o impar.

b) Obtener una nota de 0 a 10 en un test contestando al azar.

c) Las posibles sumas de las puntuaciones obtenidas al lanzar dos dados.

a) Equiprobables b) Equiprobables c) No equiprobables

16.47 **¿Puede ocurrir que $P(M) = 0,4$; $P(N) = 0,6$; $P(M \cup N) = 0,7$ y $P(M \cap N) = 0,2$?**

No, puesto que $P(M \cup N) \neq P(M) + P(N) - P(M \cap N) \Leftrightarrow 0,7 \neq 0,4 + 0,6 - 0,2 = 0,8$

16.48 **Si A y B son sucesos incompatibles, tales que $P(A \cup B) = 1$, ¿cómo son A y B?**

Contrarios, pues $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(B)$

16.49 **¿De qué depende el que sea mínima la diferencia entre el resultado que se obtiene al realizar una experiencia de simulación y la probabilidad teórica del suceso estudiado?**

Si la simulación está bien planteada, cuanto mayor sea el número de veces que se realice dicha simulación, más cercano estará el resultado experimental y el teórico.

PROBLEMAS PARA APLICAR

16.50 En una familia con 3 hijos se consideran los siguientes sucesos.

A = "el hijo mayor es un chico".

B = "los dos hijos pequeños son chicas".

C = "al menos uno de los hijos es chico".

a) ¿Son A y B independientes?

b) ¿Son B y C incompatibles?

c) ¿Cuál es el suceso contrario de C?

a) Sí, el sexo del hijo mayor no condiciona el de los dos pequeños.

b) No, el mayor puede ser chico.

c) "Todos los hijos son chicas".

16.51 Se lanza una moneda 2 veces. Calcula la probabilidad de estos sucesos.

a) Salir dos cruces.

b) Salir al menos una cara.

a) $P(X \cap X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) Es el suceso contrario al anterior: $1 - P(X \cap X) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

16.52 Calcula la probabilidad de que, al lanzar 2 dados al aire, la suma de puntos que se consigue sea siete.

Casos posibles: 36; casos favorables: (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) $\Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

16.53 Se lanza un dado. Determina la probabilidad de que haya salido un 2, sabiendo que ha salido un número menor que 5.

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

16.54 Considera los números de tres cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que, elegido uno al azar, sus 3 dígitos sean distintos?

Casos posibles: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$; casos favorables: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648 \Rightarrow P(A) = \frac{648}{900} = \frac{18}{25}$

16.55 ¿De cuántas formas diferentes se pueden rellenar los quince partidos de una quiniela con 1, *X*, 2?

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3 = 3^{15}$$

16.56 **En un garaje hay 4 coches de la marca *A*, de los cuales 2 son negros, y 6 coches de la marca *B*, de los cuales 4 son negros. Calcula la probabilidad de que al elegir un coche al azar:**

a) Sea de la marca *A*

b) Sea negro.

c) Sea negro de la marca *A*.

d) Sea de la marca *B*, pero no negro.

e) Sabiendo que es negro, sea de la marca *B*.

f) Sabiendo que es de la marca *A*, sea negro.

a) $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

b) $P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

c) $P(C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

d) $P(D) = \frac{2}{10} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

e) $P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

f) $P(F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

16.57 **En una nevera hay 6 tomates verdes, 4 tomates rojos, 3 limones y 5 naranjas. Sacamos una pieza al azar. Halla la probabilidad de:**

a) Sacar un tomate verde.

b) No sacar un tomate.

c) Sabiendo que es un tomate, que sea rojo.

a) $P(A) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ b) $P(B) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ c) $P(C) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

16.58 **Un bombo tiene 3 bolas numeradas del 1 al 3, y un segundo bombo tiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Se saca una bola del primer bombo y, a continuación, una bola del segundo.**

Calcula la probabilidad de que salga:

a) El número 34.

b) Un número mayor que 15.

c) Un número menor que 30.

a) $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

b) $P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{2}{3}$

c) $P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{2}{3}$

16.59 **En la lotería primitiva se extraen de un bombo bolas numeradas del 1 al 49. Se extrae la primera bola.**

a) ¿Es más probable que acabe en 5 que en 0?

b) ¿Es más probable que sea un número par o que sea menor que 24?

c) ¿Es más probable que sea un número de dos cifras que empiece por 3 o que sea un número múltiplo de 3?

a) En 5, pues $P(5) = \frac{5}{59}$; $P(0) = \frac{4}{49}$

b) Par, pues $P(\text{P}) = \frac{24}{49}$ y $P(< 24) = \frac{23}{49}$

c) Es más probable que sea múltiplo de tres, pues $P(A) = \frac{10}{49}$; $P(B) = \frac{16}{49}$.

16.60 **En una bolsa hay 6 monedas de 50 céntimos, 4 de un euro y 5 de dos euros. Sacamos una moneda al azar y, sin devolverla a la bolsa, sacamos una segunda moneda. Calcula la probabilidad de sacar en total:**

a) Cuatro euros.

b) Más de un euro.

c) Menos de cuatro euros.

a) Es el suceso "las dos monedas sean de 2 €", $P(A) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$.

b) Es el suceso contrario a "las dos monedas son de 50 céntimos", $1 - P(B) = 1 - \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{6}{7}$.

c) Es el suceso contrario al del apartado a: $P(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}$.

16.61 **En el camino de casa a su colegio, Clara tiene que cruzar dos semáforos. La probabilidad de que cada uno de ellos se encuentre en verde al llegar Clara es del 30 %. Tienes bolas verdes y rojas para realizar una simulación experimental que sirva para calcular la probabilidad de que Clara se encuentre en su trayecto al colegio los dos semáforos en verde. ¿Cuántas bolas debes usar de cada color para efectuar la simulación? Explica en qué consiste y compara el resultado que obtienes con su probabilidad teórica.**

3 bolas verdes y 7 rojas. Si sacas una bola verde, es que al llegar al semáforo está verde, y si la sacas roja, es que está en rojo. Hay que volver a introducir la bola extraída para hacer lo mismo con el segundo semáforo.

R E F U E R Z O

Sucesos aleatorios y técnicas de recuento

16.62 Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas y se consideran los sucesos:

A = "sacar una copa"; B = "sacar un rey"; C = "sacar una carta menor que 5".

Determina estos sucesos.

a) $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$.

b) $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$.

c) $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$.

d) El suceso contrario de C.

e) El suceso contrario de $A \cup B$.

a) $A \cup B$ = "sacar una copa o un rey"; $A \cup C$ = "sacar una copa o una carta menor que 5"; $B \cup C$ = "sacar un rey o una carta menor que 5".

b) $A \cap B$ = "sacar el rey de copas"; $A \cap C$ = "sacar una copa menor que 5"; $B \cap C$ es un suceso imposible.

c) $A \cup B \cup C$ = "sacar una copa o un rey, o una carta menor que 5"; $A \cap B \cap C$ es un suceso imposible.

d) $\overline{C}$ = "sacar una carta mayor que 4".

e) $\overline{A \cup B}$ = "no sacar ni una copa ni un rey".

Probabilidad de sucesos

16.63 Se extrae una bola de una bolsa que contiene 4 bolas blancas, 5 rojas y 2 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea negra?

$$P(A) = P(\text{blanca}) + P(\text{roja}) = \frac{4}{11} + \frac{5}{11} = \frac{9}{11}$$

16.64 Calcula la probabilidad de obtener un as o un oro al extraer una carta de una baraja española.

$$P(\text{As} \cup \text{Oro}) = P(\text{As}) + P(\text{oro}) - P(\text{As} \cap \text{Oro}) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

16.65 Una urna contiene 8 bolas rojas, 5 verdes y 9 azules. Determina la probabilidad de que al extraer una bola al azar:

a) Sea verde.

b) Sea roja o azul.

a) $P(V) = \dfrac{5}{22}$

b) $P(R \cup A) = \dfrac{17}{22}$. Son sucesos complementarios. $\overline{V} = R \cup A$.

16.66 El dominó es un juego en el que la cara superior de las fichas está dividida en dos cuadrados, cada uno de los cuales lleva marcados de 0 a 6 puntos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, elegida una ficha al azar, la suma de sus puntos sea 12?

b) ¿Y de que sea 5?

c) ¿Y de que no aparezca el 6 en uno de los cuadrados?

a) Casos favorables $(6 - 6) \Rightarrow P(12) = \frac{1}{28}$

b) Casos favorables $(0 - 5)$, $(1 - 4)$, $(2 - 3) \Rightarrow P(5) = \frac{3}{28}$

c) $P(D) = \frac{21}{28}$

Experimentos compuestos

16.67 Se lanza una moneda 3 veces. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Sacar 3 cruces.

b) Obtener al menos una cara.

a) $P(X \cap X \cap X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) Es el suceso contrario a que salgan todas cruces, $1 - P(X \cap X \cap X) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

16.68 Cristina lanza 2 dados. Halla la probabilidad de que la suma de sus puntos sea nueve.

Casos favorables: (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) $\Rightarrow P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

AMPLIACIÓN

16.69 Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}3$ y $P(B) = 0{,}2$. ¿Es posible que $P(A \cup B) = 0{,}6$?

No, porque $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}6 = 0{,}3 + 0{,}2 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = -0{,}1$, y la probabilidad de cualquier suceso no puede ser negativa.

16.70 Calcula la probabilidad del suceso A, sabiendo que $2 \cdot P(A) + P(\overline{A}) = 1{,}4$.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot P(A) + P(\overline{A}) = 1{,}4 \\ P(A) + P(\overline{A}) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = 0{,}4$$

16.71 Considera los números de 5 cifras.

a) ¿Cuántos son capicúas?

b) ¿Cuántos son impares?

c) ¿Cuántos tienen las cinco cifras distintas?

d) ¿Cuántos son pares, capicúas y mayores de 50 000?

a) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 900$

b) $\dfrac{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{2} = 45\,000$

c) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$

d) $2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 200$

16.72 Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{5}$, calcula $P(A \cup B)$.

A es la unión de dos sucesos incompatibles,

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B})$. Entonces,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) + P(A \cap \overline{B}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15}$$

16.73 En una caja hay un número desconocido de bolas blancas y una bola negra. Se extraen de la caja simultáneamente dos bolas al azar, sin reemplazamiento. Si la probabilidad de que ambas sean blancas es 0,5, calcula el número de bolas blancas que hay en la caja.

Sea x el número de bolas blancas,

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{x-1}{x+1} = 0{,}5 \Rightarrow x - 1 = 0{,}5x + 0{,}5 \Rightarrow 0{,}5x = 1{,}5 \Rightarrow x = 3$$

16.74 **En una reunión se junta un grupo de personas con las características de la tabla.**

	Donante	No donante
Hombre	8	4
Mujer	12	6

Calcula la probabilidad de que, al elegir una persona al azar:

a) Sea hombre.

b) No sea donante.

c) Sea mujer donante.

d) Sabiendo que es un hombre, no sea donante.

a) $P(H) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

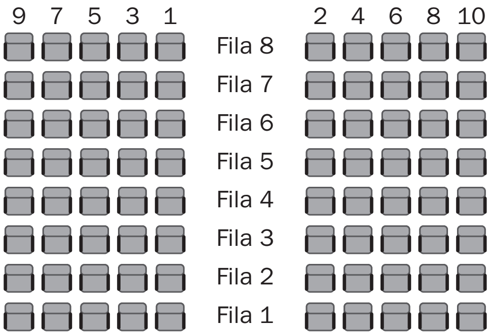
b) $P(\overline{D}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

c) $P(M \cap D) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

d) $P(\overline{D}_H) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

16.75 La compañía



Elena ha ido al cine con cuatro amigos, pero no han podido conseguir entradas para sentarse todos juntos.

Tienen las butacas 3 y 5 de la fila 6, y las butacas 6, 8 y 10 de la fila 1.

Como los asientos tienen ubicaciones diferentes, deciden repartir las entradas al azar.

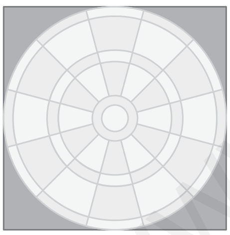
¿Qué es más fácil, que Elena no se siente en la fila 1 o que esté sentada entre dos de sus amigos?

La probabilidad de que Elena no se siente en la Fila 1 es $\frac{2}{5}$.

La probabilidad que Elena esté sentada entre dos amigos es $\frac{1}{5}$ ya que, para que esto ocurra, sólo existe la posibilidad de que ocupe el asiento 8 de la fila 1.

Por tanto, es más fácil la primera condición.

16.76 La diana



La diana de la figura está formada por un círculo inscrito en un cuadrado.

Se considera que al lanzar un dardo, siempre cae dentro del cuadrado y que tiene la misma probabilidad de hacerlo en cualquier punto de las dos zonas.

Si el dardo acierta en la zona amarilla, se obtiene un punto.

Si el dardo acierta en la zona verde, se obtienen dos puntos.

a) Calcula la probabilidad de que al tirar un dardo se obtenga un punto.

b) Calcula la probabilidad de que al lanzar dos dardos se obtengan tres puntos.

Si el lado del cuadrado mide $2a$ cm, el radio del círculo mide a cm.

Área del cuadrado: $4a^2$; área de la zona amarilla: πa^2; área de la zona verde: $(4 - \pi)a^2$

Probabilidad de acertar en la zona amarilla: $\frac{\text{Área de la zona amarilla}}{\text{Área del cuadrado}} = \frac{\pi a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785$

Probabilidad de acertar en la zona verde: $\frac{\text{Área de la zona verde}}{\text{Área del cuadrado}} = \frac{(4 - \pi)a^2}{4a^2} = 0{,}215$

a) 0,785

b) $0{,}785 \cdot 0{,}215 + 0{,}215 \cdot 0{,}785 = 0{,}338$

AUTOEVALUACIÓN

16.A1 **Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios.**

a) El resultado de un partido de baloncesto.

b) El lanzamiento de un dado.

c) El cálculo del área de la superficie de un triángulo.

d) El precio de una llamada de teléfono.

a) Aleatorio

b) Aleatorio

c) No aleatorio

d) No aleatorio

16.A2 **En un experimento aleatorio que consiste en sacar una carta de una baraja española, se consideran los siguientes sucesos:**

A = "sacar un rey".

B = "sacar una copa".

C = "sacar un número menor que 3".

Determina estos sucesos.

a) El contrario de C.

b) $A \cup B$

c) $B \cap C$

d) $A \cap C$

a) $\overline{C}$ = "sacar un número mayor que 2".

b) $A \cup B$ = "sacar un rey o una copa".

c) $B \cap C$ = "sacar el 1 o el 2 de copas".

d) $A \cap C$ es el suceso imposible.

16.A3 **Se lanza un dado cúbico. Calcula la probabilidad de obtener cada uno de estos resultados.**

a) Un 6.

b) Un número mayor que 4.

c) Un número menor que 7.

d) Un número impar.

e) Un 2 o un 3.

a) $P(A) = \frac{1}{6}$

b) $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) $P(C) = \frac{6}{6} = 1$

d) $P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

e) $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

16.A4 Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}4$; $P(\overline{B}) = 0{,}3$; $P(A \cap B) = 0{,}2$, calcula $P(A \cup B)$.

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}9$

16.A5 ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos {1, 3, 5}? ¿Cuántos tienen las tres cifras distintas?

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

b) $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

16.A6 ¿Cuál es la probabilidad de que, al extraer dos cartas de una baraja española, las dos sean oros?

a) Si la primera se devuelve al mazo.

b) Si no se devuelve.

a) $P(O_1 \cap O_2) = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{16}$

b) $P(O_1 \cap O_2) = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39} = \dfrac{9}{156} = \dfrac{3}{52}$

16.A7 Una pareja tiene 3 hijos. Halla la probabilidad de estos sucesos.

a) Los tres son chicos.

b) El mayor es chico y los otros dos chicas.

c) El segundo es chico.

a) $P(A) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

b) $P(B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

c) $P(C) = \dfrac{1}{2}$

16.A8 En una urna hay 3 bolas blancas y 2 negras. Se extrae al azar una bola, se anota su color, se devuelve a la urna y, a continuación, se saca una segunda bola. Calcula la probabilidad de que las dos bolas sean:

a) Negras.

b) Blancas.

a) $P(N_1 \cap N_2) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{25}$

b) $P(B_1 \cap B_2) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{25}$