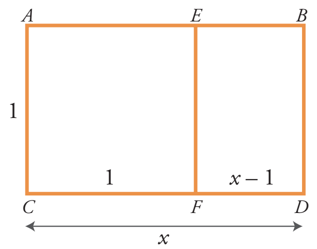
EL NÚMERO DE ORO

- Vamos a considerar un rectángulo $ABCD$ de altura 1 en el que se cumpla la siguiente propiedad:



«Si suprimimos el cuadrado $AECF$ de lado 1, el rectángulo que queda, $EBDF$ es semejante al inicial»;

es decir: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{1}{x-1}$

- Obtengamos el valor de la base de este rectángulo, x:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \;\rightarrow\; x^2 - x = 1 \;\rightarrow\; x^2 - x - 1 = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones; solo una de ellas es positiva:

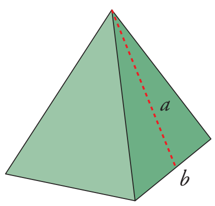
$$\boxed{x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

- A este número que hemos obtenido se le llama **número de oro,** y se denota con la letra griega **Φ**.

  Es un número irracional cuyo valor aproximado es 1,61803…
- Un rectángulo con estas proporciones se llama **rectángulo áureo** y guarda unas proporciones que resultan muy agradables a la vista. Así, si a un grupo de personas se les muestran rectángulos con diversas proporciones, casi todas elegirán el rectángulo áureo. Por eso, a la relación entre los lados de este rectángulo, los griegos le dieron el nombre de **razón áurea** o **divina proporción.**
- Por esta razón se ha utilizado en el arte, en las tarjetas de crédito, en el carnet de identidad, en los envases de algunos productos, en muchas cajetillas de tabaco, en algunas películas de cine…

El número de oro en la historia

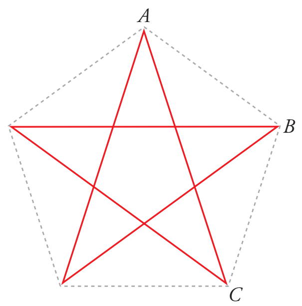
- Sus comienzos se sitúan en **Egipto.** Aparece, por ejemplo, en construcciones como la **pirámide de Keops,** en la que el cociente entre la altura de uno cualquiera de sus triángulos con el lado de la base es igual a **Φ**:



$$\boxed{\frac{a}{b} = \Phi}$$

- Los **griegos pitagóricos** (seguidores de las teorías de Pitágoras) pensaban que el mundo se regía por su orden numérico y geométrico. Para ellos, los únicos números existentes eran los naturales y las relaciones entre ellos (fracciones). Su emblema era la estrella de cinco puntas o pentágono estrellado. Esta estrella representaba la vida y, puesta con una de sus vértices hacia abajo, representa lo contrario (lo maléfico).

  En un pentágono regular, la relación entre su diagonal y su lado es **Φ**:



$$\boxed{\frac{AC}{AB} = \Phi}$$

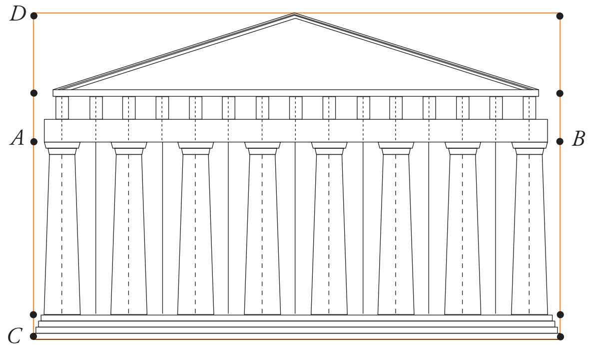
  Cuando llegaron a la conclusión de que esta relación no se podía expresar como cociente de dos números enteros, se quedaron espantados, y les pareció tan contrario a toda lógica que lo llamaron **irracional.** Es el primer número irracional del que se tuvo conciencia que lo era.

  Para los pitagóricos, las figuras tenían un valor divino. Así, el tetraedro representaba al fuego, el cubo a la tierra, el octaedro al aire, el icosaedro al agua y el dodecaedro (el único que puede circunscribir a todos los demás), al propio Universo. Opinaban que una proporción que se utilizaba para la construcción del universo había de ser necesariamente divina.

  El dodecaedro sabemos que está formado por pentágonos, en los que encontramos la proporción áurea. También en la fórmula de su volumen encontramos al número de oro, **Φ**:

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \Phi^4 \cdot a^3$$

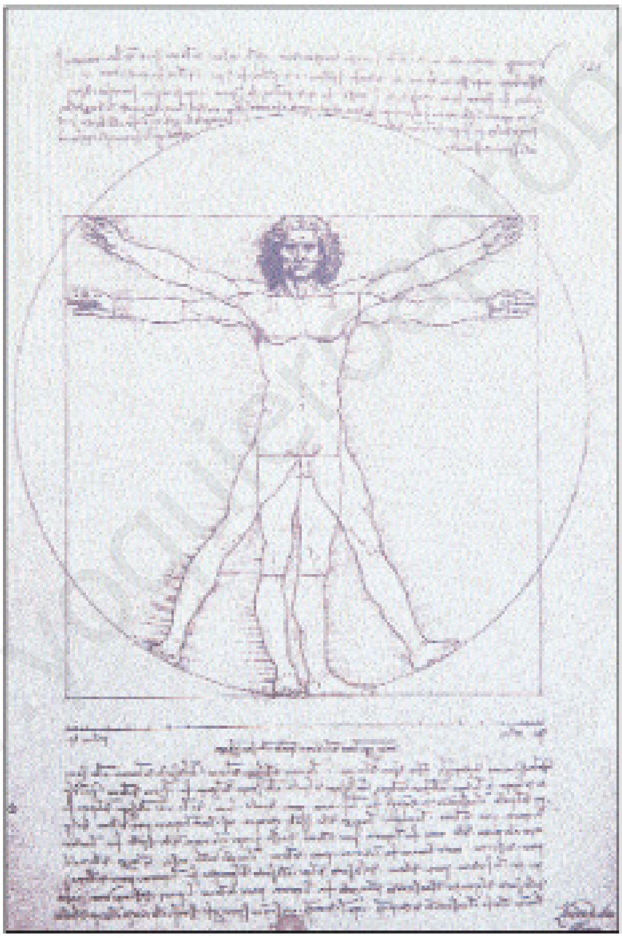
- El número de oro influyó en el arte del mundo griego, buscando la armonía en los templos y en las esculturas. El famoso escultor **Fidias** (de ahí le viene el nombre **Φ** (phi) al número de oro) en su diseño del Partenón utilizó repetidamente la proporción áurea.



El alzado del **Partenón** se enmarca en un rectángulo áureo, $\frac{AB}{CD} = \Phi$. Además, hay muchas más proporciones áureas, como por ejemplo:

$$\frac{AC}{AD} = \Phi$$

- Los romanos no lo utilizaron y tampoco apareció en la Edad Media.
- Más tarde reapareció en el **Renacimiento.** Lo encontramos, por ejemplo, en la famosa pintura de **Leonardo de Vinci** (1452-1519). El cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia desde el ombligo hasta los pies (radio de la circunferencia) es el número de oro.



- En su obra **«La divina proporción»,** editada en 1509, **Luca Pacioli** propone un hombre perfecto en el que encontramos la razón áurea en las relaciones entre distintas partes del cuerpo.
- A lo largo de la historia ha fascinado a muchos científicos, artistas, poetas, … Por ejemplo, encontramos la siguiente cita de **Kepler** (1571-1630):

  Creo que de esta proporción geométrica se sirvió el Creador como la idea por medio de la que introdujo la generación continua de objetos semejantes a partir de objetos semejantes.

Lecturas y actividades

- O este soneto que escribió **Rafael Alberti** cerrando el premio a la obra de Luca Pacioli en la edición de 1949 de la Ed. Losado, S. A., en Buenos Aires:

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

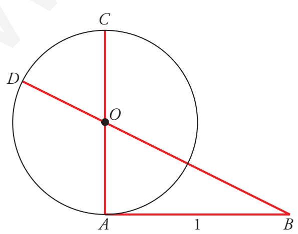
Lucas por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

- Curiosamente, también aparece en la **naturaleza:** en el crecimiento de algunas plantas, en la distribución de las hojas de algunos tallos, en el crecimiento de las conchas de algunos moluscos (ver actividad propuesta n.º 3).
- Los más apasionados del número de oro incluso hablan de su posible relación con la vida. Aseguran que, si se colocan todos los planetas en fila y se calcula cómo uno divide las distancias entre dos planetas vecinos, se observa que solo la Tierra se sitúa en el punto que se expresa por el número de sección áurea.

Actividades propuestas

1 Construcción gráfica del número de oro.

La siguiente construcción gráfica del número de oro aparece en el tratado de Euclides:



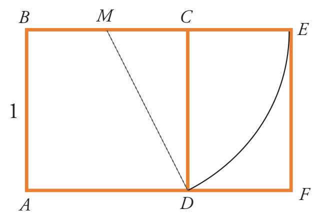
– Se dibuja un segmento AB de longitud 1, y perpendicularmente a él, otro segmento unidad, AC.

– Se marca el punto medio, O, de AC y se traza la circunferencia de centro O y radio OA.

– Uniendo B con O y prolongando hasta cortar a la circunferencia en el punto D, obtenemos el segmento BD, cuya medida es Φ.

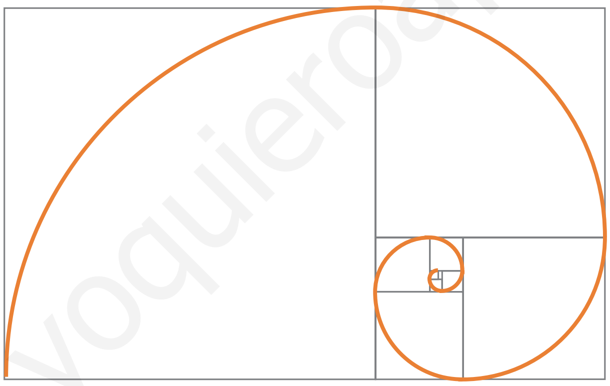
2 Construcción de un rectángulo áureo.

Sea $ABCD$ un cuadrado cualquiera. Consideramos el punto medio, M, del lado BC. Con centro en M y radio MD trazamos un arco de circunferencia que cortará a la prolongación del lado BC en un punto E. Tomamos el punto F tal que $ABEF$ sea un paralelogramo. Este rectángulo así obtenido es áureo.



3 Construcción de una espiral

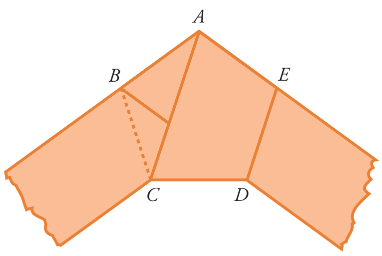
Partiendo del rectángulo áureo $ABEF$ que hemos obtenido antes, vamos a construir una espiral. Para ello dibujamos el cuadrado de lado AB que queda dentro del rectángulo original. El rectángulo que aparece al trazar el cuadrado también es áureo. En este segundo rectángulo volvemos a trazar un cuadrado «interior» de lado el más corto de los lados del segundo rectángulo. Obtenemos un tercer rectángulo áureo. La espiral aparece al dibujar los arcos de circunferencia como en la figura:



Hay muchos procesos de crecimiento de plantas, conchas de algunos moluscos, etc., que siguen esta espiral o parecidas.

4 «Nudo áureo»

a) Podemos construir un pentágono regular a partir de una tira larga de papel haciendo un nudo con ella, aplanándola cuidadosamente:



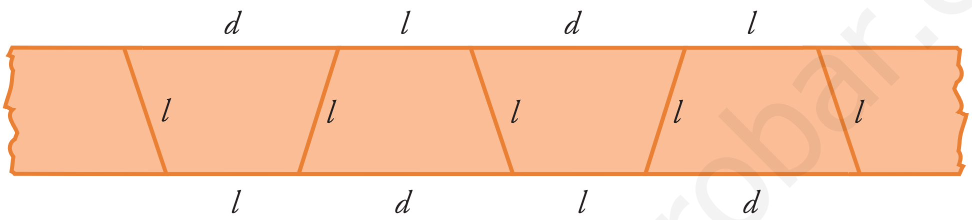
– Se puede comprobar la relación antes mencionada entre la diagonal y el lado del pentágono:

$$\frac{AC}{AB} = \Phi$$

– También podemos observar que el triángulo ACD es un triángulo isósceles en el que la relación entre cualquiera de sus lados iguales dividido entre el otro desigual es Φ:

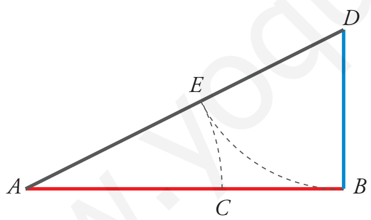
$$\frac{AC}{CD} = \Phi. \quad ACD \text{ se llama triángulo áureo.}$$

b) Si deshacemos el nudo, los dobleces determinan cuatro trapecios, los lados no paralelos y la base menor eran lados del pentágono; la base mayor era la diagonal. Por tanto, las dos bases están en proporción áurea (y la base mayor con el lado).



5 Dividir un segmento en proporción armónica.

• Dado un segmento AB, se trata de encontrar un punto C que lo divida en proporción armónica, es decir, que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$:



• Sobre B se traza un segmento, BD, perpendicular a AB y con longitud:

$$\overline{BD} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

• Con centro en D y radio $\overline{DB}$, intersecamos AD en el punto E. Con centro en A y radio $\overline{AE}$, se obtiene C (al intersecar con AB).

El punto C divide al segmento AB en proporción armónica. Así, si $\frac{AB}{AC} = \Phi$, también será $\frac{AC}{CB} = \Phi$.

– Si $\overline{AC} = 1$, entonces $\overline{AB} = \Phi$.

Soluciones a los Problemas

PÁGINA 10

¡Echa cuentas!

1 **Un joyero consigue una rebaja de 140 € en la compra de 16 broches iguales, cuyo precio, según el catálogo, es de 87,5 € cada unidad.**

¿A cuánto debe vender cada uno si desea obtener una ganancia total de 500 €?

Los 16 broches valen $\rightarrow$ 16 · 87,5 = 1 400 €

Los 16 broches le cuestan $\rightarrow$ 1 400 – 140 = 1 260 €

Para ganar 500 € debe recaudar $\rightarrow$ 1 260 + 500 = 1 760 €

El precio de venta final debe ser de $\rightarrow$ 1 760 : 16 = 110 €

2 **Un automóvil y un camión parten simultáneamente de una población, por la misma carretera, pero en sentidos opuestos.**

La velocidad del coche es de 120 km/h, y la del camión es de 90 km/h. ¿Qué distancia los separa al cabo de 10 minutos?

Se alejan uno del otro a una velocidad de $\longrightarrow$ 120 + 90 = 210 km/h

10 min = 1/6 de hora

En 1/6 de hora se distancian $\longrightarrow$ 210 · 1/6 = 35 km

3 **Dos ciclistas parten del mismo lugar, a la misma hora y en el mismo sentido. Sus velocidades respectivas son de 30 km/h y 24 km/h.**

¿Qué ventaja le sacará el primero al segundo cuando haya transcurrido una hora y cuarenta minutos?

Los ciclistas se distancian
a una velocidad de $\longrightarrow$ 30 – 24 = 6 km/h

$$1 \text{ h } 40 \text{ min} = 1 \text{ h} + \frac{4}{6} \text{ h} = \frac{10}{6} \text{ h} = \frac{5}{3} \text{ h}$$

En $\frac{5}{3}$ h se distancian $\longrightarrow 6 \cdot \frac{5}{3} = 10$ km

4 **Marta compra tres tortas, y Beatriz, dos. Cuando van a merendar, se les une su amiga Verónica, que no trae tortas. A la hora de compartir gastos, a Verónica le toca poner 5 €. ¿Cómo se repartirán esos 5 € Marta y Beatriz?**

Como tienen 5 tortas, a cada una le toca 5/3 de torta.

Marta aporta para Verónica $3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$ de torta.

Beatriz aporta para Verónica $2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$ de torta.

Los 5 € que paga Verónica los deben repartir proporcionalmente a 4/3 y a 1/3.

Por tanto, 4 € para Marta y 1 € para Beatriz.

Soluciones a los Problemas

5 **La media de las edades de Rosa, Carol y Pilar es de 12 años. ¿Cuál es la edad de Sara, si al incorporarse al grupo la media sube a 15 años?**

Si la media sube a 15 años es porque Sara ha subido a todas 3 años más y ella ha puesto sus 15. Por tanto, Sara tiene 15 + 3 + 3 + 3 = 15 + 9 = 24 años.

Si lo resolvemos algebraicamente, sería así:

$$\frac{\text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar}}{3} = 12 \rightarrow \text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar} = 12 \cdot 3 = 36$$

$$\frac{\text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar} + \text{Sara}}{4} = 15 \rightarrow \text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar} + \text{Sara} = 15 \cdot 4 = 60$$

Como Rosa + Carol + Pilar = 36, entonces 36 + Sara = 60 $\rightarrow$ Sara = 60 – 36 = 24 años

6 **Un grupo de 17 chicas y chicos de la misma edad organizan un gran viaje. A la reunión inicial acuden los padres y las madres de todos ellos, cuya edad media es de 45 años. Pero si consideramos al grupo formado por padres, madres e hijos, la edad media es de 35 años. ¿Qué edad tienen los chicos y las chicas?**

Entre padres y madres suman $\longrightarrow$ 45 · 17 · 2 = 1 530 años

Entre madres, padres e hijos suman $\longrightarrow$ 35 · 17 · 3 = 1 785 años

Solo los hijos suman $\longrightarrow$ 1 785 – 1 530 = 255 años

Cada hijo tiene $\longrightarrow$ 255 : 17 = 15 años

7 **Un granjero, tras recoger en una cesta su cosecha de huevos, piensa:**

— Si los envaso por docenas, me sobran 5.

— Si tuviera uno más, podría envasarlos, exactamente, en cajas de 10.

— Casi he recogido 100.

¿Cuántos huevos recogió el granjero?

Considerando los puntos tercero y segundo, puede tener 79 u 89 ó 99.

Eliminamos 5 huevos de cada uno de estos grupos (por el punto primero):

74 84 94

La única cantidad que resulta ser múltiplo de 12 es 84.

Por tanto, el granjero recogió 89 huevos.

8 **Fátima ha invitado a diez amigos a su fiesta de cumpleaños. Después de merendar, propone un acertijo con premio:**

"Se llevará la caja de bombones quien averigüe, sin abrirla, cuántos bombones contiene. Doy tres pistas:

- **Hay menos de cinco docenas.**
- **Están ordenados en filas de nueve.**
- **Si se repartieran entre todos los presentes, sobraría uno".**

¿Cuántos bombones contiene la caja?

Las pistas de Fátima se traducen en lo siguiente:

- Hay menos de 60 bombones.
- El número de bombones es un múltiplo de 9.

  Pueden ser 54, 45, 36, 27, 18 y 9.
- El número de bombones es una unidad mayor que un múltiplo de 11.

  Solo 45 cumple esta última condición (44 es múltiplo de 11).

9 **Los participantes en un desfile pueden agruparse, para desfilar, de 3 en 3, de 5 en 5 o de 25 en 25, pero no pueden hacerlo ni de 4 en 4 ni de 9 en 9. ¿Cuál es el número de participantes si sabemos que está entre 1 000 y 1 250?**

El número de participantes es un múltiplo de $3 \cdot 25 = 75$ (ten en cuenta que 25 es múltiplo de 5).

Los múltiplos de 75 comprendidos entre 1 000 y 1 250 son:

$$1\,050 \qquad 1\,125 \qquad 1\,200$$

1 050 no es múltiplo ni de 4 ni de 9.

1 125 es múltiplo de 9.

1 200 es múltiplo de 4.

Por tanto, el número de participantes es de 1 050.

10 **Dos hermanos rancheros se reparten una herencia a partes iguales. El primero invierte su parte en la compra de una manada de 80 caballos. El segundo compra, con la suya, un rebaño de 100 vacas. Un caballo cuesta 150 € más que una vaca. ¿A cuánto ascendía la herencia?**

$$\left.\begin{array}{l} 80 \text{ caballos} = 80 \text{ vacas} + 80 \cdot 150 \text{ €} = 80 \text{ vacas} + 12\,000 \text{ €} \\ 80 \text{ caballos} = \quad 100 \text{ vacas} \quad = 80 \text{ vacas} + 20 \text{ vacas} \end{array}\right\}$$

Por tanto, 20 vacas = 12 000 €.

1 vaca cuesta 12 000 : 20 = 600 €.

1 caballo cuesta 600 + 150 = 750 €.

$$\left.\begin{array}{l} 100 \text{ vacas valen } 60\,000 \text{ €.} \\ 80 \text{ caballos valen } 60\,000 \text{ €.} \end{array}\right\} \text{La herencia asciende a } 60\,000 + 60\,000 = 120\,000 \text{ €.}$$

11 **Un camionero presupuesta cierta cantidad de dinero para el gasto de carburante en un recorrido de 600 km. Sin embargo, una rebaja en el precio del gasóleo le supone un ahorro de 0,14 € por kilómetro, lo que le permite realizar un recorrido de 750 km con el mismo gasto. ¿Cuál fue la cantidad presupuestada para carburante?**

En 600 km ahorra $0{,}14 \cdot 600 = 84$ €.

Ahora hace 750 km; es decir, 750 – 600 = 150 km más.

Con 84 € hace 150 km. Ahora, cada kilómetro le cuesta 84 : 150 = 0,56 €.

La cantidad presupuestada es de $750 \cdot 0{,}56 = 420$ €.

PÁGINA 11

12 **Un grupo de amigos entra en una cafetería. Todos piden café, y la quinta parte de ellos pide, además, un bollo. Un café cuesta 0,85 €, y un bollo, 1,10 €. Para pagar, entregan al camarero 11 €.**

¿Han dejado propina? Si es así, ¿de cuánto ha sido?

Como se dice que la quinta parte pide un bollo, el número de amigos es un múltiplo de 5.

Si fuesen 5, las consumiciones habrían costado $5 \cdot 0{,}85 + 1{,}10 = 5{,}35$ € (cantidad muy alejada de 11 €).

Si fuesen 10 amigos, el precio de las consumiciones habría sido $5{,}35 \cdot 2 = 10{,}70$ €, muy próximo a 11 €.

Por lo tanto, han dejado una propina de $11 - 10{,}70 = 0{,}30$ € = 30 céntimos.

13 **Un grupo de amigos va a comer a un restaurante chino. Cada dos comparten un plato de arroz; cada tres, uno de salsa, y cada cuatro, uno de carne. En total se sirvieron 65 platos. ¿Cuántos amigos fueron a comer?**

El número de personas tiene que ser múltiplo de 2, de 3 y de 4. El mínimo común múltiplo de estos números es 12.

Probamos con 12:

$12 : 2 = 6$ platos de arroz

$12 : 3 = 4$ platos de salsa

$12 : 4 = 3$ platos de carne

Si fuesen 12, el total de platos sería $6 + 4 + 3 = 13$.

Pero tomaron 65 platos, y $65 : 13 = 5$. Es decir, tomaron 5 veces 13 platos.

Por tanto, el número de comensales es $12 \cdot 5 = 60$.

14 **En un salón de té solo se sirve té y tarta. Cada té vale 1,10 €, y cada ración de tarta, 2,10 €. Varios amigos realizan, todos ellos, la misma consumición. La cuenta asciende a un total de 30,10 €.**

¿Cuántos eran? ¿Qué tomó cada uno?

Un té vale 110 céntimos y una ración de tarta, 210 céntimos.

El total de la factura asciende a 3 010 céntimos.

Hemos de buscar posibles consumiciones cuyo coste total sea divisor de 3 010.

N.º DE CONSUMICIONES		COSTE TOTAL (en céntimos)	¿ES DIVISIBLE DE 3010?
1	1 té + 1 pasta	110 + 210 = 320	No
2	1 té + 2 pastas 2 tés + 1 pasta	110 + 420 = 530 220 + 210 = 430	No Sí

$3\,010 : 430 = 7$

Así pues, 7 eran los amigos y cada uno consumió dos tés y un trozo de tarta.

Otra forma de resolverlo

Consideramos, en lugar de céntimos, decenas de céntimos.

Un té vale 11 decenas de céntimos, y una ración de tarta, 21. La cuenta asciende a 310 decenas de céntimos.

Descomponemos: $301 = 7 \cdot 43 = 7 \cdot (2 \cdot 11 + 21)$

Así es fácil verlo: 7 amigos tomaron 2 tés y 1 ración de tarta cada uno

15 **Un automovilista que conduce a 90 km/h ve un tren que se acerca en sentido contrario por una vía paralela.**

El tren está compuesto, entre vagones y máquina, por 18 unidades. Cada unidad tiene una longitud de unos 15 metros.

El tren tarda en pasar ante los ojos del automovilista, desde la locomotora a la cola, 6 segundos.

¿Sabrías, con todos estos datos, calcular la velocidad del tren?

La longitud del tren es de $15 \cdot 18 = 270$ metros.

La velocidad de cruce es de $270 : 6 = 45$ m/s $= 162$ km/h.

La velocidad de cruce es la suma de velocidades del automóvil y del tren.

Por tanto, el tren lleva una velocidad de $162 - 90 = 72$ km/h.

16 **Un ciclista sube un puerto a una velocidad de 8 km/h. Y baja la misma distancia a 24 km/h. ¿Cuál ha sido el promedio de velocidad en todo el recorrido?**

Empezamos suponiendo que la distancia, desde el inicio hasta el puerto, es de 24 km (elegimos 24 porque es múltiplo común de 8 y 24; así las cuentas saldrán "redondas").

En subir tardaría $24 : 8 = 3$ horas.

En bajar tardaría $24 : 24 = 1$ hora.

En total tardaría 4 h para recorrer 48 km. La velocidad media es de $48 : 4 = 12$ km/h.

Consideremos una distancia cualquiera, a la que llamaremos $24k$.

En subir tardaría $24k : 8 = 3k$ horas.

En bajar tardaría $24k : 24 = k$ horas.

En total tardaría $4k$ horas para recorrer $48k$ kilómetros. La velocidad media es de $48k : 4k = 12$ km/h.

Otra forma de hacerlo:

Supongamos que la distancia, desde el inicio hasta el puerto, es d.

En subir tardaría $d : 8$ horas.

En bajar tardaría $d : 24$ horas.

En hacer el recorrido total tardaría $\frac{d}{8} + \frac{d}{24} = \frac{3d + d}{24} = \frac{4d}{24} = \frac{d}{6}$ horas.

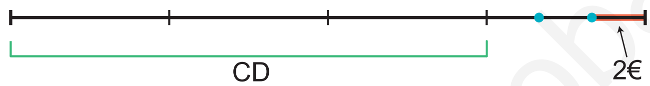
La distancia del recorrido total es $d + d = 2d$ kilómetros.

La velocidad media es $\frac{2d}{d/6} = 12$ km/h.

Haz un esquema

17 **He gastado en un CD las tres cuartas partes del dinero que llevaba. Después, he ido al cine y me he gastado dos tercios de lo que me quedaba, y aún tengo 2 €.**

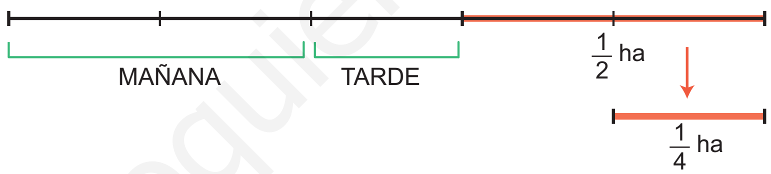
¿Cuánto llevaba al principio?



Llevaba, en total, $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 24$ €.

18 **Un labrador ara por la mañana dos quintas partes de un campo. Por la tarde, vuelve al trabajo y ara un tercio de lo que le quedaba.**

Sabiendo que aún falta por arar media hectárea, ¿cuál es la superficie del campo?

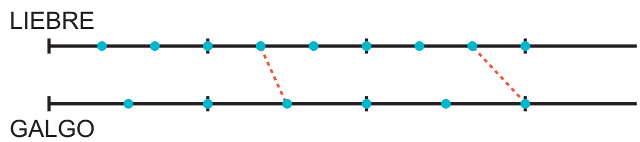


La superficie total del campo es de $\frac{5}{4}$ ha = 125 áreas.

19 **Una liebre aventaja en 12 de sus saltos al galgo que la persigue.**

Dos saltos de galgo equivalen, en longitud, a tres de liebre. El galgo tarda en dar tres saltos lo mismo que la liebre en dar cuatro.

¿Cuántos saltos dará la liebre antes de ser alcanzada?



Así serían las cosas si la liebre y el galgo compitieran en una carrera con salida simultánea. Cuando el galgo da 6 saltos, aventaja a la liebre en 1 salto de liebre (la liebre da 8 saltos en el mismo tiempo).

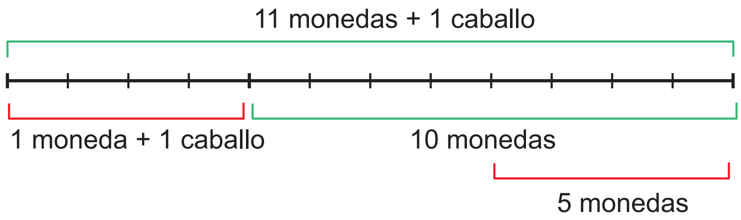
Para recortar los 12 saltos en que aventaja la liebre al galgo, el galgo necesita dar $12 \cdot 6 = 72$ saltos.

Estos 72 saltos los da el galgo en el mismo tiempo que la liebre da $72 \cdot \frac{8}{6} = 96$ de los suyos.

Soluciones a los Problemas

20 **Un hacendado contrata a un sirviente por un sueldo anual de once monedas de oro y un caballo. A los cuatro meses, el sirviente se despide, recibiendo el caballo y una moneda.**

¿Cuál era el valor del caballo?



"5 monedas" equivalen a "1 caballo + 1 moneda".

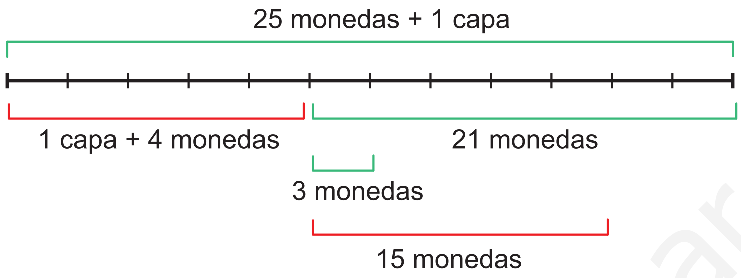
Por tanto, un caballo tiene el valor de 4 monedas.

Soluciones a los Problemas

PÁGINA 12

21 **Un hacendado contrata a un sirviente por un sueldo anual de una capa y 25 monedas de oro. A los cinco meses se despide, y recibe como pago la capa y cuatro monedas.**

¿En cuántas monedas de oro está valorada la capa?



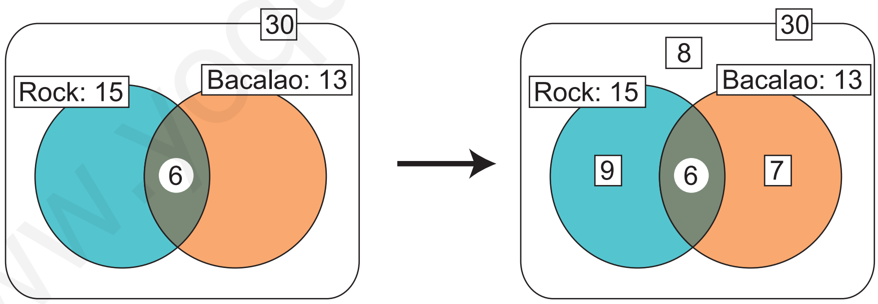
En los 7 meses que le quedaban, habría ganado 21 monedas. Es decir, 3 monedas cada mes. En 5 meses habría ganado 15 monedas.

"15 monedas" equivalen a "4 monedas + 1 capa".

Por tanto, una capa vale 11 monedas.

22 **De 30 jóvenes a los que se entrevistó en una sala de baile, 15 declararon ser aficionados al rock, y 13, al bacalao. De ellos, 6 aseguraron ser aficionados a ambos ritmos musicales.**

¿Cuántos no son aficionados ni a lo uno ni a lo otro?



Como hay 6 a quienes les gusta el rock y el bacalao, a los chicos y a las chicas que les gusta uno de los dos estilos o ambos a la vez son: 15 + 13 – 6 = 22.

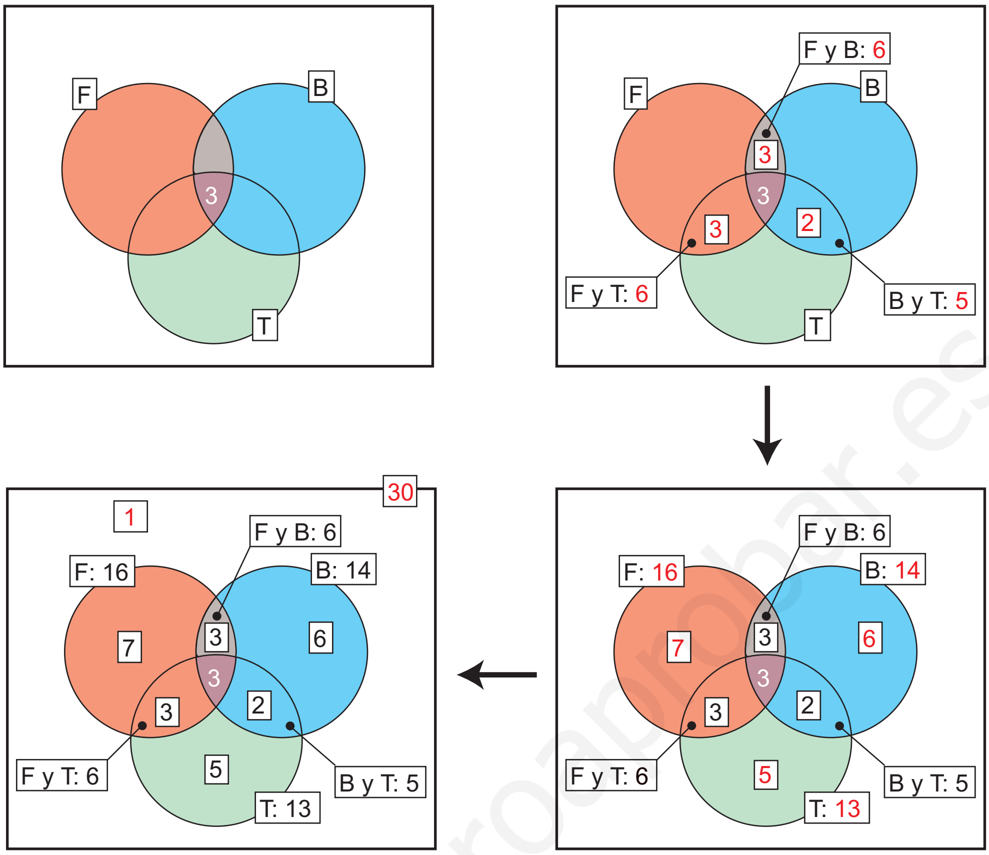
Como en total hay 30, a quienes no les gusta ni lo uno ni lo otro son 30 – 22 = 8.

23 **Una encuesta realizada entre los 30 alumnos y alumnas de una clase arroja los siguientes datos:**

- **16 practican fútbol; 14, baloncesto, y 13, tenis.**
- **6 practican fútbol y baloncesto, 6 practican fútbol y tenis y 5 practican baloncesto y tenis.**
- **3 practican los tres deportes.**

¿Cuántos de esos 30 chicos y chicas no practican ni fútbol, ni baloncesto ni tenis?

Soluciones a los Problemas

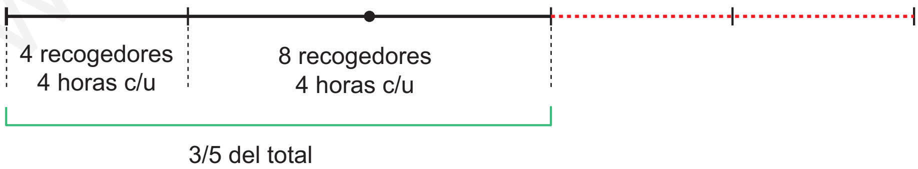


Siguiendo paso a paso los diagramas, está claro que el número de chicos y chicas que practica uno o dos o los tres deportes es: 3 + (3 + 3 + 2) + (7 + 6 + 5) = 29.

Como son 30 en total, solo uno de ellos no practica ningún deporte.

24 **Una cuadrilla de 4 recogedores de aceitunas trabaja 4 horas por la mañana en un campo de olivos. Por la tarde, se les unen otros 4 recogedores y trabajan todos juntos otras cuatro horas. Al final del día, se han recogido las tres quintas partes del campo.**

¿Cuánto tardarán 4 de estos recogedores en rematar la faena?



$\frac{1}{5}$ de la tarea lo hacen 4 recogedores en 4 horas.

Los $\frac{2}{5}$ que faltan lo harán 4 recogedores en 8 horas.

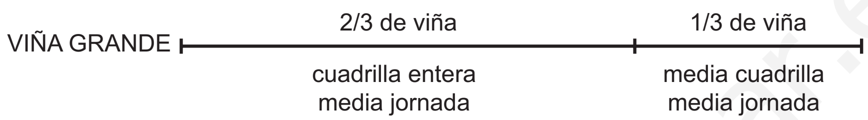
Soluciones a los Problemas

25 **Una cuadrilla de vendimiadores trabaja media jornada en una viña. Por la tarde, la mitad pasa a otra viña, que es la mitad de grande que la anterior, y todos trabajan hasta el final de la jornada.**

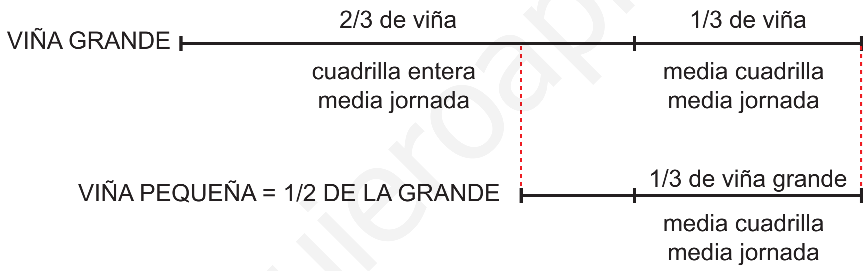
De esta forma, han terminado de vendimiar la viña grande y queda un trozo de la pequeña, que acaba un solo vendimiador en una jornada completa.

¿Cuántas personas componen la cuadrilla?

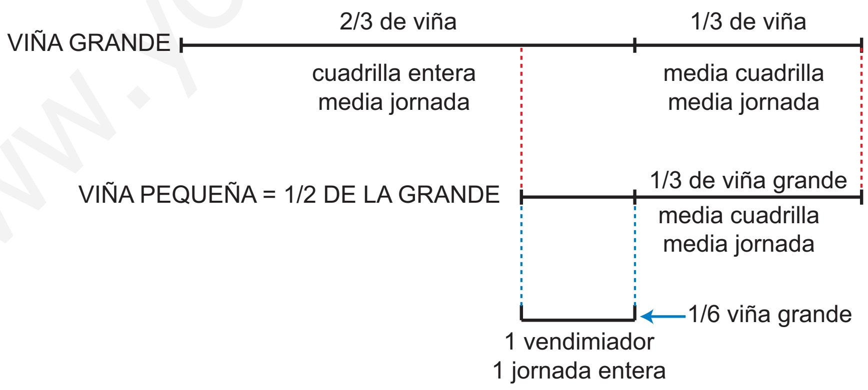
La viña grande se vendimia por la cuadrilla entera durante media jornada y por media cuadrilla otra media jornada. Es decir, por la mañana vendimian dos tercios de la viña grande y, por la tarde, el tercio que queda.



La media cuadrilla que pasa a la pequeña, vendimia en media jornada lo que la otra mitad de la cuadrilla; es decir, lo equivalente a 1/3 de la viña grande. Y la viña pequeña es la mitad de la grande.



Lo que queda, que es equivalente a 1/6 de la grande, lo acaba un jornalero en 8 horas, al día siguiente.



Se concluye que cada sexta parte de la grande necesita un vendimiador un día entero. Es decir, 6 vendimiadores para la viña grande.

Lo que vendimian por la tarde de la pequeña es lo equivalente a 1/3 de la grande. Es decir, otros dos vendimiadores.

Por tanto, la cuadrilla está compuesta por 8 personas.

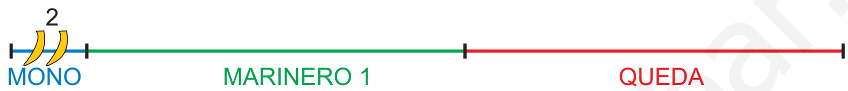
26 **Al naufragar su barco, dos marineros y su mono llegan a una isla desierta. Como no tienen nada que comer, recogen plátanos y se van a dormir.**

Por la noche, un marinero se despierta, da dos plátanos al mono y se come la mitad de los restantes. Después, se despierta el otro marinero, que también da dos plátanos al mono, hace tres partes con los que quedan y se come dos de esas partes.

Por la mañana, se reparten, entre los tres, los plátanos que quedan.

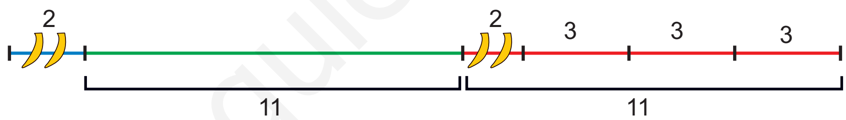
En ningún momento ha sido necesario partir ningún plátano. ¿Cuál es el número mínimo de plátanos que podrían haber recogido? ¿Cuántos plátanos se ha comido cada uno?

Se levanta el marinero 1:



Se levanta el marinero 2:

El número de plátanos que queda tiene que ser múltiplo de 3, ya que se los reparten entre los dos marineros y el mono. El más pequeño de esos múltiplos es 3. Ahora, vamos rellenando con números los gráficos hacia atrás:



El número mínimo de plátanos es 11 + 11 + 2 = 24.

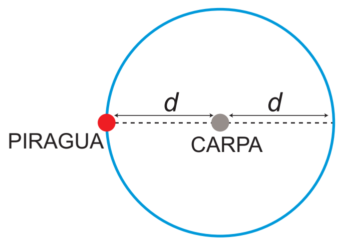
El marinero que se despierta en primer lugar se ha comido 12 plátanos; el otro marinero, 7, y el mono, 5.

27 **Un piragüista avanza por un lago de aguas tranquilas cuando, a cierta distancia, delante de él, salta una carpa. En 15 paladas alcanza la onda creada por el salto y, en otras 15, vuelve a alcanzarla para abandonar el círculo en expansión.**

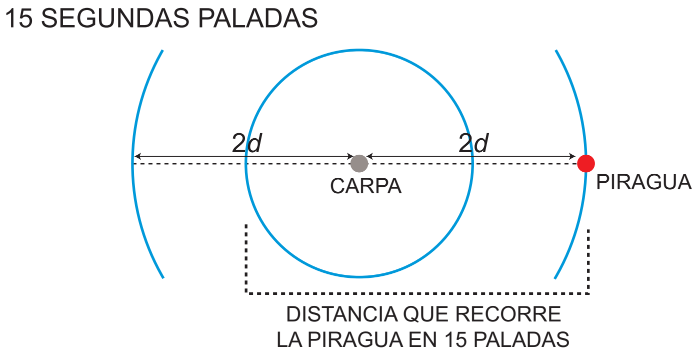
¿A cuántas paladas se encontraba la piragua de la carpa cuando esta saltó?

Cuando la piragua alcanza la onda, esta se había separado del salto de la carpa una cierta distancia *d*, y el piragüista había dado 15 paladas.

15 PRIMERAS PALADAS

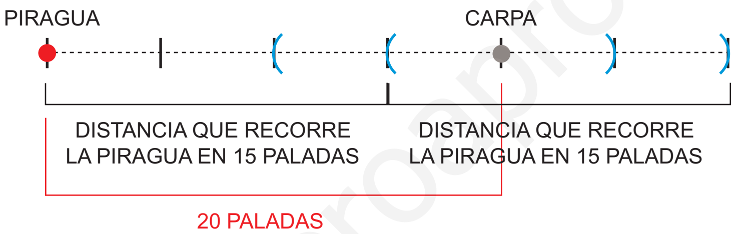


En otras 15 paladas, la onda recorre una distancia igual a la anterior, d, mientras que la piragua la alcanza:



Así, la piragua avanza una distancia $3d$ cada 15 paladas.

Si deshacemos el camino hecho por la piragua, y marcamos la distancia que recorrió en sus primeras 15 paladas…



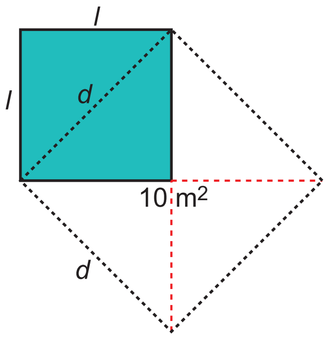
llegamos a la conclusión de que la piragua se encontraba a 20 paladas de la carpa cuando esta saltó.

Soluciones a los Problemas

PÁGINA 13

Figuras

28 **Calcula el área de un cuadrado cuya diagonal coincide con el lado de otro cuadrado de 10 m² de superficie.**

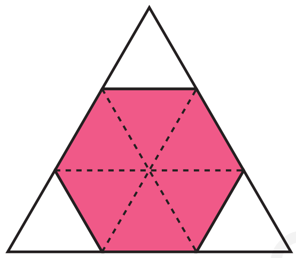


- El área del cuadrado de lado d es $A_1 = d^2 = 10 \text{ m}^2$.
- El área del cuadrado de lado l es la mitad del área del cuadrado de lado d. Por tanto: $A_2 = l^2 = 10 : 2 = 5 \text{ m}^2$.

El área del cuadrado de lado l es de 5 m^2.

29 **Cortando las esquinas de un triángulo equilátero se puede obtener un hexágono regular.**

¿Cuál será el área de ese hexágono si la del triángulo original era de 90 m²?



El hexágono ocupa $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ del área del triángulo.

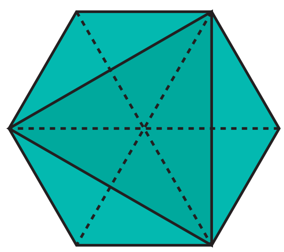
Por tanto, su área es $A = \frac{2}{3} \cdot 90 = 60 \text{ m}^2$.

30 **Tres de los vértices de un hexágono regular coinciden con los vértices de un triángulo equilátero de 20 cm² de superficie. ¿Cuál es la superficie del hexágono?**

El área del triángulo es la mitad del área del hexágono.

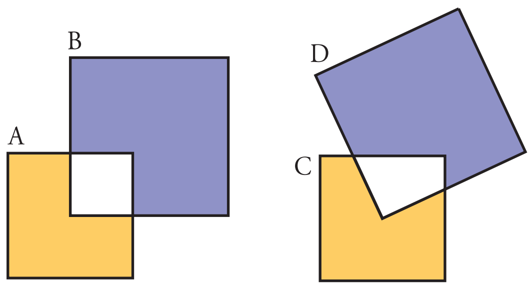
Por tanto:

Área del hexágono = $20 \cdot 2 = 40 \text{ cm}^2$

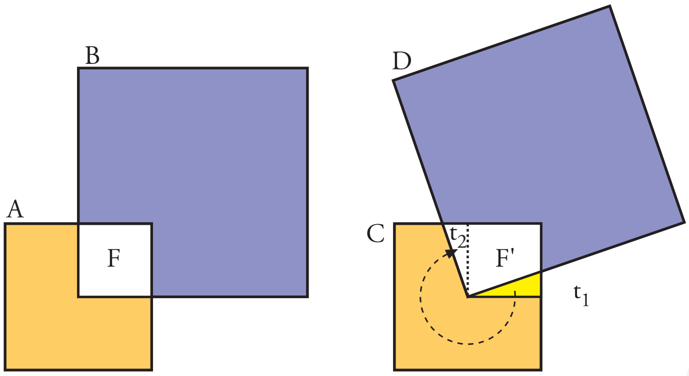


31 **El cuadrado A contiene un 16% del cuadrado B.**

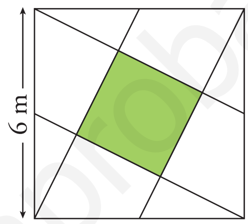
¿Qué porcentaje del cuadrado D contiene el cuadrado C, si el C es igual al A, y el D, al B?

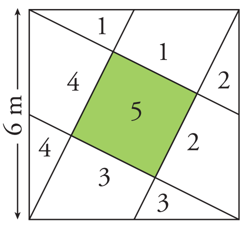


La figura F tiene la misma área que la figura F', ya que $t_1 = t_2$. Por tanto, el cuadrado D tiene un 16% del cuadrado C.



32 **Calcula la superficie del cuadrado verde.**



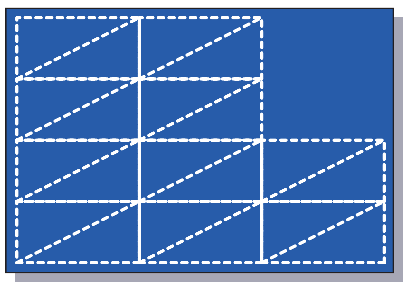


Vemos claramente que el cuadrado grande está formado por cinco cuadrados iguales, uno de los cuales es el verde.

La superficie del cuadrado grande es $6^2 = 36$ m^2.

La superficie del cuadrado verde será $\frac{36}{5} = 7{,}2$ m^2.

33 **Recorta 20 triángulos iguales que tengan catetos de longitud 2 cm y 1 cm. El problema consiste, ahora, en ponerlos unos junto a otros, de modo que entre todos formen un cuadrado. La cosa parece fácil, pero no lo es tanto.**

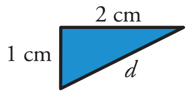


- ¿Qué dimensiones tendrá el cuadrado que debemos construir?

  El área total del cuadrado es de 20 cm^2 (la suma de todos los triangulitos).

  Por tanto, el lado del cuadrado será $l = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$ cm.

- Veamos cuánto mide la hipotenusa de cada triangulito:



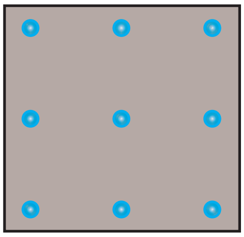
$$d = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

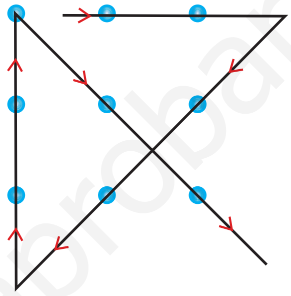
Observamos que el lado del cuadrado buscado es dos hipotenusas de triangulito.

Soluciones a los Problemas

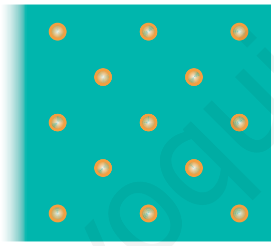
- Para construir el cuadrado, colocamos dos hipotenusas de triangulitos sobre cada uno de sus lados. El resto es fácil:

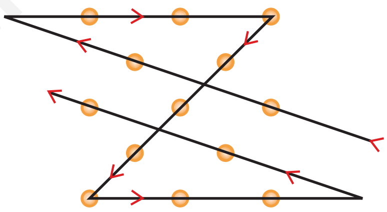
34 **Pasa por encima de estos nueve puntos mediante una línea quebrada de cuatro segmentos.**





35 **Traza una línea quebrada de cinco segmentos que pase por estos trece puntos.**

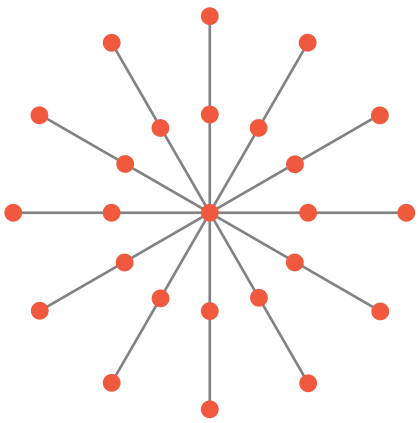


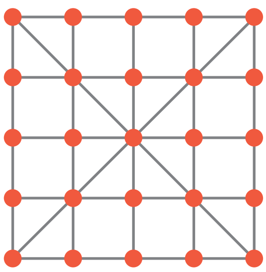


36 **Aquí tienes un problema y la solución que ha encontrado Andrés para él:**

“Si tuviésemos veinticinco soldaditos de plomo, ¿cómo formaríamos con ellos seis filas de cinco soldaditos cada una?”.

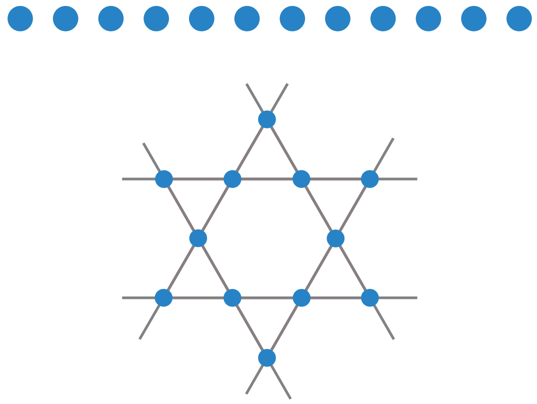
Sin embargo, Susana ha dispuesto los 25 soldados de modo que el número de filas, con 5 soldados en cada una, son muchas más de seis. ¿Te atreves a probar?



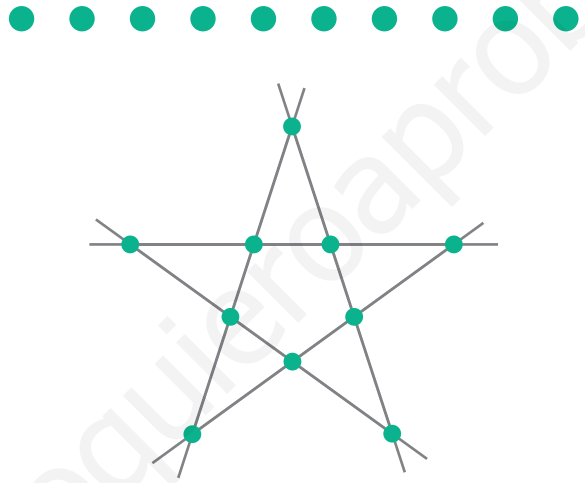


Soluciones a los Problemas

37 **Sitúa 12 soldaditos sobre una mesa de modo que haya 6 filas de 4 soldados.**



38 **Sitúa 10 soldaditos sobre una mesa de modo que haya 5 filas de 4 soldados.**



Soluciones a los Problemas

PÁGINA 14

Tantea, organiza, combina…

39 **Un repartidor lleva en su camión siete cajas de refrescos llenas, siete medio llenas y siete vacías. Si desea repartir su mercancía en tres supermercados dejando en cada uno el mismo número de refrescos y el mismo número de cajas, ¿cómo debe hacer el reparto? Supón que tiene mucha prisa y no quiere andar cambiando botellas de una cajas a otras. ¿Cómo se las arreglará?**

Una caja llena más una caja vacía equivalen a dos cajas medio llenas.

Por tanto, el repartidor tiene lo equivalente a $3 \cdot 7 = 21$ cajas medio llenas. En cada supermercado debería dejar lo equivalente a 7 cajas medio llenas.

Si en cada uno de los dos primeros supermercados deja:

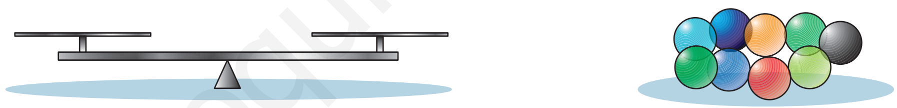
3 cajas llenas	3 cajas vacías	1 caja medio llena

que son como 7 medio llenas, lo que queda, seguro que sirve para el tercero:

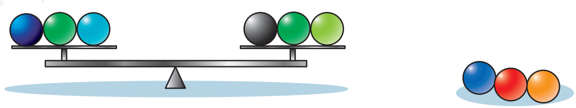
$7 - 6 = 1$ caja llena	$7 - 6 = 1$ caja vacía	$7 - 2 = 5$ cajas medio llenas

que también equivalen a 7 cajas medio llenas.

40 **Estas nueve bolas de billar tienen exactamente el mismo tamaño y todas pesan lo mismo salvo una, que pesa un poco más.**



¿Cuántas pesadas necesitarías hacer para descubrir, con absoluta seguridad, cuál es la bola que más pesa?

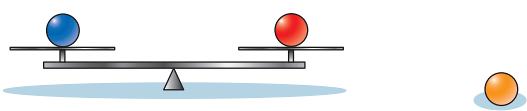


Colocamos tres bolas en cada plato y dejamos tres fuera.

Si pesa más el plato de la izquierda, o el de la derecha, aquí está la bola buscada.

Si pesan lo mismo, la bola buscada es una de las tres que hemos dejado fuera.

En cualquiera de los casos tenemos tres bolas, una de las cuales es la buscada. Ahora, procedemos análogamente.



Colocamos una bola en cada platillo. La que pese más es la buscada.

Si pesan igual, entonces la bola más pesada es la que hemos dejado fuera.

Soluciones a los Problemas

41 **a)** **Estás junto a una fuente y dispones de una jarra de 5 litros y de otra de 3 litros. ¿Cómo te las arreglarías para medir exactamente un litro de agua?**

b) **Y si ahora llenas dos cántaros, uno de 7 litros y otro de 5, ¿cómo harías para medir 4 litros de agua?**

c) **¿Y cómo medirías 3 litros de agua si tienes dos cántaros, uno de 9 litros y otro de 5 litros?**

a)

3		5
3	3	0
0		3
3	2	3
1		5

Se llena el de 3 litros.	Hay 3 y 0 litros.
El contenido de la de 3 litros se vierte en la de 5 litros.	Hay 0 y 3 litros.
Se vuelve a llenar la de 3 litros.	Hay 3 y 3 litros.
Con el contenido de la de 3 se completa la de 5 litros.	Hay 1 y 5 litros.

En la jarra de 3 litros queda 1 litro, lo que queríamos medir.

b)

5		7
0	5	7
5		2
0	2	2
2		0
2	3	7
5		4

Se llena el de 7 litros.	Hay 0 y 7 litros.
Con el contenido del de 7 se llena el de 5 litros.	Hay 5 y 2 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 2 litros.
Se vierten los 2 litros que hay en el de 7 en el de 5 litros.	Hay 2 y 0 litros.
Se vuelve a llenar el de 7 litros.	Hay 2 y 7 litros.
Con el de 7 litros se completa el de 5 litros.	Hay 5 y 4 litros.

Así, en el cántaro de 7 litros quedan los 4 litros que queríamos medir.

c)

5		9
0	5	9
5		4
0	4	4
4		0
4	1	9
5		8
0	5	8
5		3

Se llena el de 9 litros.	Hay 0 y 9 litros.
Con el contenido del de 9 se llena el de 5 litros.	Hay 5 y 4 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 4 litros.
Se vierten los 4 litros que hay en el de 9 en el de 5 litros.	Hay 4 y 0 litros.
Se vuelve a llenar el de 9 litros.	Hay 4 y 9 litros.
Se completa el de 5 con un litro del de 9 litros.	Hay 5 y 8 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 8 litros.
Se llena el de 5 litros con el contenido del de 9 litros.	Hay 5 y 3 litros.

En el cántaro de 9 litros quedan los 3 litros que queríamos medir.

Soluciones a los Problemas

42 a) **Tienes cuatro pesas de 1 kg, 2 kg, 4 kg y 8 kg y una báscula de dos platillos. Comprueba que con ellas puedes realizar cualquier pesada de un número entero de kilos entre 1 kg y 15 kg.**

b) **Si añades una pesa de 16 kg, ¿hasta qué pesada puedes realizar? ¿Qué pesas debes poner para pesar 21 kg? ¿Y para pesar 29 kg?**

c) **¿Qué pesas más deberías tener para poder pesar, al menos, 120 kg? Con esas pesas, ¿cuál es la mayor pesada que puedes realizar? ¿Qué pesas debes poner para pesar 113 kg?**

a) Marcamos en esta tabla las pesas que se pueden poner en uno de los platillos para conseguir las distintas pesadas, desde 1 kg hasta 15 kg.

PESO	1 kg	2 kg	4 kg	8 kg
1 kg	×			
2 kg		×		
3 kg	×	×		
4 kg			×	
5 kg	×		×	
6 kg		×	×	
7 kg	×	×	×	
8 kg				×
9 kg	×			×
10 kg		×		×
11 kg	×	×		×
12 kg			×	×
13 kg	×		×	×
14 kg		×	×	×
15 kg	×	×	×	×

b) Añadiendo una pesa de 16 kg se pueden pesar desde 1 kg hasta 15 + 16 = 31 kg.

Para pesar 21 kg, se pueden poner, en uno de los platillos, las pesas de 16, 4 y 1 kilos: 16 + 4 + 1 = 21.

Para pesar 29 kg, se pueden poner, en uno de los platillos, las pesas de 16, 8, 4 y 1 kilos: 16 + 8 + 4 + 1 = 29.

c) Después de 16, la siguiente potencia de 2 es 32, y como 31 + 32 = 63, no llegamos a los 120.

La siguiente potencia de 2 es 64, y como 63 + 64 = 127, con esta ya se consigue llegar a los 120.

Habría que añadir, por tanto, las pesas de 32 kg y de 64 kg.

Tenemos, pues, las pesas 1, 2, 4, 8, 16, 32 y 64, con las que podríamos pesar hasta 127 kg.

Para pesar 113 kg, habría que poner: 113 = 64 + 32 + 16 + 1

96 (faltan 17)

112 (falta 1)

Soluciones a los Problemas

43 **a) Tienes pesas de 1 kg, 3 kg y 9 kg y una báscula de dos platillos. Comprueba que puedes realizar cualquier pesada entera de 1 a 13 kg (puedes poner pesas en los dos platillos).**

b) Si añades una pesa de 27 kg, ¿cuál es la mayor pesada que puedes realizar? ¿Cómo pesarías 22 kg?

c) ¿Cuál es la siguiente pesa que añadirías a esta colección: 1, 3, 9, 27, …?

a) Podemos realizar pesadas desde 1 hasta 13 kg poniendo pesas en uno y otro platillo.

PESO	EN UN PLATILLO	EN EL OTRO PLATILLO
1 kg	1	
2 kg (2 = 3 – 1)	3	1
3 kg	3	
4 kg (4 = 3 + 1)	3 + 1	
5 kg (9 = 9 – 3 – 1)	9	3 + 1
6 kg (6 = 9 – 3)	9	3
7 kg (7 = 9 – 3 + 1)	9 + 1	3
8 kg (8 = 9 – 1)	9	1
9 kg	9	
10 kg (10 = 9 + 1)	9 + 1	
11 kg (11 = 9 + 3 – 1)	9 + 3	1
12 kg (12 = 9 + 3)	9 + 3	
13 kg (13 = 9 + 3 + 1)	9 + 3 + 1	

b) $1 + 3 + 9 + 27 = 40$ kg es la máxima pesada que se puede hacer.

$22 = 27 - 9 + 3 + 1$

c) Tenemos las sucesivas potencias de 3: $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$

La siguiente sería $3^4 = 81$. Con ellas (1, 3, 9, 27, 81), poniendo pesas en uno o en los dos platillos, podremos realizar cualquier pesada de un número entero de kilos hasta $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$ kg.

44 **a) Tienes estas tres monedas:**

¿Cuántas cantidades de dinero distintas puedes formar con ellas?

b) ¿Y si tuvieras estas cinco monedas?

c) Y si las monedas fueran estas:

¿Cuántas cantidades distintas de dinero podrías formar?

Soluciones a los Problemas

a) Puedes poner una moneda y obtendrías:

 0,10 €;  0,20 € y  0,50 €

Con dos monedas, obtendrías:

 0,10 + 0,20 = 0,30 €

 0,10 + 0,50 = 0,60 €

 0,20 + 0,50 = 0,70 €

Con tres monedas, obtendrías:

 0,10 + 0,20 + 0,50 = 0,80 €

En total, son 7 cantidades distintas de dinero.

Si añadimos la cantidad 0 € (no tenemos ninguna moneda) serían 8 posibles cantidades.

b) Tomando una moneda, hay 5 posibilidades, una por cada moneda. Tomando dos monedas hay 10 posibilidades:

 10 cént. + 20 cént.	 20 cént. + 50 cént.	 50 cént. + 1 €	 1 € + 2 €
 10 cént. + 50 cént.	 10 cént. + 1 €	 50 cént. + 2 €	
 10 cént. + 1 €	 20 cént. + 2 €		
 10 cént. + 2 €			

Tomando tres monedas, hay 10 posibilidades:

 10 cént. + 20 cént. + 50 cént.	 10 cént. + 50 cént. + 1 €	 10 cént. + 1 € + 2 €
 10 cént. + 20 cént. + 1 €	 10 cént. + 50 cént. + 2 €	
 10 cént. + 20 cént. + 2 €		

 20 cént. + 50 cént. + 1 €	 20 cént. + 1 € + 2 €	 50 cént. + 1 € + 2 €
 20 cént. + 50 cént. + 2 €		

Tomando cuatro monedas, hay 5 posbilidades:

 10 cént. + 20 cént. + 50 cént. + 1 €	 10 cént. + 50 cént. + 1 € + 2 €
 10 cént. + 20 cént. + 50 cént. + 2 €	 20 cént. + 50 cént. + 1 € + 2 €
 10 cént. + 20 cént. + 1 € + 2 €	

Tomando las cinco monedas hay 1 posibilidad.

En total hay 31 posibilidades.

Si tomamos la cantidad 0 € (ninguna moneda) hay 32 posibilidades.

Soluciones a los Problemas

c) La menor cantidad de dinero que se puede formar con estas monedas es 10 céntimos, y la mayor, 190 céntimos (10 cént. + 10 cént. + 20 cént. + 50 cént. + 1 €).

Se pueden formar todos los múltiplos de 10 entre esas cantidades:

10 céntimos → moneda de 10 cént.

20 céntimos → moneda de 20 cént.

30 céntimos → 20 + 10

40 céntimos → 20 + 10 + 10

50 céntimos → moneda de 50 cént.

60 céntimos → 50 + 10

70 céntimos → 50 + 20

80 céntimos → 50 + 20 +10

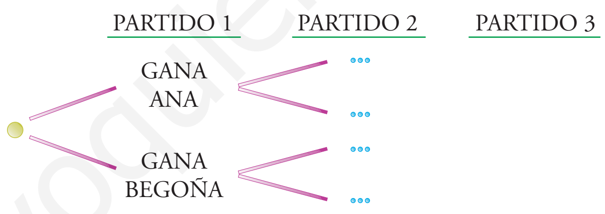
90 céntimos → 50 + 20 + 10 + 10

100 céntimos → 1 €

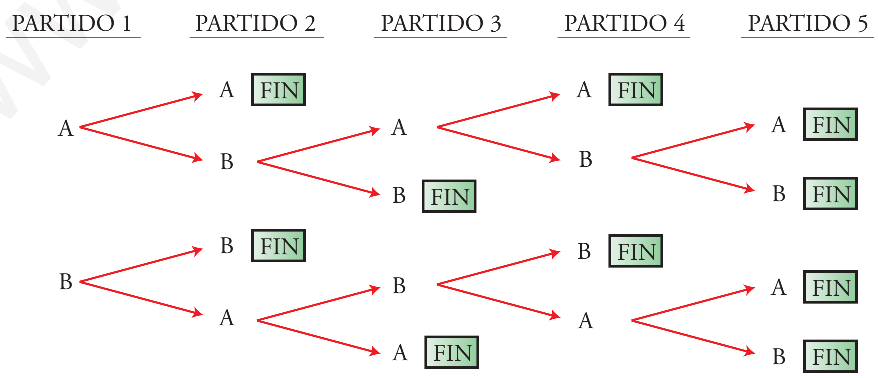
45 **Ana y Begoña son las finalistas de un torneo de tenis. Gana el torneo quien venza en dos partidos consecutivos o en tres alternos.**

Averigua todas las posibilidades que pueden darse.

¿Cuántos partidos, como máximo, tendrán que disputar para acabar el torneo?



En el siguiente diagrama, A significa "gana Ana" y B significa "gana Begoña".



Soluciones a los Problemas

PÁGINA 15

Pura lógica

46 **Anselmo va a freír tres filetes. Cada uno ha de estar en la sartén cinco minutos por cada cara. Pero en la sartén solo caben dos. ¿Cómo debe hacerlo para tardar el menor tiempo posible?**

Pone dos filetes, A y B, durante 5 minutos.

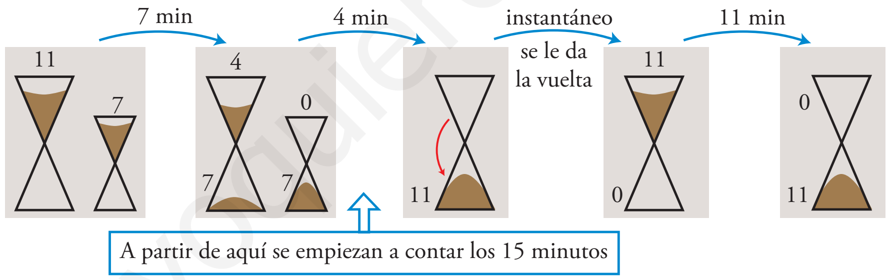
Saca uno de ellos, A, da la vuelta al otro, B, y pone el tercero, C, durante 5 minutos.

Saca el B (ya está hecho por las dos caras), da la vuelta al C, y pone el A por la cara cruda. Otros 5 minutos. Ya están los tres. Ha tardado 15 minutos.

47 **Anselmo ha de tener en el horno un pollo durante 15 minutos exactamente. Pero se le ha estropeado el reloj. Dispone de dos relojes de arena que miden 11 minutos y 7 minutos, respectivamente. ¿Cómo cronometrará con ellos los 15 minutos?**

Solución sencilla

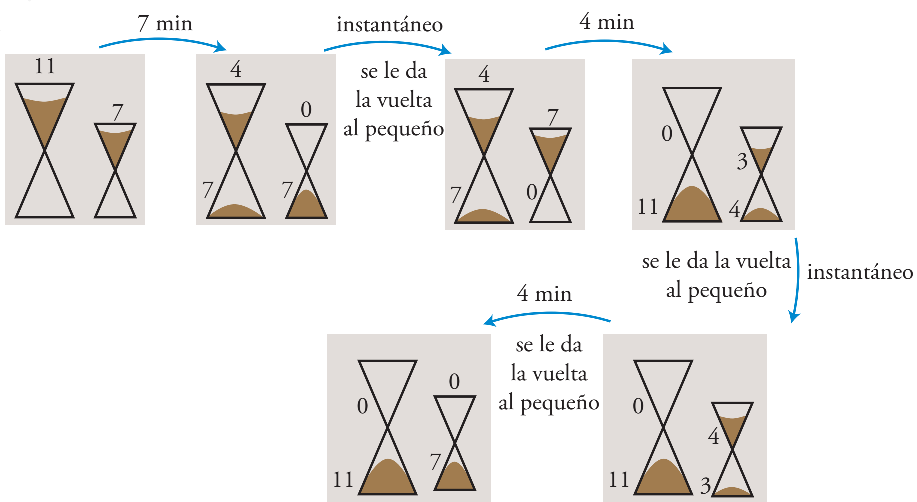
Deja caer la arena en los dos relojes a la vez. Cuando el de 7 minutos haya terminado, en el de 11 minutos queda arena para 4 minutos. Vuelca el reloj para que no corra ni un segundo de esos 4 minutos, pone el pollo al horno y endereza el reloj. Cuando acabe la arena (4 minutos después) da la vuelta al reloj y contabiliza los 11 minutos restantes.



En esta solución hay que preparar los relojes para poder cronometrar los 15 minutos. Esa preparación lleva 7 minutos.

¿Qué pasaría si Anselmo tuviese prisa y quisiera empezar ya la preparación del pollo?

Veamos esta **solución más compleja:**



Soluciones a los Problemas

48 **Ahora Anselmo ha de cronometrar los 45 minutos que tarda en hacerse un potaje. Para ello, dispone de dos mechas. Cada una de ellas tarda 1 h en consumirse. Pero la velocidad con que se consumen es irregular (es decir, en 1/4 de hora no tiene por qué gastarse 1/4 de la longitud de la mecha). Aun así, consigue cronometrar con ellas los 45 minutos. ¿Cómo lo hace?**

Si una mecha se prende simultáneamente por los dos extremos se consume en media hora. Por tanto, prendemos simultáneamente la mecha A por los dos extremos y la mecha B por uno de ellos. En el momento en que A se haya consumido, queda media hora en la mecha B. Si se prende ahora también por el otro extremo se consumirá en la mitad de tiempo: en un cuarto de hora.

Por tanto, el proceso dura 45 minutos.

49 **Anselmo está en su casa de campo. Quiere saber la hora y no dispone de televisión, ni de radio, ni de teléfono; solo de un reloj de pared que se le ha parado, pero puede ponerlo en marcha dándole cuerda. Va a casa de su amiga Rosa, que está a unos 3 km de distancia y en la que hay otro reloj como el suyo. Pasa un rato charlando con ella y, a la vuelta, pone el reloj en hora con razonable precisión.**

Para ello, ¿qué otras cosas ha hecho que no se describen aquí?

Anselmo, antes de salir, le da cuerda a su reloj y lo pone a una hora cualquiera, por ejemplo, a las 12 h, y se va inmediatamente. Cuando llega a casa de Rosa se fija en la hora que marca su reloj. Por ejemplo, las 5 h 40 min. Cuando va a salir vuelve a mirar la hora; por ejemplo, las 7 h 05 min. Por tanto, ha estado en casa de Rosa 1 h 25 min. Cuando llega a su casa, su reloj marca, por ejemplo, las 2 h y 55 min.

Echemos cuentas:

Está fuera de casa	2 h 55 min
Está en casa de Rosa	1 h 25 min
Está andando	1 h 30 min

Por tanto, cada tramo, ida y vuelta, le lleva 45 min.

Como salió de casa de Rosa a las 7 h 05 min, cuando llega a su casa son las 7 h 50 min. Ahora puede poner su reloj en hora.

50 **El reloj de una torre tarda 15 segundos en dar las seis. ¿Cuánto tardará en dar las doce?**

Entre la primera y la sexta campanadas hay 5 intervalos de tiempo. Los 15 segundos se reparten entre 5 y, así, se obtienen 3 segundos entre campanada y campanada.

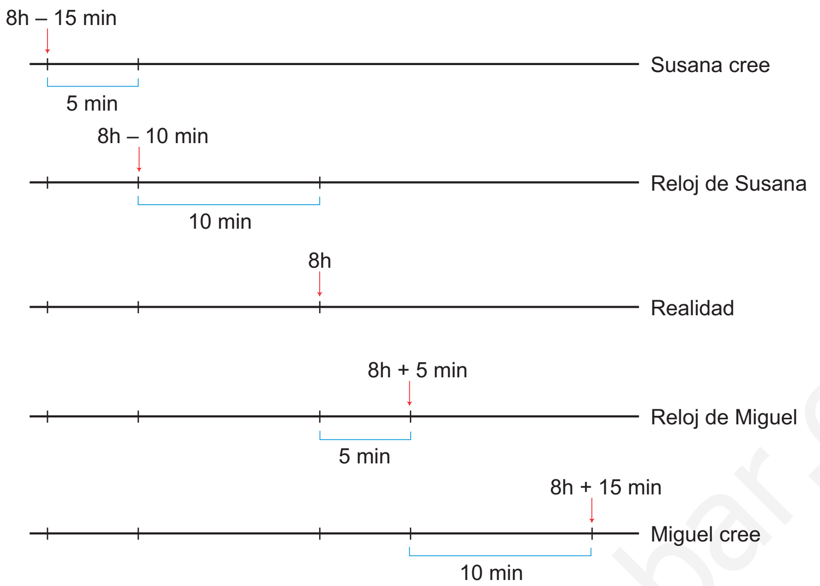
Por lo tanto, para dar las 12 (11 intervalos de tiempo) el reloj tarda $11 \cdot 3 = 33$ segundos.

51 **Susana y Miguel conciertan una cita a las ocho de la tarde. El reloj de Susana está atrasado 10 minutos, pero ella cree que está adelantado 5 minutos.**

El reloj de Miguel está adelantado 5 minutos, pero él cree que está atrasado 10 minutos.

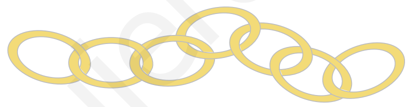
¿A qué hora real llega cada uno a la cita?

Soluciones a los Problemas



Miguel llegará a la cita 15 minutos antes, a las 8 menos cuarto (8 h – 15 min), y Susana llegará 15 minutos tarde, a las 8 y cuarto (8 h + 15 min).

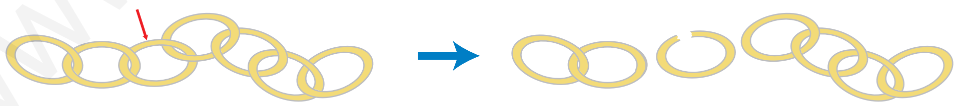
52 **Una chica se queda sin dinero para pagar la pensión en la que se hospeda. No recibirá dinero hasta dentro de siete días. Tiene una pulsera con 7 eslabones que el hostelero admite como pago de esos siete días.**



No se fían cada uno del otro: el hospedero no consiente en que tenga ninguna deuda y ella no quiere pagar nada por adelantado. Convienen, como pago, un eslabón al día.

¿Cuántos eslabones debe partir para poder pagar uno al día? (Se supone que quiere estropear lo menos posible su pulsera).

Con partir un eslabón es suficiente: el tercero.



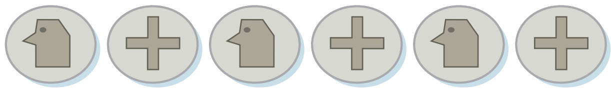
La entrega de eslabones sería como se indica en la siguiente tabla, en la que hemos llamado:

Eslabón suelto → 1. Dos eslabones unidos → 2. Cuatro eslabones unidos → 4.

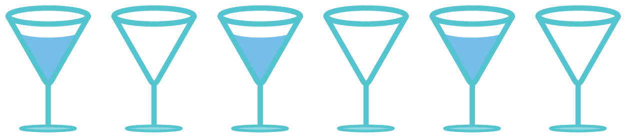
	LA CHICA ENTREGA	EL HOSTELERO DA A LA CHICA	A LA CHICA LE QUEDA	EL HOSTELERO TIENE EN TOTAL
PRIMER DÍA	1		2 + 4	1
SEGUNDO DÍA	2	1	1 + 4	2
TERCER DÍA	1		4	1 + 2
CUARTO DÍA	4	1 + 2	1 + 2	4
QUINTO DÍA	1		2	1 + 4
SEXTO DÍA	2	1	1	2 + 4
SÉPTIMO DÍA	1		0	1 + 2 + 4

Soluciones a los Problemas

53 a) **¿Cuántas de estas monedas hemos de tocar para que las tres caras estén a la izquierda y las tres cruces a la derecha?**



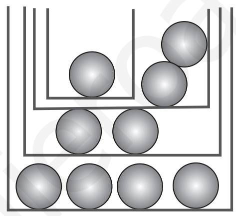
b) ¿Cuántas de estas copas hemos de tocar para que queden tres llenas a la izquierda y tres vacías a la derecha?



a) Da la vuelta a las monedas que están en las posiciones segunda y quinta.

b) Toma la quinta copa y vierte su contenido en la segunda.

54 **Después de la clase de educación física hemos guardado en 4 cajas los 9 balones que teníamos. Cada caja contiene un número impar de balones y en ningún caso coinciden el número de balones de dos cajas. ¿Cómo es posible?**



55 **Te han asignado una habitación del sexto piso de una casa sin ascensor. Hay tres interruptores, I, II y III, en la planta baja, uno de los cuales enciende la bombilla de tu habitación.**

¿Cómo averiguas cuál es el interruptor de tu bombilla si solo subes una vez a hacer comprobaciones? (Es decir, manipulas los interruptores, subes, observas y deduces, sin ninguna duda, cuál de los tres interruptores es el que corresponde a tu bombilla).

I II III

Enciende el interruptor I, lo mantienes encendido 5 minutos y lo apagas.

Luego enciendes el interruptor II, subes y tocas la bombilla.

Si la bombilla está caliente y apagada, tu interruptor es el I.

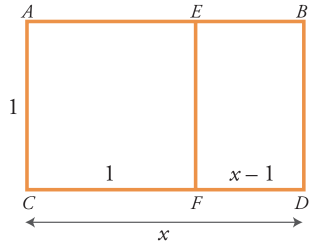
Si la bombilla está encendida, tu interruptor es el II.

Si la bombilla está apagada y fría, tu interruptor es el III.

Lecturas y actividades

EL NÚMERO DE ORO

- Vamos a considerar un rectángulo $ABCD$ de altura 1 en el que se cumpla la siguiente propiedad:



«Si suprimimos el cuadrado $AECF$ de lado 1, el rectángulo que queda, $EBDF$ es semejante al inicial»;

es decir: $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$

- Obtengamos el valor de la base de este rectángulo, x:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \quad \rightarrow \quad x^2 - x = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones; solo una de ellas es positiva:

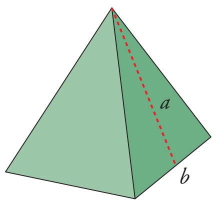
$$\boxed{x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

- A este número que hemos obtenido se le llama **número de oro,** y se denota con la letra griega **Φ**.

  Es un número irracional cuyo valor aproximado es 1,61803…
- Un rectángulo con estas proporciones se llama **rectángulo áureo** y guarda unas proporciones que resultan muy agradables a la vista. Así, si a un grupo de personas se les muestran rectángulos con diversas proporciones, casi todas elegirán el rectángulo áureo. Por eso, a la relación entre los lados de este rectángulo, los griegos le dieron el nombre de **razón áurea** o **divina proporción.**
- Por esta razón se ha utilizado en el arte, en las tarjetas de crédito, en el carnet de identidad, en los envases de algunos productos, en muchas cajetillas de tabaco, en algunas películas de cine…

El número de oro en la historia

- Sus comienzos se sitúan en **Egipto.** Aparece, por ejemplo, en construcciones como la **pirámide de Keops,** en la que el cociente entre la altura de uno cualquiera de sus triángulos con el lado de la base es igual a **Φ**:

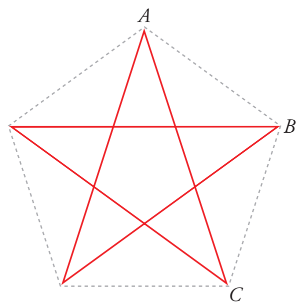


$$\boxed{\frac{a}{b} = \Phi}$$

Lecturas y actividades

- Los **griegos pitagóricos** (seguidores de las teorías de Pitágoras) pensaban que el mundo se regía por su orden numérico y geométrico. Para ellos, los únicos números existentes eran los naturales y las relaciones entre ellos (fracciones). Su emblema era la estrella de cinco puntas o pentágono estrellado. Esta estrella representaba la vida y, puesta con una de sus vértices hacia abajo, representa lo contrario (lo maléfico).

  En un pentágono regular, la relación entre su diagonal y su lado es **Φ**:



$$\boxed{\frac{AC}{AB} = \Phi}$$

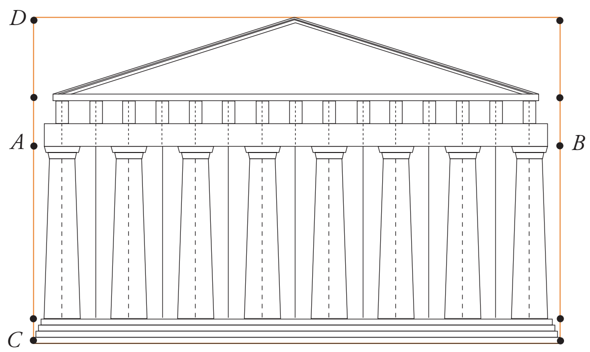
  Cuando llegaron a la conclusión de que esta relación no se podía expresar como cociente de dos números enteros, se quedaron espantados, y les pareció tan contrario a toda lógica que lo llamaron **irracional.** Es el primer número irracional del que se tuvo conciencia que lo era.

  Para los pitagóricos, las figuras tenían un valor divino. Así, el tetraedro representaba al fuego, el cubo a la tierra, el octaedro al aire, el icosaedro al agua y el dodecaedro (el único que puede circunscribir a todos los demás), al propio Universo. Opinaban que una proporción que se utilizaba para la construcción del universo había de ser necesariamente divina.

  El dodecaedro sabemos que está formado por pentágonos, en los que encontramos la proporción áurea. También en la fórmula de su volumen encontramos al número de oro, **Φ**:

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \Phi^4 \cdot a^3$$

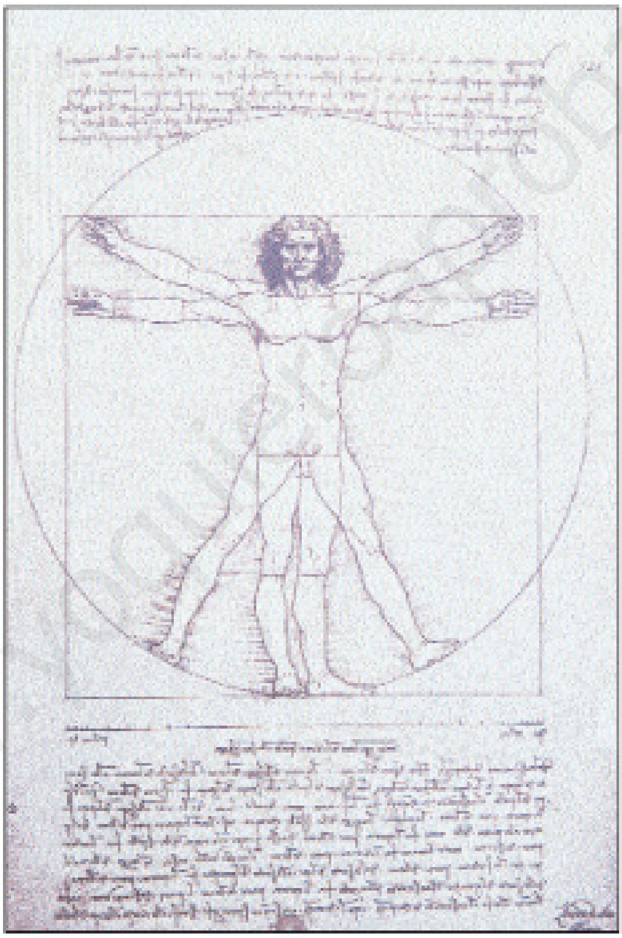
- El número de oro influyó en el arte del mundo griego, buscando la armonía en los templos y en las esculturas. El famoso escultor **Fidias** (de ahí le viene el nombre **Φ** (phi) al número de oro) en su diseño del Partenón utilizó repetidamente la proporción áurea.



El alzado del **Partenón** se enmarca en un rectángulo áureo, $\frac{AB}{CD} = \Phi$. Además, hay muchas más proporciones áureas, como por ejemplo:

$$\frac{AC}{AD} = \Phi$$

- Los romanos no lo utilizaron y tampoco apareció en la Edad Media.
- Más tarde reapareció en el **Renacimiento.** Lo encontramos, por ejemplo, en la famosa pintura de **Leonardo de Vinci** (1452-1519). El cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia desde el ombligo hasta los pies (radio de la circunferencia) es el número de oro.



- En su obra **«La divina proporción»,** editada en 1509, **Luca Pacioli** propone un hombre perfecto en el que encontramos la razón áurea en las relaciones entre distintas partes del cuerpo.
- A lo largo de la historia ha fascinado a muchos científicos, artistas, poetas, … Por ejemplo, encontramos la siguiente cita de **Kepler** (1571-1630):

  Creo que de esta proporción geométrica se sirvió el Creador como la idea por medio de la que introdujo la generación continua de objetos semejantes a partir de objetos semejantes.

- O este soneto que escribió **Rafael Alberti** cerrando el premio a la obra de Luca Pacioli en la edición de 1949 de la Ed. Losado, S. A., en Buenos Aires:

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

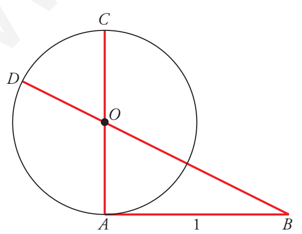
Lucas por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

- Curiosamente, también aparece en la **naturaleza:** en el crecimiento de algunas plantas, en la distribución de las hojas de algunos tallos, en el crecimiento de las conchas de algunos moluscos (ver actividad propuesta n.° 3).
- Los más apasionados del número de oro incluso hablan de su posible relación con la vida. Aseguran que, si se colocan todos los planetas en fila y se calcula cómo uno divide las distancias entre dos planetas vecinos, se observa que solo la Tierra se sitúa en el punto que se expresa por el número de sección áurea.

Actividades propuestas

1 Construcción gráfica del número de oro.

La siguiente construcción gráfica del número de oro aparece en el tratado de Euclides:



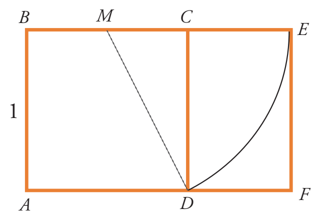
– Se dibuja un segmento AB de longitud 1, y perpendicularmente a él, otro segmento unidad, AC.

– Se marca el punto medio, O, de AC y se traza la circunferencia de centro O y radio OA.

– Uniendo B con O y prolongando hasta cortar a la circunferencia en el punto D, obtenemos el segmento BD, cuya medida es Φ.

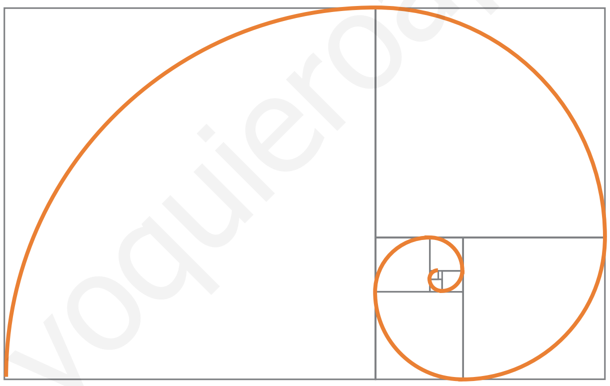
2 Construcción de un rectángulo áureo.

Sea $ABCD$ un cuadrado cualquiera. Consideramos el punto medio, M, del lado BC. Con centro en M y radio MD trazamos un arco de circunferencia que cortará a la prolongación del lado BC en un punto E. Tomamos el punto F tal que $ABEF$ sea un paralelogramo. Este rectángulo así obtenido es áureo.



3 **Construcción de una espiral**

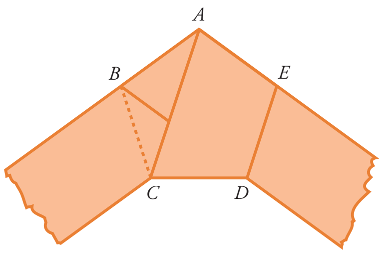
Partiendo del rectángulo áureo $ABEF$ que hemos obtenido antes, vamos a construir una espiral. Para ello dibujamos el cuadrado de lado AB que queda dentro del rectángulo original. El rectángulo que aparece al trazar el cuadrado también es áureo. En este segundo rectángulo volvemos a trazar un cuadrado «interior» de lado el más corto de los lados del segundo rectángulo. Obtenemos un tercer rectángulo áureo. La espiral aparece al dibujar los arcos de circunferencia como en la figura:



Hay muchos procesos de crecimiento de plantas, conchas de algunos moluscos, etc., que siguen esta espiral o parecidas.

4 **«Nudo áureo»**

a) Podemos construir un pentágono regular a partir de una tira larga de papel haciendo un nudo con ella, aplanándola cuidadosamente:



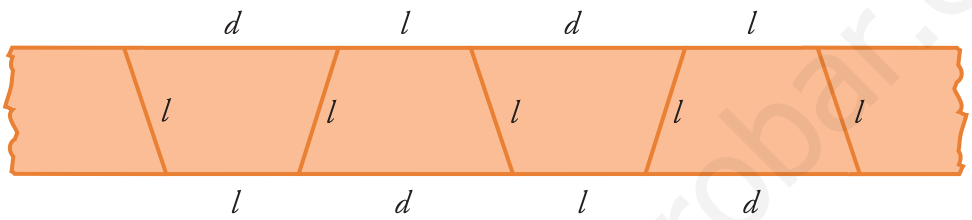
– Se puede comprobar la relación antes mencionada entre la diagonal y el lado del pentágono:

$$\frac{AC}{AB} = \Phi$$

– También podemos observar que el triángulo ACD es un triángulo isósceles en el que la relación entre cualquiera de sus lados iguales dividido entre el otro desigual es Φ:

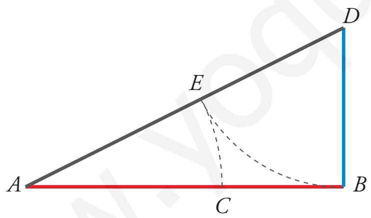
$$\frac{AC}{CD} = \Phi. \quad ACD \text{ se llama triángulo áureo.}$$

b) Si deshacemos el nudo, los dobleces determinan cuatro trapecios, los lados no paralelos y la base menor eran lados del pentágono; la base mayor era la diagonal. Por tanto, las dos bases están en proporción áurea (y la base mayor con el lado).



5 Dividir un segmento en proporción armónica.

• Dado un segmento AB, se trata de encontrar un punto C que lo divida en proporción armónica, es decir, que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$:



• Sobre B se traza un segmento, BD, perpendicular a AB y con longitud:

$$\overline{BD} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

• Con centro en D y radio $\overline{DB}$, intersecamos AD en el punto E. Con centro en A y radio $\overline{AE}$, se obtiene C (al intersecar con AB).

El punto C divide al segmento AB en proporción armónica. Así, si $\frac{AB}{AC} = \Phi$, también será $\frac{AC}{CB} = \Phi$.

– Si $\overline{AC} = 1$, entonces $\overline{AB} = \Phi$.

1 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 19

PARA EMPEZAR...

▼ Escribir una fracción como suma de fracciones unitarias

- $\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}=\frac{7}{28}+\frac{4}{28}+\frac{1}{28}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$

  Otra descomposición de $\frac{3}{7}$ es:

  $\frac{3}{7}-\frac{1}{3}=\frac{9-7}{21}=\frac{2}{21} \rightarrow \frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{2}{21}$

  Ahora:

  $\frac{2}{21}-\frac{1}{12}=\frac{8-7}{84}=\frac{1}{84} \rightarrow \frac{2}{21}=\frac{1}{12}+\frac{1}{84}$

  Por tanto:

  $\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{84}$

- • Descomposiciones de $\frac{2}{7}$:

  $\frac{2}{7}-\frac{1}{4}=\frac{8-7}{28}=\frac{1}{28} \rightarrow \frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$

  $$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{7}-\frac{1}{5}=\frac{10-7}{35}=\frac{3}{35}\\[2ex] \frac{3}{35}-\frac{1}{12}=\frac{36-35}{420}=\frac{4}{420}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{2}{7}=\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{420}$$

  • Descomposiciones de $\frac{3}{5}$:

  $$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=\frac{9-5}{15}=\frac{4}{15}\\[2ex] \frac{4}{15}-\frac{1}{5}=\frac{4-3}{15}=\frac{1}{15}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{3}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$$

  $$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=\frac{9-5}{15}=\frac{4}{15}\\[2ex] \frac{4}{15}-\frac{1}{4}=\frac{16-15}{60}=\frac{1}{60}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{3}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{60}$$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

▼ Pasar de fracciones sexagesimales a decimales, y viceversa

■ a) $4;35,52 = 4 + \frac{35}{60} + \frac{52}{60^2} = 4,59\widehat{7}$

b) $0;59 = \frac{59}{60} = 0,98\widehat{3}$

c) $0;0,45 = \frac{45}{60^2} = 0,0125$

d) $3;8,29,44 = 3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3} = 3,14159259259$

Esta es un aproximación del número π.

■ a) Hay que transformar en fracción sexagesimal el número 5,9:

$\frac{9}{10} = \frac{x}{60} \rightarrow x = \frac{9 \cdot 60}{10} = 54$

Por tanto, 5,9 = 5;54.

b) Haremos lo mismo para 0,74:

$\frac{74}{100} = \frac{x}{60} \rightarrow x = \frac{74 \cdot 60}{100} = 44,40$

Ahora:

$\frac{40}{100} = \frac{y}{60} \rightarrow y = \frac{40 \cdot 60}{100} = 24$

Por tanto:

0,74 = 0;44,24

2. Repasa las operaciones con números enteros

1 Calcula y completa.

a) $6 - 15 + 13 - 21 - 9 = \boxed{}$

b) $7 + 12 - 19 - 6 + 11 - 9 = \boxed{}$

c) $(-5) - (+13) + (-16) - (-8) + (+7) = \boxed{}$

d) $(+14) + (-21) - (-18) - (+27) - (-11) = \boxed{}$

e) $(6 - 9 + 7 - 11) - (8 - 10 + 13 - 16) = \boxed{}$

f) $4 \cdot 8 - 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 - 7 \cdot 6 - 3 \cdot 6 = \boxed{}$

g) $6 \cdot (-4) - 2 \cdot (-8) + 5 \cdot 3 - 9 \cdot (-2) = \boxed{}$

2. Repasa las operaciones con números enteros
Soluciones

1 Calcula y completa.

a) $6 - 15 + 13 - 21 - 9 = \boxed{-26}$

b) $7 + 12 - 19 - 6 + 11 - 9 = \boxed{-4}$

c) $(-5) - (+13) + (-16) - (-8) + (+7) = \boxed{-19}$

d) $(+14) + (-21) - (-18) - (+27) - (-11) = \boxed{-5}$

e) $(6 - 9 + 7 - 11) - (8 - 10 + 13 - 16) = \boxed{-2}$

f) $4 \cdot 8 - 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 - 7 \cdot 6 - 3 \cdot 6 = \boxed{-19}$

g) $6 \cdot (-4) - 2 \cdot (-8) + 5 \cdot 3 - 9 \cdot (-2) = \boxed{25}$

3. Refuerza las operaciones con números enteros

1 Calcula y completa.

a) $3 \cdot (2 - 7) - 5 \cdot (3 - 6) + 2 \cdot (8 - 15) + 4 \cdot (11 - 9) = \boxed{}$

b) $(4 - 6) \cdot (8 - 3) - (5 - 9) \cdot (1 - 7) + 18 = \boxed{}$

c) $3 \cdot (5 - 9 + 2) - 8 \cdot (3 - 6 - 2) + 4 \cdot (5 - 12) = \boxed{}$

d) $20 - 2 \cdot [10 - 3 \cdot (6 - 9)] = \boxed{}$

e) $18 + 3 \cdot (8 - 12) - 4 \cdot [5 - 3 \cdot (6 + 3 - 5 \cdot 2)] = \boxed{}$

f) $21 - 8 \cdot (10 - 4) + (8 - 11) \cdot [5 + (3 - 6) \cdot (8 - 2)] = \boxed{}$

g) $6 \cdot [5 - 2 \cdot (8 - 13)] - 5 \cdot [9 - 3 \cdot (6 - 10)] = \boxed{}$

h) $(2 - 5) \cdot [4 - 3 \cdot (4 - 9)] - (2 - 7) \cdot [15 - 2 \cdot (9 - 4)] = \boxed{}$

3. Refuerza las operaciones con números enteros

Soluciones

1 Calcula y completa.

a) $3 \cdot (2 - 7) - 5 \cdot (3 - 6) + 2 \cdot (8 - 15) + 4 \cdot (11 - 9) = \boxed{-6}$

b) $(4 - 6) \cdot (8 - 3) - (5 - 9) \cdot (1 - 7) + 18 = \boxed{-16}$

c) $3 \cdot (5 - 9 + 2) - 8 \cdot (3 - 6 - 2) + 4 \cdot (5 - 12) = \boxed{6}$

d) $20 - 2 \cdot [10 - 3 \cdot (6 - 9)] = \boxed{-18}$

e) $18 + 3 \cdot (8 - 12) - 4 \cdot [5 - 3 \cdot (6 + 3 - 5 \cdot 2)] = \boxed{-26}$

f) $21 - 8 \cdot (10 - 4) + (8 - 11) \cdot [5 + (3 - 6) \cdot (8 - 2)] = \boxed{12}$

g) $6 \cdot [5 - 2 \cdot (8 - 13)] - 5 \cdot [9 - 3 \cdot (6 - 10)] = \boxed{-15}$

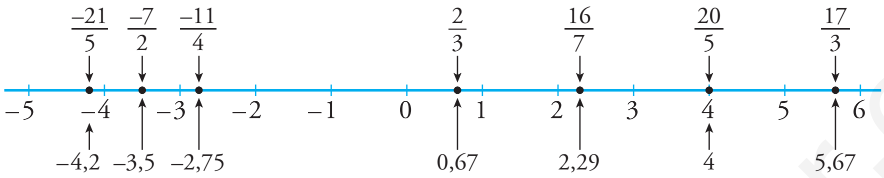
h) $(2 - 5) \cdot [4 - 3 \cdot (4 - 9)] - (2 - 7) \cdot [15 - 2 \cdot (9 - 4)] = \boxed{-32}$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 20

1 Sitúa en la recta, de forma aproximada, los siguientes números racionales:

$$\frac{17}{3},\ -\frac{11}{4},\ \frac{20}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{16}{7},\ -\frac{21}{5},\ -\frac{7}{2}$$



4. Repasa la simplificación de fracciones

1 Simplifica y completa con la fracción irreducible.

a) $\frac{12}{21} = \frac{\square}{\square}$ b) $\frac{15}{40} = \frac{\square}{\square}$ c) $\frac{18}{24} = \frac{\square}{\square}$

d) $\frac{28}{35} = \frac{\square}{\square}$ e) $\frac{48}{72} = \frac{\square}{\square}$ f) $\frac{54}{72} = \frac{\square}{\square}$

g) $\frac{84}{96} = \frac{\square}{\square}$ h) $\frac{75}{150} = \frac{\square}{\square}$ i) $\frac{208}{240} = \frac{\square}{\square}$

4. Repasa la simplificación de fracciones

Soluciones

1 Simplifica y completa con la fracción irreducible.

a) $\frac{12}{21} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{7}}$ b) $\frac{15}{40} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{8}}$ c) $\frac{18}{24} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$

d) $\frac{28}{35} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}$ e) $\frac{48}{72} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$ f) $\frac{54}{72} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$

g) $\frac{84}{96} = \frac{\boxed{7}}{\boxed{8}}$ h) $\frac{75}{150} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ i) $\frac{208}{240} = \frac{\boxed{13}}{\boxed{15}}$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 21

Cálculo mental 1

Simplifica:

$$\frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{5}{10}, \frac{10}{15}, \frac{20}{30}, \frac{30}{40}, \frac{30}{45}, \frac{40}{60}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{20}{30} = \frac{2}{3}, \quad \frac{30}{40} = \frac{3}{4}, \quad \frac{30}{45} = \frac{2}{3}, \quad \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

Cálculo mental 2

Compara:

$$\frac{7}{9} \text{ y } \frac{11}{2}; \quad \frac{2}{3} \text{ y } -\frac{4}{5}; \quad \frac{17}{4} \text{ y } \frac{20}{7}; \quad \frac{23}{5} \text{ y } 3; \quad 2 \text{ y } \frac{8}{11}; \quad 2 \text{ y } \frac{6}{3}$$

$$\frac{7}{9} < \frac{11}{2}; \quad -\frac{4}{5} < \frac{2}{3}; \quad \frac{20}{7} < \frac{17}{4}; \quad 3 < \frac{23}{5}; \quad \frac{8}{11} < 2; \quad 2 = \frac{6}{3}$$

2 **Compara mentalmente cada pareja de fracciones:**

a) $\frac{3}{4}$ **y** $\frac{4}{3}$ **b)** $\frac{6}{8}$ **y** $\frac{7}{8}$ **c)** $\frac{3}{5}$ **y** $\frac{6}{10}$ **d)** 3 **y** $\frac{11}{2}$

a) $\frac{3}{4} < \frac{4}{3}$ b) $\frac{6}{8} < \frac{7}{8}$ c) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ d) $3 < \frac{11}{2}$

3 **Ordena de menor a mayor estas fracciones:**

$$\frac{7}{12} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{13}{18}$$

mín.c.m. (12, 6, 9, 4, 18) = 36

$$\frac{7}{12} = \frac{21}{36}; \quad \frac{4}{6} = \frac{24}{36}; \quad \frac{5}{9} = \frac{20}{36}; \quad \frac{3}{4} = \frac{27}{36}; \quad \frac{13}{18} = \frac{26}{36}$$

$$\frac{20}{36} < \frac{21}{36} < \frac{24}{36} < \frac{26}{36} < \frac{27}{36}$$

Por tanto: $\frac{5}{9} < \frac{7}{12} < \frac{4}{6} < \frac{13}{18} < \frac{3}{4}$

5. Repasa la suma y la resta de fracciones

1 Completa las siguientes sumas y restas de fracciones.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{\square}{30} + \frac{\square}{30} - \frac{\square}{30} = \frac{\square}{30}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{7}{12} - \frac{5}{9} = \frac{27}{\square} + \frac{\square}{36} - \frac{20}{\square} = \frac{\square}{36} = \frac{\square}{\square}$

c) $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{7}{10} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{20}$

d) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{3}{8} - \frac{5}{24} = \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{24} = \frac{\square}{\square}$

2 Calcula y completa con la fracción irreducible.

a) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{\square}{\square}$

b) $\frac{7}{10} - \frac{5}{6} + \frac{1}{5} = \frac{\square}{\square}$

c) $\frac{7}{9} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{\square}{\square}$

d) $\frac{13}{16} + \frac{11}{24} - \frac{7}{12} = \frac{\square}{\square}$

5. Repasa la suma y la resta de fracciones

Soluciones

1 Completa las siguientes sumas y restas de fracciones.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{\boxed{20}}{30} + \frac{\boxed{6}}{30} - \frac{\boxed{15}}{30} = \frac{\boxed{11}}{30}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{7}{12} - \frac{5}{9} = \frac{27}{\boxed{36}} + \frac{\boxed{21}}{36} - \frac{20}{\boxed{36}} = \frac{\boxed{28}}{36} = \frac{\boxed{7}}{\boxed{9}}$

c) $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{7}{10} = \frac{\boxed{12}}{\boxed{20}} + \frac{\boxed{5}}{\boxed{20}} - \frac{\boxed{14}}{\boxed{20}} = \frac{\boxed{3}}{20}$

d) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{3}{8} - \frac{5}{24} = \frac{\boxed{20}}{\boxed{24}} - \frac{\boxed{8}}{\boxed{24}} + \frac{\boxed{9}}{\boxed{24}} - \frac{\boxed{5}}{\boxed{24}} = \frac{\boxed{16}}{24} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$

2 Calcula y completa con la fracción irreducible.

a) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{\boxed{-11}}{\boxed{12}}$

b) $\frac{7}{10} - \frac{5}{6} + \frac{1}{5} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{15}}$

c) $\frac{7}{9} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{\boxed{17}}{\boxed{18}}$

d) $\frac{13}{16} + \frac{11}{24} - \frac{7}{12} = \frac{\boxed{11}}{\boxed{16}}$

6. Refuerza la suma y la resta de fracciones

1 Completa con fracciones irreducibles.

a) $\frac{5}{11} - \left(\frac{7}{22} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\square}{\square}$

b) $1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\square}{\square}$

c) $\frac{7}{5} - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\square}{\square}$

d) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{\square}{\square}$

e) $\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right) = \frac{\square}{\square}$

f) $\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\square}{\square}$

6. Refuerza la suma y la resta de fracciones

Soluciones

1 Completa con fracciones irreducibles.

a) $\frac{5}{11} - \left(\frac{7}{22} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\boxed{7}}{\boxed{11}}$

b) $1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\boxed{7}}{\boxed{6}}$

c) $\frac{7}{5} - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\boxed{16}}{\boxed{15}}$

d) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$

e) $\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right) = \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}$

f) $\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\boxed{1}}{\boxed{12}}$

7. Refuerza las operaciones combinadas de fracciones

1 Calcula y completa con una fracción irreducible.

a) $\frac{5}{7} \cdot \left(\frac{2}{5} + 1\right) = \frac{\square}{\square} = \square$

b) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right) = \frac{\square}{\square}$

c) $\frac{3}{14} : \left(1 - \frac{5}{7}\right) = \frac{\square}{\square}$

d) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{5}{6} = \frac{\square}{\square}$

e) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\square}{\square}$

f) $\left(\frac{5}{9} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{6}{5} - 3\right) = \frac{\square}{\square}$

g) $\left(1 - \frac{7}{10}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{\square}{\square}$

h) $\left(\frac{7}{3} - 2\right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\square}{\square}$

2 Resuelve, simplifica y completa.

a) $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{\square}{\square}$

b) $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}} = \frac{\square}{\square}$

c) $\dfrac{2 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right)}{(-3) \cdot \left(\frac{3}{10} - \frac{8}{15}\right)} = \frac{\square}{\square}$

d) $\dfrac{(-4) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right)}{(-11) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5}\right)} = \frac{\square}{\square}$

3 Completa con una fracción irreducible.

a) $(-2) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right) : \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\square}{\square}$

b) $\frac{3}{10} : \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) + 5 \cdot \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{3}\right) = \frac{\square}{\square}$

c) $\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{5} \cdot \left[\frac{7}{12} - \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)\right] = \frac{\square}{\square}$

7. Refuerza las operaciones combinadas de fracciones

Soluciones

1 Calcula y completa con una fracción irreducible.

a) $\frac{5}{7} \cdot \left(\frac{2}{5} + 1\right) = \frac{\boxed{35}}{\boxed{35}} = \boxed{1}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right) = \frac{\boxed{-2}}{\boxed{9}}$

c) $\frac{3}{14} : \left(1 - \frac{5}{7}\right) = \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$

d) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{5}{6} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$

e) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$

f) $\left(\frac{5}{9} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{6}{5} - 3\right) = \frac{\boxed{1}}{\boxed{5}}$

g) $\left(1 - \frac{7}{10}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{\boxed{9}}{\boxed{14}}$

h) $\left(\frac{7}{3} - 2\right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}$

2 Resuelve, simplifica y completa.

a) $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{12}}$

b) $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{5}}$

c) $\dfrac{2 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right)}{(-3) \cdot \left(\frac{3}{10} - \frac{8}{15}\right)} = \frac{\boxed{11}}{\boxed{7}}$

d) $\dfrac{(-4) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right)}{(-11) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5}\right)} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{13}}$

3 Completa con una fracción irreducible.

a) $(-2) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right) : \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\boxed{5}}{\boxed{12}}$

b) $\frac{3}{10} : \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) + 5 \cdot \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{3}\right) = \frac{\boxed{2}}{\boxed{21}}$

c) $\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{5} \cdot \left[\frac{7}{12} - \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)\right] = \frac{\boxed{1}}{\boxed{5}}$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 22

Cálculo mental 1

Calcula:

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$ **b)** $1-\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

d) $\frac{7}{5}-1$ **e)** $\frac{17}{5}-3$ **f)** $\frac{17}{3}-5$

a) $\frac{3}{3}=1$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{2}{5}$ f) $\frac{2}{3}$

Cálculo mental 2

Calcula:

a) $3\cdot\frac{7}{9}$ **b)** $\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{8}$ **c)** $\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13}$ **d)** $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}$

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{6}{13}$ d) $\frac{1}{5}$

Cálculo mental 3

Calcula:

a) $\frac{6}{5}:\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{6}{5}:6$ **c)** $\frac{6}{5}:\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$

a) 2 b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{12}{5}$ e) 2

Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

1 **a)** $\frac{7}{9}+\frac{11}{12}$ **b)** $6-\frac{11}{4}$ **c)** $3\cdot\frac{4}{5}$

d) $6:\frac{4}{5}$ **e)** $\frac{4}{5}:6$ **f)** $\frac{4}{5}:\frac{1}{6}$

a) $\frac{7}{9}+\frac{11}{12}=\frac{28}{36}+\frac{33}{36}=\frac{61}{36}$

b) $6-\frac{11}{4}=\frac{24}{4}-\frac{11}{4}=\frac{13}{4}$

c) $3\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$

d) $6:\frac{4}{5}=6\cdot\frac{5}{4}=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}$

e) $\frac{4}{5}:6=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

f) $\frac{4}{5}:\frac{1}{6}=\frac{4}{5}\cdot 6=\frac{24}{5}$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

2 a) $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{6}-\frac{7}{8}\right):\frac{25}{12}$ b) $\left(\frac{13}{15}-\frac{7}{25}\right)\cdot\left(\frac{9}{22}+\frac{-13}{33}\right)$

a) $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{6}-\frac{7}{8}\right):\frac{25}{12}=\left(\frac{18}{24}+\frac{28}{24}-\frac{21}{24}\right):\frac{25}{12}=\frac{25}{24}:\frac{25}{12}=\frac{25}{24}\cdot\frac{12}{25}=\frac{1}{2}$

b) $\left(\frac{13}{15}-\frac{7}{25}\right)\cdot\left(\frac{9}{22}+\frac{-13}{33}\right)=\left(\frac{65}{75}-\frac{21}{75}\right)\cdot\left(\frac{27}{66}+\frac{-26}{66}\right)=\frac{44}{75}\cdot\frac{1}{66}=\frac{2}{225}$

3 a) $\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}-1\right)}{\frac{3}{4}+1}$ b) $\dfrac{(-3)\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)}{(-2)\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{5}\right)}$

a) $\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}-1\right)}{\frac{3}{4}+1}=\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{-1}{4}\right)}{\frac{7}{4}}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}}=\frac{3}{4}:\frac{7}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$

b) $\dfrac{(-3)\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)}{(-2)\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{5}\right)}=\dfrac{(-3)\left(\frac{9}{15}-\frac{5}{15}\right)}{(-2)\left(\frac{20}{15}-\frac{18}{15}\right)}=\dfrac{(-3)\cdot\frac{4}{15}}{(-2)\cdot\frac{2}{15}}=\dfrac{\frac{-4}{5}}{\frac{-4}{15}}=\left(\frac{-4}{5}\right):\left(\frac{-4}{15}\right)=\left(\frac{-4}{5}\right)\cdot\left(\frac{-15}{4}\right)=3$

4 a) $\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{15}\right)}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)}$ b) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}$

a) $\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{15}\right)}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)}=\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{9}{15}-\frac{2}{15}\right)}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{2}{4}-\frac{3}{4}\right)}=\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{15}}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)}=\dfrac{3-\frac{7}{60}}{6+\left(\frac{-1}{25}\right)}=$

$=\dfrac{\frac{180}{60}-\frac{7}{60}}{\frac{150}{25}-\frac{1}{25}}=\dfrac{\frac{173}{60}}{\frac{149}{25}}=\frac{173}{60}:\frac{149}{25}=\frac{173}{60}\cdot\frac{25}{149}=\frac{4325}{8940}=\frac{865}{1788}$

b) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}=\dfrac{\left(\frac{6}{9}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{9}{12}-\frac{10}{12}\right)}{\left(\frac{7}{12}-\frac{10}{12}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}=\dfrac{\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{-1}{12}\right)}{\left(\frac{-3}{12}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}=\dfrac{\frac{-1}{108}}{\frac{-1}{3}+1}=\dfrac{\frac{-1}{108}}{\frac{2}{3}}=$

$=\frac{-1}{108}:\frac{2}{3}=\frac{-1}{108}\cdot\frac{3}{2}=\frac{-3}{216}=\frac{-1}{72}$

8. Repasa el concepto de fracción como operador

1 Calcula mentalmente y completa.

a) $\frac{1}{4}$ de 32 = $\square$ b) $\frac{3}{4}$ de 24 = $\square$ c) $\frac{1}{2}$ de 52 = $\square$

d) $\frac{2}{5}$ de 20 = $\square$ e) $\frac{5}{6}$ de 30 = $\square$ f) $\frac{2}{7}$ de 70 = $\square$

g) $\frac{3}{7}$ de 21 = $\square$ h) $\frac{5}{8}$ de 40 = $\square$

2 Calcula y completa.

a) $\frac{2}{9}$ de 117 = $\square$ b) $\frac{7}{10}$ de 380 = $\square$ c) $\frac{7}{11}$ de 132 = $\square$

d) $\frac{11}{14}$ de 350 = $\square$ e) $\frac{5}{21}$ de 1 428 = $\square$ f) $\frac{15}{22}$ de 1 540 = $\square$

g) $\frac{9}{31}$ de 1 674 = $\square$ h) $\frac{19}{32}$ de 2 080 = $\square$

3 Calcula mentalmente y completa.

a) $\frac{1}{2}$ de $\square$ = 13 b) $\frac{1}{4}$ de $\square$ = 8 c) $\frac{3}{4}$ de $\square$ = 15

d) $\frac{1}{3}$ de $\square$ = 4 e) $\frac{2}{3}$ de $\square$ = 14 f) $\frac{2}{5}$ de $\square$ = 12

g) $\frac{3}{5}$ de $\square$ = 15 h) $\frac{3}{7}$ de $\square$ = 30

4 Calcula y completa.

a) $\frac{1}{6}$ de $\square$ = 107 b) $\frac{3}{4}$ de $\square$ = 210 c) $\frac{2}{5}$ de $\square$ = 168

d) $\frac{3}{7}$ de $\square$ = 132 e) $\frac{9}{10}$ de $\square$ = 243 f) $\frac{7}{13}$ de $\square$ = 357

g) $\frac{8}{15}$ de $\square$ = 344 h) $\frac{5}{17}$ de $\square$ = 245

8. Repasa el concepto de fracción como operador

Soluciones

1 Calcula mentalmente y completa.

a) $\frac{1}{4}$ de 32 = $\boxed{8}$ b) $\frac{3}{4}$ de 24 = $\boxed{18}$ c) $\frac{1}{2}$ de 52 = $\boxed{26}$

d) $\frac{2}{5}$ de 20 = $\boxed{8}$ e) $\frac{5}{6}$ de 30 = $\boxed{25}$ f) $\frac{2}{7}$ de 70 = $\boxed{20}$

g) $\frac{3}{7}$ de 21 = $\boxed{9}$ h) $\frac{5}{8}$ de 40 = $\boxed{25}$

2 Calcula y completa.

a) $\frac{2}{9}$ de 117 = $\boxed{26}$ b) $\frac{7}{10}$ de 380 = $\boxed{266}$ c) $\frac{7}{11}$ de 132 = $\boxed{84}$

d) $\frac{11}{14}$ de 350 = $\boxed{275}$ e) $\frac{5}{21}$ de 1 428 = $\boxed{340}$ f) $\frac{15}{22}$ de 1 540 = $\boxed{1\,050}$

g) $\frac{9}{31}$ de 1 674 = $\boxed{486}$ h) $\frac{19}{32}$ de 2 080 = $\boxed{1\,235}$

3 Calcula mentalmente y completa.

a) $\frac{1}{2}$ de $\boxed{26}$ = 13 b) $\frac{1}{4}$ de $\boxed{32}$ = 8 c) $\frac{3}{4}$ de $\boxed{20}$ = 15

d) $\frac{1}{3}$ de $\boxed{12}$ = 4 e) $\frac{2}{3}$ de $\boxed{21}$ = 14 f) $\frac{2}{5}$ de $\boxed{30}$ = 12

g) $\frac{3}{5}$ de $\boxed{25}$ = 15 h) $\frac{3}{7}$ de $\boxed{70}$ = 30

4 Calcula y completa.

a) $\frac{1}{6}$ de $\boxed{642}$ = 107 b) $\frac{3}{4}$ de $\boxed{280}$ = 210 c) $\frac{2}{5}$ de $\boxed{420}$ = 168

d) $\frac{3}{7}$ de $\boxed{308}$ = 132 e) $\frac{9}{10}$ de $\boxed{270}$ = 243 f) $\frac{7}{13}$ de $\boxed{663}$ = 357

g) $\frac{8}{15}$ de $\boxed{645}$ = 344 h) $\frac{5}{17}$ de $\boxed{833}$ = 245

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 23

Cálculo mental 1

Di qué parte de la cantidad total corresponde a la fracción.

	FRACCIÓN	CANTIDAD TOTAL
a)	**1/2**	**520 000**
b)	**3/5**	**1 000 000**
c)	**7/10**	**500**

a) 260 000 b) 600 000 c) 350

Cálculo mental 2

Di en cada caso la cantidad total:

	PARTE DEL TOTAL	FRACCIÓN
a)	**350**	**1/2**
b)	**400**	**2/3**
c)	**350**	**7/10**

a) 700 b) 600 c) 500

Cálculo mental 3

Di en cada caso qué fracción falta para completar la unidad.

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ y $\frac{?}{?}$ **b)** $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ y $\frac{?}{?}$ **c)** $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ y $\frac{?}{?}$ **d)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ y $\frac{?}{?}$

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{7}{12}$ d) $\frac{1}{8}$

1 **Un ciclista ha recorrido los 5/9 de la etapa de hoy, de 216 km. ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos?**

$\frac{5}{9} \cdot 216 = 120$

Lleva recorridos 120 km.

2 **He sacado del banco 3 900 €, que son los 3/11 de mis ahorros. ¿A cuánto ascienden mis ahorros?**

$3\,900 \cdot \frac{11}{3} = 14\,300$ € son la totalidad de mis ahorros.

3 **De una balsa con 5 250 litros de agua, corresponden 4/15 a Braulio; 2/5, a Enrique, y el resto, a Ruperto. Ruperto dedica 3/10 de su parte a regar tomates, y el resto, a los frutales. ¿Cuánta agua dedica Ruperto a los frutales?**

$1 - \frac{4}{15} - \frac{2}{5} = \frac{15 - 4 - 6}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ de la balsa le corresponde a Ruperto.

Ruperto dedica $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ a los frutales.

$\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5\,250 = 1\,225$ l de agua dedica a regar frutales.

PÁGINA 25

1 **Indica qué tipo de número decimal es cada uno de los siguientes:**

$$3{,}52 \qquad 2{,}\widehat{8} \qquad 1{,}\widehat{54} \qquad \sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$$
$$2{,}7\widehat{3} \qquad 3{,}5222\ldots \qquad \pi - 2 = 1{,}1415926\ldots$$

$3{,}52$	Decimal exacto.
$2{,}\widehat{8}$	Decimal periódico puro.
$1{,}\widehat{54}$	Decimal periódico puro.
$\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$	Decimal no exacto ni periódico.
$2{,}7\widehat{3}$	Decimal periódico mixto.
$3{,}5222\ldots$	Decimal periódico mixto.
$\pi - 2 = 1{,}1415926\ldots$	Decimal no exacto ni periódico.

2 **Ordena de menor a mayor estos números:**

$$2{,}\widehat{5} \qquad 2{,}5 \qquad 2{,}3\widehat{5} \qquad 2{,}505005\ldots$$

$2{,}3\widehat{5} < 2{,}5 < 2{,}505005\ldots < 2{,}\widehat{5}$

3 **Escribe tres números decimales comprendidos entre 2,5 y $2{,}\widehat{5}$.**

Respuesta abierta.

Ejemplo: $2{,}5 < 2{,}51 < 2{,}52 < 2{,}\widehat{52} < 2{,}\widehat{5}$

4 **Sin efectuar la división, y atendiendo solo al denominador de la fracción simplificada, di si las siguientes fracciones darán lugar a decimales exactos o periódicos:**

a) $\dfrac{44}{150}$ **b)** $\dfrac{42}{150}$ **c)** $\dfrac{101}{1\,024}$ **d)** $\dfrac{1\,001}{500}$

a) $\dfrac{44}{150} = \dfrac{22}{75} \rightarrow 75 = 5^2 \cdot 3 \rightarrow$ Decimal periódico, pues en el denominador de la fracción simplificada hay algún factor (el 3) distinto de 2 y 5.

b) $\dfrac{42}{150} = \dfrac{7}{25} \rightarrow 25 = 5^2 \rightarrow$ Decimal exacto.

c) $\dfrac{101}{1\,024} \rightarrow 1\,024 = 2^{16} \rightarrow$ Decimal exacto.

d) $\dfrac{1\,001}{500} \rightarrow 500 = 2^2 \cdot 5^3 \rightarrow$ Decimal exacto.

9. Ayuda al razonamiento. Paso de decimal periódico puro a fracción

PROCESO

Vamos a pasar a forma fraccionaria el decimal periódico puro $N = 2,\overset{\frown}{18}$.

- Multiplica el número N por 100 y réstale N.

$$\begin{array}{rr} 100\,N = & \square\square\square,\square\square\square\square\ldots \\ -\qquad N = & \square,\square\square\square\square\ldots \\ \hline \square\square\,N = & \square\square\square,\square\square\square\square\ldots \end{array}$$

- Despeja N para expresarlo como una fracción.

$$99\,N = 216 \;\rightarrow\; N = \frac{\square\square\square}{\square\square}$$

- Simplifica la fracción que has obtenido.

$$N = \frac{216}{99} = \frac{\square\square}{\square\square}$$

- Comprueba el resultado con la calculadora.

$$N = \frac{24}{11} = 24 : 11 = 2,18181818\ldots$$

CONCLUSIÓN

Para pasar un número decimal periódico puro a fracción, se procede así:

- Se pone en el numerador la parte entera seguida del primer periodo, **menos** la parte entera.
- Se pone en el denominador un número formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo.

$$N = 2,\overset{\frown}{18} = \frac{\square\square\square - \square}{\square\square} = \frac{\square\square\square}{\square\square} = \frac{\square\square}{\square\square}$$

ACTIVIDADES

Completa y después comprueba con la calculadora.

A $= 1,\overset{\frown}{6} = \dfrac{\square\square - \square}{\square} = \dfrac{\square\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$

B $= 3,\overset{\frown}{4} = \dfrac{\square\square - \square}{\square} = \dfrac{\square\square}{\square}$

C $= 2,\overset{\frown}{45} = \dfrac{\square\square\square - \square}{\square\square} = \dfrac{\square\square\square}{\square\square} = \dfrac{\square\square}{\square\square}$

D $= 1,\overset{\frown}{03} = \dfrac{\square\square\square - \square}{\square\square} = \dfrac{\square\square\square}{\square\square} = \dfrac{\square\square}{\square\square}$

9. Ayuda al razonamiento. Paso de decimal periódico puro a fracción
Soluciones

Proceso

Vamos a pasar a forma fraccionaria el decimal periódico puro $N = 2,\widehat{18}$.

- Multiplica el número N por 100 y réstale N.

$$\begin{array}{rr} 100\,N = & 218{,}18\,18\dots \\ -\qquad N = & 2{,}18\,18\dots \\ \hline 99\,N = & 216{,}00\,00\dots \end{array}$$

- Despeja N para expresarlo como una fracción.

$$99\,N = 216 \rightarrow N = \frac{216}{99}$$

- Simplifica la fracción que has obtenido.

$$N = \frac{216}{99} = \frac{24}{11}$$

- Comprueba el resultado con la calculadora.

$$N = \frac{24}{11} = 24 : 11 = 2{,}18181818\dots$$

Conclusión

Para pasar un número decimal periódico puro a fracción, se procede así:

- Se pone en el numerador la parte entera seguida del primer periodo, **menos** la parte entera.
- Se pone en el denominador un número formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo.

$$N = 2,\widehat{18} = \frac{218 - 2}{99} = \frac{216}{99} = \frac{24}{11}$$

ACTIVIDADES

Completa y después comprueba con la calculadora.

A $= 1,\widehat{6} = \dfrac{16 - 1}{9} = \dfrac{15}{9} = \dfrac{5}{3}$

B $= 3,\widehat{4} = \dfrac{34 - 3}{9} = \dfrac{31}{9}$

C $= 2,\widehat{45} = \dfrac{245 - 2}{99} = \dfrac{243}{99} = \dfrac{27}{11}$

D $= 1,\widehat{03} = \dfrac{103 - 1}{99} = \dfrac{102}{99} = \dfrac{34}{33}$

1

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 26

1 Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

a) $6{,}2$

b) $3{,}\overset{\frown}{5}$

c) $0{,}\overset{\frown}{23}$

d) $41{,}\overset{\frown}{041}$

e) $5{,}\overset{\frown}{9}$

f) $40{,}\overset{\frown}{028}$

a) $\dfrac{62}{10} = \dfrac{31}{5}$

b) $10N - N = 35 - 3 \;\rightarrow\; 9N = 32 \;\rightarrow\; N = \dfrac{32}{9}$

c) $100N - N = 23 - 0 \;\rightarrow\; 99N = 23 \;\rightarrow\; N = \dfrac{23}{99}$

d) $1000N - N = 41041 - 41 \;\rightarrow\; 999N = 41000 \;\rightarrow\; N = \dfrac{41\,000}{999}$

e) $10N - N = 59 - 5 \;\rightarrow\; 9N = 54 \;\rightarrow\; N = \dfrac{54}{9}$

f) $1\,000N - N = 40\,028 - 40 \;\rightarrow\; 999N = 39\,988 \;\rightarrow\; N = \dfrac{39\,988}{999}$

10. Ayuda al razonamiento. Paso de decimal periódico mixto a fracción

Proceso

Vamos a pasar a forma fraccionaria el decimal periódico mixto $M = 1{,}2\widehat{54}$.

- Multiplica el número M primero por 1 000 y después por 10 y resta los resultados.

$$\begin{array}{rl} 1\,000\,M = & \square\square\square\square{,}\square\square\square\square\ldots \\ -\quad 10\,M = & \quad\;\;\square\square{,}\square\square\square\square\ldots \\ \hline 990\,M = & \square\square\square\square{,}\square\square\square\square\ldots \end{array}$$

- Despeja M para expresarlo como una fracción.

$$990\,M = 1\,242 \rightarrow M = \frac{\square\square\square\square}{\square\square\square}$$

- Simplifica la fracción obtenida.

$$N = \frac{1\,242}{990} = \frac{\square\square}{\square\square}$$

- Comprueba el resultado con la calculadora.

$$N = \frac{69}{55} = 69 : 55 = 1{,}254545454\ldots$$

Conclusión

Para pasar un número decimal periódico mixto a fracción, se procede así:

- Se pone en el numerador la parte no periódica seguida del primer periodo, sin comas, **menos** la parte no periódica.
- Se pone en el denominador un número formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo, seguidos de tantos ceros como cifras decimales no periódicas tenga el número inicial.

$$M = 1{,}2\widehat{54} = \frac{\square\square\square\square - \square\square}{\square\square\square} = \frac{\square\square\square\square}{\square\square\square} = \frac{\square\square}{\square\square}$$

Actividades

Completa y después comprueba con la calculadora.

$$\textbf{A} = 0{,}00\widehat{5} = \frac{\square}{\square\square\square} = \frac{\square}{\square\square\square}$$

$$\textbf{B} = 1{,}0\widehat{18} = \frac{\square\square\square\square - \square\square}{\square\square\square} = \frac{\square\square\square\square}{\square\square\square} = \frac{\square\square}{\square\square}$$

$$\textbf{C} = 1{,}57\widehat{2} = \frac{\square\square\square\square - \square\square\square}{\square\square\square} = \frac{\square\square\square\square}{\square\square\square} = \frac{\square\square\square}{\square\square\square}$$

$$\textbf{D} = 0{,}41\widehat{26} = \frac{\square\square\square\square - \square\square}{\square\square\square\square} = \frac{\square\square\square\square}{\square\square\square\square} = \frac{\square\square\square}{\square\square\square\square}$$

10. Ayuda al razonamiento. Paso de decimal periódico mixto a fracción
Soluciones

PROCESO

Vamos a pasar a forma fraccionaria el decimal periódico mixto $M = 1{,}2\widehat{54}$.

- Multiplica el número M primero por 1 000 y después por 10 y resta los resultados.

$$\begin{array}{rr} 1\,000\,M = & 1254{,}5454\ldots \\ -\quad 10\,M = & 12{,}5454\ldots \\ \hline 990\,M = & 1242{,}0000\ldots \end{array}$$

- Despeja M para expresarlo como una fracción.

$$990\,M = 1\,242 \;\rightarrow\; M = \frac{1242}{990}$$

- Simplifica la fracción obtenida.

$$N = \frac{1\,242}{990} = \frac{69}{55}$$

- Comprueba el resultado con la calculadora.

$$N = \frac{69}{55} = 69 : 55 = 1{,}254545454\ldots$$

CONCLUSIÓN

Para pasar un número decimal periódico mixto a fracción, se procede así:

- Se pone en el numerador la parte no periódica seguida del primer periodo, sin comas, **menos** la parte no periódica.
- Se pone en el denominador un número formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo, seguidos de tantos ceros como cifras decimales no periódicas tenga el número inicial.

$$M = 1{,}2\widehat{54} = \frac{1254 - 12}{990} = \frac{1242}{990} = \frac{69}{55}$$

ACTIVIDADES

Completa y después comprueba con la calculadora.

A $= 0{,}00\widehat{5} = \dfrac{5}{900} = \dfrac{1}{180}$

B $= 1{,}0\widehat{18} = \dfrac{1018 - 10}{990} = \dfrac{1008}{990} = \dfrac{56}{55}$

C $= 1{,}57\widehat{2} = \dfrac{1572 - 157}{900} = \dfrac{1415}{900} = \dfrac{283}{180}$

D $= 0{,}41\widehat{26} = \dfrac{4126 - 41}{9900} = \dfrac{4085}{9900} = \dfrac{817}{1980}$

PÁGINA 27

2 Completa el proceso para expresar como fracción el número dado.

a) $6{,}21\overset{\frown}{7}$ $\begin{cases} N = 6{,}21777\ldots \\ 100N = 621{,}77777\ldots \\ 1\,000N = 6\,217{,}7777\ldots \end{cases}$

b) $0{,}031\overset{\frown}{62}$ $\begin{cases} N = 0{,}0316262\ldots \\ 1\,000N = 31{,}626262\ldots \\ 100\,000N = 3\,162{,}626262\ldots \end{cases}$

a) $1\,000N - 100N = 6\,217 - 621 \;\rightarrow\; 900N = 5\,526 \;\rightarrow\; N = \dfrac{5\,526}{900} = \dfrac{1\,399}{225}$

b) $100\,000N - 1\,000N = 3\,162 - 31 \;\rightarrow\; 99\,000N = 3\,131 \;\rightarrow\; N = \dfrac{3\,131}{99\,000}$

3 Expresa como fracción los decimales siguientes:

a) $6{,}2\overset{\frown}{5}$ **b)** $0{,}00\overset{\frown}{1}$ **c)** $5{,}0\overset{\frown}{18}$

a) $100N - 10N = 625 - 62 \;\rightarrow\; 90N = 563 \;\rightarrow\; N = \dfrac{563}{90}$

b) $1\,000N - 100N = 1 - 0 \;\rightarrow\; 900N = 1 \;\rightarrow\; N = \dfrac{1}{900}$

c) $1\,000N - 10N = 5\,018 - 50 \;\rightarrow\; 990N = 4\,968 \;\rightarrow\; N = \dfrac{4\,968}{990} = \dfrac{276}{55}$

4 ¿Cuáles de los siguientes números son racionales? Ponlos en forma de fracción:

a) $3{,}51$ **b)** $5{,}202002000\ldots$ **c)** $5{,}\overset{\frown}{03}$

d) $0{,}3212121\ldots$ **e)** $\pi = 3{,}141592\ldots$ **f)** $7{,}4\overset{\frown}{331}$

a) Sí es un número racional.

Fracción: $\dfrac{351}{100}$

b) No es un número racional, porque no es decimal periódico ni exacto.

c) Sí es un número racional.

Fracción: $\dfrac{498}{99} = \dfrac{166}{33}$

d) Sí es un número racional.

Fracción: $\dfrac{318}{990} = \dfrac{53}{165}$

e) No es un número racional, porque no es decimal periódico ni exacto.

f) Sí es un número racional.

Fracción: $\dfrac{74\,257}{9\,990}$

11. Refuerza el cálculo de porcentajes resolviendo problemas

1 En un hotel de 175 habitaciones están ocupadas el 60%. ¿Cuántas habitaciones están ocupadas?

Solución:

2 El 32% de los 25 alumnos de una clase participan en un torneo de ajedrez. ¿Cuántos alumnos participan en el torneo?

Solución:

3 En un colegio de 750 alumnos han aprobado todas las materias 495. ¿Qué tanto por ciento de alumnos ha aprobado todo?

Solución:

4 Un agente inmobiliario cobra una comisión del 1,5 % sobre el precio de un apartamento que se ha vendido por 100 500 €. ¿Cuánto cobra por esa venta?

Solución:

5 De los 1 300 alumnos de un colegio, 156 estudia tercero de ESO. ¿Qué tanto por ciento representan los alumnos de tercero?

Solución:

6 En un club deportivo hay 124 socios que juegan al baloncesto y representan el 25 % del total. Calcula cuántos socios tiene ese club.

Solución:

7 En un hospital están ocupadas 405 camas de las 450 que tiene el centro. ¿Cuál es el porcentaje de camas ocupadas?

Solución:

8 Tres hermanos compran un regalo a su madre. El mayor paga 13,20 € que representan el 40% del precio del regalo. ¿Cuál es el precio del regalo?

Solución:

9 En un depósito de agua hemos echado 57,4 litros que representan el 82% de su capacidad. ¿Cuántos litros caben en el depósito?

Solución:

10 La superficie cultivada de una comunidad es 357 ha, lo que representa el 38% de su extensión. ¿Cuál es la superficie de esa comunidad?

Solución:

11. Refuerza el cálculo de porcentajes resolviendo problemas

Soluciones

1 En un hotel de 175 habitaciones están ocupadas el 60%. ¿Cuántas habitaciones están ocupadas?

Solución: 105

2 El 32% de los 25 alumnos de una clase participan en un torneo de ajedrez. ¿Cuántos alumnos participan en el torneo?

Solución: 8

3 En un colegio de 750 alumnos han aprobado todas las materias 495. ¿Qué tanto por ciento de alumnos ha aprobado todo?

Solución: 66%

4 Un agente inmobiliario cobra una comisión del 1,5 % sobre el precio de un apartamento que se ha vendido por 100 500 €. ¿Cuánto cobra por esa venta?

Solución: 1 507,50 €

5 De los 1 300 alumnos de un colegio, 156 estudia tercero de ESO. ¿Qué tanto por ciento representan los alumnos de tercero?

Solución: 12%

6 En un club deportivo hay 124 socios que juegan al baloncesto y representan el 25 % del total. Calcula cuántos socios tiene ese club.

Solución: 496

7 En un hospital están ocupadas 405 camas de las 450 que tiene el centro. ¿Cuál es el porcentaje de camas ocupadas?

Solución: 90%

8 Tres hermanos compran un regalo a su madre. El mayor paga 13,20 € que representan el 40% del precio del regalo. ¿Cuál es el precio del regalo?

Solución: 33 €

9 En un depósito de agua hemos echado 57,4 litros que representan el 82% de su capacidad. ¿Cuántos litros caben en el depósito?

Solución: 70 *l*

10 La superficie cultivada de una comunidad es 357 ha, lo que representa el 38% de su extensión. ¿Cuál es la superficie de esa comunidad?

Solución: 939,47 ha

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 28

Cálculo mental 1

Expresa en forma decimal los siguientes porcentajes:

a) 10% b) 7% c) 1% d) 160% e) 127% f) 5%

a) 0,1 b) 0,07 c) 0,01 d) 1,6 e) 1,27 f) 0,05

Cálculo mental 2

¿Qué tanto por ciento representa cada cantidad respecto a su total?:

a) 15 respecto a 30. b) 5 respecto a 20. c) 2 respecto a 10.

d) 30 respecto a 3 000. e) 3 respecto a 4.

a) 50% b) 25% c) 20% d) 1% e) 75%

1 **Calcula.**

a) El 24% de 300. **b) El 112% de 560.**

c) El 3% de 83 200. **d) El 30% de 83 200.**

e) El 230% de 5 200. **f) El 300% de 40.**

a) $300 \cdot 0{,}24 = 72$ b) $560 \cdot 1{,}12 = 627{,}2$

c) $83\,200 \cdot 0{,}03 = 2\,496$ d) $83\,200 \cdot 0{,}03 = 24\,960$

e) $5\,200 \cdot 2{,}30 = 11\,960$ f) $300 \cdot 0{,}4 = 120$

2 **Calcula el tanto por ciento que representa.**

a) 45 respecto a 225. **b) 6 160 respecto a 56 000.**

c) 4 230 respecto a 9 000. **d) 1 922 respecto a 1 240.**

e) 6 000 respecto a 4 000. **f) 975 respecto a 32 500.**

a) $\frac{45}{225} \cdot 100 = 20 \rightarrow 20\%$

b) $\frac{6\,160}{56\,000} \cdot 100 = 11 \rightarrow 11\%$

c) $\frac{4\,230}{9\,000} \cdot 100 = 47 \rightarrow 47\%$

d) $\frac{1\,922}{1\,240} \cdot 100 = 155 \rightarrow 155\%$

e) $\frac{6\,000}{4\,000} \cdot 100 = 150 \rightarrow 150\%$

f) $\frac{975}{32\,500} \cdot 100 = 3 \rightarrow 3\%$

12. Refuerza el cálculo de aumentos y disminuciones porcentuales

1 En un restaurante han subido el menú del día un 8%. ¿Cuál será el nuevo precio si costaba 7,5 €?

Solución: ______ € ______ cént

2 Tengo que pagar 352 € por un mueble en el que me incluyen el cobro de un 10% por transporte. ¿Cuál será el precio del mueble prescindiendo del transporte?

Solución: ______

3 ¿Cuál sera el precio de unos zapatos de 68 € si nos hacen un descuento del 40%?

Solución: ______ € ______ cént

4 ¿Qué descuento me han hecho en una factura de 1 385 € si he pagado 1 135,7 €?

Solución: ______

5 Una camiseta cuesta 21 € después de rebajarla un 30%. ¿Cuál era su precio antes de la rebaja?

Solución: ______

6 El número de alumnos que juega al baloncesto ha pasado en un año de 110 a 145, mientras que el número de los que juegan al tenis ha pasado de 45 a 57. ¿En cuál de los dos deportes ha sido mayor el aumento porcentual?

Solución: ______

7 El precio de un coche que hoy cuesta 39 200 € ha subido en el último año un 12%. ¿Cuánto costaba ese mismo coche hace un año?

Solución: ______

8 La cantidad de agua que hay en un depósito es de 1 107 *l* después de haber utilizado el 18% de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

Solución: ______

12. Refuerza el cálculo de aumentos y disminuciones porcentuales
Soluciones

1 En un restaurante han subido el menú del día un 8%. ¿Cuál será el nuevo precio si costaba 7,5 €?

Solución: 8 € 10 cént

2 Tengo que pagar 352 € por un mueble en el que me incluyen el cobro de un 10% por transporte. ¿Cuál será el precio del mueble prescindiendo del transporte?

Solución: 320 €

3 ¿Cuál sera el precio de unos zapatos de 68 € si nos hacen un descuento del 40%?

Solución: 40 € 80 cént

4 ¿Qué descuento me han hecho en una factura de 1 385 € si he pagado 1 135,7 €?

Solución: 18%

5 Una camiseta cuesta 21 € después de rebajarla un 30%. ¿Cuál era su precio antes de la rebaja?

Solución: 30 €

6 El número de alumnos que juega al baloncesto ha pasado en un año de 110 a 145, mientras que el número de los que juegan al tenis ha pasado de 45 a 57. ¿En cuál de los dos deportes ha sido mayor el aumento porcentual?

Solución: Baloncesto

7 El precio de un coche que hoy cuesta 39 200 € ha subido en el último año un 12%. ¿Cuánto costaba ese mismo coche hace un año?

Solución: 35 000 €

8 La cantidad de agua que hay en un depósito es de 1 107 *l* después de haber utilizado el 18% de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

Solución: 1 350 *l*

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 29

Cálculo mental 3

¿Qué índice de variación corresponde a estos aumentos porcentuales?

a) 25%	**b) 5%**	**c) 40%**	**d) 80%**	**e) 110%**	**f) 200%**
a) 1,25	b) 1,05	c) 1,4	d) 1,8	e) 2,1	f) 3

Cálculo mental 4

¿Qué índice de variación corresponde a estas disminuciones porcentuales?

a) 25%	**b) 5%**	**c) 40%**	**d) 15%**	**e) 88%**	**f) 1%**
a) 0,75	b) 0,95	c) 0,6	d) 0,85	e) 0,12	f) 0,99

3 **Unas acciones que valían a principios de año 13,70 € han subido un 35%. ¿Cuánto valen ahora?**

Ahora valen 13,70 · 1,35 = 18,50 €.

4 **En una comunidad autónoma había 69 580 parados. Han disminuido un 15%. ¿Cuántos hay ahora?**

Ahora hay 69 580 · 0,85 = 59 143 parados.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 30

Cálculo mental 5

Di la cantidad inicial si sabemos que:

a) Aumenta 50%. C. final = 1 500.

b) Aumenta 50%. C. final = 3 000.

c) Aumenta 25%. C. final = 125.

d) Aumenta 25%. C. final = 250.

e) Disminuye 50%. C. final = 400.

f) Disminuye 40%. C. final = 600.

a) 1 000 b) 2 000 c) 100 d) 200 e) 800 f) 1 000

5 El precio de una batidora, después de aplicarle un IVA de un 18%, es de 70,80 €. ¿Cuál es su precio antes de cargarle ese IVA?

El precio sin IVA es 70,80 : 1,18 = 60 €.

6 Al estirar una goma elástica, su longitud aumenta un 30% y, en esa posición, mide 104 cm. ¿Cuánto mide sin estirar?

Sin estirar, la goma mide 104 : 1,30 = 80 cm.

7 En unas rebajas en las que se hace el 30% de descuento, Roberto ha comprado una cámara fotográfica por 50,40 €. ¿Cuál era su precio inicial?

Su precio era 50,40 : 0,70 = 72 €.

8 Un cartero ha repartido el 36% de las cartas que tenía. Aún le quedan 1 184. ¿Cuántas tenía antes de empezar el reparto?

Si ha repartido el 36%, le quedan el 64%; es decir, 1 184 : 0,64 = 1 850 cartas.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 31

9 **Un comerciante aumenta el precio de sus productos un 30% y, después, pretendiendo dejarlos al precio inicial, los rebaja un 30%.**

a) Un ordenador que inicialmente costaba 1 000 €, ¿cuánto costará en cada paso del proceso?

b) ¿Cuál es la variación porcentual que sufren los artículos respecto al precio inicial?

a) $1\,000 \text{ €} \xrightarrow{+30\%} 1\,300 \text{ €} \xrightarrow{-30\%} 910 \text{ €}$

b) Índice de variación total: $1,3 \cdot 0,7 = 0,91$.

$0,91 - 1 = -0,09$

Variación porcentual: baja un 9%.

10 **Un capital de 42 000 € se deposita en un banco al 5% anual. ¿En cuánto se habrá convertido en un año? ¿Y en dos? ¿Y en tres años?**

$42\,000 \text{ €} \xrightarrow{1.^{er} \text{ AÑO}} 42\,000 \cdot 1,05 = 44\,100 \rightarrow$

$\xrightarrow{2.^{o} \text{ AÑO}} 44\,100 \cdot 1,05 = 46\,305 \rightarrow$

$\xrightarrow{3.^{er} \text{ AÑO}} 46\,305 \cdot 1,05 = 48\,620,25 \text{ €}$

También puede hacerse así:

1 año: $42\,000 \cdot 1,05 = 44\,100$ €

2 años: $42\,000 \cdot 1,05^2 = 46\,305$ €

3 años: $42\,000 \cdot 1,05^3 = 48\,620,25$ €

13. Refuerza, resolviendo problemas, el cálculo de interés compuesto

1 Se depositan en un banco 15 500 € al 3% anual. ¿En cuánto se habrán convertido al cabo de un año?

Solución:

2 Se colocan en un banco 8 250 € al 4% anual durante 10 meses. Si los intereses se suman al capital al final de cada mes, ¿qué cantidad se podrá retirar al final de esos 10 meses?

Solución:

3 ¿En cuánto se convertirá un capital de 30 000 € colocado al 5% anual de interés compuesto durante 3 años?

Solución:

4 Si deposito en un banco 3 500 € al 6% de interés anual, y los intereses se suman cada mes al capital durante 6 meses, ¿qué cantidad podré retirar transcurrido ese tiempo?

Solución:

13. Refuerza, resolviendo problemas, el cálculo de interés compuesto

Soluciones

1 Se depositan en un banco 15 500 € al 3% anual. ¿En cuánto se habrán convertido al cabo de un año?

Solución: 15 956 €

2 Se colocan en un banco 8 250 € al 4% anual durante 10 meses. Si los intereses se suman al capital al final de cada mes, ¿qué cantidad se podrá retirar al final de esos 10 meses?

Solución: 8 529,16 €

3 ¿En cuánto se convertirá un capital de 30 000 € colocado al 5% anual de interés compuesto durante 3 años?

Solución: 34 728,75 €

4 Si deposito en un banco 3 500 € al 6% de interés anual, y los intereses se suman cada mes al capital durante 6 meses, ¿qué cantidad podré retirar transcurrido ese tiempo?

Solución: 3 606,32 €

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 32

1 **¿En cuánto se transforma un capital de 20 000 € colocado al 3,6% anual durante 5 años?**

Se transforma en $20\,000 \cdot (1{,}036)^5 = 23\,868{,}7$ €.

2 **¿En cuánto se transforman 20 000 € colocados 5 años al 3,6% anual, con pago de intereses mensual?**

Un 3,6% anual significa un 3,6 : 12 = 0,3% mensual.

Así: $20\,000 \cdot (1{,}003)^{60} = 23\,937{,}9$ €.

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 33

Opera y calcula

Operaciones con números enteros

1 ▼▽▽ **Calcula paso a paso y comprueba el resultado con la calculadora utilizando las teclas de paréntesis.**

a) $2(15-7)^2-4^3$

b) $3-2(2^4-3\cdot 5)^5$

c) $(3\cdot 5^2-2^3\cdot 5):7$

d) $8(2-5)^3:6^2$

e) $1-[2^3(5-3^2)]:32$

f) $-[3-(-7)^2]-2^4$

a) $2\cdot 8^2-64=128-\ 64=64$

b) $3-2(16-15)^5=3-2=1$

c) $(3\cdot 25-8\cdot 5):7=35:7=5$

d) $8(-3)^3:36=-216:36=-6$

e) $1-[8(5-9)]:32=1-(-32):32=1+1=2$

f) $-(3-49)-16=46-16=30$

2 ▼▽▽ **Calcula mentalmente.**

a) $-17+(-13)$	**b)** $-15+17-(-8)$	**c)** $5(-7-5)$
d) $-50-5(-11)$	**e)** $-3(6+4)+7$	**f)** $(-3)^2-(-2)^3$
a) -30	b) 10	c) -60
d) 5	e) -23	f) 17

Fracciones y decimales

3 ▼▽▽ **Agrupa las fracciones que sean equivalentes.**

$$\frac{21}{49} \quad \frac{24}{36} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{14}{21} \quad \frac{10}{15} \quad \frac{15}{35} \quad \frac{3}{7}$$

$$\frac{21}{49}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7} \qquad \frac{24}{36}=\frac{14}{21}=\frac{10}{15} \qquad \frac{4}{5}$$

4 ▼▽▽ **Simplifica las fracciones siguientes:**

$$\frac{24}{60} \quad \frac{114}{72} \quad \frac{51}{68} \quad \frac{26}{39} \quad \frac{125}{50} \quad \frac{225}{400}$$

$$\frac{24}{60}=\frac{2}{5};\ \frac{114}{72}=\frac{19}{12};\ \frac{51}{68}=\frac{3}{4};\ \frac{26}{39}=\frac{2}{3};\ \frac{125}{50}=\frac{5}{2};\ \frac{225}{400}=\frac{9}{16}$$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

5 ▼▽▽ **En cada apartado, reduce a común denominador y ordena de menor a mayor:**

a) $\frac{5}{6}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{8}{15}$

b) $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{12}, -\frac{3}{4}$

c) $\frac{11}{24}, -\frac{7}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, -\frac{5}{3}$

a) $\frac{25}{30}, \frac{18}{30}, \frac{20}{30}, \frac{21}{30}, \frac{16}{30} \rightarrow \frac{8}{15} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{7}{10} < \frac{5}{6}$

b) $-\frac{12}{24}, -\frac{15}{24}, -\frac{14}{24}, -\frac{18}{24} \rightarrow -\frac{3}{4} < -\frac{5}{8} < -\frac{7}{12} < -\frac{1}{2}$

c) $\frac{11}{24}, \frac{-42}{24}, \frac{9}{24}, \frac{-4}{24}, \frac{10}{24}, \frac{-40}{24}, \rightarrow -\frac{7}{4} < -\frac{5}{3} < -\frac{1}{6} < \frac{3}{8} < \frac{5}{12} < \frac{11}{24}$

6 ▼▽▽ **Expresa como suma de un número entero y una fracción, igual que se hace en el ejemplo:**

- $\frac{8}{3} = \frac{6+2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3}$

a) $\frac{8}{5}$ **b)** $\frac{15}{8}$ **c)** $\frac{16}{7}$ **d)** $-\frac{3}{2}$ **e)** $-\frac{7}{3}$

a) $\frac{8}{5} = \frac{5+3}{5} = 1 + \frac{3}{5}$

b) $\frac{15}{8} = \frac{8+7}{8} = 1 + \frac{7}{8}$

c) $\frac{16}{7} = \frac{14+2}{7} = 2 + \frac{2}{7}$

d) $-\frac{3}{2} = \frac{-2-1}{2} = -1 - \frac{1}{2}$

e) $-\frac{7}{3} = \frac{-6-1}{3} = -2 - \frac{1}{3}$

7 ▼▽▽ **Calcula y simplifica mentalmente.**

a) $2 + \frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

d) $2 \cdot \frac{5}{4}$ **e)** $\frac{2}{3} : 2$ **f)** $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}$

g) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$ **h)** $\frac{12}{7} : 3$ **i)** $\frac{7}{3} \cdot 21$

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{10}$

d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{5}$

g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{4}{7}$ i) 49

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

8 ▼▼▽ **Calcula mentalmente el número que se pide en cada caso:**

a) Los dos tercios de un número valen 22. ¿Cuál es el número?

b) Los cinco cuartos de un número valen 35. ¿Cuál es el número?

c) Los siete décimos de una cantidad son 210. ¿Cuál es esa cantidad?

a) 33 b) 28 c) 300

9 ▼▽▽ **Expresa como un número decimal las siguientes fracciones:**

$$\frac{9}{25} \quad \frac{13}{9} \quad \frac{23}{6} \quad \frac{17}{200} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{233}{990} \quad \frac{13}{22}$$

$\frac{9}{25} = 0,36$; $\frac{13}{9} = 1,\overset{\frown}{4}$; $\frac{23}{6} = 3,8\overset{\frown}{3}$; $\frac{17}{200} = 0,085$

$\frac{5}{7} = 0,\overset{\frown}{714285}$; $\frac{233}{990} = 0,2\overset{\frown}{35}$; $\frac{13}{22} = 0,5\overset{\frown}{90}$

10 ▼▽▽ **Clasifica los siguientes números racionales en decimales exactos o periódicos (intenta dar la respuesta antes de efectuar la división):**

$$\frac{4}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{50} \quad \frac{13}{11} \quad \frac{17}{60} \quad \frac{81}{250}$$

Decimales exactos: $\frac{2}{5}, \frac{1}{50}, \frac{81}{250}$

Decimales periódicos: $\frac{4}{3}, \frac{13}{11}, \frac{17}{60}$

11 ▼▽▽ **Escribe tres números que estén comprendidos entre cada par de decimales:**

a) 1,6 y 1,8 **b) 0,98 y 1** **c) 0,28 y 0,29**

d) 0,345 y 0,346 **e) $2,\overset{\frown}{3}$ y 2,4** **f) –4,5 y –4,4**

a) 1,65; 1,7; 1,75

b) 0,982; 0,983; 0,984

c) 0,283; 0,285; 0,287

d) 0,3451; 0,3452; 0,3456

e) 0,234; 0,235; 0,236

f) –4,45; –4,46; –4,47

12 ▼▽▽ **Ordena de menor a mayor en cada apartado:**

a) 3,56; $3,5\overset{\frown}{6}$; $3,\overset{\frown}{5}$; $3,\overset{\frown}{56}$

b) –1,32; $-1,3\overset{\frown}{2}$; $-1,\overset{\frown}{32}$; $-1,\overset{\frown}{3}$

a) $3,\overset{\frown}{5} < 3,56 < 3,\overset{\frown}{56} < 3,5\overset{\frown}{6}$

b) $-1,\overset{\frown}{3} < -1,\overset{\frown}{32} < -1,3\overset{\frown}{2} < -1,32$

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

13 ▼▽▽ **Expresa en forma de fracción.**

a) $3,7$ **b)** $0,002$ **c)** $-1,03$

d) $2,\widehat{5}$ **e)** $0,\widehat{21}$ **f)** $14,\widehat{3}$

a) $\frac{37}{10}$ b) $\frac{2}{1\,000} = \frac{1}{500}$ c) $-\frac{103}{100}$

d) $\frac{23}{9}$ e) $\frac{21}{99} = \frac{7}{33}$ f) $\frac{129}{9} = \frac{43}{3}$

14 ▼▼▽ **Expresa como fracción.**

a) $0,3\widehat{2}$ **b)** $1,0\widehat{3}$ **c)** $0,0\widehat{12}$

a) $\frac{29}{90}$ b) $\frac{93}{90} = \frac{31}{30}$ c) $\frac{12}{990} = \frac{2}{165}$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 34

Operaciones con fracciones

15 ▼▽▽ **Calcula paso a paso y, después, comprueba el resultado con la calculadora utilizando las teclas de fracción y paréntesis.**

$$\text{a) } -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}:\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{b) } 3-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{8}(-2)$$

$$\text{c) } \left(\frac{5}{2}-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right):\left[2-\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{3}\right)\right]$$

$$\text{a) } -\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)=-\frac{8}{12}+\frac{9}{12}-\frac{4}{12}-\frac{9}{12}=-1$$

$$\text{b) } 3-\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{16}-\frac{3}{4}=3-\frac{3}{8}-\frac{3}{4}=\frac{24}{8}-\frac{3}{8}-\frac{6}{8}=\frac{15}{8}$$

$$\text{c) } \left(\frac{5}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right):\left(2-\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\right)=\frac{11}{6}:\left(2-\frac{4}{3}\right)=\frac{11}{6}:\frac{2}{3}=\frac{11}{4}$$

16 ▼▼▽ **Calcula y comprueba con la calculadora.**

$$\text{a) } \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{b) } -\frac{3}{8}\left[3-\frac{3}{5}-\left(\frac{17}{20}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)\right]$$

$$\text{c) } \left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{a) } \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}-\frac{1}{24}=0$$

$$\text{b) } -\frac{3}{8}\left[3-\frac{3}{5}-\left(-\frac{3}{20}\right)\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)\right]=-\frac{3}{8}\left(3-\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{8}(2)=-\frac{3}{4}$$

$$\text{c) } \left(\frac{5}{9}+13\cdot\frac{1}{9}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)=2:\left(-\frac{2}{3}\right)=-3$$

17 ▼▽▽ **Reduce a una fracción.**

$$\text{a) } \frac{3+\frac{1}{2}}{7-\frac{3}{2}} \qquad \text{b) } \frac{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{7}{12}} \qquad \text{c) } \frac{\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}$$

$$\text{a) } \frac{\frac{7}{2}}{\frac{11}{2}}=\frac{7}{11} \qquad \text{b) } \frac{\frac{-5}{12}}{\frac{3}{12}}=-\frac{5}{3} \qquad \text{c) } \frac{\frac{21}{40}}{\frac{-3}{10}}=-\frac{7}{4}$$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

18 **Efectúa y simplifica descomponiendo en factores como en el ejemplo:**

- $\frac{15}{21} \cdot \frac{7}{25} = \frac{15 \cdot 7}{21 \cdot 25} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5}$

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{20}{21}$ **b)** $\frac{6}{25} \cdot \frac{5}{18}$ **c)** $\frac{12}{7} \cdot \frac{35}{36}$

d) $\frac{9}{16} \cdot \frac{20}{27}$ **e)** $\frac{13}{12} \cdot \frac{84}{65}$ **f)** $\frac{90}{35} \cdot \frac{14}{36}$

a) $\frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 21} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{4}{7}$ b) $\frac{6 \cdot 5}{25 \cdot 18} = \frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{1}{15}$

c) $\frac{12 \cdot 35}{7 \cdot 36} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5}{3}$ d) $\frac{9 \cdot 20}{16 \cdot 27} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 3} = \frac{5}{12}$

e) $\frac{13 \cdot 84}{12 \cdot 65} = \frac{13 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13} = \frac{7}{5}$ f) $\frac{90 \cdot 14}{35 \cdot 36} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2} = 1$

19 **Calcula pasando a fracción.**

a) $3{,}5 + 2{,}\widehat{3}$ **b)** $0{,}\widehat{12} - 0{,}2$ **c)** $1{,}\widehat{6} - 1{,}0\widehat{2}$ **d)** $3{,}\widehat{42} + 7{,}\widehat{6}$

a) $3{,}5 + 2{,}\widehat{3} = \frac{35}{10} + \frac{21}{9} = \frac{7}{2} + \frac{7}{3} = \frac{35}{6}$

b) $0{,}\widehat{12} - 0{,}2 = \frac{12}{99} - \frac{2}{10} = \frac{4}{33} - \frac{1}{5} = -\frac{13}{165}$

c) $1{,}\widehat{6} - 1{,}0\widehat{2} = \frac{15}{9} - \frac{92}{90} = \frac{29}{45}$

d) $3{,}\widehat{42} + 7{,}\widehat{6} = \frac{339}{99} + \frac{69}{9} = \frac{122}{11}$

20 **Comprueba, pasando a fracción, que el resultado de estas operaciones es un número entero:**

a) $2{,}\widehat{3} + 4{,}\widehat{6}$ **b)** $6{,}\widehat{17} + 3{,}\widehat{82}$

a) $2{,}\widehat{3} + 4{,}\widehat{6} = \frac{21}{9} + \frac{42}{9} = \frac{63}{9} = 7$ b) $6{,}\widehat{17} + 3{,}\widehat{82} = \frac{611}{99} + \frac{379}{99} = \frac{990}{99} = 10$

Porcentajes

21 **Calcula los porcentajes siguientes:**

a) **28% de 325** **b)** **80% de 37**

c) **3% de 18** **d)** **0,7% de 4 850**

e) **2,5% de 14 300** **f)** **130% de 250**

a) 91 b) 29,6

c) 0,54 d) $0{,}007 \cdot 4\,850 = 33{,}95$

e) $0{,}025 \cdot 14\,300 = 357{,}5$ f) $1{,}3 \cdot 250 = 325$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

22 ▼▽▽ **¿Qué porcentaje representa?**

a) **78 de 342** **b)** **420 de 500**

c) **25 de 5 000** **d)** **340 de 200**

a) $\frac{78}{342} \cdot 100 \rightarrow 22{,}81\%$ b) 84%

c) 0,5% d) 170%

23 ▼▽▽ **Calcula, en cada caso, la cantidad inicial de lo que conocemos:**

a) **El 28% es 98.** **b)** **El 15% es 28,5.**

c) **El 2% es 325.** **d)** **El 150% es 57.**

a) $\frac{98}{0{,}28} = 350$ b) $\frac{28{,}5}{0{,}15} = 190$

c) $\frac{325}{0{,}02} = 16\,250$ d) $\frac{57}{1{,}5} = 38$

24 ▼▽▽ **¿Por qué número hay que multiplicar para que se produzca uno de estos resultados?**

a) **Aumenta un 12%.** **b)** **Disminuye el 37%.**

c) **Aumenta un 150%.** **d)** **Disminuye un 2%.**

e) **Aumenta un 10% y, después, el 30%.**

f) **Disminuye un 25% y aumenta un 42%.**

a) $1 + 0{,}12 = 1{,}12$ b) $1 - 0{,}37 = 0{,}63$

c) $1 + 1{,}5 = 2{,}5$ d) $1 - 0{,}02 = 0{,}98$

e) $(1 + 0{,}1)(1 + 0{,}3) = 1{,}43$ f) $(1 - 0{,}25)(1 + 0{,}42) = 1{,}065$

25 ▼▽▽ **Calcula el índice de variación y la cantidad final:**

a) **325 aumenta el 28%.**

b) **87 disminuye el 80%.**

c) **425 aumenta el 120%.**

d) **125 disminuye el 2%.**

e) **45 aumenta el 40% y el 30%.**

f) **350 disminuye el 20% y el 12%.**

a) $I_V = 1{,}28$ $C_F = 416$

b) $I_V = 0{,}2$ $C_F = 17{,}4$

c) $I_V = 2{,}2$ $C_F = 935$

d) $I_V = 0{,}98$ $C_F = 122{,}5$

e) $I_V = 1{,}4 \cdot 1{,}3 = 1{,}82$ $C_F = 81{,}9$

f) $I_V = 0{,}8 \cdot 0{,}88 = 0{,}704$ $C_F = 246{,}4$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

26 ▼▽▽ **¿Qué porcentaje de aumento o de disminución corresponde a estos índices de variación?:**

a) 1,54 **b) 0,18** **c) 0,05**

d) 2,2 **e) 1,09** **f) 3,5**

a) Aumento 54%. b) Disminución 82%. c) Disminución 95%.

d) Aumento 120%. e) Aumento 9%. f) Aumento 250%.

27 ▼▽▽ **Calcula mentalmente.**

a) 10% de 340

b) 25% de 400

c) 75% de 4 000

d) 150% de 200

a) 34 b) 100 c) 3 000 d) 300

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

PÁGINA 35

28 ▼▽▽ **Calcula, en cada caso, la cantidad que falta:**

CANTIDAD INICIAL	VARIACIÓN PORCENTUAL	CANTIDAD FINAL
850	↑ **+18%**	1 003
4 500	↓ **–48%**	2 340
75	↑ **+110%**	157,5
5 600	↓ –18%	**4 592**
326	↑ +85%	**603,1**
125	↑ **+32%**	**165**
4 173,4	↓ **–0,8%**	**4 140**

29 ▼▽▽ **Expresa cada fracción como un porcentaje, y viceversa:**

FRACCIÓN	**13/20**	**77/200**	**11/60**	31/125	41/300 (*)
PORCENTAJE	65%	38,5%	18,3%	**$24,\widehat{8}\%$**	**$13,\widehat{6}\%$**

(*) $13,\widehat{6} = \dfrac{123}{9} \rightarrow \dfrac{123}{9} : 100 = \dfrac{123}{900} = \dfrac{41}{300}$

30 ▼▼▽ **¿Qué porcentaje es?**

a) El 40% del 40%.

b) El 25% del 20%.

c) El 30% del 120%.

d) El 150% del 20%.

a) $0,4 \cdot 0,4 = 0,16 \rightarrow 16\%$

b) $0,25 \cdot 0,20 = 0,05 \rightarrow 5\%$

c) $0,30 \cdot 1,2 = 0,36 \rightarrow 36\%$

d) $1,5 \cdot 0,2 = 0,3 \rightarrow 30\%$

Interés compuesto

31 ▼▼▽ **¿En cuánto se convertirá un capital de 18 000 € al 5% anual si se mantiene en el banco durante 2 años y medio?**

6% anual $\rightarrow \dfrac{6}{12} = 0,5$ mensual

2 años y 5 meses $\rightarrow$ 29 meses

$$C_F = 18\,000 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{29} = 20\,801,2 \text{ €}$$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

32 ▼▼▽ **Colocamos 13 500 € al 4,8% anual durante un año y tres meses. ¿En cuánto se transformará?**

$$C_F = 13\,500 \left(1 + \frac{4,8}{100}\right)^3 = 15\,538,8 \text{ €}$$

33 ▼▼▽ **¿En cuánto se transformará un capital de 28 500 € colocado al 0,36% mensual durante dos años y medio?**

$$C_F = 28\,500 \left(1 + \frac{0,36}{100}\right)^{30} = 31\,744,2 \text{ €}$$

34 ▼▼▽ **Calcula en cuánto se transformará un capital de 60 000 € colocado a interés compuesto en las siguientes condiciones:**

a) Al 4% anual durante 3 años.

b) Al 2,8% anual durante 5 años.

c) Al 0,4% mensual durante 2 años.

d) Al 6% anual durante 8 meses.

a) $C_F = 60\,000\ (1,04)^3 = 67\,491,8$ €

b) $C_F = 60\,000\ (1,028)^5 = 68\,883,8$ €

c) $C_F = 60\,000 \left(1 + \dfrac{0,4}{100}\right)^{24} = 66\,032,9$ €

d) 6% anual $\rightarrow$ $\dfrac{6}{12} = 0,5\%$ mensual

$$C_F = 60\,000 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^8 = 62\,442,42 \text{ €}$$

Aplica lo aprendido

35 ▼▽▽ **Una mezcla de cereales está compuesta por 7/15 de trigo, 9/25 de avena y el resto de arroz.**

a) ¿Qué parte de arroz tiene la mezcla?

b) ¿Qué cantidad de cada cereal habrá en 600 g de mezcla?

a) Parte de arroz: $1 - \left(\dfrac{7}{15} + \dfrac{9}{25}\right) = \dfrac{13}{75}$

b) Trigo = 280 g; avena = 216 g; arroz = 104 g.

36 ▼▽▽ **Julia gastó 1/3 de su dinero en libros y 2/5, en discos. Si le han sobrado 36 €, ¿cuánto tenía?**

$$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{15}$$

$\dfrac{4}{15}$ del total son 36 € $\rightarrow$ total $= 36 \cdot \dfrac{15}{45} = 135$ €

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

37 ▼▽▽ **De los 300 libros de una biblioteca, 1/6 son de poesía; 180, de novela, y el resto, de historia. ¿Qué fracción representan los libros de historia?**

$\frac{1}{6} \cdot 300 = 50$ poesía; $30 - (180 + 50) = 70$

$\frac{70}{300} = \frac{7}{30}$ son libros de historia.

38 ▼▽▽ **En una papelería hacen una rebaja del 15% en todos los artículos. ¿Cuál será el precio que hemos de pagar por una cartera de 24 € y una calculadora de 18 €?**

Cartera: $24 \cdot 0,85 = 20,4$ €

Calculadora: $18 \cdot 0,85 = 15,3$ €

39 ▼▽▽ **Si el precio del abono transporte de una ciudad subió el 12%, ¿cuál era el precio anterior si ahora cuesta 35,84 €?**

Precio anterior: $35,84 : 1,12 = 32$ €

40 ▼▽▽ **He pagado 187,2 € por un billete de avión que costaba 240 €. ¿Qué porcentaje de descuento me hicieron?**

$187,2 : 240 = 0,78 \rightarrow 1 - 0,78 = 0,22$

Descuento: 22%

41 ▼▽▽ **He pagado 885 € por un artículo que costaba 750 € sin IVA. ¿Qué porcentaje de IVA me han aplicado?**

$750 \cdot I_v = 885 \rightarrow I_v = \frac{885}{750} = 1,18$

Me han aplicado un 18% de IVA.

42 ▼▽▽ **De los 524 alumnos de Bachillerato de un colegio, el 12% repiten curso y el 13% han pasado con alguna materia pendiente. ¿Cuántos alumnos han pasado con todas las materias aprobadas?**

$524 \cdot 0,12 + 524 \cdot 0,13 = 131$

$524 - 131 = 393$ alumnos han pasado con todas las materias aprobadas.

43 ▼▽▽ **Entre julio y agosto de cierto año, el número de infracciones graves que denunció la Dirección General de Tráfico fueron 81 835, de las que 72 533 correspondieron a hombres. ¿Qué porcentaje de denuncias correspondieron a mujeres?**

$81\,835 - 72\,533 = 9\,302$

$\frac{9\,302}{81\,835} \approx 0,1137 \rightarrow$ El 11,37% correspondieron a mujeres.

44 ▼▽▽ **La información nutricional de una marca de leche dice que en un litro hay 160 mg de calcio, que es el 20% de la cantidad diaria recomendada. Calcula la cantidad diaria de calcio que debe tomar una persona.**

$160 : 0,20 = 800$ mg es lo que debe tomar una persona.

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

PÁGINA 36

Resuelve problemas

45 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno.

46 ▼▼▽ **Del dinero de una cuenta bancaria, retiramos primero los 3/8 y, después, los 7/10 de lo que quedaba. Si el saldo actual es 1 893 €, ¿cuánto había al principio?**

Se retiran primero $\frac{3}{8}$ y, después, $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{16}$.

La parte que queda es $1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{7}{16}\right) = \frac{3}{16}$ que son 1 893 €.

Lo que había al principio es $1\,893 \cdot \frac{16}{3} = 10\,096$ €.

47 ▼▼▽ **De un depósito de aceite, se vacía la mitad; de lo que queda, se vacía otra vez la mitad; luego, los 11/15 del resto, y al final quedan 36 *l*. ¿Cuántos había al principio?**

Sacamos $\frac{1}{2}$; después, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Queda $\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

Sacamos $\frac{11}{15} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{60}$ → quedan $\frac{1}{4} - \frac{11}{60} = \frac{1}{15}$, que son 36 litros.

Lo que había al principio son $36 \cdot 15 = 540$ litros.

48 ▼▼▽ **Compro a plazos una bicicleta que vale 540 €. Pago el primer mes los 2/9; el segundo, los 7/15 de lo que me queda por pagar, y luego, 124 €.**

a) ¿Cuánto he pagado cada vez?

b) ¿Qué parte del precio me queda por pagar?

a) Primer mes: $540 \cdot \frac{2}{9} = 120$ € → quedan por pagar 420 €.

Segundo mes: $420 \cdot \frac{7}{15} = 196$ €.

Tercer mes: 124 €.

b) Quedan por pagar: $540 - (120 + 196 + 124) = 100$ €.

$\frac{100}{540} = \frac{5}{27}$ → Parte que queda por pagar.

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

49 ▼▼▼ **Gasto 1/10 de lo que tengo ahorrado en mi hucha; después, ingreso 1/15 de lo que me queda y aún me faltan 36 € para volver a tener la cantidad inicial. ¿Cuál era esa cantidad?**

Gasto $\frac{1}{10}$, quedan $\frac{9}{10}$; ingreso $\frac{1}{15} \cdot \frac{9}{10} = \frac{3}{50}$.

En la cuenta hay $1 - \frac{1}{10} + \frac{3}{50} = \frac{24}{25}$ de lo que había.

Falta $\frac{1}{25}$, que son 36 €.

La cantidad inicial es $25 \cdot 36 = 900$ €.

50 ▼▼▽ **El precio del kilo de tomates subió un 20% y después bajó un 25%. Si antes costaba 1,80 €, ¿cuál es el precio actual?**

$1{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}75 = 1{,}62$ €

51 ▼▼▽ **El número de espectadores de un concurso de televisión que comenzó en octubre aumentó un 23% en noviembre y disminuyó un 18% en diciembre. Si al terminar diciembre tuvo 2 202 000 espectadores, ¿cuántos tenía en el mes de octubre?**

$\frac{2\,202\,000}{1{,}23 \cdot 0{,}82} = 2\,183\,224$ espectadores en octubre.

52 ▼▼▽ **Si un comerciante aumenta el precio de sus productos un 25% y, después, los rebaja un 25%, ¿cuál ha sido la variación porcentual que experimentan los artículos respecto del precio inicial? ¿Y si hiciera lo mismo aplicando el 50%?**

a) $1{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}9375$

$1 - 0{,}9375 = 0{,}0625 \rightarrow$ Corresponde a una disminución del 6,25%.

b) $1 - 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 \rightarrow$ Corresponde a una disminución del 25%.

53 ▼▼▽ **Los ingresos mensuales de un negocio han aumentado un 20% y un 30% en los dos meses anteriores. En el mes actual han disminuido un 25% y han sido 13 850 €. ¿Cuál ha sido la variación porcentual? Calcula los ingresos del negocio hace tres meses.**

$1{,}2 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}75 = 1{,}17 \rightarrow$ Supone un aumento del 17%.

$13\,850 : 1{,}17 = 11\,837{,}6$ € son los ingresos de hace tres meses.

54 ▼▼▽ **Para que el área de un triángulo fuera 100 m^2, su altura actual tendría que disminuir un 18%. Si la base mide 16,8 m, ¿cuánto mide la altura?**

$\frac{16{,}8 \cdot al}{2} = 100 \rightarrow al = 11{,}9$ m tendría que medir la altura para que el área fuera 100 m^2.

$h \cdot 0{,}82 = 11{,}9 \rightarrow h = \frac{11{,}9}{0{,}82} \approx 14{,}5$ m mide la altura.

55 ▼▼▽ **Un camión de reparto ha entregado por la mañana los 13/20 de la carga que llevaba y, por la tarde, el $17,\widehat{3}\%$ de la misma. ¿Qué fracción de la carga queda por repartir?**

$17,\widehat{3} = \frac{156}{9} = \frac{52}{3} \rightarrow 17,\widehat{3}\% \approx \frac{52}{300}$ reparte por la tarde.

$\frac{13}{20} + \frac{52}{300} = \frac{247}{300}$ ha repartido.

Queda por repartir $\frac{53}{300}$ de la carga.

56 ▼▼▽ **Un capital colocado al 8% anual durante 2 años se ha convertido en 5 598,72 €. ¿Cuál era el capital inicial?**

$C \cdot (1{,}08)^2 = 5\,598{,}72 \rightarrow C = 5\,598{,}72 : 1{,}08^2 = 5\,184$

Así, el capital inicial era 5 184 €.

57 ▼▼▼ **Si la base de un triángulo aumenta un 20% y su altura disminuye un 20%, ¿qué le ocurre a su área?**

$A = \frac{b \cdot al}{2} \rightarrow \frac{b \cdot 1{,}2 \cdot al \cdot 0{,}80}{2} = \frac{b \cdot al}{2} \cdot 0{,}96 = A \cdot 0{,}96$

El área disminuye un 4%.

58 ▼▼▼ **El café pierde el 20% de su peso al tostarlo. Si lo compramos a 10 €/kg, ¿a qué precio hay que venderlo para ganar un 10% después de tostarlo?**

Compramos 1 kg a 10 €/kg y queremos obtener $10 \cdot 1{,}1 = 11$ € al vender la cantidad que nos queda después de tostarlo.

Entonces, $0{,}8P = 11 \rightarrow P = \frac{11}{0{,}8} = 13{,}75$ €/kg

59 ▼▼▼ **Al lavar una tela, su longitud se reduce un 8%, y su anchura, un 4%. ¿Qué longitud debemos comprar de una pieza de 0,90 m de ancho para tener, después de lavada, 5 m² de tela?**

Ancho después de lavada: $0{,}90 \cdot 0{,}96 = 0{,}864$ m.

Para obtener 5 m², necesitamos $\frac{5}{0{,}864} = 5{,}79$ m de longitud.

$0{,}92 \cdot l = 5{,}79 \rightarrow l = 6{,}29$ metros debemos comprar.

60 ▼▼▼ **Se depositan en un banco 28 000 € al 6% anual, y el banco nos descuenta un 20% de los beneficios como retención fiscal.**

a) ¿Cuál será el porcentaje neto de rendimiento de ese capital?

b) Si los intereses se acumulan trimestralmente al capital, ¿cuál será el beneficio obtenido al cabo de 2 años?

a) También podrían habernos preguntado "¿Cuál es el 80% del 6%?".

Es decir, $0{,}8 \cdot 0{,}06 = 0{,}048$.

El rendimiento neto es del 4,8%.

b) $28\,000 \left(1 + \frac{4{,}8}{400}\right)^8 = 30\,803{,}6$

Por tanto, el beneficio obtenido es $30\,803{,}6 - 28\,000 = 2\,803{,}6$ €

PÁGINA 37

Problemas "+"

61 ▼▼▼ **Un grupo de amigos ha ido a comer a una pizzería y han elegido tres tipos de pizza, A, B y C. Cada uno ha tomado 1/2 de A, 1/3 de B y 1/4 de C; han pedido en total 17 pizzas y, como es lógico, no ha sobrado ninguna entera.**

a) ¿Ha tomado cada uno más de una pizza, o menos? ¿Cuántos amigos son?

b) ¿Cuántas pizzas de cada tipo han encargado? ¿Ha sobrado algo?

c) Contesta a las mismas preguntas si hubiese sido 20 el número de pizzas pedido.

a) Cada uno toma $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$; es decir, han tomado más de una pizza cada uno.

Como cada uno toma más de una pizza y han comprado 17 pizzas, eso quiere decir que son menos de 17. Veamos cuántos.

$\frac{13}{12}x = 17 \rightarrow x = 15{,}69$

Por tanto, son 15 amigos.

b) Sabiendo que cada uno toma $\frac{1}{2}$ de A, $\frac{1}{3}$ de B y $\frac{1}{4}$ de C, y que son 15 amigos, han comprado:

- 8 pizzas de A, pues $\frac{15}{2} = 7{,}5$, y ha sobrado $\frac{1}{2}$ de pizza A.
- 5 pizzas de B, pues $\frac{15}{3} = 5$, y no ha sobrado nada de pizza B.
- 4 pizzas de C, pues $\frac{15}{4} = 3{,}75$, y ha sobrado $\frac{1}{4}$ de piza C.

c) Si han comprado 20 pizzas, ahora tenemos:

- Siguen comiendo $\frac{13}{12} > 1$ cada uno.

  $\frac{13}{12}x = 20 \rightarrow x = 18{,}46$

  Ahora son 18 amigos.

- Ahora han comprado:

  $\frac{18}{2} = 9$ pizzas A

  $\frac{18}{3} = 6$ pizzas B

  $\frac{18}{4} = 4{,}5 \rightarrow$ compran 5 pizzas C y sobran $\frac{2}{4}$ de C

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

62 ▼▼▽ **En una receta para hacer mermelada de higos se lee: “añadir 400 g de azúcar y 100 g de agua por cada kilo de higos”. Tres amigas, A, B y C, con un puesto en el mercado, elaboraron estas cantidades:**

A → 2 botes de 5/8 kg y 4 de 9/25 kg.

B → 3 botes de 1/5 kg y 3 de 5/8 kg.

C → 5 botes de 9/25 kg y 2 de 1/5 kg.

a) ¿Cuál de las tres preparó más cantidad?

b) Si una persona pide 3/4 kg, ¿cuál es la forma de entregarle la cantidad más próxima?

c) Si el agua se evapora durante la cocción, ¿cuál es la proporción de azúcar que tiene la mermelada?

a) Han preparado:

$$A \rightarrow 2 \cdot \frac{5}{8} + 4 \cdot \frac{9}{25} = \frac{269}{100} = 2{,}69 \text{ kg}$$

$$B \rightarrow 3 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{99}{40} = 2{,}475 \text{ kg}$$

$$C \rightarrow 5 \cdot \frac{9}{25} + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{5} = 2{,}2 \text{ kg}$$

Preparó más cantidad A.

b) $\frac{3}{4}$ kg = 750 g

Utilizando dos botes de $\frac{1}{5}$ y uno de $\frac{9}{25}$, conseguimos:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{9}{25} = \frac{19}{25} = 0{,}760 \text{ kg} = 760 \text{ g}$$

c) La mezcla total pesa 400 + 100 + 1 000 = 1 500 g.

Como perdemos 100 g por evaporación del agua, nos queda que la proporción de azúcar es:

$$\frac{400}{1\,400} = \frac{2}{7} = 0{,}286 \rightarrow 28{,}6\%$$

63 ▼▼▼ **Miguel quiere aplicar un herbicida a su finca. Sabe que debe añadir agua al producto, de forma que tenga una concentración del 5% como mínimo para que sea eficaz. Mezcla 1/2 litro de herbicida con 5 litros de agua y comienza a aplicarlo. Cuando ha gastado 3 litros de la mezcla, se da cuenta de que no va a tener bastante para toda la finca y le añade 2 litros de agua. ¿Tendrá la concentración adecuada en todo momento?**

Al principio, la concentración es $\frac{0{,}5}{5{,}5} = 0{,}\widehat{09} \rightarrow 9\%$

Cuando quedan 2,5 *l* de mezcla, le añade 2 *l* de agua más. Ahora hay 4,5 *l* de mezcla para 2,5 · 0,09 = 0,227 *l* de herbicida.

Por tanto, la nueva concentración es $\frac{0{,}227}{45} = 0{,}05 \rightarrow 5\%$

Sí, en todo momento la concentración es mayor o igual que el 5% requerido.

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

Reflexiona sobre la teoría

64 ▼▽▽ **¿Cuál es la fracción inversa de –3/5? ¿Y la de 1/7? Justifica tu respuesta.**

La inversa de $-\frac{3}{5}$ es $-\frac{5}{3}$ porque su producto es igual a 1: $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = 1$

La de $\frac{1}{7}$ es 7, ya que $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.

65 ▼▼▽ **Comprueba que $2,6\overset{\frown}{9}$ y 2,7 se expresan mediante la misma fracción. ¿Ocurrirá lo mismo con $4,0\overset{\frown}{9}$ y 4,1? ¿Con qué decimal exacto podemos identificar los números $0,02\overset{\frown}{9}$; $5,\overset{\frown}{9}$; $8,13\overset{\frown}{9}$?**

$$\left.\begin{array}{l} 2,6\overset{\frown}{9} = \frac{243}{90} = \frac{27}{10} \\ 2,7 = \frac{27}{10} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 4,0\overset{\frown}{9} = \frac{369}{90} = \frac{41}{10} \\ 4,1 = \frac{41}{10} \end{array}\right.$$

$0,02\overset{\frown}{9} = 0,03$; $5,\overset{\frown}{9} = 6$; $8,13\overset{\frown}{9} = 8,14$

66 ▼▼▽ **a) Calcula en forma decimal el valor de:**

$$\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1\,000} + \dots$$

b) Escribe el resultado en forma de fracción.

a) $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1\,000} + \dots = 0,7 + 0,07 + 0,007 + \dots = 0,777\dots = 0,\overset{\frown}{7}$

b) $0,\overset{\frown}{7} = \frac{7}{9}$

67 ▼▼▽ **Busca 4 números fraccionarios comprendidos entre 1/3 y 1/2. ¿Cuántos puedes escribir?**

Buscamos fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ con un denominador común, por ejemplo 36:

$$\frac{1}{3} = \frac{12}{36} \qquad \frac{1}{2} = \frac{18}{36}$$

Entre $\frac{12}{36}$ y $\frac{18}{36}$ están comprendidas $\frac{13}{36}, \frac{14}{36}, \frac{15}{36}, \frac{16}{36}$.

Si en lugar de 36 elegimos un denominador común muy grande, podemos escribir tantas como queramos. Hay infinitas.

68 ▼▼▽ **Una cantidad *P* rebajada un 18% se ha convertido en una cantidad *Q*, de forma que $P \cdot k = Q$.**

a) ¿Cuál es el valor de *k*?

b) ¿Y si en lugar de rebajarla se aumenta un 18%?

a) $P \cdot 0,82 = Q$; $k = 0,82$

b) $P \cdot 1,18 = Q$; $k = 1,18$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

69 ▼▼▽ **He pagado 200 € por un abrigo rebajado un 10%. ¿Puedo calcular el precio inicial aumentando 200 en un 10%? Razona la respuesta.**

Si aumento un 10% a 200, obtengo 220 €.

Si disminuyo un 10% esa cantidad, 220, obtengo 198 €, que no es lo que pagué.

El precio del abrigo era 200 : 0,9 = 222,2 €.

70 ▼▼▽ **Si en una factura nos tienen que aumentar el 18% de IVA y nos hacen un descuento del 20%, ¿qué es más ventajoso, aplicar primero el aumento y después del descuento, o al revés? Justifícalo.**

Es igual. Se obtiene la misma cantidad: $P \cdot 1{,}18 \cdot 0{,}8 = P \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}18$.

Manipula, tantea, prueba

71 ▼▼▼ **Observa esta expresión:**

$$\mathbf{1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots}$$

a) Halla su valor con 4 sumandos.

b) Calcula su valor para 100 sumandos.

c) ¿A qué valor se aproxima la expresión cuando hay infinitos sumandos?

a) $1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

b) Con 100 sumandos: $2 - \frac{1}{100} = \frac{199}{100}$

c) Cada vez restaremos a 2 un número menor.

Por ejemplo con 10 000 sumando obtenemos $2 - \frac{1}{10\,000}$ que es un número muy próximo a 2.

El valor de la expresión se aproxima a 2.

72 ▼▼▽ **¿Cuántos números de cuatro cifras terminados en 45 son múltiplos de 45? Explica tu respuesta.**

Para ser múltiplo de 45, hay que serlo de 5 y de 9. Probamos poniendo las dos primeras cifras múltiplo de 9:

1 845	2 745	3 645	4 545
8 145	7 245	6 345	5 445

En total hay 8 números con esa propiedad.

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

73 ▼▼▼ **¿En qué número termina 2^{83}?**

☞ ***Observa en qué cifra terminan las sucesivas potencias de base 2 y busca una regla.***

$$\begin{array}{ll} 2^1 = 2 & 2^5 = 32 \\ 2^2 = 4 & 2^6 = 64 \\ 2^3 = 8 & 2^7 = 128 \\ 2^4 = 16 & 2^8 = 256 \end{array}$$

Las cifras 2, 4, 8, 6 se repiten de 4 en 4.

Como $83 = 80 + 3 \rightarrow 2^{83}$ terminará en la misma cifra que 2^3, en 8.

Soluciones a “Y para terminar”

PÁGINA 38

▼ Resuelve y exprésate

¿Eres de Verdad o de Mentira?

En medio de una selva hay dos pueblos, que llamaremos V y M.

Los habitantes de V dicen siempre la verdad, y los de M siempre mienten.

Por ser pueblos próximos, es muy frecuente encontrar habitantes de V en M y de M en V.

Una exploradora extraviada llega a uno de los pueblos, pero ignora cuál de ellos es.

Para a un transeúnte y le pregunta:

—¿Es usted de aquí?

¿Por qué con la respuesta que reciba sabrá, con seguridad, si está en V o en M?

Describe por escrito el proceso que has seguido para llegar a la solución, justificando cada paso.

Las posibilidades son:

		RESPUESTAS
• **Está en V y pregunta a alguien de V.**	→	**Sí**
• **Está en V y pregunta a alguien de M.**	→	**…**
• **Está en M y …**		
• **…**		

CONCLUSIÓN

— Si la respuesta es afirmativa, la exploradora está en…

— Si la respuesta es negativa…

Atendiendo al individuo entrevistado y a las posibles respuestas, se ven cuatro posibilidades:

• El entrevistado es de V y contesta SÍ. → La exploradora está en V.

• El entrevistado es de V y contesta NO. → La exploradora está en M.

• El entrevistado es de M y contesta SÍ. → La exploradora está en V.

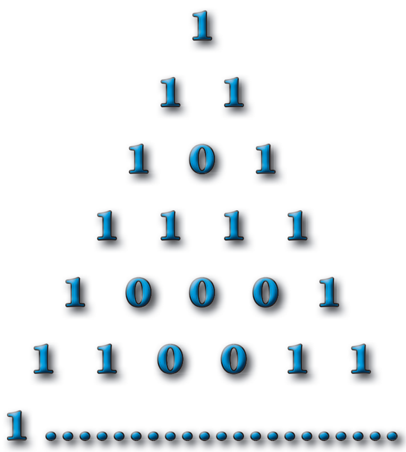
• El entrevistado es de M y contesta NO. → La exploradora está en M.

Por tanto, si la respuesta es afirmativa, se encuentra en el poblado V, y si es negativa, se encuentra en el poblado M.

Soluciones a “Y para terminar”

▼ Indaga, busca regularidades, generaliza

Observa el triángulo:



a) Añade tres filas.

b) Explica cómo se construye.

c) Observa que la primera, la segunda y la cuarta filas tienen todos los números iguales (uno). ¿Cuál es la siguente fila con esas misma característica? ¿Y la siguiente?

d) Generaliza y explica qué filas tienen todos los números iguales.

e) ¿Cuántos números se han necesitado para construir las cinco primeras filas?

f) ¿Cuántos números habría en un triángulo de 20 filas?

g) Generaliza: ¿cuántos números habría en un triángulo de *n* filas?

a) Fila 7: 1 0 1 0 1 0 1

Fila 8: 1 1 1 1 1 1 1 1

Fila 9: 1 0 0 0 0 0 0 0 1

b) El primero y el último son 1.

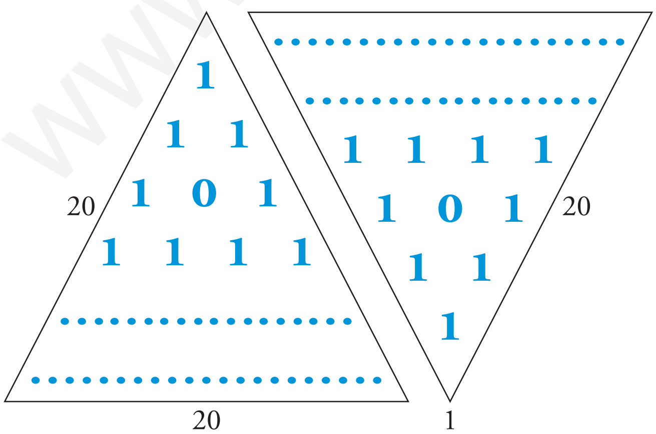
El resto: si los dos números de encima son distintos, un 1; si no, un 0.

c) Las siguientes son la octava y la decimosexta.

d) Las filas que tienen todos los números iguales, unos, son las que están en la posición 2^n.

e) Se han utilizado 15 números.

f) Veámoslo con un dibujo:



Por tanto, en total hay $20 \cdot 21 = 420$ números

Así que en nuestro triángulo de 20 filas hay $\frac{420}{2} = 210$ números.

g) Habrá $\frac{n(n+1)}{2}$ números.

1 Soluciones a “Y para terminar”

PÁGINA 39

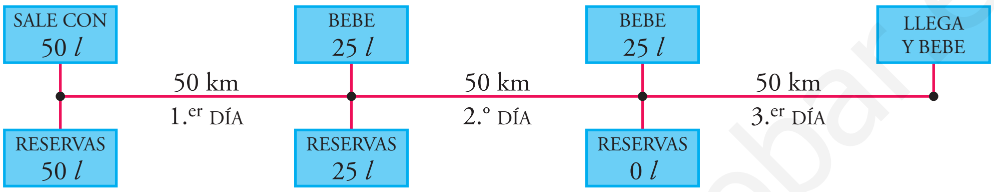
▼ Investiga y expresa tus conclusiones

Beduino sediento

Un beduino desea atravesar un desierto de 150 km en el que no hay pozos de agua.

El dromedario puede caminar 50 km al día cargado con el beduino y su avituallamiento, más un peso extra de 50 kg. ¡Eso sí!, al final del día debe beber 25 litros de agua.

En estas condiciones tarda tres jornadas en realizar el viaje.



- **¿Cuántos días tardaría en atravesar un desierto de 200 km?**
- **¿Y si fueran 250 km?… ¿Y si…?**

Cuando lo hayas resuelto, redacta tu solución, de forma que lo pueda entender cualquier persona que no haya trabajado el problema.

Para recorrer 200 kilómetros debe conseguir acumular 50 litros de agua, en la primera parada, a 50 km del punto de partida. Etc.

Así se completará la siguiente tabla:

DISTANCIA (km)	150	200	250	300	350	…
TIEMPO (días)	3	6	15	42	…	
GASTO DE AGUA (litros)	50	125	350	1 025	…	

En la tabla, los kilómetros avanzan de 50 en 50.

El número de días de cada casilla es igual al triple de la casilla anterior menos tres.

El gasto de agua se obtiene de restar uno al número de días y multiplicar por 25.

Soluciones a la Autoevaluación

PÁGINA 39

¿Sabes operar con números fraccionarios y resolver problemas en los que intervengan?

1 **Efectúa y simplifica el resultado:** $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{9}\right) + 4 \cdot \frac{2}{15}$

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{9}\right) + 4 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9} + \frac{8}{15} = \frac{2}{3} - \frac{4}{15} + \frac{8}{15} = \frac{14}{15}$$

2 **De las entradas de un concierto se vendieron los $\frac{3}{5}$ por internet y $\frac{3}{4}$ del resto en la taquilla. Si quedaron 34 entradas sin vender, ¿cuántas se pusieron a la venta?**

$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$; $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

Se vendieron $\frac{3}{5} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$. Quedan $\frac{1}{10}$ por vender.

Como $\frac{1}{10} = 34 \rightarrow n = 340$ entradas.

¿Sabes obtener la fracción correspondiente a un número decimal exacto o periódico?

3 **Expresa en forma de fracción:**

a) $1,12$ **b)** $2,\widehat{7}$ **c)** $3,\widehat{18}$ **d)** $0,6\widehat{1}$

a) $\frac{112}{100} = \frac{28}{25}$ b) $\frac{25}{9}$ c) $\frac{315}{99} = \frac{35}{11}$ d) $\frac{55}{90} = \frac{11}{18}$

¿Sabes resolver problemas de aumentos y disminuciones porcentuales?

4 **Un programa de radio tenía 130 000 oyentes a principios de año. Hasta hoy, su audiencia ha aumentado un 110%. ¿Cuántos oyentes tiene ahora?**

$130\,000\left(1 + \frac{110}{100}\right) = 130\,000 \cdot 2,1 = 273\,000$ oyentes

5 **He comprado una camisa, que estaba rebajada un 25%, por 18 €. ¿Cuál era su precio inicial?**

$P \cdot 0,75 = 18 \rightarrow P = 24$ € era el precio inicial.

6 **¿Cuál es el índice de variación correspondiente a un aumento del 42% y una disminución del 38%? ¿Qué porcentaje de aumento o disminución total representa?**

$I = (1 + 0,42)(1 - 0,38) = 1,42 \cdot 0,62 = 0,8804$

$1 - 0,8804 = 0,1196$

Representa una disminución del 11,96%.

7 **Colocamos 2 800 € al 3,4% anual durante 2 años. ¿En cuánto se transforma?**

$2\,800\left(1 + \frac{3,4}{100}\right)^2 = 2\,993,6$ € es el capital final al cabo de 2 años.

2 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 41

PARA EMPEZAR...

▼ ¿Cabrían los hijos de Buda en India? ¿Y las divinidades?

La superficie de la India es, aproximadamente, 3 millones de kilómetros cuadrados.

- **¿Cuántos metros cuadrados corresponden a cada uno de los 600 000 millones de hijos de Buda?**

Primero, vamos a poner los datos en metros cuadrados, que es lo que nos pide el problema.

$$3 \text{ millones de km}^2 = 3 \cdot 10^6 \text{ km}^2 = 3 \cdot 10^6 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$$

Veamos cuántos metros cuadrados le corresponde a cada hijo:

$$600\,00 \text{ millones de hijos} = 600\,000 \cdot 10^6 \text{ hijos} = 6 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \text{ hijos} = 6 \cdot 10^{11} \text{ hijos}$$

Por tanto:

$$\frac{3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2}{6 \cdot 10^{11} \text{ hijos}} = \frac{30}{6} \text{ m}^2/\text{hijo} = 5 \text{ m}^2/\text{hijo}$$

Así, a cada hijo le corresponden 5 m^2 de India.

- **¿Cuántos centímetros cuadrados a cada una de las 24 000 billones de divinidades?**

Esta vez hay que transformar las unidades a centímetros cuadrados:

$$3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2 = 3 \cdot 10^{12} \cdot 10^4 \text{ cm}^2 = 3 \cdot 10^{16} \text{ cm}^2$$

Además:

$$24\,000 \text{ billones de divinidades} = 24\,000 \cdot 10^{12} \text{ divinidades} =$$
$$= 24 \cdot 10^3 \cdot 10^{12} \text{ divinidades} = 24 \cdot 10^{15} \text{ divinidades}$$

Por tanto:

$$\frac{3 \cdot 10^{16} \text{ cm}^2}{24 \cdot 10^{15} \text{ divinidades}} = \frac{30}{24} \text{ cm}^2/\text{divinidad} = 1{,}25 \text{ cm}^2/\text{divinidad}$$

Es decir, a cada divinidad le corresponden 1,25 cm^2 de India.

▼ ¿Cuánto pueden ocupar 10^{40} monos?

Puedes comprobar que en el interior de una esfera como la Tierra (un billón de kilómetros cúbicos, aproximadamente) solo cabría una ínfima parte de los 10^{40} monos.

- **Vamos a considerar una gigantesca esfera cuyo radio sea la distancia de Urano al Sol (2 871 millones de kilómetros). En ella cabrían muy, muy apretados, 10^{40} monos de un volumen de 10 litros cada uno. Compruébalo.**

El volumen de una esfera de radio 2 871 millones de km = $2\,871 \cdot 10^6$ km, es:

$$V = \frac{4}{3}\pi(2\,871 \cdot 10^6)^3 \text{ km}^3 = 99\,126\,138\,136 \cdot 10^{18} \text{ km} \approx$$
$$\approx 100 \cdot 10^9 \cdot 10^{18} \text{ km}^3 = 10^{29} \cdot (10^4)^3 \text{ dm}^3 = 10^{41} \text{ dm}^3 = 10^{41}\ l$$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

Como nos dicen que cada mono ocupa 10 *l*, es esa esfera caben:

$$\frac{10^{41}\ l}{10\ l/\text{mono}} = 10^{40} \text{ monos}$$

▼ ¿Cuántos granos de arena caben en el universo?

■ **Para calcularlo al estilo de Arquímedes, utiliza sus propios datos.**

EL RADIO DEL UNIVERSO

Radio de la Tierra: 500 000 estadios

Distancia Tierra-Sol: 2 500 millones de estadios

Además, utilizó la siguiente relación:

$$\frac{\textbf{Radio del universo}}{\textbf{Distancia Tierra-Sol}} = \frac{\textbf{Distancia Tierra-Sol}}{\textbf{Radio de la Tierra}}$$

EL TAMAÑO DE UN GRANO DE ARENA

Diámetro de una semilla de amapola = 20 · Diámetro de un grano de arena

Ancho de un dedo = 40 · Diámetro de una semilla de amapola

1 estadio = 10 000 · Ancho de un dedo

Todos estos datos provenían de los conocimientos y creencias de aquella época.

VOLUMEN DEL UNIVERSO

Utilizando la relación de Arquímedes:

$$\frac{\text{Radio del universo}}{\text{Distancia Tierra-Sol}} = \frac{\text{Distancia Tierra-Sol}}{\text{Radio de la Tierra}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Radio del universo} = \frac{(\text{Distancia Tierra-Sol})^2}{\text{Radio de la Tierra}} = \frac{(2\,500 \text{ millones de estadios})^2}{500\,000 \text{ estadios}} =$$

$$= \frac{(2\,500 \cdot 10^6)^2 \text{ estadios}^2}{5 \cdot 10^5 \text{ estadios}} = 125 \cdot 10^{11} \text{ estadios}$$

Por tanto, el volumen del universo es:

$$V = \frac{4}{3}\pi(125 \cdot 10^{11})^3 \approx 8{,}18 \cdot 10^{39} \text{ estadios}^3$$

VOLUMEN DE UN GRANO DE ARENA

$$1 \text{ estadio} = 10^4 \text{ dedos} = 10^4 \cdot 40 \text{ semillas} = 10^4 \cdot 40 \cdot 20 \text{ granos de arena} =$$
$$= 8 \cdot 10^6 \text{ granos de arena}$$

Por tanto, en un cubo de un estadio caben $(8 \cdot 10^6)^3$ granos de arena; es decir:

$$1 \text{ estadio}^3 = 512 \cdot 10^{18} \text{ granos de arena}$$

Teniendo en cuenta cuál era el volumen del universo, podemos ver que en el universo caben:

$$8{,}18 \cdot 10^{39} \cdot 512 \cdot 10^{18} \text{ granos de arena} \approx 4{,}2 \cdot 10^{60} \text{ granos de arena.}$$

PÁGINA 42

1 Reduce a una sola potencia.

a) $4^3 \cdot 4^4 \cdot 4$ **b)** $(5^6)^3$ **c)** $\frac{7^6}{7^4}$

d) $\frac{15^3}{3^3}$ **e)** $2^{10} \cdot 5^{10}$ **f)** $\frac{12^5}{3^5 \cdot 4^5}$

g) $(a^6 \cdot a^3)^2 : (a^2 \cdot a^4)^3$ **h)** $(6^2)^3 \cdot 3^5 \cdot (2^7 : 2^2)$

a) 4^8 b) 5^{18} c) 7^2

d) $\left(\frac{15}{3}\right)^3 = 5^3$ e) $(2 \cdot 5)^{10} = 10^{10}$ f) $\left(\frac{12}{3 \cdot 4}\right)^5 = 1^5 = 1$

g) $(a^9)^2 : (a^6)^3 = a^{18} : a^{18} = a^0 = 1$

h) $6^6 \cdot 3^5 \cdot 2^5 = 6^6 \cdot (3 \cdot 2)^5 = 6^6 \cdot 6^5 = 6^{11}$

2 Calcula utilizando propiedades de las potencias.

a) $2^3 \cdot 5^4$ **b)** $(6^5 : 2^4) : 3^5$ **c)** $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$

d) $2^8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4$ **e)** $\frac{20^6}{2^6}$ **f)** $\frac{20^6}{2^5}$

g) $(3^3)^2 : 3^5$ **h)** $(2^5)^3 \cdot [(5^3)^4 : 2^3]$

a) $2^3 \cdot 5^4 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 5 = (2 \cdot 5)^3 \cdot 5 = 10^3 \cdot 5 = 1\,000 \cdot 5 = 5\,000$

b) $(6^5 : 2^4) : 3^5 = \left(\frac{6^5}{2^4}\right) : 3^5 = \left(\frac{(2 \cdot 3)^5}{2^4}\right) : 3^5 = \left(\frac{2^2 \cdot 3^5}{2^4}\right) : 3^5 = (2 \cdot 3)^5 : 3^5 = \frac{2 \cdot 3^5}{3^5} = 2$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{2^6}{3^6} \cdot \frac{3^3}{(2^2)^3} = \frac{2^6}{3^6} \cdot \frac{3^3}{2^6} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

d) $2^8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4 = 2^8 \cdot \frac{5^4}{2^4} = 2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$

e) $\frac{20^6}{2^6} = \left(\frac{20}{2}\right)^6 = 10^6 = 1\,000\,000$

f) $\frac{20^6}{2^5} = 20 \cdot \left(\frac{20^5}{2^5}\right) = 20 \cdot 10^5 = 20 \cdot 100\,000 = 2\,000\,000$

g) $(3^3)^2 : 3^5 = 3^6 : 3^5 = 3^{6-5} = 3$

h) $(2^5)^3 \cdot [(5^3)^4 : 2^3] = 2^{15} \cdot [5^{12} : 2^3] = 2^{15} \cdot \frac{5^{12}}{2^3} = 2^{12} \cdot 5^{12} = (2 \cdot 5)^{12} =$

$= 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 43

3 **Expresa como potencia de base 10 el resultado de la operación 0,00001 : 10 000 000.**

$$0{,}00001 : 10\,000\,000 = \frac{1}{100\,000} : 10\,000\,000 = \frac{1}{100\,000} \cdot \frac{1}{10\,000\,000} = 10^{-12}$$

4 **Expresa como fracción simplificada.**

a) $\frac{3^4}{3^5}$ **b)** 5^{-1} **c)** a^{-6} **d)** $x^{-1}y^{-2}$

e) $\frac{x^3y^4}{x^2y^6}$ **f)** $(3xy^2)^{-2}$ **g)** $5 \cdot 3^{-1} \cdot xy^{-2}$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{a^6}$ d) $\frac{1}{xy^2}$

e) $\frac{x}{y^2}$ f) $\frac{1}{9x^2y^4}$ g) $\frac{5x}{3y^2}$

5 **Reduce a un único número racional.**

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ **c)** $\left(\frac{-1}{5}\right)^{-2}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ **e)** $\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}\right)^{-6}$ **f)** $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$ **h)** $\left(\frac{17}{45}\right)^0$ **i)** $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2$

a) $\frac{1}{25}$ b) $5^2 = 25$ c) $(-5)^2 = 25$

d) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \frac{16}{9}$ e) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-6} = 10^6 = 1\,000\,000$

f) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\right)^6 = \left(\frac{1}{10}\right)^6 = \frac{1}{1\,000\,000}$ g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \frac{32}{243}$

h) 1 i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-6} = 3^6 = 729$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 44

1 Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{64}$ **b)** $\sqrt[3]{216}$ **c)** $\sqrt{14\,400}$

d) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$ **e)** $\sqrt[3]{\frac{64}{216}}$ **f)** $\sqrt[3]{\frac{3\,375}{1\,000}}$

a) 2 b) 6 c) 120

d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ f) $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

2 Justifica si son ciertas o no las siguientes frases:

a) Como $(-5)^2 = 25$, entonces $\sqrt{25} = -5$.

b) –5 es una raíz cuadrada de 25.

c) 81 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

d) 27 tiene dos raíces cúbicas: 3 y –3.

a) FALSA.

$\sqrt{25}$ hace referencia a la raíz positiva; es decir, $\sqrt{25} = 5$.

b) VERDADERA.

Porque $(-5)^2 = 25$.

c) FALSA.

Porque $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$.

d) FALSA.

Solo tiene una raíz cúbica, 3, ya que $3^3 = 27$; pero $(-3)^3 = -27$.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 45

Cálculo mental 1

Simplifica:

a) $4\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - \sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{4} - 5\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{4}$

a) $10\sqrt{5}$

b) $3\sqrt[3]{4}$

Cálculo mental 2

Simplifica:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

b) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{10}$

a) $\sqrt{100} = 10$

b) $\sqrt[3]{60}$

Cálculo mental 3

Simplifica:

a) $\sqrt[3]{8}$

b) $\sqrt{4^3}$

a) 2

b) $2^3 = 8$

1 **Simplifica las expresiones que puedas y en las restantes indica por qué no se pueden simplificar.**

a) $8\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{25} - \sqrt{8}$

d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}$

e) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{7}$

a) No se puede simplificar.

b) $-\sqrt{5}$

c) No se puede simplificar.

d) No se puede simplificar.

e) $\sqrt{42}$

PÁGINA 46

1 **Sitúa cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Ten en cuenta que cada número puede estar en más de un casillero.**

$107;\ 3{,}95;\ 3{,}\widehat{95};\ -7;\ \sqrt{20};\ \frac{36}{9};\ \sqrt{\frac{4}{9}};\ -\sqrt{36};\ \frac{7}{3};\ \pi - 3$

NATURALES, $\mathbb{N}$	$107;\ 36/9 = 4$
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	$107;\ -7;\ 36/9 = 4;\ -\sqrt{36} = -6$
FRACCIONARIOS	$3{,}95;\ 3{,}\widehat{95};\ \sqrt{4/9} = 2/3;\ 7/3$
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	$104;\ 3{,}95;\ 3{,}\widehat{95};\ -7;\ 36/9 = 4;\ \sqrt{4/9} = 2/3;\ -\sqrt{36} = -6;\ 7/3$
IRRACIONALES	$\sqrt{20};\ \pi - 3$

2

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 49

1 ¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo de estas mediciones?

a) Volumen de una bañera, 326 litros.

b) Volumen de una piscina, 326 m^3.

c) Volumen de un pantano, 326 hm^3.

a) Error absoluto < 0,5 *l*

b) Error absoluto < 0,5 m^3 = 500 *l*

c) Error absoluto < 0,5 hm^3 = 500 000 *l*

El error relativo es el mismo en los tres casos, porque el número de cifras significativas es el mismo en todas ellas.

2 Compara el error relativo cometido al hacer las siguientes pesadas:

a) Una ballena, 37 toneladas.

b) Un pavo, 3 kg.

c) Don Anselmo, 87,3 kg.

El menor error relativo se da al pesar a Don Anselmo, porque se usan tres cifras significativas.

Y el mayor error relativo se da al pesar al pavo, porque solo tiene una cifra significativa.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 50

Repaso: potencias de base 10

I. Opera y expresa el resultado como potencia de base 10:

a) $1\,000 \cdot 100\,000$

b) $1\,000 \cdot 0{,}01$

c) $1\,000 : 0{,}01$

d) $1\,000 : 0{,}000001$

e) $1\,000 \cdot 0{,}000001$

f) $0{,}0001 \cdot 0{,}01$

g) $0{,}0001 : 0{,}01$

a) 10^8 b) 10 c) 10^5 d) 10^9 e) 10^{-3} f) 10^{-6} g) 10^{-2}

II. Di el valor de *n* para que se verifique cada igualdad:

a) $374{,}2 \cdot 10^5 = 3{,}742 \cdot 10^n$

b) $374{,}2 \cdot 10^{-7} = 3{,}742 \cdot 10^n$

c) $0{,}031 \cdot 10^5 = 3{,}1 \cdot 10^n$

d) $0{,}031 \cdot 10^{-7} = 3{,}1 \cdot 10^n$

a) 7 b) –5 c) 3 d) –9

1 Calcula:

a) $(3{,}25 \cdot 10^7) \cdot (9{,}35 \cdot 10^{-15})$

b) $(5{,}73 \cdot 10^4) + (-3{,}2 \cdot 10^5)$

c) $(4{,}8 \cdot 10^{12}) : (2{,}5 \cdot 10^3)$

a) $3{,}25 \cdot 9{,}35 \cdot 10^{7-15} = 30{,}3875 \cdot 10^{-8} = 3{,}03875 \cdot 10^{-7}$

b) $(5{,}73 \cdot 10^4) + (-32 + 10^4) = (5{,}73 - 32) \cdot 10^4 = -26{,}27 \cdot 10^4 = -2{,}627 \cdot 10^5$

c) $(4{,}8 : 2{,}5) \cdot 10^{12-3} = 1{,}92 \cdot 10^9$

2 Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 52

Opera y calcula

Potencias y raíces

1 ▼▽▽ **Calcula las potencias siguientes:**

a) $(-3)^3$ **b)** $(-2)^4$ **c)** $(-2)^{-3}$

d) -3^2 **e)** -4^{-1} **f)** $(-1)^{-2}$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **h)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **i)** $\left(\frac{4}{3}\right)^{0}$

a) -27 b) 16 c) $-\frac{1}{8}$

d) -9 e) $-\frac{1}{4}$ f) 1

g) 8 h) 4 i) 1

2 ▼▽▽ **Expresa como una potencia de base 2 ó 3.**

a) 64 **b)** 243 **c)** $\frac{1}{32}$ **d)** $\frac{1}{3}$ **e)** $-\frac{1}{27}$

a) 2^6 b) 3^5 c) 2^{-5} d) 3^{-1} e) $-(3)^{-3}$

3 ▼▽▽ **Expresa como potencia única.**

a) $\frac{3^4}{3^{-3}}$ **b)** $\frac{2^{-5}}{2^3}$ **c)** $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1}$

a) $3^4 : 3^{-3} = 3^{4-(-3)} = 3^{4+3} = 3^7$

b) $2^{-5} : 2^3 = 2^{-5-3} = 2^{-8}$

c) $(2^{-3} : 2^{-2})^{-1} = (2^{-3-(-2)})^{-1} = (2^{-3+2})^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^{(-1)\cdot(-1)} = 2^1 = 2$

4 ▼▽▽ **Calcula.**

a) $\left(\frac{3}{2}-1\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **b)** $\left(2+\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-2}$

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

b) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{9}{49} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{49}$

5 ▼▽▽ **Expresa como potencia única.**

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^{2}$ **b)** $\frac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}}$ **c)** $\left[\left(\frac{1}{2}+1\right)^{-1}\right]^3$ **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{3} : \left(\frac{1}{4}\right)^{2}$

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$ b) $\frac{2^{-2}}{2^{-4}} = 2^2$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

6 ▼▽▽ **Simplifica.**

a) $\dfrac{2a}{b^2} : \dfrac{3a^2}{b}$ **b)** $\dfrac{4ab}{9} : \dfrac{b^2}{3a}$

c) $(6a)^{-1} : (3a^{-2})^{-2}$ **d)** $(a^{-1}b^2)^2 \cdot (ab^{-2})^{-1}$

a) $\dfrac{2a}{b^2} : \dfrac{3a^2}{b} = \dfrac{2ab}{b^2 3a^2} = \dfrac{2}{3ab} = \dfrac{2}{3}a^{-1}b^{-1}$

b) $\dfrac{4ab}{9} : \dfrac{b^2}{3a} = \dfrac{4ab3a}{9b^2} = \dfrac{12a^2b}{9b^2} = \dfrac{4a^2}{3b} = \dfrac{4}{3}a^2b^{-1}$

c) $(6a)^{-1} : (3a^{-2})^{-2} = \dfrac{6^{-1}a^{-1}}{3^{-2}a^{-4}} = \dfrac{3^2}{6}a^{-1+4} = \dfrac{3}{2}a^3$

d) $(a^{-1}b^2)^2 \cdot (ab^{-2})^{-1} = a^{-2} \cdot b^4 \cdot a^{-1} \cdot b^2 = a^{-3}b^6$

7 ▼▽▽ **Simplifica.**

a) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-4}\dfrac{a^3}{b^2}$ **b)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3}(a^{-1})^{-2}$ **c)** $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-3}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}$

a) $\dfrac{a^{-1}}{b^{-2}} = \dfrac{b^2}{a}$ b) $\dfrac{b^3}{a^3} \cdot a^2 = \dfrac{b^3}{a}$ c) $\dfrac{a^3 \cdot a^{-2}}{b^{-2}} = a \cdot b^2$

8 ▼▽▽ **Calcula.**

a) $\sqrt[4]{16}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$ **c)** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$ **d)** $\sqrt[5]{-1}$

a) 2 b) $\dfrac{4}{5}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) -1

9 ▼▽▽ **Halla las raíces siguientes:**

a) $\sqrt[3]{216}$ **b)** $\sqrt[7]{-128}$ **c)** $\sqrt[5]{-243}$ **d)** $\sqrt[6]{4\,096}$

a) 6 b) -2 c) -3 d) 4

Radicales

10 ▼▽▽ **Simplifica las expresiones que puedas, y en las restantes, indica por qué no se pueden simplificar.**

a) $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ **c)** $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$ **e)** $2\sqrt{5} - \dfrac{1}{3}\sqrt{5}$ **f)** $\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

a) $3\sqrt{2}$ b) No se puede, porque tienen distinto radicando.

c) $-\sqrt{3}$ d) Igual que b).

e) $\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

11 ▼▽▽ **Simplifica si es posible.**

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{16}$ **c)** $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2}$ **e)** $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ **f)** $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{6}$

a) $\sqrt{16} = 4$ b) $\sqrt{80}$ c) $\sqrt[3]{20}$

d) No es posible. e) $\sqrt[4]{81} = 3$ f) No es posible.

12 ▼▼▽ **Simplifica las siguientes expresiones:**

a) $(\sqrt[4]{2})^4$ **b)** $(\sqrt[3]{2})^6$ **c)** $(\sqrt[6]{2^2})^3$

d) $\sqrt[3]{10}\,\sqrt[3]{1\,000}$ **e)** $\sqrt[5]{2}\,\sqrt[5]{16}$ **f)** $\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{81}$

a) 2 b) 2^2 c) 2

d) $10\sqrt[3]{10}$ e) 2 f) 9

Aproximaciones y errores

13 ▼▽▽ **Aproxima al orden de la unidad indicada:**

a) 2,3148 a las centésimas. **b) 43,18 a las unidades.**

c) 0,00372 a las milésimas. **d) 13 847 a las centenas.**

e) 4 723 a los millares. **f) 37,9532 a las décimas.**

a) 2,31 b) 43

c) 0,004 d) 13 800

e) 5 000 f) 38,0

14 ▼▽▽ **Expresa con dos cifras significativas las cantidades siguientes:**

a) Presupuesto de un club: 1 843 120 €.

b) Votos de un partido político: 478 235.

c) Precio de una empresa: 15 578 147 €.

d) Tamaño de un ácaro: 1,083 mm.

a) 1,8 millones de euros.

b) 480 000 votos.

c) 16 000 000 €

d) 1,1 mm

15 ▼▽▽ **¿En cuál de las aproximaciones dadas se comete menos error absoluto?**

a) $\frac{14}{3} \approx \begin{cases} 4{,}6 \\ 4{,}7 \end{cases}$ **b)** $1{,}546 \approx \begin{cases} 1{,}5 \\ 1{,}6 \end{cases}$

c) $\sqrt{6} \approx \begin{cases} 2{,}44 \\ 2{,}45 \end{cases}$ **d)** $\sqrt{10} \approx \begin{cases} 3{,}16 \\ 3{,}2 \end{cases}$

a) $\frac{14}{3} - 4{,}6 = 0{,}0666\ldots$

$4{,}7 - \frac{14}{3} = 0{,}0333\ldots$

Con 4,7 se comete menos error absoluto.

b) $1{,}546 - 1{,}5 = 0{,}046$

$1{,}6 - 1{,}546 = 0{,}054$

Con 1,5 se comete menos error absoluto.

c) $\sqrt{6} - 2{,}44 = 0{,}0095$

$2{,}45 - \sqrt{6} = 0{,}0005$

Con 2,45 se comete menos error absoluto.

d) $\sqrt{10} - 3{,}16 = 0{,}0023$

$3{,}2 - \sqrt{10} = 0{,}04$

Con 3,16 se comete menos error absoluto.

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 53

16 ▼▽▽ **Calcula el error absoluto cometido en cada caso:**

	CANTIDAD REAL	CANTIDAD APROXIMADA
PRECIO DE UN COCHE	**12 387 €**	**12 400 €**
TIEMPO DE UNA CARRERA	**81,4 min**	**80 min**
DISTANCIA ENTRE DOS PUEBLOS	**13,278 km**	**13,3 km**

Precio de un coche: 12 400 – 12 387 = 13 €

Tiempo de una carrera: 81,4 – 80 = 1,4 min

Distancia entre dos pueblos: 13,3 – 13,278 = 0,022 km

Notación científica

17 ▼▽▽ **Escribe estos números con todas sus cifras:**

a) $4 \cdot 10^7$ **b)** $5 \cdot 10^{-4}$ **c)** $9,73 \cdot 10^8$

d) $8,5 \cdot 10^{-6}$ **e)** $3,8 \cdot 10^{10}$ **f)** $1,5 \cdot 10^{-5}$

a) 40 000 000 b) 0,0005 c) 973 000 000

d) 0,0000085 e) 38 000 000 000 f) 0,000015

18 ▼▽▽ **Escribe estos números en notación científica:**

a) 13 800 000 **b) 0,000005**

c) 4 800 000 000 **d) 0,0000173**

a) $1,38 \cdot 10^7$ b) $5 \cdot 10^{-6}$

c) $4,8 \cdot 10^9$ d) $1,73 \cdot 10^{-5}$

19 ▼▽▽ **Expresa en notación científica.**

a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km.

b) Caudal de una catarata: 1 200 000 *l*/s.

c) Velocidad de la luz: 300 000 000 m/s.

d) Emisión de CO_2: 54 900 000 000 kg.

a) $1,5 \cdot 10^8$ km

b) $1,2 \cdot 10^6$ *l*/s

c) $3 \cdot 10^8$ m/s

d) $5,49 \cdot 10^{10}$ kg

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

20 ▼▼▽ **Calcula, expresa el resultado en notación científica y comprueba con la calculadora:**

a) $(2,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3)$ **b)** $(5 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^5)$

c) $(7,4 \cdot 10^{13}) \cdot (5 \cdot 10^{-6})$ **d)** $(1,2 \cdot 10^{11}) : (2 \cdot 10^{-3})$

a) $(2,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3) = 2,5 \cdot 8 \cdot 10^{10} = 20 \cdot 10^{10} = 2 \cdot 10^{11}$

b) $(5 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^5) = (5 : 8) \cdot 10^{-8} = 0,625 \cdot 10^{-8} = 6,25 \cdot 10^{-9}$

c) $(7,4 \cdot 10^{13}) \cdot (5 \cdot 10^{-6}) = 7,4 \cdot 5 \cdot 10^7 = 37 \cdot 10^7 = 3,7 \cdot 10^8$

d) $(1,2 \cdot 10^{11}) : (2 \cdot 10^{-3}) = (1,2 : 2) \cdot 10^{14} = 0,6 \cdot 10^{14} = 6 \cdot 10^{13}$

21 ▼▼▽ **Calcula mentalmente y comprueba con la calculadora.**

a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{12})$ **b)** $(1,5 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^{-5})$

c) $(3,4 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{17})$ **d)** $(8 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{17})$

e) $(9 \cdot 10^{-7}) : (3 \cdot 10^7)$ **f)** $(4,4 \cdot 10^8) : (2 \cdot 10^{-5})$

g) $(5 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{-9})$

a) $6 \cdot 10^{17}$ b) $3 \cdot 10^{-12}$ c) $6,8 \cdot 10^9$ d) $4 \cdot 10^{-5}$

e) $3 \cdot 10^{-14}$ f) $2,2 \cdot 10^{13}$ g) $4 \cdot 10^{-15}$

22 ▼▼▽ **Expresa en notación científica y calcula:**

a) $\dfrac{0,00054 \cdot 12\,000\,000}{250\,000 \cdot 0,00002}$ **b)** $\dfrac{1\,320\,000 \cdot 25\,000}{0,000002 \cdot 0,0011}$

c) $\dfrac{0,000015 \cdot 0,000004}{1\,250\,000 \cdot 600\,000}$ **d)** $(0,0008)^2 \cdot (30\,000)^2$

a) $\dfrac{5,4 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2 \cdot 10^7}{2,5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{6,48 \cdot 10^{11}}{5} = 1,296 \cdot 10^{11}$

b) $\dfrac{1,32 \cdot 10^6 \cdot 2,5 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 1,1 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{3,3 \cdot 10^{10}}{2,2 \cdot 10^{-9}} = 1,5 \cdot 10^{19}$

c) $\dfrac{1,5 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{1,25 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^5} = \dfrac{6 \cdot 10^{-11}}{7,5 \cdot 10^{11}} = 0,8 \cdot 10^{-22} = 8 \cdot 10^{-23}$

d) $6,4 \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^8 = 5,76 \cdot 10^2$

23 ▼▼▽ **Di cuál debe ser el valor de *n* para que se verifique la igualdad en cada caso:**

a) $3\,570\,000 = 3,57 \cdot 10^n$ **b)** $0,000083 = 8,3 \cdot 10^n$

c) $157,4 \cdot 10^3 = 1,574 \cdot 10^n$ **d)** $93,8 \cdot 10^{-5} = 9,38 \cdot 10^n$

e) $14\,700 \cdot 10^5 = 1,47 \cdot 10^n$ **f)** $0,003 \cdot 10^8 = 3 \cdot 10^n$

a) $n = 6$ b) $n = -5$ c) $n = 5$

d) $n = -4$ e) $n = 9$ f) $n = 5$

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

24 ▼▼▽ **Efectúa las operaciones como en el ejemplo y comprueba el resultado con la calculadora:**

- $2 \cdot 10^{-5} + 1{,}8 \cdot 10^{-6} = 20 \cdot 10^{-6} + 1{,}8 \cdot 10^{-6} = (20 + 1{,}8) \cdot 10^{-6} = 21{,}8 \cdot 10^{-6} =$
$= 2{,}18 \cdot 10^{-5}$

a) $3{,}6 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^{11}$ **b)** $5 \cdot 10^{9} + 8{,}1 \cdot 10^{10}$

c) $8 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-9}$ **d)** $5{,}32 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-6}$

a) $3{,}6 \cdot 10 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{11} = (36 - 4) \cdot 10^{11} = 32 \cdot 10^{11} = 3{,}2 \cdot 10^{12}$

b) $5 \cdot 10^{9} + 81 \cdot 10^{9} = 86 \cdot 10^{9} = 8{,}6 \cdot 10^{10}$

c) $80 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-9} = 75 \cdot 10^{-9} = 7{,}5 \cdot 10^{-8}$

d) $532 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6} = 540 \cdot 10^{-6} = 5{,}4 \cdot 10^{-4}$

Aplica lo aprendido

25 ▼▽▽ **El diámetro de un virus es $5 \cdot 10^{-4}$ mm. ¿Cuántos de esos virus son necesarios para rodear la Tierra? (Radio medio de la Tierra: 6 370 km).**

Circunferencia de la Tierra = $2 \cdot \pi \cdot 6\,370 \cdot 10^{6} = 4 \cdot 10^{10}$ mm

Número de virus necesarios para rodearla: $4 \cdot 10^{10} : 5 \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^{13}$ virus

26 ▼▽▽ **El presupuesto en educación de una comunidad autónoma ha pasado de $8{,}4 \cdot 10^{6}$ € a $1{,}3 \cdot 10^{7}$ € en tres años. ¿Cuál ha sido la variación porcentual?**

$1{,}3 \cdot 10^{7} : 8{,}4 \cdot 10^{6} \approx 1{,}55 \quad \rightarrow$ El 55% de aumento.

27 ▼▽▽ **En España se consumen, aproximadamente, 7,2 millones de toneladas de papel al año. ¿Cuál es el consumo anual per cápita? (Población de España: 45 millones).**

7,2 millones de toneladas = $7{,}2 \cdot 10^{6}$ t

4,5 millones de habitantes = $4{,}5 \cdot 10^{6}$ habitantes

Por tanto:

$$\frac{7{,}2 \cdot 10^{6}\ \text{t}}{4{,}5 \cdot 10^{6}\ \text{hab}} = \frac{7{,}2}{45}\ \text{t/hab} = 0{,}16\ \text{t/hab} = 160\ \text{kg/hab}$$

El consumo anual per cápita es de 160 kg.

28 ▼▽▽ **Los veterinarios estiman que el 5% de la poblacion mundial tiene un perro. Según esta estimación, ¿cuántos perros hay en el mundo? (Población mundial: $6{,}8 \cdot 10^{9}$ habitantes).**

Tenemos que calcular el 5% de $6{,}8 \cdot 10^{9}$; es decir:

$$\frac{5}{100} \cdot 6{,}8 \cdot 10^{9} = 0{,}34 \cdot 10^{9} = 3{,}4 \cdot 10^{8}$$

En el mundo hay 340 000 000 perros.

PÁGINA 54

29 ▼▽▽ Resuelto en el libro del alumno.

30 ▼▽▽ **¿Cuál de las siguientes medidas es más precisa (tiene menos error relativo)? Di, en cada una, de qué orden es el error absoluto cometido:**

a) Altura de Claudia: 1,75 m.

b) Precio de un televisor: 1 175 €.

c) Tiempo de un anuncio: 95 segundos.

d) Oyentes de un programa de radio: 2 millones.

a) Altura: 1,75 m $\rightarrow$ Error absoluto < 0,005 m

b) Precio: 1 175 € $\rightarrow$ Error absoluto < 0,5 €

c) Tiempo: 95 s $\rightarrow$ Error absoluto < 0,5 s

d) N.° de oyentes: 2 millones $\rightarrow$ Error absoluto < 500 000

La de menor error relativo es la b), porque tiene más cifras significativas.

31 ▼▽▽ **Di una cota del error absoluto en cada una de estas medidas: 53 s; 18,3 s; 184 s; 8,43 s. ¿En cuál de ellas es mayor el error relativo?**

53 s $\rightarrow$ $E_a < 0{,}5$ s
18,3 s $\rightarrow$ $E_a < 0{,}05$ s
184 s $\rightarrow$ $E_a < 0{,}5$ s
8,43 s $\rightarrow$ $E_a < 0{,}005$ s

El mayor error relativo se da en 53 s, porque es la medición que tiene menos cifras significativas.

32 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno.

33 ▼▼▽ **Calcula como en el ejercicio anterior:**

a) $\dfrac{6^4 \cdot 8^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4}$ **b)** $\dfrac{15^2 \cdot 4^2}{12^2 \cdot 10}$

c) $\dfrac{2^{-5} \cdot 4^3}{16}$ **d)** $\dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$

e) $\dfrac{6^2 \cdot 9^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}$ **f)** $\dfrac{2^{-5} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3^{-2}}{2^{-4} \cdot 4^2 \cdot 6^{-1}}$

a) $\dfrac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^6}{3^2 \cdot 2^7} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

b) $\dfrac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5} = \dfrac{5}{2}$

c) $\dfrac{2^{-5} \cdot 2^6}{2^4} = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$

d) $\dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-2}} = 3^4 = 81$

e) $\dfrac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^4}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^4} = 2^{-5} \cdot 3^4 = \dfrac{81}{32}$

f) $\dfrac{2^{-5} \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 3^{-2}}{2^{-4} \cdot 2^4 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}} = \dfrac{3}{2}$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

Resuelve problemas

34 ▼▼▽ **La velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s. Un *año luz* es la distancia que recorre la luz en un año.**

a) ¿Qué distancia recorre la luz del Sol en un año?

b) ¿Cuánto tarda la luz del Sol en llegar a Plutón? (Distancia del Sol a Plutón: $5{,}914 \cdot 10^6$ km).

c) La estrella Alfa-Centauro está a 4,3 años luz de la Tierra. Expresa en kilómetros esa distancia.

a) Distancia que recorre la luz en un año:

$$3 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 9{,}46 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9{,}46 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

b) Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a Plutón:

$$t = \frac{5{,}914 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 19{,}7 \text{ segundos}$$

c) 4,3 años luz $= 4{,}3 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 4{,}07 \cdot 10^{13}$ km

35 ▼▼▽ **En un reloj que mide el crecimiento de la población mundial, observo que aumentó en 518 personas en 30 minutos. Si se mantiene ese ritmo de crecimiento, ¿cuándo llegaremos a 7 mil millones? (Población mundial: $6{,}8 \cdot 10^9$).**

En primer lugar, tenemos que ver cuánto debe aumentar la población.

$$7 \text{ mil millones} = 7\,000 \cdot 10^6 = 7 \cdot 10^3 \cdot 10^6 = 7 \cdot 10^9$$

Ahora:

$$7 \cdot 10^9 - 6{,}8 \cdot 10^9 = 0{,}2 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^8$$

¿Y cuánto tardará en aumentar la población ese número de personas?

$$\frac{2 \cdot 10^8 \cdot 30}{518} = 11\,583\,011{,}58 \text{ min}$$

Pasémoslo a años:

$$\frac{11\,583\,011{,}58}{60 \cdot 24 \cdot 365} = 22{,}04$$

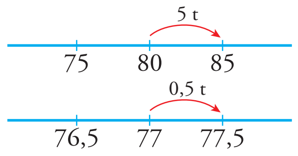
Por tanto, se llegará a siete mil millones de habitantes dentro de 22 años, aproximadamente.

36 ▼▼▽ **a) Sabemos que cierta ballena pesa entre 75 y 85 toneladas. Si decimos que pesa 80 t, ¿qué podemos decir del error absoluto cometido?**

b) Otra ballena, pesada con más precisión, está entre 76,5 t y 77,5 t. Si decimos que pesa 77 t, ¿qué podemos decir del error absoluto cometido?

c) ¿Por qué en el segundo caso es mayor la precisión (77 t) que en el anterior (80 t) si en ambos casos hemos utilizado dos cifras significativas?

El error absoluto depende de las cifras que no aparecen.



Peso de la ballena: 80 t $\longrightarrow$ Error absoluto < 5 t

Peso de la otra ballena: 77 t $\longrightarrow$ Error absoluto < 0,5 t

El menor error relativo se da en el segundo caso, porque sabemos que la pesada se hizo con más precisión empleando tres cifras significativas.

37 ▼▼▽ **El tamaño de un archivo informático se mide en bytes (B), conjunto de 8 bits.**

a) ¿Cuántos bytes tiene un archivo de 1 750 KB (kilobytes)? ¿Y otro de 20 MB (megabytes)?

b) ¿Cuántos bytes puede almacenar mi disco, de 100 GB (gigabytes)? ¿Y cuántos archivos de 20 MB?

c) Quiero hacer una copia de seguridad de mi disco duro. ¿Cuántos CD de 700 megas necesitaría? ¿Y si utilizo DVD de 4,7 gigas?

a) $1\,750 \text{ KB} = 1\,750 \cdot 10^3 \text{ B} = 1,75 \cdot 10^6 \text{ B}$

$20 \text{ MB} = 20 \cdot 10^6 \text{ B} = 2 \cdot 10^7 \text{ B}$

b) $100 \text{ GB} = 100 \cdot 10^9 \text{ B} = 10^{11} \text{ B}$

$100 \text{ GB} = 100 \cdot 10^3 \text{ MB} = 10^5 \text{ MB}$

Por tanto, $10^5 : 20 = 5\,000$

Así, en 100 GB caben 5 000 archivos de 20 MB.

c) $10^5 : 700 = 142,86$

Neceritaría 143 CD para hacer la copia de seguridad.

$100 : 4,7 = 21,28$

O podría utilizar 22 DVD.

PÁGINA 55

38 ▼▼▽ **Los proveedores de internet miden la velocidad de bajada en Kbps (kilobits por segundo), pero en los programas de descargas se habla de KB/s (kilobytes por segundo).**

a) He pasado un test de velocidad a mi ordenador y me da 6 180 Kbps. ¿Cuántos bps y cuántos KB/s baja mi ordenador?

b) Tengo 2 minutos de conexión y quiero descargar un archivo de 4 325 KB y otro de 20 MB. ¿Tendré tiempo suficiente para hacerlo?

c) Para que un archivo de 20 MB tarde menos de 25 s en bajar, ¿qué velocidad en Kbps se necesita?

a) 6 180 Kbps = $6\,180 \cdot 10^3$ bps = $6{,}18 \cdot 10^6$ bps

$$\frac{6\,180}{8} = 772{,}5 \text{ KB/s}$$

b) 2 min = 120 s; 20 MB = 20 000 KB

4 325 + 20 000 = 24 325 KB

Por tanto, el tiempo total de la descarga será:

$$\frac{24\,325}{772{,}5} = 31{,}49 \text{ s}$$

Como tengo 2 min, me dará tiempo a realizar la descarga.

c) 20 MB = 20 000 KB

Así:

$$\frac{20\,000}{25} = 800 \text{ KB/s}$$

Ahora:

$$800 \cdot 8 = 6\,400 \text{ kbps}$$

Necesitamos más de 6 400 kbps.

Problemas "+"

39 ▼▼▽ **Durante la década de 1990-2000 se produjo en el mundo una pérdida de superficie forestal neta de 93,9 millones de hectáreas. En la página web donde leo la información dice que esto representa más de 6 millones de campos de fútbol por año.**

Comprueba si es cierta esta información (dimensiones máximas de un campo de fútbol: 120 m × 75 m).

La superficie de un campo de fútbol es:

$$120 \cdot 75 = 9\,000 \text{ m}^2$$

Por tanto, la de 6 millones de campos es:

$$9\,000 \cdot 6 \cdot 10^6 = 54 \cdot 10^9 = 5{,}4 \cdot 10^{11} \text{ m}^2$$

Además:

$$\frac{5{,}4 \cdot 10^{11}}{10^4} = 5{,}4 \cdot 10^7 \text{ ha}$$

Según el enunciado, la superficie forestal perdida fue:

$$93{,}9 \cdot 10^9 \text{ ha} = 9{,}39 \cdot 10^7 \text{ ha}$$

Como $9{,}39 \cdot 10^7 > 5{,}4 \cdot 10^7$, la información es correcta.

40 ▼▼▼ **La combustión de un litro de gasolina produce 2 370 g de CO_2. El consumo medio de un coche es 8 *l* por cada 100 km. En España hay aproximadamente 600 coches por cada 1 000 habitantes, que hacen una media de 15 000 km al año.**

a) Calcula la cantidad de CO_2 que emite un coche por kilómetro recorrido.

b) ¿Cuántas toneladas de CO_2 se emiten en España en un año?

c) La UE quiere limitar las emisiones a 130 g/km para el año 2012. ¿Cuántas toneladas de CO_2 se dejarán de emitir en España en un año con esa norma?

a) $\dfrac{8\ l}{100 \text{ km}} \cdot 2\,370 \text{ g}/l = 189{,}6$ g/km es la emisión de CO_2 por cada kilómetro.

b) Tomemos la población española como 45 millones. Así, la cantidad total de coches es:

$$\frac{4{,}5 \cdot 10^7 \cdot 600}{1\,000} = 2{,}7 \cdot 10^7 \text{ coches}$$

El consumo anual de un coche es:

$$15\,000 \cdot \frac{8}{100} = 1\,200\ l$$

Por tanto, el consumo total en España es:

$$2{,}7 \cdot 10^7 \cdot 1\,200 = 3\,240 \cdot 10^7 = 3{,}24 \cdot 10^{10}\ l$$

Y las emisiones de CO_2 totales:

$$3{,}24 \cdot 10^{10} \cdot 2\,370 = 7{,}68 \cdot 10^{13} \text{ g} = 7{,}68 \cdot 10^7 \text{ t}$$

41 ▼▼▼ **Una nave espacial sale de la Tierra hacia un planeta situado a 2^{20} km. Después de recorrer 1/4 de su trayecto, pierde el contacto por radio y lo recupera cuando está a 2^{19} km de su destino. ¿Cuántos kilómetros recorrió sin radio?**

Cuando pierde el contacto por radio, ha recorrido:

$$\frac{1}{4} \cdot 2^{20} = \frac{2^{20}}{2^2} = 2^{18} \text{ km}$$

Cuando vuelve a recuperar la radio le queda 2^{19} km, lo que supone que ha recorrido ya:

$$2^{20} - 2^{19} = 2 \cdot 2^{19} - 2^{19} = 2^{19}(2 - 1) = 2^{19}$$

Es decir, cuando recupera el contacto, está justo en la mitad de su trayecto.

Como perdió el contacto al llegar a un cuarto de su viaje, resulta que estuvo otro cuarto sin el uso de la radio.

Por tanto, sin radio recorrió 2^{18} km.

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

Reflexiona sobre la teoría

42 ▼▼▽ **¿Cuáles de los siguientes números no son racionales? Pon en forma de fracción los que sea posible:**

a) $0{,}018$ **b)** $\sqrt{10}$ **c)** $1{,}212112111\ldots$

d) 2π **e)** $7{,}03232\ldots$ **f)** $0{,}\widehat{23}$

Racionales: 0,018; 7,03232…; $0{,}\widehat{23}$

$0{,}018 = \frac{18}{1\,000} = \frac{9}{500}$; $7{,}0\widehat{32} = \frac{6\,962}{990} = \frac{3\,481}{495}$; $0{,}\widehat{23} = \frac{23}{99}$

43 ▼▽▽ **La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores. Cuando escribimos $-\sqrt{4}$ nos referimos a la raíz negativa. Es decir, $-\sqrt{4} = -2$.**

¿Cuál es el valor de las siguientes expresiones?

a) $-\sqrt{64}$ **b)** $\sqrt[4]{81}$ **c)** $-\sqrt{1}$

d) $\sqrt[6]{1}$ **e)** $-\sqrt{9}$ **f)** $\sqrt[3]{-8}$

a) -8 b) 3 c) -1

d) 1 e) -3 f) -2

44 ▼▽▽ **¿Por qué no se puede hallar la raíz de índice par de un número negativo?**

Calcula, cuando sea posible, estas raíces:

a) $\sqrt[4]{256}$ **b)** $\sqrt[3]{-27}$ **c)** $\sqrt[4]{-16}$

d) $\sqrt[5]{-1}$ **e)** $-\sqrt{36}$ **f)** $\sqrt[6]{-1}$

Porque al elevar un número negativo a un exponente par, obtenemos un número positivo.

a) 4 b) -3 c) Imposible.

d) -1 e) -6 f) Imposible.

45 ▼▼▽ **Justifica cuál debe ser el valor de *a*, en cada caso, para que se verifique la igualdad:**

a) $a^3 = 2^6$ **b)** $a^{-1} = 2$ **c)** $\sqrt{a} = \frac{4}{5}$

d) $\sqrt[4]{a} = 1$ **e)** $a^{-2} = \frac{1}{4}$ **f)** $a^{-5} = -1$

a) $a = 2^2$ b) $a = \frac{1}{2}$ c) $a = \frac{16}{25}$

d) $a = 1$ e) $a = 2$ f) $a = -1$

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

Piensa y deduce

46 ▼▼▽ **¿Cuál es el máx.c.d. y el mín.c.m. de los siguientes números?**

$$\mathbf{3 \cdot 10^3 \quad 4 \cdot 10^4 \quad 5 \cdot 10^5 \quad 6 \cdot 10^6}$$

máx.c.d. $(3 \cdot 10^3,\ 4 \cdot 10^4,\ 5 \cdot 10^5,\ 6 \cdot 10^6) = 10^3$

mín.c.m. $(3 \cdot 10^3,\ 4 \cdot 10^4,\ 5 \cdot 10^5,\ 6 \cdot 10^6) = 6 \cdot 10^6$

47 ▼▼▼ **Halla el valor de x para que se verifique la igualdad:**

$$\mathbf{8^{668} + 2^{2\,005} + 4^{1\,003} = 7 \cdot 2^x}$$

Pongamos el primer miembro todo en base 2:

$$8^{668} + 2^{2005} + 4^{1003} = (2^3)^{668} + 2^{2005} + (2^2)^{1003} = 2^{2004} + 2^{2005} + 2^{2006} =$$
$$= 2^{2004} + 2 \cdot 2^{2004} + 2^2 \cdot 2^{2004} = (1 + 2 + 4) \cdot 2^{2004} =$$
$$= 7 \cdot 2^{2004}$$

Como el segundo miembro es:

$7 \cdot 2^x$

Resulta que:

$7 \cdot 2^{2004} = 7 \cdot 2^x \rightarrow x = 2004$

2 Soluciones a “Y para terminar”

PÁGINA 56

▼ Investiga

Observa los resultados de estas secuencias de teclas en la calculadora. En ambas se han realizado diez pulsaciones.

$\boxed{3}\,\boxed{\times}\,\boxed{\times}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\,\boxed{\times}\,\boxed{\times}\,\boxed{=}\,\boxed{=} \;\rightarrow\; \boxed{531441}$

$\boxed{3}\,\boxed{\times}\,\boxed{\times}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\,\boxed{\times}\,\boxed{=}\,\boxed{\times}\,\boxed{=} \;\rightarrow\; \boxed{43046721}$

¿Qué potencia de base 3 se ha obtenido en cada una?

$\boxed{3}\,\boxed{\times}\,\boxed{\times}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\,\boxed{\times}\,\boxed{\times}\,\boxed{=}\,\boxed{=} \;\rightarrow\; (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)^3 = [(3)^4]^3 = 3^{12}$

$\boxed{3}\,\boxed{\times}\,\boxed{\times}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\,\boxed{\times}\,\boxed{=}\,\boxed{\times}\,\boxed{=} \;\rightarrow\; [(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)^2]^2 = [(3)^4]^4 = 3^{16}$

Teniendo en cuenta lo anterior, y utilizando solamente las teclas $\boxed{3}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{=}$, ¿cuál es el mínimo número de pulsaciones que necesitas para calcular 3^{20}?

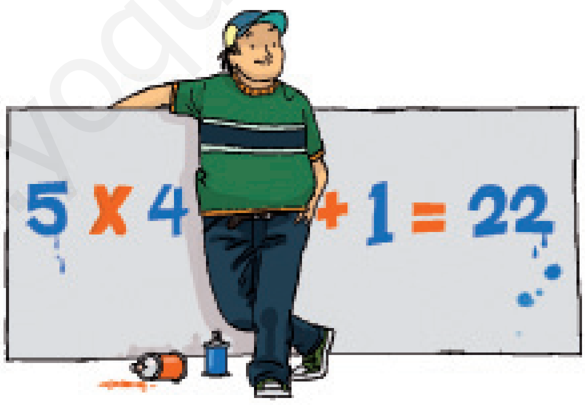
$\boxed{3}\,\boxed{\times}\,\boxed{=}\,\boxed{\times}\,\boxed{\times}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\,\boxed{\times}\,\boxed{=} \;\rightarrow\; [(3 \cdot 3)^5]^2 = (3^2)^{10} = 3^{20}$

▼ Utiliza tu ingenio

Una cuestión de comas

Poniendo una coma en el lugar adecuado, la siguiente expresión es cierta:

“CINCO POR CUATRO VEINTE MÁS UNO, VEINTIDÓS”



¿Podrías aclarar la cuestión?

El “con” de “cuatro con veinte” se refiere a la coma decimal de “cuatro coma veinte” (4,20): $5 \times 4{,}20 + 1 = 22$

Soluciones a la Autoevaluación

PÁGINA 57

¿Conoces el significado y las propiedades de las potencias de exponente entero y sabes aplicarlas?

1 Calcula:

a) $(-3)^{-2}$ **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ **c)** $\left(\frac{5}{3}\right)^{0}$

a) $\frac{1}{9}$ b) 3 c) 1

2 Simplifica:

a) $(3^2 \cdot 3^{-4})^{-3}$ **b)** $\frac{2^{-3} \cdot 3^4 \cdot 6^2}{9^{-2} \cdot 4^3}$

a) $(3^{-2})^{-3} = 3^6$

b) $\frac{2^{-3} \cdot 3^4 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{(3^2)^{-2} \cdot (2^2)^3} = \frac{2^{-1} \cdot 3^6}{3^{-4} \cdot 2^6} = 2^{-7} \cdot 3^{10}$

¿Entiendes la definición de $\sqrt[n]{a}$ y la aplicas con soltura?

3 Calcula aplicando la definición:

a) $\sqrt[3]{-8}$ **b)** $\sqrt[4]{81}$ **c)** $\sqrt[5]{1/32}$

a) $\sqrt[3]{-8} = -2 \leftrightarrow (-2)^3 = -8$ b) $\sqrt[4]{81} = 3 \leftrightarrow 3^4 = 81$ c) $\sqrt[5]{1/32} = \frac{1}{2} \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

¿Conoces algunas reglas para manejar los radicales?

4 Simplifica cuando sea posible:

a) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$ **b)** $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}$ **c)** $(\sqrt[3]{2})^6$ **d)** $(\sqrt[5]{3})^3$

a) $\sqrt{2}$

b) $\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{2^6} = 2^2$

d) $\sqrt[5]{3^3}$ no se puede simplificar.

¿Manejas con eficacia la notación científica?

5 Expresa en notación científica:

a) 234 000 000 **b)** 0,000075 **c)** $758 \cdot 10^5$ **d)** $0,35 \cdot 10^{-3}$

a) $2,34 \cdot 10^8$ b) $7,5 \cdot 10^{-5}$ c) $7,58 \cdot 10^7$ d) $3,5 \cdot 10^{-4}$

6 Escribe con todas las cifras:

a) $5,2 \cdot 10^6$ **b)** $8 \cdot 10^{-5}$

a) 5 200 000 b) 0,00008

Soluciones a la Autoevaluación

7 **Calcula manualmente y comprueba con la calculadora:**

a) $(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^{-13})$

b) $(9{,}6 \cdot 10^8) : (3{,}2 \cdot 10^{10})$

c) $(2{,}7 \cdot 10^8) + (3{,}3 \cdot 10^7)$

a) $28 \cdot 10^{-6} = 2{,}8 \cdot 10^{-5}$

b) $3 \cdot 10^{-2}$

c) $27 \cdot 10^7 + 3{,}3 \cdot 10^7 = 30{,}3 \cdot 10^7 = 3{,}03 \cdot 10^8$

8 **Si el número de internautas es, aproximadamente, de 1 600 millones, ¿qué porcentaje de la población mundial utiliza internet? (Población mundial: $6{,}8 \cdot 10^9$).**

$$\frac{1\,600 \cdot 10^6}{6{,}8 \cdot 10^9} = 0{,}235 \rightarrow \text{El } 23{,}5\%$$

¿Sabes expresar una medida con una aproximación determinada y valorar el error absoluto cometido?

9 **Escribe estas cantidades con tres cifras significativas y di una cota del error absoluto cometido:**

a) 0,1278 km **b) 51,315 km** **c) 145 800 km**

a) 0,128 km; $E_a < 0{,}0005$ km

b) 51,3 km; $E_a < 0{,}05$ km

c) 146 000 km; $E_a < 500$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 59

PARA EMPEZAR…

▼ Una progresión asombrosa

Supón que tienes una hoja de papel de 0,14 mm de grosor. Cada vez que la pliegas se duplica su grosor. Cuando has hecho seis o siete dobleces, ya no puedes doblarla más, pero imagina que pudieras hacerlo diez, veinte e, incluso, cincuenta veces. ¿Qué grosor crees que llegaría a alcanzar ese papel?

■ **Comprueba que con 10 dobleces superarías el grosor del libro más gordo de la biblioteca. Y, más asombroso, con 22 dobleces obtendrías un grosor mayor que la altura de la torre Eiffel (324 m).**

Para realizar tus cálculos, utiliza el *factor constante* en la calculadora. Recuerda:

— Si tienes calculadora con PANTALLA SENCILLA, con la secuencia:

$$2 \boxed{\times} \boxed{\times} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{=} \ldots$$

se obtienen los resultados 4, 8, 16, …

Cada vez que das a la tecla $\boxed{=}$, se multiplica por 2 (se duplica) el número que hay en la pantalla.

Si efectúas $2 \boxed{\times} \boxed{\times} 0{,}14 \underbrace{\boxed{=} \boxed{=} \ldots \boxed{=}}_{n \text{ veces}}$, obtienes, en milímetros, el grosor alcanzado por el papel tras n dobleces.

— Con calculadora de PANTALLA DESCRIPTIVA, la secuencia es:

$$2 \boxed{=} \boxed{\text{Ans}} \boxed{\times} 0{,}14 \boxed{=} \boxed{=} \ldots \boxed{=}$$

La hoja tiene un grosor de 0,14 mm. Al doblarla 10 veces, el grosor sería de:

$2^{10} \cdot 0{,}14$ mm = 1 024 · 0,14 mm = 143,36 mm = 14,336 cm

Al hacer 22 dobleces, tendríamos:

$2^{22} \cdot 0{,}14$ = 4 194 304 · 0,14 = 587 202,56 mm = 587,20256 m

■ **¿Cuántos dobleces necesitarías para superar la altura del Everest (8 848 m)?**

26 dobleces.

■ **¿Cuál sería el grosor si lo pudieras doblar 50 veces? Compáralo con la distancia de la Tierra al Sol (150 millones de kilómetros).**

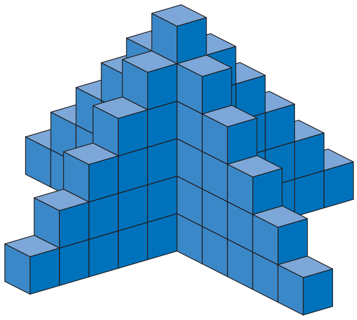
157 626 000 km > distancia de la Tierra al Sol

3 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 60

Una actividad

¿A cuál de las sucesiones de la derecha corresponde esta torre?



a) 1, 5, 9, 13, 17, …
b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …
c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, …
d) 1, –3, 9, –27, 81, –243, …
e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, …
f) 170, 120, 70, 20, –30, –80, …
g) 1, 3, 6, 8, 16, 18, 36, …

Corresponde a la sucesión a).

1 **Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las sucesiones de arriba y añade tres términos más a cada una.**

a) Criterio: cada término se obtiene sumando 4 al anterior.

21, 25, 29, …

b) Criterio: los términos son los cuadrados de los números naturales.

49, 64, 81, …

c) Criterio: cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2, o bien, son las sucesivas potencias de 2: 2^1, 2^2, 2^3, …

128, 256, 512, …

d) Criterio: cada término se obtiene multiplicando el anterior por –3.

729, –2 187, 6 561, …

e) Criterio: cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

13, 21, 34, …

f) Criterio: cada término se obtiene restando 50 al anterior.

–130, –180, –230, …

g) Criterio: los términos pares se obtienen sumando 2 al anterior, y los términos impares se obtienen multiplicando el anterior por 2.

38, 76, 78, …

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

2 **Forma cinco sucesiones con criterios similares a los anteriores. En algún caso, invéntate el criterio.**

Respuesta abierta.

Ejemplo:

a) Criterio: obtenemos cada término multiplicando el anterior por –2.

3, –6, 12, –24, 48, …

b) Criterio: obtenemos cada término sumando 1,5 al término anterior.

1; 2,5; 4; 5,5; 7; 8,5; …

c) Criterio: obtenemos los términos pares multiplicando el anterior por –3, y los impares, sumando –3 al anterior.

1, –3, –6, 18, 15, –45, –48, …

d) Criterio: los términos son los cubos de los números naturales.

1, 8, 27, 64, 125, 216, …

e) Criterio: obtenemos cada término restando 8 del anterior.

100, 92, 84, 76, 68, 60, …

3 **Indica cuál es la relación** $\frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_2} = \ldots$ **de la sucesión c) de arriba.**

La relación es 2.

4 **Establece la relación (cociente) entre cada dos términos consecutivos de la sucesión d) que aparece arriba.**

La relación es –3.

PÁGINA 61

6 **Escribe los cinco primeros términos de:**

$$g_n = n^3 \qquad h_n = n^2 - 3n + 7 \qquad i_n = \frac{n-3}{n+4}$$

g_n: 1, 8, 27, 64, 125, …

h_n: 5, 5, 7, 11, 17, …

i_n: $\frac{-2}{5}, \frac{-1}{6}, 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{9}, \ldots$

7 **Forma una sucesión recurrente con estos datos:**

$$j_1 = 2 \qquad j_2 = 3 \qquad j_n = j_{n-2} + j_{n-1}$$

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

8 **Inventa otras dos sucesiones recurrentes con datos distintos a los anteriores.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $a_1 = 3, \; a_2 = 5, \; a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$

Sucesión: 3, 5, 13, 31, 75, 181, …

b) $b_1 = 1, \; b_2 = 3, \; b_n = b_{n-1} + (b_{n-2})^2$

Sucesión: 1, 3, 4, 13, 29, 198, 1 039, …

9 **Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones que tienen por término general:**

a) $a_n = 3 + 5(n-1)$

b) $b_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $c_n = (n-1)(n-2)$

d) $d_n = n^2 - n$

a) 3, 8, 13, 18, …

b) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$

c) 0, 0, 2, 6, …

d) 0, 2, 6, 12, …

10 **Descubre la ley de recurrencia y añade un nuevo término a cada una de las siguientes sucesiones:**

a) 1, –4, 5, –9, 14, –23, … (Diferencia)

b) 1, 2, 3, 6, 11, 20, … (Relaciona cada elemento con los tres anteriores)

c) 1; 2; 1,5; 1,75; … (Semisuma)

d) 1, 2, 2, 1, 1/2, 1/2, 1, … (Cociente)

a) Nuevo término: 37

Ley de recurrencia: $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

b) Nuevo término: 37

Ley de recurrencia: $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$

c) Nuevo término: 1,625

Ley de recurrencia: $c_n = \dfrac{c_{n-1} + c_{n-2}}{2}$

d) Nuevo término: 2

Ley de recurrencia: $d_n = \dfrac{d_{n-1}}{d_{n-2}}$

11 **Construye una sucesión cuya ley de recurrencia sea $a_n = a_{n-1} + n$. (Dale al primer término el valor que quieras).**

Respuesta abierta.

Ejemplo: 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, …

12 **a) Comprueba que el término general de la sucesión –1, 1, –1, 1, –1, 1, … es $s_n = (-1)^n$.**

b) Halla el término general de estas sucesiones:

$a_n \to 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

$b_n \to 1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$

a) $s_1 = (-1)^1 = -1$

$s_2 = (-1)^2 = 1$

$s_3 = (-1)^3 = -1$

$s_4 = (-1)^4 = 1$

Los términos s_n con n par son 1, y cuando n es impar son iguales a –1. Coincide con los términos de la sucesión descrita.

b) $a_n = (-1)^{n+1}$

$b_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 62

Con calculadora

Añade cuatro términos a cada una de estas sucesiones. Si decimos que en a) la diferencia es 3, ¿cuál será la diferencia en las demás?

a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, … **b) 120, 140, 160, 180, 200, 220, …**

c) 9, 7, 5, 3, 1, –1, –3, –5, … **d) 5,83; 5,87; 5,91; 5,95; 5,99; 6,03; …**

a) 20, 23, 26, 29, … diferencia: 3

b) 240, 260, 280, 300, … diferencia: 20

c) –7, –9, –11, –13, … diferencia: –2

d) 6,07; 7,11; 6,15; 6,19; … diferencia: 0,04

1 **El primer término de una progresión aritmética es $s_1 = 5$ y la diferencia es $d = 2,5$. Escribe sus diez primeros términos.**

Haz lo mismo para otra cuyo primer término es $t_1 = 20$ y cuya diferencia es $d = -3$.

Progresión s_n: 5; 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5; 25; 27,5; …

Progresión t_n: 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, –1, –4, –7, …

2 **Calcula, para las progresiones de arriba:**

$$b_{36} \qquad c_{31} \qquad d_{1000}$$

b) $b_1 = 120$ y $d = 20 \rightarrow b_n = b_1 + (n-1) \cdot d = 120 + (n-1) \cdot 20 =$

$= 120 + 20n - 20 = 100 + 20n$

Así: $b_{36} = 100 + 20 \cdot 36 = 820$

c) $c_1 = 9$ y $d = -2 \rightarrow c_n = 9 + (n-1) \cdot (-2) = 9 - 2n + 2 = 11 - 2n$

Así: $c_{31} = 11 - 2 \cdot 31 = -51$

d) $d_1 = 5,83$ y $d = 0,04 \rightarrow d_n = 5,83 + (n-1) \cdot 0,04 = 5,83 + 0,04n - 0,04 =$

$= 5,79 + 0,04n$

Así: $d_{1\,000} = 5,79 + 0,04 \cdot 1\,000 = 45,79$

3 **Halla el término general de las progresiones b), c) y d). (Intenta hacerlo sin aplicar la fórmula, simplemente razonando).**

$b_n = 100 + 20 \cdot n$ $\qquad c_n = 11 - 2 \cdot n$ $\qquad d_n = 5,79 + 0,04 \cdot n$

4 **a) Si dos términos de una progresión son:**

$$s_1 = 6 \text{ y } s_3 = 9$$

averigua el valor de la diferencia, d.

b) Halla el término general de la progresión, s_n.

a) $d = 1,5$

b) $s_n = 6 + 1,5\,(n-1) = 6 + 1,5n - 1,5 = 4,5 + 1,5n$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 63

5 **Halla la suma de todos los números impares menores que 100.**

El término general de los números impares es $a_n = 2n - 1$. El último impar menor que 100 es 99, que resulta ser a_{50}. Así, la suma es:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2} = 2\,500$$

6 **a) Si $a_1 = 5$ y $a_2 = 7$, calcula a_{40} y S_{40}.**

b) Si $b_1 = 5$ y $b_2 = 12$, calcula S_{32}.

a) $a_1 = 5$ y $d = 2 \;\rightarrow\; a_n = 5 + (n - 1) \cdot 2 = 3 + 2n$

Luego: $a_{40} = 3 + 2 \cdot 40 = 83$ y $S_{40} = \dfrac{(5 + 83) \cdot 40}{2} = 1\,760$

b) $b_1 = 5$ y $d = 7 \;\rightarrow\; b_n = 5 + (n - 1) \cdot 7 = -2 + 7n$

Así: $b_{32} = -2 + 7 \cdot 32 = 222$

Luego: $S_{32} = \dfrac{(5 + 222) \cdot 32}{2} = 3\,632$

7 **Si el primer término de una progresión es $c_1 = 17$ y el quinto es $c_5 = 9$, halla la suma S_{20}.**

Como $c_1 = 17$ y $c_5 = 9 \;\rightarrow\; c_1 = 17$ y $d = -2$

Así: $c_n = 17 + (n - 1)(-2) = 19 - 2n$; $c_{20} = 19 - 2 \cdot 20 = -21$

Luego: $S_{20} = \dfrac{(17 - 21) \cdot 20}{2} = -40$

8 **Los primeros términos de una progresión aritmética son $a_1 = 4$, $a_2 = 7$. Halla esta suma:**

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{19} + a_{20}$$

Como $a_1 = 4$ y $a_5 = 7$, tenemos que la diferencia de esta progresión es $d = 3$.

Nos piden la suma de los términos del décimo al vigésimo. Lo que vamos a hacer es calcular S_{20} y restarle S_9:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + 19 \cdot 3) \cdot 20}{2} = \frac{(4 + 4 + 57) \cdot 20}{2} = 650$$

$$S_9 = \frac{(4 + 4 + 8 \cdot 3) \cdot 9}{2} = 144$$

Por tanto, la suma pedida es:

$650 - 144 = 506$

3 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 65

1 **Construye una progresión geométrica cuyo primer término es 125 y cuya razón es 0,4.**

125; 50; 20; 8; 3,2; 1,28; 0,512; …

2 **De una progresión geométrica conocemos $a_1 = 0{,}625$ y $a_3 = 0{,}9$. Halla r y los seis primeros términos.**

$0{,}9 = 0{,}625r^2 \ \rightarrow \ r^2 = 1{,}44 \ \rightarrow \ r = \pm 1{,}2$

Por tanto, hay dos progresiones:

- $r = 1{,}2$

  0,625; 0,75; 0,9; 1,08; 1,296; 1,5552; …

- $r = -1{,}2$

  0,625; –0,75; 0,9; –1,08; 1,296; –1,5552; …

3 **En una progresión geométrica de términos positivos, $a_1 = 2$ y $a_3 = 6$. Halla a_n, a_{11} y a_{12}.**

$6 = 2 \cdot r^2 \ \rightarrow \ r^2 = 3 \ \rightarrow \ r = \pm\sqrt{3}$

Como es una progresión de términos positivos, la razón también lo es.

$r = \sqrt{3}$

$a_n = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$

$a_{11} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{10} = 2 \cdot 3^5 = 486$

$a_{12} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{11} = 2 \cdot 3^5 \cdot \sqrt{3} = 486\sqrt{3}$

4 **En una progresión geométrica, el primer término es $a_1 = 5$ y la razón es $r = 1{,}4$. Averigua, con ayuda de la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es inferior a 1 000 000.**

$$\left.\begin{array}{l} a_{37} = 911\,127{,}781 \\ a_{38} = 1\,275\,578{,}893 \end{array}\right\} \ \rightarrow \ \text{Es } a_{37}.$$

5 **En una progresión geométrica, $a_1 = 1\,000$ y $r = 0{,}8$. Averigua, con la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es mayor que 1.**

$$\left.\begin{array}{l} a_{31} = 1{,}237 \\ a_{32} = 0{,}99 \end{array}\right\} \ \rightarrow \ \text{Es } a_{31}.$$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 66

6 **Siguiendo el procedimiento utilizado para hallar S_n, calcula:**

$$\mathbf{3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384}$$

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 = \frac{3 \cdot 2^8 - 3}{2 - 1} = 765$$

7 **¿Cuántos denarios se llevó, en total, el centurión del problema resuelto 4 de la página anterior?**

$$S_{16} = \frac{1 \cdot 2^{16} - 1}{2 - 1} = 65\,535 \text{ denarios}$$

8 **Calcula la suma de los diez primeros términos de una progresión geométrica que cumpla $a_1 = 8{,}192$ y $r = 2{,}5$.**

$$S_{10} = \frac{8{,}192 \cdot 2{,}5^{10} - 8{,}192}{2{,}5 - 1} = 52\,077{,}872$$

9 **Efectúa la suma $1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^7$.**

$$1 + 3 + 9 + \dots + 3^7 = \frac{1 \cdot 3^8 - 1}{3 - 1} = 3\,280$$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 67

10 **En una progresión geométrica, $a_1 = 8$ y $r = 0{,}75$. Calcula la suma de sus infinitos términos.**

$$S_\infty = \frac{8}{1 - 0{,}75} = \frac{8}{0{,}25} = 32$$

11 **En una progresión geométrica, $a_1 = 30$ y $r = -0{,}2$. Calcula la suma de "todos" sus términos.**

$$S_\infty = \frac{30}{1 - (-0{,}2)} = \frac{30}{1{,}2} = 25$$

12 **En una progresión geométrica, su cuarto término es $a_4 = 10$ y el sexto es $a_6 = 0{,}4$. Halla: la razón, r; el primer término, a_1; el octavo término, a_8; la suma de los ocho primeros términos, S_8; y la suma de sus infinitos términos, S_∞.**

$a_6 = a_4 \cdot r^2 \;\to\; 0{,}4 = 10 \cdot r^2 \;\to\; r^2 = 0{,}04 \;\to\; r = \pm 0{,}2$

$r = 0{,}2 \;\to\; 10 = a_1 \cdot 0{,}2^3 \;\to\; 10 = a_1 \cdot 0{,}008 \;\to\; a_1 = 1\,250$

$a_8 = a_1 \cdot 0{,}2^7 \;\to\; a_8 = 1\,250 \cdot 0{,}2^7 \;\to\; a_8 = 0{,}016$

$$S_8 = \frac{1\,250 - 1\,250 \cdot 0{,}2^8}{1 - 0{,}2} = 1\,562{,}496$$

$$S_\infty = \frac{1\,250}{1 - 0{,}2} = 1\,562{,}5$$

$r = -0{,}2 \;\to\; 10 = a_1 \cdot (-0{,}2)^3 \;\to\; a_1 = -1\,250$

$a_8 = -1\,250 \cdot (-0{,}2)^7 = 0{,}016$

$$S_8 = \frac{-1\,250 - (-1\,250) \cdot (-0{,}2)^8}{1 - 0{,}2} = -1\,041{,}664$$

$$S_\infty = \frac{-1\,250}{1 - (-0{,}2)} = \frac{-1\,250}{1{,}2} = 1\,041{,}\widehat{6}$$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 68

Practica

Sucesiones: formación, término general

1 ▼▽▽ **Escribe los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:**

a) Cada término se obtiene sumando 7 al anterior. El primero es –10.

b) El primer término es 0,1. Los demás se obtienen multiplicando el anterior por 2.

c) El primero es 2; el segundo, 4, y los siguientes, la semisuma de los dos anteriores.

a) –10, –3, 4, 11, 18, …

b) 0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 1,6; …

c) 2; 4; 3; 3,5; 3,25; …

2 ▼▽▽ **Escribe los términos a_{10} y a_{25} de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = 3n - 1$

b) $b_n = \dfrac{n^2+1}{2}$

c) $c_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$

d) $d_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{10}$

e) $e_n = n(n-1)$

f) $f_n = \dfrac{n-2}{n+2}$

a) $\begin{cases} a_{10} = 29 \\ a_{25} = 74 \end{cases}$

b) $\begin{cases} b_{10} = \dfrac{101}{2} = 50{,}5 \\ b_{25} = \dfrac{624}{2} = 312 \end{cases}$

c) $\begin{cases} c_{10} = 1 + \dfrac{1}{10} = \dfrac{11}{10} \\ c_{25} = -1 + \dfrac{1}{25} = -\dfrac{24}{25} \end{cases}$

d) $\begin{cases} d_{10} = 1{,}1 \\ d_{25} = 0{,}9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} e_{10} = 10 \cdot 9 = 90 \\ e_{25} = 25 \cdot 24 = 600 \end{cases}$

f) $\begin{cases} f_{10} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \\ f_{25} = \dfrac{23}{27} \end{cases}$

3 ▼▽▽ **Escribe los cinco primeros términos de la siguiente sucesión:**

$$a_1 = 1 \qquad a_n = 2a_{n-1} + 3$$

1, 5, 13, 29, 61, …

4 ▼▽▽ **Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las siguientes sucesiones:**

a) 11, 9, 7, 5, …

b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dots$

c) 2,5; 2,9; 3,3; 3,7; …

d) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dots$

e) 8, 12, 18, 27, …

f) 0, 3, 8, 15, …

a) Restando 2 unidades al término anterior: $a_n = 11 - (n-1)2 = 13 - 2n$

b) Multiplicando por $\dfrac{1}{2}$ el término anterior: $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

c) Sumando 0,4 al término anterior: $a_n = 2{,}5 + (n - 1) \cdot 0{,}4 = 2{,}1 + 0{,}4n$

d) Dividiendo 1 por n, lugar que ocupa el término: $a_n = \dfrac{1}{n}$

e) Multiplicando por 1,5 el término anterior: $a_n = 8 \cdot 1{,}5^{n-1}$

f) Restando 1 a los cuadrados de los números naturales: $a_n = n^2 - 1$

5 ▼▼▽ **Halla el término general de estas sucesiones:**

a) 12, 14, 16, 18, …

b) $\mathbf{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots}$

c) 1, 3, 9, 27, …

d) 1 · 2, 2 · 3, 3 · 4, 4 · 5, …

a) $a_n = 10 + 2n$

b) $a_n = \dfrac{n}{n + 1}$

c) $a_n = 3^{n-1}$

d) $a_n = n \cdot (n + 1)$

6 ▼▼▽ **Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:**

a) 8, 10, 2, –8, –10, …

b) $\mathbf{3, 2, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dots}$

a) $a_1 = 8 \quad a_2 = 10 \quad a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

b) $a_1 = 3 \quad a_2 = 2 \quad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$

Progresiones aritméticas

7 ▼▽▽ **Escribe los cinco primeros términos y a_{20} de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) $\mathbf{a_1 = 1{,}5;\ d = 2}$

b) $\mathbf{a_1 = 32;\ d = -5}$

c) $\mathbf{a_1 = 5;\ d = 0{,}5}$

d) $\mathbf{a_1 = -3;\ d = -4}$

a) 1,5; 3,5; 5,5; 7,5; 9,5; $a_{20} = 1{,}5 + 19 \cdot 2 = 39{,}5$

b) 32, 27, 22, 17, 12; $a_{20} = 32 + 19 \cdot (-5) = -63$

c) 5; 5,5; 6; 6,5; 7; $a_{20} = 5 + 19 \cdot 0{,}5 = 14{,}5$

d) –3, –7, –11, –15, –19; $a_{20} = -3 + 19 \cdot (-4) = -79$

8 ▼▽▽ **Halla, en cada caso, el término general y calcula, después, a_{50}:**

a) 25, 18, 11, 4, …

b) –13, –11, –9, –7, …

c) 1,4; 1,9; 2,4; 2,9; …

d) –3, –8, –13, –18, …

a) $a_1 = 25;\ d = -7;\ a_n = 25 + (n - 1)(-7) = 32 - 7n;\ a_{50} = -318$

b) $a_1 = -13;\ d = 2;\ a_n = -13 + (n - 1)2 = -15 + 2n;\ a_{50} = 85$

c) $a_1 = 1{,}4;\ d = 0{,}5;\ a_n = 1{,}4 + (n - 1)0{,}5 = 0{,}9 + 0{,}5n;\ a_{50} = 25{,}9$

d) $a_1 = -3;\ d = -5;\ a_n = -3 + (n - 1)(-5) = 2 - 5n;\ a_{50} = -248$

9 ▼▽▽ **Calcula la suma de los veinte primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) $a_1 = 5;\ d = 2$ **b)** $a_1 = -1;\ a_2 = -7$

c) Los números pares. **d) Los múltiplos de 3.**

a) $a_{20} = 5 + 19 \cdot 2 = 43;\quad S_{20} = \dfrac{(5 + 43) \cdot 20}{2} = 480$

b) $d = -7 - (-1) = -6;\ a_{20} = -1 + 19 \cdot (-6) = -115;\ S_{20} = \dfrac{[-1 + (-115)] \cdot 20}{2} = -1\,160$

c) $d = 2,\ a_1 = 2,\ a_{20} = 2 + 19 \cdot 2 = 40;\quad S_{20} = \dfrac{(2 + 40) \cdot 20}{2} = 420$

d) $a_1 = 3,\ d = 3,\ a_{20} = 3 + 19 \cdot 3 = 60;\quad S_{20} = \dfrac{(3 + 60) \cdot 20}{2} = 630$

Progresiones geométricas

10 ▼▽▽ **Escribe los cinco primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:**

a) $a_1 = 0{,}3;\ r = 2$ **b)** $a_1 = -3;\ r = \dfrac{1}{2}$

c) $a_1 = 200;\ r = -0{,}1$ **d)** $a_1 = \dfrac{1}{81};\ r = 3$

a) 0,3; 0,6; 1,2; 2,4; 4,8; … b) $-3, -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{4}, -\dfrac{3}{8}, -\dfrac{3}{16}, \dots$

c) 200; –20; 2; –0,2; 0,02; … d) $\dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{3}, 1, \dots$

11 ▼▽▽ **Halla, en cada una de las sucesiones siguientes, el término general:**

a) 20; 8; 3,2; 1,28; … **b) 40, 20, 10, 5, …**

c) 6; –9; 13,5; –20,25; … **d) 0,48; 4,8; 48; 480; …**

a) $a_n = 20 \cdot 0{,}4^{n-1}$ b) $a_n = 40 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $a_n = 6 \cdot (-1{,}5)^{n-1}$ d) $a_n = 0{,}48 \cdot 10^{n-1}$

12 ▼▽▽ **Calcula la suma de los diez primeros términos de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $a_1 = 5;\ r = 1{,}2$ **b)** $a_1 = 5;\ r = -2$

a) $S_{10} = \dfrac{5 \cdot 1{,}2^{10} - 5}{1{,}2 - 1} = 129{,}8$ b) $S_{10} = \dfrac{5 \cdot (-2)^{10} - 5}{-2 - 1} = -1\,705$

13 ▼▽▽ **Halla la suma de los infinitos términos de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $a_1 = 4;\ r = \dfrac{1}{3}$ **b)** $a_1 = 17;\ r = 0{,}95$

a) $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{4}{1 - (1/3)} = 6$ b) $S_\infty = \dfrac{17}{1 - 0{,}95} = 340$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 69

Aplica lo aprendido

14 ▼▽▽ **Identifica las progresiones aritméticas, las geométricas y las que no son progresiones. Obtén el término general de cada una:**

a) $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \dots$

b) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$

c) 0,2; 0,02; 0,002; …

d) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$

a) Progresión aritmética, $d = \frac{1}{8}$. Término general: $a_n = 1 + (n-1)\,\frac{1}{8} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8}n$

b) No es progresión. Término general: $a_n = \sqrt{n}$

c) Progresión geométrica, $r = 0{,}1$.

Término general: $a_n = 0{,}2 \cdot (0{,}1)^{n-1}$

d) No es progresión.

Los numeradores 2, 3, 4, 5, … forman una progresión aritmética cuyo término general es $n + 1$.

Los denominadores 1, 2, 3, 4, … forman una progresión aritmética de término general n.

Término general de la sucesión: $a_n = \dfrac{n+1}{n}$

15 ▼▽▽ **Halla el primer término y el término general de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) $d = 5$; $a_8 = 37$

b) $a_{11} = 17$; $d = 2$

☞ ***Recuerda que*** $a_8 = a_1 + 7d$***; sustituye y halla*** a_1.

a) $a_8 = a_1 + 7d \;\rightarrow\; 37 = a_1 + 7 \cdot 5 \;\rightarrow\; a_1 = 2$

$a_n = 2 + (n-1) \cdot 5 = -3 + 5n$

b) $a_{11} = a_1 + 10d \;\rightarrow\; 17 = a_1 + 10 \cdot 2 \;\rightarrow\; a_1 = -3$

$a_n = -3 + (n-1)2 \;\rightarrow\; a_n = -5 + 2n$

16 ▼▽▽ **Halla la diferencia y el primer término de las progresiones aritméticas siguientes:**

a) $a_2 = 18$; $a_7 = -17$

b) $a_4 = 15$; $a_{12} = 39$

☞ ***Ten en cuenta que*** $a_7 = a_2 + 5d$.

a) $a_7 = a_2 + 5d \;\rightarrow\; -17 = 18 + 5d \;\rightarrow\; d = -7$

$a_1 = a_2 - d \;\rightarrow\; a_1 = 18 - (-7) = 25$

b) $a_{12} = a_4 + 8d \;\rightarrow\; 39 = 15 + 8d \;\rightarrow\; d = 3$

$a_4 = a_1 + 3d \;\rightarrow\; 15 = a_1 + 9 \;\rightarrow\; a_1 = 6$

17 ▼▼▽ **¿Qué lugar ocupa un término cuyo valor es 56 en la progresión aritmética definida por $a_1 = 8$ y $d = 3$?**

$56 = 8 + (n - 1) \cdot 3 \rightarrow 56 = 5 + 3n \rightarrow n = 17$

18 ▼▽▽ **Calcula la razón y el primer término de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $a_5 = \dfrac{1}{81};\ a_3 = \dfrac{1}{9}$ **b)** $a_2 = 0{,}6;\ a_4 = 2{,}4$

a) $a_5 = a_3 \cdot r^2 \rightarrow \dfrac{1}{81} = \dfrac{1}{9} \cdot r^2 \rightarrow r^2 = \dfrac{1}{9} \rightarrow r = \pm\dfrac{1}{3}$

Hay dos soluciones:

Si $r = \dfrac{1}{3}$: $a_1 = 1$

Si $r = -\dfrac{1}{3}$: $a_1 = 1$

b) $a_4 = a_2 \cdot r^2 \rightarrow 2{,}4 = 0{,}6 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm 2$

Hay dos soluciones:

Si $r = 2$: 0,3; 0,6; 1,2; 2,4; 4,8; …

Si $r = -2$: –0,3; 0,6; –1,2; 2,4; –4,8; …

19 ▼▽▽ **Halla el primer término y escribe el término general de las siguientes progresiones:**

a) $a_3 = 3;\ r = \dfrac{1}{10}$ **b)** $a_4 = 20{,}25;\ r = -1{,}5$

a) $a_3 = a_1 r^2 \rightarrow 3 = a_1\left(\dfrac{1}{10}\right)^2 \rightarrow a_1 = 300;\ a_n = 300\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$

b) $a_4 = a_1 r^3 \rightarrow 20{,}25 = a_1\,(-1{,}5)^3 \rightarrow a_1 = -6;\ a_n = -6 \cdot (-1{,}5)^{n-1}$

20 ▼▼▽ **Calcula la suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1\,000$ y $a_4 = 8$. ¿Se puede hallar la suma de sus infinitos términos?**

$a_4 = a_1 r^3 \rightarrow 8 = 1\,000 \cdot r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{8}{1\,000}} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

$$S_5 = \frac{a_1 r^5 - a_1}{r - 1} = \frac{1\,000 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 - 1\,000}{\frac{1}{5} - 1} = 1\,249{,}6$$

Se puede hallar la suma de sus infinitos términos, porque la razón está comprendida entre –1 y 1.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{1\,000}{1 - 1/5} = 1\,250$$

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

21 ▼▼▽ **Calcula las siguientes sumas:**

a) $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$.

b) Los números pares menores que 1 000.

c) Los números impares menores que 1 000.

a) Tenemos una progresión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = 2$. Nos piden calcular S_{10}:

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1} = \frac{2 \cdot 2^{10} - 2}{2 - 1} = \frac{2^{11} - 2}{1} = 2\,046$$

b) Los números pares forman una progresión aritmética con $a_1 = 2$ y $d = 2$.

Para sumar los números pares menores que 1 000, hay que calcular S_{499}, pues:

$$a_n = 2n \;\rightarrow\; 998 = 2 \cdot 499$$

Por tanto:

$$S_{499} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(2 + 998) \cdot 499}{2} = 249\,500$$

c) Para los impares:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{array}\right\} a_n = 2n - 1$$

Así, tenemos que calcular S_{500}, pues:

$$999 = 2n - 1 \;\rightarrow\; n = 500$$

$$S_{500} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(1 + 999) \cdot 500}{2} = 250\,000$$

Resuelve problemas

22 ▼▼▽ **En un teatro, la primera fila dista del escenario 4,5 m, y la octava, 9,75 m.**

a) ¿Cuál es la distancia entre dos filas?

b) ¿A qué distancia del escenario está la fila 17?

a) $a_8 = a_1 + 7d \;\rightarrow\; 9{,}75 = 4{,}5 + 7d \;\rightarrow\; d = 0{,}75$ m

La distancia entre dos filas es 0,75 m.

b) $a_{17} = a_1 + 16 \cdot d = 4{,}5 + 16 \cdot 0{,}75 = 16{,}5$ m está la fila 17.

23 ▼▼▽ **Para preparar una carrera, un deportista comienza corriendo 3 km y aumenta 1,5 km su re-corrido cada día. ¿Cuántos días tiene que entrenar para llegar a hacer un recorrido de 15 km?**

$a_n = a_1 + (n - 1)d \;\rightarrow\; 15 = 3 + (n - 1) \cdot 1{,}5 \;\rightarrow\; 15 = 1{,}5 + 1{,}5n$

$n = 9$ días

24 ▼▼▽ **En el año 1986 fue visto el cometa *Halley* desde la Tierra, a la que se acerca cada 76 años. Esta era la cuarta vez que nos visitaba desde que el astrónomo Halley lo descubrió.**

a) ¿En qué año fue descubierto?

b) ¿Cuándo será visto en el siglo XXI?

a) $a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 1986 = a_1 + 3 \cdot 76 \rightarrow a_1 = 1758$. Fue descubierto en 1758.

b) $a_5 = 1986 + 76 = 2062$. Se verá en 2062.

25 ▼▼▽ **La dosis de un medicamento es 100 mg el primer día y 5 mg menos cada uno de los siguientes. El tratamiento dura 12 días. ¿Cuántos miligramos tiene que tomar el enfermo durante todo el tratamiento?**

$a_{12} = a_1 + 11d \rightarrow a_{12} = 100 + 11 \cdot (-5) = 45$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(100 + 45) \cdot 12}{2} = 870 \text{ mg}$$

26 ▼▼▽ **Un tipo de bacteria se reproduce por bipartición cada cuarto de hora. ¿Cuántas bacterias habrá después de 6 horas?**

La reproducción de las bacterias es una progresión geométrica de $r = 2$. Término general: $a_n = 2^{n-1}$.

Como $6 \cdot 4 = 24$ cuartos de hora, calculamos $a_{24} = 2^{24-1}$:

$a_{24} = 8\,388\,608$ bacterias habrá después de 6 horas.

27 ▼▼▽ **La población de un cierto país aumenta por término medio un 2,5% anual. Si la población actual es de 3 millones, ¿cuál será dentro de 10 años?**

$a_{10} = 3 \cdot 1{,}025^9 = 3\,746\,589$ dentro de 10 años.

28 ▼▼▽ **Una máquina envasadora pierde cada año un 15% de su valor. Si ha costado 20 000 €, ¿cuál será su valor dentro de 5 años?**

$a_5 = a_1 \cdot r^4 \rightarrow a_5 = 20\,000 \cdot (1 - 0{,}15)^4 = 10\,440$ € será su valor dentro de 5 años.

29 ▼▼▽ **Una bola que rueda por un plano inclinado recorre 1 m durante el primer segundo, 4 m durante el segundo, 7 m durante el tercero, y así durante 10 segundos. ¿Qué distancia ha recorrido en total?**

1, 4, 7, … es una progresión aritmética con $d = 3$.

$a_{10} = a_1 + 9 \cdot 3 \rightarrow a_{10} = 1 + 9 \cdot 3 = 28$ m recorre en 10 s.

30 ▼▼▽ **Calcula el número de bloques necesarios para construir una torre como la de la figura de la página 60, pero que tenga 50 pisos.**

Los bloques de la torre están en progresión aritmética con $d = 4$: 1, 5, 9, 13, …

Hay que calcular la suma de 50 términos:

$a_{50} = a_1 + 49d \rightarrow a_{50} = 1 + 49 \cdot 4 = 197$

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(1 + 197) \cdot 50}{2} = 4\,950 \text{ bloques.}$$

PÁGINA 70

31 ▼▼▽ **Una pelota cae desde una cierta altura y rebota ascendiendo los 3/4 de la altura anterior. Después de dar en el suelo por tercera vez, alcanza 54 cm. ¿Desde qué altura se dejó caer? Calcula la distancia recorrida hasta que se para.**

Tenemos una progresión geométrica de la que conocemos su razón, $r = \frac{3}{4}$.

Nos piden su primer término, sabiendo que $a_3 = 54$.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow 54 = a_1\left(\frac{3}{4}\right)^2 \rightarrow a_1 = 96$$

La pelota se lanza desde 96 cm de altura.

Ahora nos piden la suma de las distancias; es decir, S_∞:

$$S_\infty = \frac{96}{1 - 3/4} = 384 \text{ cm}$$

32 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno.

33 ▼▼▽ **Calcula la fracción generatriz de estos números utilizando el método del ejercicio anterior:**

a) $7,\hat{3}$ **b)** $3,5\hat{4}$ **c)** $0,\widehat{23}$

a) $7,\hat{3} = 7,3333\ldots = 7 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots$

Suma de los infinitos términos de la progresión $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1\,000} \ldots$

$$S_\infty = \frac{3/10}{1 - 1/10} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$7,\hat{3} = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$$

b) $3,5\hat{4} = 3,54444\ldots = 3,5 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 + \ldots =$

$$= \frac{35}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \ldots$$

$$S_\infty = \frac{4/100}{1 - 1/10} = \frac{40}{900} = \frac{2}{45}$$

$$3,5\hat{4} = \frac{35}{10} + \frac{2}{45} = \frac{319}{90}$$

c) $0,\widehat{23} = 0,23232323\ldots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \frac{3}{1\,000\,000} + \ldots$

$$S_\infty = \frac{23/100}{1 - 1/10} = \frac{23}{99}$$

$$0,\widehat{23} = \frac{23}{99}$$

34 ▼▼▽ **Las edades de 5 hermanos están en progresión aritmética y suman 35 años. El mayor tiene 13 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?**

Sabemos que $S_5 = 35$ y que $a_5 = 13$.

$$S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} \rightarrow 35 = \frac{a_1 + 13}{2} \cdot 5 \rightarrow a_1 + 13 = 14 \rightarrow a_1 = 1$$

Además:

$$a_5 = a_1 + 4 \cdot d \rightarrow 13 = 1 + 4d \rightarrow d = 3$$

Por tanto, las edades de los hermanos son 1, 4, 7, 10 y 13 años.

35 ▼▼▽ **Una rana da saltos en línea recta hacia delante, y cada vez salta los 2/3 del salto anterior. Quiere atravesar una charca circular de 5 m de radio, recorriendo su diámetro. Su primer salto es de 2 m. ¿Pasará por el centro de la charca? ¿Llegará al otro lado de la charca?**

Los saltos forman una progresión geométrica, con $a_1 = 2$ y $r = \frac{2}{3}$.

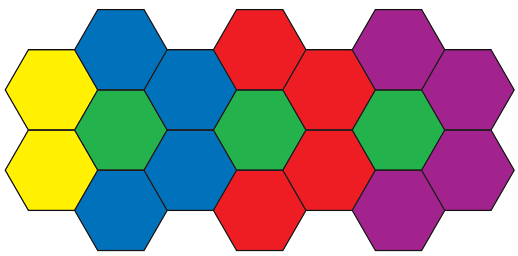
Si la rana salta infinitamente, en total recorrería:

$$S_\infty = \frac{2}{1 - 2/3} = 6 \text{ m}$$

Por tanto, sí pasaría del centro de la charca (5 m), pero no llegará nunca al otro lado (19 m).

36 ▼▼▽ **Para adornar un paseo se colocan a lo largo de su línea central una fila de jardineras hexagonales, rodeadas de baldosas de la misma forma, como muestra la figura. ¿Cuántas baldosas se necesitarán para poner 25 jardineras?**

Veamos un dibujo:



Así, es fácil entender que hacen falta:

— Para 1 jardinera, $1 \cdot 4 + 2$ baldosas.

— Para 2 jardineras, $2 \cdot 4 + 2$ baldosas.

— Para 3 jardineras, $3 \cdot 4 + 2$ baldosas.

— Para n jardineras, $n \cdot 4 + 2$ baldosas.

Es una progresión aritmética con $a_1 = 6$ y $d = 4$, ya que:

$$a_n = 6 + (n - 1)4 = 4n + 2$$

Por tanto, para 25 jardineras hacen falta:

$$a_{25} = 4 \cdot 25 + 2 = 102 \text{ baldosas.}$$

Interés compuesto

37 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno.

38 ▼▼▽ **Depositamos 6 000 € al 5% anual, al comienzo de un cierto año. Averigua el capital disponible al final de cada año, durante 6 años.**

Se trata de una progresión geométrica, donde $a_1 = 6\,000$ y $r = 1,05$. Nos están preguntando por a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 y a_7.

Su término general es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 6\,000 \cdot 1,05^{n-1}$$

Por tanto:

$$a_2 = 6\,000 \cdot 1,05 = 6\,300 \text{ €}$$

$$a_3 = 6\,000 \cdot 1,05^2 = 6\,615 \text{ €}$$

$$a_4 = 6\,945,75 \text{ €}$$

$$a_5 = 7\,293,04 \text{ €}$$

$$a_6 = 7\,657,69 \text{ €}$$

$$a_7 = 8\,040,57 \text{ €}$$

39 ▼▼▽ **Depositamos en un banco 1 000 € al 2,5% semestral al comienzo de un cierto año. Averigua el capital disponible al final de cada semestre, durante 3 años, si no sacamos ningún dinero.**

Es una progresión geométrica de razón $\left(1 + \frac{2,5}{100}\right) = 1,025$.

3 años son 6 semestres. Sus términos son:

$1\,000 \cdot 1,025$; $1\,000 \cdot 1,025^2$; $1\,000 \cdot 1,025^3$; $1\,000 \cdot 1,025^4$; $1\,000 \cdot 1,025^5$; $1\,000 \cdot 1,025^6$ $\rightarrow$ 1 025; 1 050,63; 1 076,89; 1 103,81; 1 131,41; 1 158,69

40 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno.

PÁGINA 71

41 ▼▼▽ **Al comienzo de cada año ingresamos 6 000 € al 5% anual. ¿De qué capital dispondremos al final del sexto año?**

1.er AÑO | 2.º AÑO | 3.er AÑO | 4.º AÑO | 5.º AÑO | 6.º AÑO

$6\,000 \longrightarrow 6\,000 \cdot 1{,}05^6$

$6\,000 \longrightarrow 6\,000 \cdot 1{,}05^5$

$6\,000 \longrightarrow 6\,000 \cdot 1{,}05^4$

$6\,000 \longrightarrow 6\,000 \cdot 1{,}05^3$

$6\,000 \longrightarrow 6\,000 \cdot 1{,}05^2$

$6\,000 \longrightarrow 6\,000 \cdot 1{,}05$

Los sumandos forman parte de una progresión geométrica de razón $r = 1{,}05$, con $a_1 = 6\,000 \cdot 1{,}05$. Lo que nos están pidiendo es S_6:

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{6\,000 \cdot 1{,}05^7 - 6\,000 \cdot 1{,}05}{0{,}05} = 42\,852{,}05\ €$$

Esta es la cifra que recibiremos al final del 6.º año.

42 ▼▼▽ **Una persona inicia un plan de pensiones ingresando, al principio de cada año, 3 000 € al 6% anual.**

¿Qué capital tendrá dentro de 10 años?

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 3\,000 \cdot 1{,}06$ y $r = 1{,}06$.

Lo que nos están pidiendo es S_{10}:

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{3\,000 \cdot 1{,}06^{11} - 3\,000 \cdot 1{,}06}{0{,}06} = 41\,914{,}93\ €$$

Problemas “+”

43 ▼▼▼ **Un comerciante recibe un pedido de 20 cajas de naranjas, 7 de clase extra y 13 de una calidad inferior. Quiere exponerlas al público formando una pirámide de base cuadrada con 12 naranjas de lado en la base, de forma que las naranjas visibles sean de la clase extra.**

Si en cada caja hay alrededor de 40 naranjas, ¿tendrá suficientes naranjas para ello?

El primer piso es un cuadrado de 12 naranjas de lado.

Las que se ven son: $12 \cdot 4 - 4 = 44$

En el 2.º piso se ven $11 \cdot 4 - 4 = 40$.

En el 3.er piso se ven $10 \cdot 4 - 4 = 36$.

Las naranjas visibles son $44 + 40 + 36 + \ldots + 4 + 1$.

Los 11 primeros pisos forman una progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 44 - (n - 1) \cdot 4 = 48 - 4n$ y cuya suma es:

$$S_{11} = \frac{44 + 4}{2} \cdot 11 = 264$$

Añadimos la que corona la pirámide y son 265 las naranjas visibles.

Las 7 cajas de naranjas extras contienen $7 \cdot 40 = 280$ naranjas, que son suficientes para la parte visible.

Las naranjas que no se ven son:

$$10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 385$$

Como tiene $13 \cdot 40 = 520$, también son suficientes.

44 ▼▼▼ **Un agricultor debe echar un cubo de agua a cada uno de los veinte árboles que hay en su huerto. Estos están alineados a distancias regulares de 6 m a lo largo de un camino, y la distancia del primer árbol a la fuente es de 12 m.**

a) Si cada vez lleva un cubo, ¿qué distancia habrá recorrido hasta regar los 20 árboles y dejar el cubo en su posición inicial, junto a la fuente?

b) ¿Y si llevara dos cubos en cada viaje?

a) Para regar el primero y dejar el cubo donde estaba, recorre 12 metros de ida y 12 metros de vuelta $\rightarrow a_1 = 24$.

Para regar el segundo y dejar el cubo en la fuente, recorre 36 metros $\rightarrow a_2 = 36$.

Para regar el tercero y dejar el cubo en la fuente, recorre 48 metros $\rightarrow a_3 = 48$.

…

Es una progresión aritmética con $d = 12$.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 24 + (n - 1) \cdot 12 = 24 + 12n - 12 = 12n + 12$

$a_n = 12n + 12$

$a_{20} = 12 \cdot 20 + 12 = 252$

En total recorrerá:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(24 + 252) \cdot 20}{2} = 2\,760 \text{ m}$$

b) Para regar los árboles 1.º y 2.º, recorre (dejando el cubo en la fuente) 36 m: $b_1 = 36$.

Para regar los árboles 3.º y 4.º, recorre 60 m $\rightarrow b_2 = 60$.

Es una progresión aritmética con $d = 24$.

$b_n = 36 + (n - 1) \cdot 24 = 36 + 24n - 24 = 24n + 12$

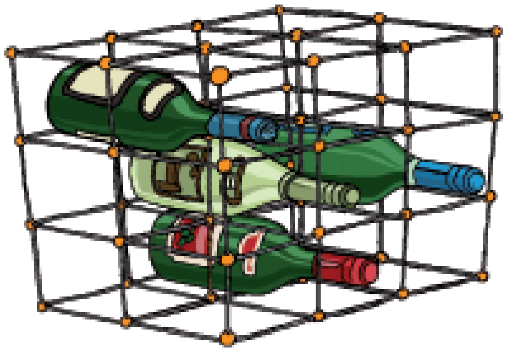
$b_{10} = 240 + 12 = 252$

En total recorrerá:

$$S_{10} = \frac{(b_1 + b_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(36 + 252) \cdot 10}{2} = 1\,440 \text{ m}$$

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

45 ▼▼▼ **Queremos construir un botellero como el de la figura, en el que cada botella ocupa dos celdillas. Observa que en este caben nueve botellas.**



¿Cuántas bolas y cuántos palos son necesarios para hacer uno en el que quepan doce botellas?

Para el primer piso se necesitan 24 bolas y 46 palos.

Para dos pisos se necesitan 36 bolas y 75 palos.

Las bolas forman una progresión aritmética con $a_1 = 24$ y $d = 12$. El término general es $a_n = 24 + (n - 1) \cdot 12 = 12 + 12n$.

Los palos forman una progresión aritmética con:

$a_1 = 46$ y $d = 29 \rightarrow a_n = 46 + (n - 1) \cdot 29 \rightarrow a_n = 17 + 29n$

Para 12 botellas necesitamos un piso más. Por tanto:

$a_4 = 12 + 12 \cdot 4 = 60$ bolas

$a_4 = 17 + 29 \cdot 4 = 133$ palos

46 ▼▼▼ **El día 1 de cierto mes, un amigo le propuso a otro un trato:**

Cada día de este mes tú me das 100 000 € y yo duplico el dinero que hay en esta caja (un céntimo), que, a fin de mes, te podrás llevar. El otro, después de pensar y echar cuentas con la calculadora, contestó riendo: ¿Por qué no me lo propones dentro de un año, exactamente?

Intenta averiguar en qué fecha pudo tener lugar esta conversación y justifica la respuesta.

Era el día uno de febrero de un año anterior a un bisiesto. Es decir, el mes actual tiene 28 días y el del año que viene, 29.

Así, este año las cuentas salen como sigue:

— Una aportación de 100 000 € al día supone $100\,000 \cdot 28 = 2\,800\,000$ €.

— Doblando cada día una cantidad inicial de 0,01 €, se obtiene:

$0{,}01 \cdot 2^{28} = 2\,684\,354{,}56$, cantidad inferior a la primera.

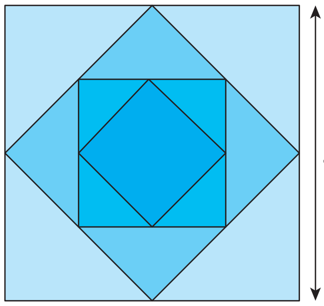
Sin embargo, febrero del año que viene tendrá un día más (29):

— Una aportación de 100 000 € al día supone $100\,000 \cdot 29 = 2\,900\,000$ €.

— Doblando cada día una cantidad inicial de 0,01 €, se obtiene:

$0{,}01 \cdot 2^{29} = 5\,368\,709$ €, cantidad muy superior a la anterior.

47 ▼▼▼ **Estos cuadrados se han obtenido uniendo los puntos medios de dos lados contiguos:**



a) Halla las áreas de los seis primeros cuadrados de esta sucesión. ¿Cuál será su término general?

b) Escribe la sucesión formada por las longitudes de los lados.

c) Calcula la suma de las áreas de los infinitos cuadrados generados de esa forma.

a) Observamos que el área de cada cuadrado es la mitad del área del cuadrado anterior. Por tanto, la sucesión de las áreas es:

$a_1 = 64 \text{ cm}^2,\ a_2 = 32 \text{ cm}^2,\ a_3 = 16 \text{ cm}^2,\ a_4 = 8 \text{ cm}^2,\ a_5 = 4 \text{ cm}^2,\ a_6 = 2 \text{ cm}^2, \ldots$

Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. El término general es:

$$a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^6 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^6}{2^{n-1}} = 2^{6-(n-1)} = 2^{6-n+1} = 2^{7-n}$$

$a_n = 2^{7-n}$

b) El lado de un cuadrado es igual a la raíz cuadrada de su área. Por tanto, la sucesión de las longitudes de los lados será: $\sqrt{64}, \sqrt{32}, \sqrt{16}, \sqrt{8}, \sqrt{4}, \sqrt{2}, \ldots$

Es decir: $8, 4\sqrt{2}, 4, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, \ldots$

c) Como $a_1 = 64$ y $r = \frac{1}{2}$, tenemos que: $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{64}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{64}{\frac{1}{2}} = 128 \text{ cm}^2$

Reflexiona sobre la teoría

48 ▼▽▽ **En la progresión $2, \frac{5}{2}, \frac{25}{8}, \frac{125}{32}, \ldots$ ¿se puede hallar la suma de sus infinitos términos? Justifícalo.**

No se puede hallar la suma de los infinitos términos de esa progresión geométrica porque su razón es $\frac{5}{4}$, que es mayor que 1.

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

49 ▼▽▽ **Si en una progresión aritmética $a_2 + a_{13} = 32$, ¿podemos saber cuánto vale $a_8 + a_7$? ¿Por qué?**

$a_8 + a_7$ suma lo mismo que $a_2 + a_{13} = 32$, porque:

$a_2 + a_{13} = (a_1 + d) + (a_1 + 12d) = 2a_1 + 13d$

$a_8 + a_7 = (a_1 + 7d) + (a_1 + 6d) = 2a_1 + 13d$

50 ▼▼▽ **Euclides, en sus *Elementos*, utiliza la siguiente fórmula para las progresiones geométricas:**

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

A partir de ella, obtén la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica, tal como la hemos estudiado en esta unidad.

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} \rightarrow a_1(a_{n+1} - a_1) = S(a_2 - a_1) \rightarrow$$

$$\rightarrow S = \frac{a_1(a_{n+1} - a_1)}{a_2 - a_1} = \frac{a_1(a_n r - a_1)}{a_1 r - a_1} = \frac{a_1(a_n r - a_1)}{a_1(r-1)} \rightarrow S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

Soluciones a “Y para terminar”

PÁGINA 72

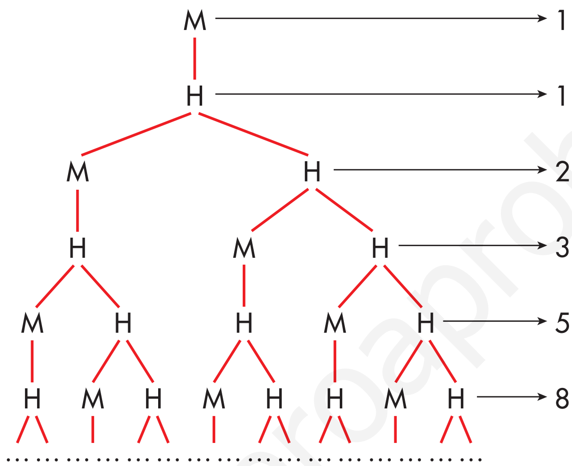
▼ Lee y comprende

Una sucesión famosa

Las abejas macho nacen de huevos no fertilizados; es decir, tienen madre pero no padre.

Las abejas hembra nacen de huevos fertilizados.

El siguiente esquema nos permite observar el número de antepasados de una abeja macho en las distintas generaciones:



- **¿Cuántos antecesores tiene una abeja macho en la décima generación de antepasados?**
- **¿Cuál es la ley de formación de la sucesión obtenida: 1, 1, 2, 3, 5, …?**
- **¿Recuerdas cómo se llama esta sucesión?**

• El número de antepasado en cada una de las diez primeras generaciones es:

$$1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 89$$

• Ley de formación: Cada término se obtiene sumando los dos que le preceden:

$$a_1 = 1;\ a_2 = 2;\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

• Sucesión de Fibonacci.

Soluciones a "Y para terminar"

PÁGINA 73

Conjetura y generaliza

- **OBSERVA:** $1^3 = 1 \to 1^2 = 1^2$

  $1^3 + 2^3 = 9 \to 3^2 = (1 + 2)^2$

  $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \to 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$

- **HAZ UNA CONJETURA: ¿Puedes predecir el valor de las siguientes expresiones?**

  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = ?$ $\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = ?$ $\quad$ **¡Compruébalo!**

- **GENERALIZA TUS CONCLUSIONES:**

  — ¿Cuál sería el valor de $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3$?

  — Elabora una fórmula que te permita calcular:

  $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ **cualquiera que sea el término natural n.**

La observación de los primeros casos sembrará la sospecha de que se cumple lo siguiente:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

$$(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 10^2 = 100$$

Se confirma lo supuesto. Y podemos seguir comprobando:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 15^2 = 225$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)^2 = \left[\frac{(1 + n) \cdot n}{2}\right]^2$$

Es decir, la suma de los cubos de los n primeros números naturales es igual al cuadrado de la suma de dichos números.

La demostración, aplicando el método de inducción, se puede encontrar en el libro digital.

Soluciones a la Autoevaluación

PÁGINA 73

¿Sabes obtener el término general de una sucesión y utilizarlo para calcular un término concreto? ¿Puedes definir una sucesión mediante una ley de recurrencia?

1 **Halla el término general de las siguientes sucesiones:**

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

b) $1 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, 4 \cdot 6, \dots$

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

b) $a_n = n(n+2)$

2 **Calcula el término 10 de las sucesiones siguientes:**

$$a_n = 5 - 2n \qquad b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2}$$

$a_{10} = 5 - 2 \cdot 10 = -15$; $\quad b_{10} = 1 + \dfrac{(-1)^{10}}{2} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

3 **Define, por recurrencia, la sucesión 5, 11, 23, 47, …**

$a_1 = 5$; $\quad a_n = 2a_{n-1} + 1$

¿Identificas progresiones aritméticas? ¿Escribes su término general y calculas la suma de *n* términos?

4 **Escribe el término general y calcula la suma de los 20 primeros términos de la sucesión 5, 7, 9, 11, …**

Es una progresión aritmética: $a_1 = 5$; $d = 2$

$a_n = 5 + (n-1)2 \rightarrow a_n = 3 + 2n$

$a_{20} = 3 + 2 \cdot 20 = 43 \rightarrow S_{20} = \dfrac{5 + 43}{2} \cdot 20 = 480$

5 **Halla la diferencia y el primer término de una progresión aritmética en la que $a_3 = 8$ y $a_8 = 33$.**

$a_8 = a_3 + 5d \rightarrow 33 = 8 + 5d \rightarrow 25 = 5d \rightarrow d = 5$

6 **¿Cuál de estas sucesiones es una progresión aritmética?**

a) 10, 25, 35, 40, …

b) 1, 3, 6, 10…

c) $5, \frac{9}{2}, 4, \frac{7}{2}, \dots$

d) –2, 4, –8, 16, …

La c), ya que es la única que cumple:

$\dfrac{9}{2} - 5 = -\dfrac{1}{2}$; $\; 4 - \dfrac{9}{2} = -\dfrac{1}{2}$; $\; \dfrac{7}{2} - 4 = -\dfrac{1}{2}$

Soluciones a la Autoevaluación

¿Sabes obtener el término general de una progresión geométrica, la suma de n términos o, si fuese posible, la de sus infinitos términos?

7 **Escribe el término general y calcula la suma de los ocho primeros términos de la sucesión:**

0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 0,16; …

¿Se puede hallar la suma de sus infinitos términos?

Es una progresión geométrica: $a_1 = 0{,}1$; $r = 2$

$a_n = 0{,}1 \cdot 2^{n-1} \to a_8 = 0{,}1 \cdot 2^7 = 12{,}8$

$$S_8 = \frac{a_8 r - a_1}{r - 1} = \frac{12{,}8 \cdot 2 - 0{,}1}{2 - 1} = 25{,}5$$

No se puede hallar la suma de sus infinitos términos, porque $r > 1$.

¿Sabes resolver problemas en los que tengas que reconocer un tipo u otro de progresión?

8 **Una empresa ofrece a un empleado un sueldo de 1 000 € y una subida de 100 € al año. Otra le ofrece el mismo sueldo con una subida del 10% anual.**

Razona cuál de las dos es mejor, comparando el sueldo dentro de 10 años.

En el primer caso tenemos una progresión aritmética.

$a_1 = 1\,000$; $d = 100 \to a_{10} = 1\,000 + 9 \cdot 100 = 1\,900$ €

En el segundo caso es una progresión geométrica.

$a_1 = 1\,000$; $r = 1{,}1 \to a_{10} = 1\,000 \cdot 1{,}1^9 = 2\,357{,}9$ €

Es mejor la segunda oferta.

9 **Para rodar un anuncio se ha contratado a un gran número de personas, que deben colocarse en 51 filas. Cada fila tiene dos personas más que la anterior y en la fila 26 tiene que haber 57 personas.**

Averigua cuántas personas hay en la primera fila, cuántas en la última y el número total de personas que intervienen en el anuncio.

Es una progresión aritmética de la que sabemos $n = 51$, $d = 2$ y $a_{26} = 57$.

$a_{26} = a_1 + 25d \to 57 = a_1 + 25 \cdot 2 \to a_1 = 7$

$a_{51} = a_1 + 50d \to a_{51} = 7 + 50 \cdot 2 = 107$

$$S_{51} = \frac{7 + 107}{2} \cdot 51 = 2\,907 \text{ personas en total.}$$

PÁGINA 77

PARA EMPEZAR...

▼ El arte cósico

Vamos a practicar el "arte cósico": ***Si a 16 veces la cosa le sumamos 35, obtenemos el mismo resultado que si multiplicamos 3 por la cosa y por la cosa.***

■ **Expresa algebraicamente (al estilo actual) este enunciado y averigua, tanteando, cuánto vale "la cosa".**

A la cosa vamos a llamarla x. Entonces:

— "Si a 16 veces la cosa le sumamos 35" equivale a $16 \cdot x + 35$.

— "Obtenemos el mismo resultado que" equivale a =.

— "Si multiplicamos 3 por la cosa y por la cosa" equivale a $3 \cdot x \cdot x$.

Uniendo las tres frases, tenemos que:

$$16x + 35 = 3xx = 3x^2$$

Si utilizamos una calculadora y vamos probando números, podemos llegar a descubrir que las soluciones son 7 y $\frac{-5}{3}$.

▼ Traducción al lenguaje algebraico

■ **Y ahora, sin recurrir a "la cosa", asigna a cada enunciado de la izquierda la expresión que le corresponde (a la derecha).**

I. Un número entero, el anterior y el siguiente.

II. Dos números pares consecutivos.

III. La suma de tres enteros consecutivos es 90.

IV. Las edades de dos hermanos difieren en 5 años. El año próximo, el mayor tendrá el doble de años que el menor.

a) $n + (n + 1) + (n + 2) = 90$

b) $n, \ n - 1, \ n + 1$

c) $x - y = 5; \ x + 1 = 2(y + 1)$

d) $2n, \ 2n + 2$

Cuando hayas acabado, vuelve a poner las expresiones algebraicas correspondientes a los enunciados de la izquierda, pero tapando, previamente, la columna de la derecha.

I. → b)

II. → d)

III. → a)

IV. → c)

■ **Traduce al lenguaje algebraico los siguientes enunciados:**

a) La mitad de un número.

b) El triple de un número.

c) La cuarta parte de un número.

d) El 35% de una cantidad.

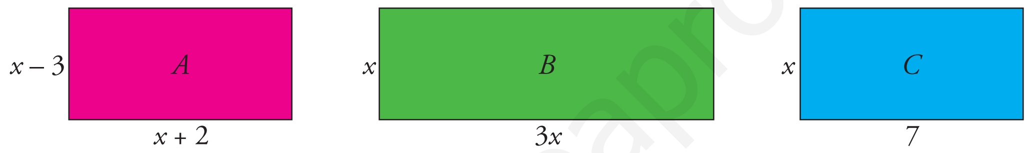
e) El triple de un número más dos unidades.

f) La mitad del resultado de sumarle al triple de un número dos unidades.

a) $\frac{x}{2}$ b) $3x$ c) $\frac{x}{4}$

d) $0{,}35x$ e) $3x + 2$ f) $\frac{3x + 2}{2}$

■ **Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:**



A: $P = 2 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (x + 2) = 4x - 2$

$A = (x - 3) \cdot (x + 2) = x^2 - x - 6$

B: $P = 2 \cdot x + 2 \cdot 3x = 8x$

$A = x \cdot 3x = 3x^2$

C: $P = 2 \cdot x + 2 \cdot 7 = 2x + 14$

$A = x \cdot 7 = 7x$

4 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

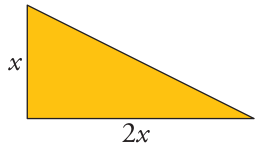
PÁGINA 78

1 **Describe mediante una expresión algebraica los enunciados siguientes:**

a) El doble de un número menos su tercera parte.

b) El doble del resultado de sumarle tres unidades a un número.

c) El área de este triángulo es 36 cm^2.



d) Gasté en un traje 3/5 de lo que tenía y 60 € en dos camisas. Me queda la mitad de lo que tenía.

a) $2x - \frac{1}{3}x$ b) $2(x + 3)$ c) $\frac{2x \cdot x}{2} = 36$ d) $x - \left(\frac{3}{5}x + 60\right) = \frac{1}{2}x$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 79

1 ¿Cuál es el grado de cada uno de los siguientes monomios?:

a) $-5xy^2z^3$ **b)** $11xy^2$ **c)** -12

a) Su grado es 6. b) Su grado es 3. c) Su grado es 0.

2 Efectúa las siguientes sumas de monomios:

a) $5x + 3x^2 - 11x + 8x - x^2 + 7x$

b) $6x^2y - 13x^2y + 3x^2y - x^2y$

c) $2x - 5x^2 + 3x + 11y + 2x^3$

d) $3yz^3 + y^3z - 2z^3y + 5zy^3$

a) $9x + 2x^2$

b) $-5x^2y$

c) $5x - 5x^2 + 2x^3 + 11y$

d) $yz^3 + 6y^3z$

3 Efectúa los siguientes productos de monomios:

a) $(3x) \cdot (5x^2)$ **b)** $(-3x^2) \cdot (4x^3)$ **c)** $\left(\frac{2}{3}x^3\right) \cdot (-6x)$

d) $\left(\frac{2}{9}x^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}x^3\right)$ **e)** $(7xy^2) \cdot (2y)$ **f)** $(5xyz) \cdot (-3x^2z)$

a) $15x^3$ b) $-12x^5$ c) $-4x^4$

d) $\frac{-2}{15}x^5$ e) $14xy^3$ f) $-15x^3yz^2$

4 Escribe dos monomios semejantes a cada uno de los siguientes:

a) $-5ab^2c^3$ **b)** $6x^3$ **c)** x **d)** 7

Respuesta abierta.

Ejemplo:

a) $10ab^2c^3$, $2ab^2c^3$

b) x^3, $-3x^3$

c) $15x$, $-4x$

d) 4, 103

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 80

1 **Di el grado de cada uno de estos polinomios:**

a) $x^6 - 3x^4 + 2x^2 + 3$

b) $5x^2 + x^4 - 3x^2 - 2x^4 + x^3$

c) $x^3 + 3x^2 - 2x^3 + x + x^3 - 2$

a) Su grado es 6.

b) $-x^4 + x^3 + 2x^2$. Su grado es 4.

c) $3x^2 + x - 2$. Su grado es 2.

2 **Sean** $P = 5x^3 - 2x + 1$ **y** $Q = x^4 - 2x^2 + 2x - 2$.

Halla $P + Q$ **y** $P - Q$.

$$\begin{array}{rrrrr} & 5x^3 & & -2x & +1 \\ -x^4 & & -2x^2 & +2x & -2 \\ \hline -x^4 & +5x^3 & -2x^2 & & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & 5x^3 & & -2x & +1 \\ x^4 & & +2x^2 & -2x & +2 \\ \hline x^4 & +5x^3 & +2x^2 & -4x & +3 \end{array}$$

3 **Halla los productos siguientes y di de qué grado son:**

a) $2x(x^2 + 3x - 1)$

b) $2x^2(3x^2 - 4x + 6)$

c) $-2(-3x^3 - x)$

d) $5(x^2 + x - 1)$

e) $-7x^5(2x^2 - 3x - 1)$

f) $-7x(2x^3 - 3x^2 + x)$

g) $4x^2(3 - 5x + x^3)$

h) $8x^2(x^2 + 3)$

i) $-x^3(-3x + 2x^2)$

j) $-4x[x + (3x)^2 - 2]$

a) $2x^3 + 6x^2 - 2x$

Su grado es 3.

b) $6x^4 - 8x^3 + 12x^2$

Su grado es 4.

c) $6x^3 + 2x$

Su grado es 3.

d) $5x^2 + 5x - 5$

Su grado es 2.

e) $-14x^7 + 21x^6 + 7x^5$

Su grado es 7.

f) $-14x^4 + 21x^3 - 7x^2$

Su grado es 4.

g) $12x^2 - 20x^3 + 4x^5 = 4x^5 - 20x^3 + 12x$

Su grado es 5.

h) $8x^4 + 24x^2$

Su grado es 4.

i) $3x^4 - 2x^5 = -2x^5 + 3x^4$

Su grado es 5.

j) $-4x^2 - 36x^3 + 8x = -36x^3 - 4x^2 + 8x$

Su grado es 3.

PÁGINA 81

4 **Siendo** $P = 4x^2 + 3$, $Q = 5x^2 - 3x + 7$ **y** $R = 5x - 8$, **calcula:**

a) $P \cdot Q$ **b)** $P \cdot R$ **c)** $Q \cdot R$

a)
$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 4x^2 & & +3 \\
 & & 5x^2 & -3x & +7 \\
\hline
 & & 28x^2 & & +21 \\
 & -12x^3 & & -9x & \\
20x^4 & & +15x^2 & & \\
\hline
20x^4 & -12x^3 & +43x^2 & -9x & +21
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrr}
 & 4x^2 & & +3 \\
 & & 5x & -8 \\
\hline
 & -32x^2 & & -24 \\
20x^3 & & +15x & \\
\hline
20x^3 & -32x^2 & +15x & -24
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrrr}
 & 5x^2 & -3x & +7 \\
 & & 5x & -8 \\
\hline
 & -40x^2 & +24x & -56 \\
25x^3 & -15x^2 & +35x & \\
\hline
25x^3 & -55x^2 & +59x & -56
\end{array}$$

5 **Opera y simplifica la expresión resultante:**

a) $x(5x^2 + 3x - 1) - 2x^2(x - 2) + 12x^2$

b) $5(x - 3) + 2(y + 4) - \frac{7}{3}(y - 2x + 3) - 8$

c) $15 \cdot \left[\frac{2(x-3)}{3} - \frac{4(y-x)}{5} + \frac{x+2}{15} - 7\right]$

d) $(x^2 - 2x + 7)(5x^3 + 3) - (2x^5 - 3x^3 - 2x + 1)$

a) $5x^3 + 3x^2 - x - 2x^3 + 4x^2 + 12x^2 = 3x^3 + 19x^2 - x$

b) $5x - 15 + 2y + 8 - \frac{7}{3}y + \frac{14}{3}x - 7 - 8 = \frac{29}{3}x - \frac{1}{3}y - 22$

c) $10(x - 3) - 12(y - x) + (x + 2) - 105 = 10x - 30 - 12y + 12x + x + 2 - 105 =$

$= 23x - 12y - 133$

d) $5x^5 + 3x^2 - 10x^4 - 6x + 35x^3 + 21 - 2x^5 + 3x^3 + 2x - 1 =$

$= 3x^5 - 10x^4 + 38x^4 + 3x^2 - 4x + 20$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

6 **Extrae factor común en cada expresión:**

a) $5x^2 - 15x^3 + 25x^4$

b) $\frac{x^4}{3} - \frac{x}{9} - \frac{1}{15}$

c) $2x^3y^5 - 3x^2y^4 + 2x^7y^2 + 7x^3y^3$

d) $2x^2y - 5x^3y(2y - 3)$

e) $2(x - 3) + 3(x - 3) - 5(x - 3)$

f) $2xy^2 - 6x^2y^3 + 4xy^3$

g) $\frac{(x^2 - 3)}{2}(y - 1) - \frac{7}{2}(y - 1)$

a) $5x^2(1 - 3x + 5x^2)$

b) $\frac{1}{3}\left(x^4 - \frac{x}{3} - \frac{1}{5}\right)$

c) $x^2y^2(2xy^3 - 3y^2 + 2x^5 + 7xy)$

d) $x^2y(2 - 10xy + 15x)$

e) $(x - 3)(2 + 3 - 5) = (x - 3) \cdot 0 = 0$

f) $2xy^2(1 - 3xy + 2y)$

g) $(y - 1)\left(\frac{x^2 - 3 - 7}{2}\right) = (y - 1)\left(\frac{x^2}{2} - 5\right)$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 82

1 Desarrolla los siguientes cuadrados:

a) $(x + 4)^2$ **b)** $(2x - 5)^2$ **c)** $(1 - 6x)^2$

d) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$ **e)** $\left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$ **f)** $(ax + b)^2$

a) $x^2 + 16 + 8x$

b) $4x^2 + 25 - 20x$

c) $1 + 36x^2 - 12x$

d) $\frac{x^2}{4} + \frac{9}{16} + \frac{3x}{4} = \frac{1}{16}(4x^2 + 9 + 12x)$

e) $4x^4 + \frac{1}{4} - 2x^2 = \frac{1}{4}(16x^4 + 1 - 8x^2)$

f) $a^2x^2 + b^2 + 2abx$

2 Efectúa los siguientes productos:

a) $(x + 1)(x - 1)$ **b)** $(2x + 3)(2x - 3)$

c) $\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)$ **d)** $(ax + b)(ax - b)$

a) $x^2 - 1$ b) $4x^2 - 9$

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{1}{4}$ d) $a^2x^2 - b^2$

4

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 83

3 **Expresa en forma de producto.**

a) $4x^2 - 25$ **b)** $x^2 + 16 + 8x$ **c)** $x^2 + 2x + 1$

d) $9x^2 + 6x + 1$ **e)** $4x^2 + 25 - 20x$ **f)** $\frac{x^2}{4} + x + 1$

a) $(2x + 5)(2x - 5)$ b) $(x + 4)^2$ c) $(x + 1)^2$

d) $(3x + 1)^2$ e) $(2x - 5)^2$ f) $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$

4 **Simplifica las expresiones siguientes:**

a) $(x - 2)(x + 2) - (x^2 + 4)$

b) $(3x - 1)^2 - (3x + 1)^2$

c) $2(x - 5)^2 - (2x^2 + 3x + 50)$

d) $(5x - 4)(2x + 3) - 5$

e) $3(x^2 + 5) - (x^2 + 40)$

f) $(x + 3)^2 - [x^2 + (x - 3)^2]$

a) $x^2 - 4 - x^2 - 4 = -8$

b) $(9x^2 - 6x + 1) - (9x + 6x + 1) = 9x^2 - 6x + 1 - 9x^2 - 6x - 1 = -12x$

c) $2(x^2 - 10x + 25) - (2x^2 + 3x + 50) = 2x^2 - 20x + 50 - 2x^2 - 3x - 50 = -23x$

d) $10x^2 + 15x - 8x - 12 - 5 = 10x^2 + 7x - 17$

e) $3x^2 + 15 - x^2 - 40 = 2x^2 - 25$

f) $(x^2 + 6x + 9) - [x^2 + (x^2 - 6x + 9)] = x^2 + 6x + 9 - x^2 - x^2 + 6x - 9 = -x^2 + 12x$

5 **Multiplica y simplifica el resultado:**

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} - \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$ **por 8**

b) $x + \frac{2x - 3}{9} + \frac{x - 1}{3} - \frac{12x + 4}{9}$ **por 9**

c) $\frac{(2x - 4)^2}{8} - \frac{x(x + 1)}{2} - 5$ **por 8**

a) $4x + 2x + x - 6x - 2 = x - 2$

b) $9x + 2x - 3 + 3(x - 1) - (12x + 4) = 9x + 2x - 3 + 3x - 3 - 12x - 4 = 2x - 10$

c) $(2x - 4)^2 - 4x(x + 1) - 40 = (4x^2 - 16x + 16) - 4x^2 - 4x - 40 =$

$= 4x^2 - 16x + 16 - 4x^2 - 4x - 40 = -20x - 24$

PÁGINA 85

1 Simplifica las fracciones siguientes. Para ello, saca factor común cuando convenga:

a) $\dfrac{15x^2}{5x^2(x-3)}$ **b)** $\dfrac{3(x-1)^2}{9(x-1)}$ **c)** $\dfrac{3x^2-9x^3}{15x^3-3x^4}$

d) $\dfrac{9(x+1)-3(x+1)}{2(x+1)}$ **e)** $\dfrac{5x^2(x-3)^2(x+3)}{15x(x-3)}$ **f)** $\dfrac{x(3x^3-x^2)}{(3x-1)x^3}$

a) $\dfrac{3}{x-3}$

b) $\dfrac{x-1}{3}$

c) $\dfrac{3x^2(1-3x)}{3x^3(5-x)} = \dfrac{1-3x}{x(5-x)} = \dfrac{-3x+1}{-x^2+5x}$

d) $\dfrac{(x+1)(9-3)}{2(x+1)} = \dfrac{6(x+1)}{2(x+1)} = 3$

e) $\dfrac{x(x-3)(x+3)}{3} = \dfrac{x(x^2-9)}{3} = \dfrac{x^3-9x}{3}$

f) $\dfrac{x \cdot x^2(3x-1)}{(3x-1)x^3} = \dfrac{x^3(3x-1)}{(3x-1)x^3} = 1$

2 Opera y simplifica.

a) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2x} + \dfrac{x-2}{x}$ **b)** $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2x^2+8x}{x^2+x} - 4x$

c) $\dfrac{2}{x^2-9} - \dfrac{7x}{x-3} + 3$ **d)** $\dfrac{5x^3+15x^2}{x+3} - \dfrac{10x^3+15x^2}{5x^2} + 2x$

a) $\dfrac{4}{2x} + \dfrac{3}{2x} + \dfrac{2(x-2)}{2x} = \dfrac{7+2x-4}{2x} = \dfrac{2x+3}{2x}$

b) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2x^2+8x}{x(x+1)} - 4x = \dfrac{3x}{x(x+1)} - \dfrac{2x^2+8x}{x(x+1)} - \dfrac{4x \cdot x(x+1)}{x(x+1)} =$

$= \dfrac{3x-2x^2-8x-4x^3-4x^2}{x(x+1)} = \dfrac{-4x^3-6x^2-5x}{x(x+1)} =$

$= \dfrac{-x(4x^2+6x+5)}{x(x+1)} = \dfrac{-4x^2-6x-5}{x+1}$

c) $\dfrac{2}{(x+3)(x-3)} - \dfrac{7x}{x-3} + 3 = \dfrac{2}{(x+3)(x-3)} - \dfrac{7x(x+3)}{(x+3)(x-3)} + \dfrac{3(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)} =$

$= \dfrac{2-7x^2-21x+3x^2-27}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{-4x^2-21x-25}{(x+3)(x-3)}$

d) $\dfrac{5x^2(x+3)}{x+3} - \dfrac{5x^2(2x+3)}{5x^2} + 2x = 5x^2-(2x+3)+2x = 5x^2-2x-3+2x = 5x^2-3$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

3 **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica. Ten en cuenta las identidades notables:**

a) $\dfrac{x^2-1}{x} : (x-1)$

b) $\dfrac{x(x-2)}{x} : \dfrac{x^2-4}{x+2}$

c) $\dfrac{x^2-2x+1}{x} : \dfrac{x-1}{x}$

d) $6x^2 \cdot \dfrac{x-3}{x^3}$

e) $\dfrac{3x-3}{x^2} \cdot \dfrac{x(x+1)}{x^2-1}$

f) $\dfrac{2x}{x-1} : \dfrac{4x^2}{2x-2}$

g) $\dfrac{x+5}{10} \cdot \dfrac{5}{(x+5)^2}$

h) $\dfrac{2x^2}{3x} \cdot \dfrac{6x}{4x^3}$

i) $\dfrac{4x-3}{2x} \cdot \dfrac{4x^2}{8x-6}$

j) $\dfrac{3x-3}{x^2} \cdot \dfrac{3x}{18(x-1)}$

a) $\dfrac{(x+1)(x-1)}{x} : (x-1) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x} \cdot \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x+1}{x}$

b) $\dfrac{x(x-2)}{x} : \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} = \dfrac{x(x-2)}{x} \cdot \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} = 1$

c) $\dfrac{(x-1)^2}{x} : \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{(x-1)^2}{x} \cdot \dfrac{x}{x-1} = x-1$

d) $\dfrac{6x^2(x-3)}{x^3} = \dfrac{6(x-3)}{x} = \dfrac{6x-18}{x}$

e) $\dfrac{3(x-1)}{x^2} \cdot \dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{3}{x}$

f) $\dfrac{2x}{x-1} : \dfrac{(2x)^2}{2(x-1)} = \dfrac{2x}{x-1} \cdot \dfrac{2(x-1)}{(2x)^2} = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$

g) $\dfrac{5(x+5)}{10(x+5)^2} = \dfrac{1}{2(x+5)}$

h) $\dfrac{12x^3}{12x^4} = \dfrac{1}{x}$

i) $\dfrac{4x-3}{2x} \cdot \dfrac{(2x)^2}{2(4x-3)} = \dfrac{2x}{2} = x$

j) $\dfrac{3(x-1)}{x^2} \cdot \dfrac{3x}{18(x-1)} = \dfrac{9x}{18x^2} = \dfrac{1}{2x}$

4 **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{6x^2}{4x^2-9} : \left(\dfrac{5x}{2x-3} + \dfrac{5x}{2x+3}\right)$

b) $\dfrac{x^2}{5x^2-25} - \dfrac{1}{5} - \dfrac{x^3+x^2}{(x+1)(5x^2-25)}$

a) $\dfrac{6x^2}{(2x+3)(2x-3)} : \dfrac{5x(2x+3)+5x(2x-3)}{(2x+3)(2x-3)} =$

$= \dfrac{6x^2}{(2x+3)(2x-3)} \cdot \dfrac{(2x+3)(2x-3)}{5x(2x+3+2x-3)} = \dfrac{6x^2}{5x \cdot 4x} = \dfrac{6x^2}{20x^2} = \dfrac{3}{10}$

b) $\dfrac{5(x+1)x^2}{5(x+1)(5x^2-25)} - \dfrac{(x+1)(5x^2-25)}{5(x+1)(5x^2-25)} - \dfrac{5(x^3+x^2)}{5(x+1)(5x^2-25)} =$

$= \dfrac{5x^2(x+1)-(x+1)(5x^2-25)-5x^2(x+1)}{5(x+1)(5x^2-25)} = \dfrac{5x^2-5x^2+25-5x^2}{5(5x^2-25)} =$

$= \dfrac{-5x^2+25}{5(5x^2-25)} = -\dfrac{1}{5}$

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

PÁGINA 86

Expresa y calcula

Traducción a lenguaje algebraico

1 ▼▽▽ **Asocia a cada enunciado una de las expresiones algebraicas que aparecen debajo:**

a) El cuadrado de un número menos su doble.

b) El 80% de un número.

c) Un número impar.

d) Los dos tercios de un número más cinco unidades.

$$\frac{2}{3}x + 5; \quad x^2 - 2x; \quad 0{,}8x; \quad 2x + 1$$

a) El cuadrado de un número menos su doble $\rightarrow$ $x^2 - 2x$

b) El 80% de un número $\rightarrow$ $0{,}8x$

c) Un número impar $\rightarrow$ $2x + 1$

d) Los $\frac{2}{3}$ de un número más 5 unidades $\rightarrow$ $\frac{2}{3}x + 5$

2 ▼▽▽ **Expresa en lenguaje algebraico empleando una sola incógnita.**

a) El triple de un número menos dos.

b) El producto de dos números consecutivos.

c) El cuadrado de un número más su mitad.

d) La suma de un número con otro diez unidades mayor.

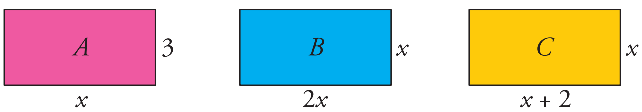
a) El triple de un número menos dos: $3x - 2$.

b) El producto de dos números consecutivos: $x(x + 1)$.

c) El cuadrado de un número más su mitad: $x^2 + \frac{x}{2}$.

d) La suma de un número con otro diez unidades mayor: $x + (x + 10)$.

3 ▼▽▽ **Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:**



$$A \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + 3) = 2x + 6 \\ \text{Área} = 3x \end{cases} \qquad B \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(2x + x) = 6x \\ \text{Área} = 2x \cdot x = 2x^2 \end{cases}$$

$$C \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + 2 + x) = 4x + 4 \\ \text{Área} = (x + 2)x = x^2 + 2x \end{cases}$$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

4 ▼▽▽ **Traduce a lenguaje algebraico utilizando dos incógnitas.**

a) La suma de los cuadrados de dos números.

b) El cuadrado de la diferencia de dos números.

c) La mitad del producto de dos números.

d) La semisuma de dos números.

a) La suma de los cuadrados de dos números: $x^2 + y^2$.

b) El cuadrado de la diferencia de dos números: $(x - y)^2$.

c) La mitad del producto de dos números: $\dfrac{x \cdot y}{2}$.

d) La semisuma de dos números: $\dfrac{x + y}{2}$.

5 ▼▽▽ **Si x e y son las edades actuales de dos hermanos, expresa los siguientes enunciados utilizando ambas incógnitas:**

a) La suma de las edades que tenían hace 5 años.

b) El producto de las edades que tendrán dentro de 6 años.

c) La diferencia entre la edad del mayor y la mitad de la del menor.

a) La suma de las edades que tenían hace 5 años:

$$(x - 5) + (y - 5) = x + y - 10$$

b) El producto de las edades que tendrán dentro de 6 años:

$$(x + 6)(y + 6) = xy + 6x + 6y + 36$$

c) La diferencia entre la edad del mayor y la mitad del menor:

$$x - \frac{y}{2} \text{ si la edad del mayor es } x$$

$$y - \frac{x}{2} \text{ si la edad del mayor es } y$$

Monomios

6 ▼▽▽ **Indica el grado de cada uno de los siguientes monomios y di cuáles son semejantes:**

a) $-5xy$	**b)** $(-7x)^3$	**c)** $8x$	**d)** $(xy)^2$
e) $\dfrac{2}{3}x^2y^2$	**f)** $\dfrac{4}{5}x^3$	**g)** $\dfrac{-3yx}{5}$	**h)** $\dfrac{1}{2}x^2$

a) Grado 2.	b) Grado 3.	c) Grado 1.	d) Grado 4.
e) Grado 4.	f) Grado 3.	g) Grado 2.	h) Grado 2.

Son semejantes: a) y g); b) y f); d) y e).

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

7 ▼▽▽ **Calcula el valor numérico de los monomios del ejercicio anterior para $x = -1$ e $y = 3$.**

a) $-5 \cdot (-1) \cdot 3 = 15$ b) $[-7 \cdot (-1)]^3 = 343$ c) $8(-1) = -8$

d) $[(-1) \cdot 3]^2 = 9$ e) $\frac{2}{3}(-1)^2 \cdot 3^2 = 6$ f) $\frac{4}{5}(-1)^3 = -\frac{4}{5}$

g) $\frac{-3 \cdot 3(-1)}{5} = \frac{9}{5}$ h) $\frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}$

8 ▼▽▽ **Efectúa.**

a) $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2$

b) $2x + 7y - 3x + y - x^2$

c) $x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2$

a) $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2 = 6x^2 - 4x + 2$

b) $2x + 7y - 3x + y - x^2 = -x^2 - x + 8y$

c) $x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2 = x^2y^2 - 2x^2y - 4xy^2$

9 ▼▽▽ **Efectúa los siguientes productos de monomios:**

a) $(6x^2)(-3x)$ **b)** $(2xy^2)(4x^2y)$

c) $\left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right)$ **d)** $\left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right)$

a) $6x^2\ (-3x) = -18x^3$ b) $(2xy^2)(4x^2y) = 8x^3y^3$

c) $\left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right) = \frac{3}{8}x^6$ d) $\left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right) = \frac{3}{8}x^2yz$

Polinomios

10 ▼▽▽ **Simplifica las siguientes expresiones:**

a) $(2x^3 - 5x + 3) - (2x^3 - x^2 + 1)$ **b)** $5x - (3x + 8) - (2x^2 - 3x)$

¿Cuál es el grado de cada polinomio?

a) $2x^3 - 5x + 3 - 2x^3 + x^2 - 1 = x^2 - 5x + 2 \rightarrow$ Grado 2.

b) $5x - 3x - 8 - 2x^2 + 3x = -2x^2 + 5x - 8 \rightarrow$ Grado 2.

11 ▼▽▽ **Considera estos polinomios:**

$A = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$ $B = 2x^4 + x^3 - 2x + 4$ $C = -x^3 + 3x^2 - 7x$

Halla: $A + B$; $A - C$; $A - B + C$

$A + B = 3x^3 - 5x^2 + x - 1 + 2x^4 + x^3 - 2x + 4 = 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 3$

$A - C = (3x^3 - 5x^2 + x - 1) - (-x^3 + 3x^2 - 7x) =$

$= 3x^3 - 5x^2 + x - 1 + x^3 - 3x^2 + 7x = 4x^3 - 8x^2 + 8x - 1$

$$A - B + C = (3x^3 - 5x^2 + x - 1) - (2x^4 + x^3 - 2x + 4) + (-x^3 + 3x^2 - 7x) =$$
$$= 3x^3 - 5x^2 + x - 1 - 2x^4 - x^3 + 2x - 4 - x^3 + 3x^2 - 7x =$$
$$= -2x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 5$$

12 ▼▽▽ **Efectúa, reduce y di cuál es el grado del polinomio resultante.**

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1)$

b) $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x$

c) $\frac{1}{3}x^2\left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x - 9\right)$

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1) = x^3 - 5x - 3x^3 - 6x^2 - 7x^2 - 7 =$
$= -2x^3 - 13x^2 - 5x - 7 \ \rightarrow$ Grado 3.

b) $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x = -15x^3 + 5x^2 - 2x^2 + 3x^3 - 6x =$
$= -12x^3 + 3x^2 - 6x \ \rightarrow$ Grado 3.

c) $\frac{1}{3}x^2\left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x - 9\right) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 \ \rightarrow$ Grado 4.

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 87

13 ▼▽▽ **Opera y simplifica.**

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2)$

b) $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3)$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12)$

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 3 - x^2 + 2x = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

b) $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3) = x^4 - x^3 - 5x^3 + 5x^2 + 3x^2 - 3x - x^4 + 3x =$

$= -6x^3 + 8x^2$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12) = 3x^3 - 6x^2 + 10x^2 - 20x + x - 2 =$

$= 3x^3 + 4x^2 - 19x - 2$

14 ▼▽▽ **Extrae factor común.**

a) $12x^3 - 8x^2 - 4x$

b) $-3x^3 + x - x^2$

c) $2xy^2 - 4x^2y + x^2y^2$

d) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x$

a) $12x^3 - 8x^2 - 4x = 4x(3x^2 - 2x - 1)$

b) $-3x^3 + x - x^2 = x(-3x^2 + 1 - x)$

c) $2xy^2 - 4x^2y + x^2y^2 = xy(2y - 4x + xy)$

d) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x = \frac{1}{3}x(2x + x^2 - 5)$

Identidades notables

15 ▼▽▽ **Desarrolla estas expresiones:**

a) $(x + 6)^2$

b) $(7 - x)^2$

c) $(3x - 2)^2$

d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

e) $(x - 2y)^2$

f) $\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2$

a) $(x + 6)^2 = x^2 + 36 + 12x$

b) $(7 - x)^2 = 49 + x^2 - 14x$

c) $(3x - 2)^2 = 9x^2 + 4 - 12x$

d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4} + x$

e) $(x - 2y)^2 = x^2 + 4y^2 - 4xy$

f) $\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2 = \frac{4}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - \frac{4}{15}xy$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

16 ▼▽▽ **Efectúa estos productos:**

a) $(x + 7)(x - 7)$ **b)** $(3 + x)(3 - x)$

c) $(3 + 4x)(3 - 4x)$ **d)** $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

e) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$ **f)** $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

a) $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$ b) $(3 + x)(3 - x) = 9 - x^2$

c) $(3 + 4x)(3 - 4x) = 9 - 16x^2$ d) $(x^2 + 1)(x^2 - 1) = x^4 - 1$

e) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{4}x^2 - 1$ f) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$

17 ▼▼▽ **Simplifica todo lo posible estas expresiones:**

a) $(x + 3)(x - 3) - (x + 3)^2$

b) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 - 9$

c) $3x(x + 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1)$

d) $(x^2 + 2)(x^2 - 2) - (x^2 - 1)^2$

a) $(x + 3)(x - 3) - (x + 3)^2 = x^2 - 9 - (x^2 + 9 - 6x) = 6x - 18$

b) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 - 9 = 4x^2 + 9 - 12x - (4x^2 + 9 - 12x) - 9 =$

$= 4x^2 + 9 - 12x - 4x^2 - 9 + 12x - 9 = -9$

c) $3x(x + 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1) = 3x(x^2 + 1 + 2x) - (4x^2 - 1) =$

$= 3x^3 + 3x + 6x^2 - 4x^2 + 1 = 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

d) $(x^2 + 2)(x^2 - 2) - (x^2 - 1)^2 = x^4 - 4 - (x^4 + 1 - 2x^2) = x^4 - 4 - x^4 - 1 + 2x^2 =$

$= 2x^2 - 5$

18 ▼▽▽ **Transforma en diferencia de cuadrados.**

a) $(2x + 7)(2x - 7)$ **b)** $(4x - 1)(4x + 1)$

c) $(x^2 + x)(x^2 - x)$ **d)** $(1 - 5x)(1 + 5x)$

a) $(2x + 7)(2x - 7) = 4x^2 - 49$ b) $(4x - 1)(4x + 1) = 16x^2 - 1$

c) $(x^2 + x)(x^2 - x) = x^4 - x^2$ d) $(1 - 5x)(1 + 5x) = 1 - 25x^2$

19 ▼▽▽ **Completa con el término que falta para que cada expresión sea el cuadrado de una suma o el de una diferencia:**

a) $x^2 + \dots + 4x$ **b)** $x^2 + \dots - 10x$

c) $x^2 + 9 + \dots$ **d)** $x^2 + 16 - \dots$

a) $x^2 + 4 + 4x$ b) $x^2 + 25 - 10x$

c) $x^2 + 9 + 6x$ d) $x^2 + 16 + 8x$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

Fracciones algebraicas

20 ▼▽▽ **Simplifica estas fracciones algebraicas:**

a) $\dfrac{9x}{12x^2}$ b) $\dfrac{x(x+1)}{5(x+1)}$ c) $\dfrac{x^2(x+2)}{2x^3}$

a) $\dfrac{9x}{12x^2} = \dfrac{3}{4x}$ b) $\dfrac{x(x+1)}{5(x+1)} = \dfrac{x}{5}$ c) $\dfrac{x^2(x+2)}{2x^3} = \dfrac{x+2}{2x^3}$

21 ▼▼▽ **Simplifica las siguientes fracciones algebraicas. Para ello, saca factor común:**

a) $\dfrac{x^2-4x}{x^2}$ b) $\dfrac{3x}{x^2+2x}$ c) $\dfrac{3x+3}{(x+1)^2}$

d) $\dfrac{2x^2+4x}{x^3+2x^2}$ e) $\dfrac{8x^3-4x^2}{(2x-1)^2}$ f) $\dfrac{5x^3+5x}{x^4+x^2}$

a) $\dfrac{x^2-4x}{x^2} = \dfrac{x(x-4)}{x^2} = \dfrac{x-4}{x}$

b) $\dfrac{3x}{x^2+2x} = \dfrac{3x}{x(x+2)} = \dfrac{3}{x+2}$

c) $\dfrac{3x+3}{(x+1)^2} = \dfrac{3(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{x+1}$

d) $\dfrac{2x^2+4x}{x^3+2x^2} = \dfrac{2x(x+2)}{x^2(x+2)} = \dfrac{2}{x}$

e) $\dfrac{8x^3-4x^2}{(2x-1)^2} = \dfrac{4x^2(2x-1)}{(2x-1)^2} = \dfrac{4x^2}{2x-1}$

f) $\dfrac{5x^3+5x}{x^4+x^2} = \dfrac{5x(x^2+1)}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{5}{x}$

22 ▼▼▽ **Efectúa.**

a) $\dfrac{1}{6x} + \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{1}{2x^3}$ b) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{x-1}{x-7}$ c) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x-4} + \dfrac{x+1}{x-4}$

d) $\dfrac{2x}{x-3} - \dfrac{x-1}{x+3}$ e) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4}$ f) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2+x} + 2$

a) $\dfrac{1}{6x} + \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{1}{2x^3} = \dfrac{x^2+2x-3}{6x^3}$

b) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{x-1}{x-7} = \dfrac{2(x-7)+x(x-1)}{x(x-7)} = \dfrac{2x-14+x^2-x}{x^2-7x} = \dfrac{x^2+x-14}{x^2-7x}$

c) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x-4} + \dfrac{x+1}{x-4} = \dfrac{2(x-4)-3x+x(x+1)}{x(x-4)} = \dfrac{2x-8-3x+x^2+x}{x(x-4)} = \dfrac{x^2-8}{x^2-4x}$

d) $\dfrac{2x}{x-3} - \dfrac{x-1}{x+3} = \dfrac{2(x+3)-(x-1)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{2x+6-(x^2-4x+3)}{x^2-9} =$

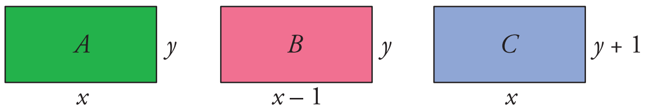
$= \dfrac{2x+6-x^2+4x-3}{x^2-9} = \dfrac{-x^2+6x+3}{x^2-9}$

e) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} = \dfrac{12+2(x-1)+x(x-1)}{4(x-1)} = \dfrac{12+2x-2+x^2-x}{4(x-1)} = \dfrac{x^2+x+10}{4(x-1)}$

f) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2+x} + 2 = \dfrac{3(x+1)-1+2x(x+1)}{x(x+1)} = \dfrac{3x+3-1+2x^2+2x}{x(x+1)} = \dfrac{2x^2+5x+2}{x(x+1)}$

Aplica lo aprendido

23 ▼▽▽ **Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:**



$$A\begin{cases}\text{Perímetro} = 2(x + y) = 2x + 2y \\ \text{Área} = xy\end{cases}$$

$$B\begin{cases}\text{Perímetro} = 2(x - 1 + y) = 2x + 2y - 2 \\ \text{Área} = (x - 1)y = xy - y\end{cases}$$

$$C\begin{cases}\text{Perímetro} = 2(x + y + 1) = 2x + 2y + 2 \\ \text{Área} = x(y + 1) = xy + x\end{cases}$$

24 ▼▽▽ **Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia, como en el ejemplo.**

- $\mathbf{x^2 + 25 + 10x = x^2 + 5^2 + 2 \cdot 5x = (x + 5)^2}$

a) $\mathbf{x^2 + 49 - 14x}$

b) $\mathbf{x^2 + 1 - 2x}$

c) $\mathbf{4x^2 + 1 + 4x}$

d) $\mathbf{x^2 + 12x + 36}$

a) $x^2 + 49 - 14x = (x - 7)^2$

b) $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2$

c) $(4x^2 + 1 + 4x) = (2x + 1)^2$

d) $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

25 ▼▼▽ **Extrae factor común como en el ejemplo.**

- $\mathbf{3x(x + 1) - x^2(x + 1) + (x + 1)(x^2 - 2) = (x + 1)[3x - x^2 + x^2 - 2] = (x + 1)(3x - 2)}$

a) $\mathbf{2x(x - 2) + x^2(x - 2) - 3(x - 2)}$

b) $\mathbf{x^2(x + 1) - x^2(x + 2) + 2x^2(x - 3)}$

c) $\mathbf{3x^2(x + 3) - 6x(x + 3)}$

a) $2x(x - 2) + x^2(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(2x + x^2 - 3)$

b) $x^2(x + 1) - x^2(x + 2) + 2x^2(x - 3) = x^2[x + 1 - (x + 2) + 2(x - 3)] = x^2(2x - 7)$

c) $3x^2(x + 3) - 6x(x + 3) = x(x + 3)(3x - 6)$

PÁGINA 88

26 ▼▽▽ **Reduce las siguientes expresiones:**

a) $6\left(\dfrac{5x-4}{6}+\dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{x-1}{3}\right)$

b) $12\left(\dfrac{x+6}{3}-\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{3x-1}{4}\right)$

c) $30\left[\dfrac{x(x-2)}{15}-\dfrac{(x+1)^2}{6}+\dfrac{1}{2}\right]$

a) $6\left(\dfrac{5x-4}{6}+\dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{x-1}{3}\right)=5x-4+3(2x-3)-2(x-1)=$

$=5x-4+6x-9-2x+1=9x-12$

b) $12\left(\dfrac{x+6}{3}-\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{3x-1}{4}\right)=4(x+6)-6(x+1)+3(3x-1)=$

$=4x+24-6x-6+9x-3=7x+15$

c) $30\left[\dfrac{x(x-2)}{15}-\dfrac{(x+1)^2}{6}+\dfrac{1}{2}\right]=2x(x-2)-5(x^2+1+2x)+15=$

$=2x^2-4x-5x^2-5-10x+15=-3x^2-14x+10$

27 ▼▽▽ **Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica el resultado.**

a) $\dfrac{3+x}{8}-\dfrac{5-x}{6}-\dfrac{x+1}{12}$

b) $\dfrac{3}{4}(x-1)-\dfrac{1}{3}(x+1)+\dfrac{1}{6}$

c) $\dfrac{(2x-5)^2}{9}-\dfrac{(x+1)^2}{6}$

d) $\dfrac{x(x-3)}{2}+\dfrac{x(x+2)}{4}-\dfrac{(3x+2)^2}{8}$

a) $\dfrac{3+x}{8}-\dfrac{5-x}{6}-\dfrac{x+1}{12}=24\left(\dfrac{3+x}{8}-\dfrac{5-x}{6}-\dfrac{x+1}{12}\right)=3(3+x)-4(5-x)-2(x+1)=$

$=9+3x-20+4x-2x-2=5x-13$

b) $\dfrac{3}{4}(x-1)-\dfrac{1}{3}(x+1)+\dfrac{1}{6}=12\left(\dfrac{3}{4}(x-1)-\dfrac{1}{3}(x+1)+\dfrac{1}{6}\right)=$

$=3\cdot 3(x-1)-4(x+1)+2=9x-9-4x-4+2=5x-11$

c) $\dfrac{(2x-5)^2}{9}-\dfrac{(x+1)^2}{6}=18\left(\dfrac{(2x-5)^2}{9}-\dfrac{(x+1)^2}{6}\right)=2(4x^2+25-20x)=$

$=-3(x^2+1+2x)=8x^2+50-40x-3x^2-3-6x=$

$=5x^2-46x+47$

d) $\dfrac{x(x-3)}{2}+\dfrac{x(x+2)}{4}-\dfrac{(3x+2)^2}{8}=8\left(\dfrac{x^2-3x}{2}+\dfrac{x^2+2x}{4}-\dfrac{9x^2+4+12x}{8}\right)=$

$= 4(x^2-3x)+2(x^2+2x)-(9x^2+4+12x)=$

$= 4x^2-12x+2x^2+4x-9x^2-4-12x=$

$= -3x^2-20x-4$

28 ▼▽▽ **Expresa como el cuadrado de una suma o una diferencia o como diferencia de cuadrados.**

a) x^2+9-6x **b)** $4x^2+1+4x$ **c)** $4x^2-9$

d) $9x^2-12x+4$ **e)** $16x^2-1$ **f)** $16x^2+40x+25$

a) $x^2+9-6x=(x-3)^2$ b) $4x^2+1+4x=(2x+1)^2$

c) $4x^2-9=(2x+3)(2x-3)$ d) $9x^2-12x+4=(3x-2)^2$

e) $16x^2-1=(4x+1)(4x-1)$ f) $16x^2+40x+25=(4x+5)^2$

29 ▼▼▽ **Transforma en producto como en el ejemplo.**

- $x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2$

a) x^3-4x **b)** $4x^3-4x^2+x$ **c)** x^4-x^2 **d)** $3x^4-24x^3+48x^2$

a) $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x+2)(x-2)$

b) $4x^3-4x^2+x=x(4x^2-4x+1)=x(2x-1)^2$

c) $x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x+1)(x-1)$

d) $3x^4-24x^3+48x^2=3x^2(x^2-8x+16)=3x^2(x-4)^2$

30 ▼▼▽ **Simplifica. Para ello, transforma en producto el numerador y el denominador.**

a) $\dfrac{2x+4}{3x^2+6x}$ **b)** $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ **c)** $\dfrac{x-2}{x^2+4-4x}$

d) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$ **e)** $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ **f)** $\dfrac{x^3+2x^2+x}{3x+3}$

a) $\dfrac{2x+4}{3x^2+6x}=\dfrac{2(x+2)}{3x(x+2)}=\dfrac{2}{3x}$

b) $\dfrac{x+1}{x^2-1}=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}$

c) $\dfrac{x-2}{x^2+4-4x}=\dfrac{x-2}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{x-2}$

d) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}=\dfrac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{x}{x+3}$

e) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2}=\dfrac{x-2}{x+2}$

f) $\dfrac{x^3+2x^2+x}{3x+3}=\dfrac{x(x^2+2x+1)}{3(x+1)}=\dfrac{x(x+1)^2}{3(x+1)}=\dfrac{x(x+1)}{3}$

31 ▼▼▽ **Opera, y simplifica si es posible.**

a) $\dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{3}{x^2}$ **b)** $\dfrac{3x+2}{x-1} : \dfrac{x+1}{x}$

c) $\dfrac{3}{(x-1)^2} : \dfrac{2}{x-1}$ **d)** $(x+1) : \dfrac{x^2-1}{2}$

a) $\dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{3x}{(x+1)x^2} = \dfrac{3}{(x+1)x}$

b) $\dfrac{3x+2}{x-1} : \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x(3x+2)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{3x^2+2x}{x^2-1}$

c) $\dfrac{3}{(x-1)^2} : \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{3(x-1)}{2(x-1)^2} = \dfrac{3}{2(x-1)}$

d) $(x+1) : \dfrac{x^2-1}{2} = \dfrac{2(x+1)}{x^2-1} = \dfrac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2}{x-1}$

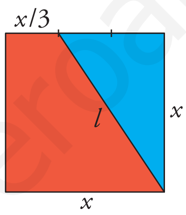
Resuelve problemas

32 ▼▼▽ **Expresa algebraicamente:**

a) El área del triángulo azul.

b) El área del trapecio rojo.

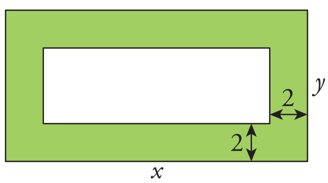
c) La longitud *l*.



☞ ***Quizá te sea útil recordar el teorema de Pitágoras.***

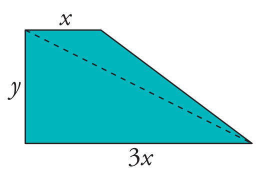
a) $\dfrac{(2x/3) \cdot x}{2} = \dfrac{1}{3}x^2$ b) $\dfrac{(x + x/3) \cdot x}{2} = \dfrac{2}{3}x^2$ c) $l = \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{2x}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{13}{9}x^2}$

33 ▼▼▽ **Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada.**



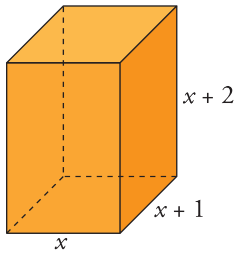
$A = xy - (x-4)(y-4) = xy - (xy - 4x - 4y + 16) = 4x + 4y - 16$

34 ▼▼▽ **Expresa algebraicamente el área y la diagonal mayor de este trapecio:**



Área $= \dfrac{(3x+x)y}{2} = 2xy$ Diagonal: $\sqrt{y^2 + (3x)^2}$

35 ▼▼▽ **Expresa algebraicamente el área total y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son tres números consecutivos.**

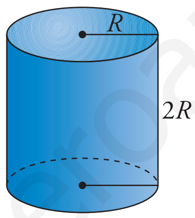


Área: $2[(x + 1)(x + 2) + x(x + 1) + x(x + 2)] = 2(x^2 + 3x + 2 + x^2 + x + x^2 + 2x) =$

$= 2(3x^2 + 6x + 2) = 6x^2 + 12x + 4$

Volumen: $x(x + 1)(x + 2) = x(x^2 + 3x + 2) = x^3 + 3x^2 + 2x$

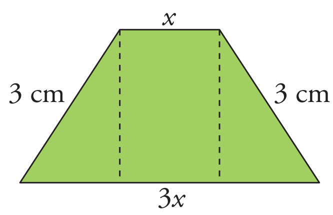
36 ▼▼▽ **Expresa algebraicamente el área total y el volumen de un cilindro cuya altura mide el doble del radio de la base.**

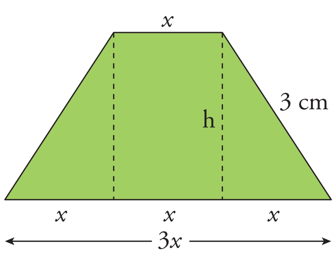


Área: $2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$

Volumen: $\pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$

37 ▼▼▽ **Expresa algebraicamente el área de este trapecio isósceles:**





Altura: $h = \sqrt{9 - x^2}$

Área: $\dfrac{(3x + x)\sqrt{9 - x^2}}{2} = 2x\sqrt{9 - x^2}$

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

PÁGINA 89

Problemas "+"

38 ▼▼▽ **¡Adivina el número secreto!**

Piensa un número cualquiera, multiplícalo por 2, réstale 10, réstale el número pensado, súmale 3 y dime el resultado.

Razona por qué obtengo el número secreto sumando 7 al resultado que me des.

Llamamos x al número pensado.

Multiplícalo por 2: $2x$

Réstale 10: $2x - 10$

Réstale el número pensado: $2x - 10 - x = x - 10$

Súmale 3: $x - 10 + 3 \to x - 7$

Si al resultado le sumo 7, obtengo x.

39 ▼▼▽ **Piensa un número, súmale 7, multiplica el resultado por 2, resta 4, divide por 2 y dime el resultado. ¿Cómo puedo saber el número que has pensado?**

Llamamos x al número pensado.

Le sumamos 7: $x + 7$

Multiplicamos por 2: $2x + 14$

Restamos 4: $2x + 10$

Dividimos por 2: $x + 5$

Si restamos 5 al resultado, obtenemos x.

40 ▼▼▽ **Utiliza el lenguaje algebraico para demostrar que los siguientes enunciados son verdaderos:**

a) La suma de tres números enteros consecutivos es igual al triple del segundo.

b) Si al cuadrado de un número impar le restas 1, obtienes siempre un múltiplo de 4.

c) Si al cuadrado de un número le resto el producto del número anterior por el número posterior, el resultado es siempre igual a 1.

a) Tres números consecutivos son x, $x + 1$ y $x + 2$.

Sumamos: $x + x + 1 + x + 2 = 3x + 3 = 3(x + 1)$

Obtenemos el triple del segundo.

b) Un número impar es $2x + 1$.

Su cuadrado: $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

Le restamos 1: $4x^2 + 4x = 4(x^2 + x)$. Obtenemos un múltiplo de 4.

c) $x^2 - (x + 1)(x - 1) = x^2 - (x^2 - 1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$

41 ▼▼▽ **Piensa en tres números consecutivos. Resta al cuadrado del mayor el cuadrado del menor. Divide el resultado por el del medio. ¡Obtienes siempre 4!**

Justifícalo utilizando el lenguaje algebraico.

Tres números consecutivos son x; $x + 1$; $x + 2$

$(x + 2)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4$

$\dfrac{4x + 4}{x + 1} = \dfrac{4(x + 1)}{x + 1} = 4$

42 ▼▼▼ **Observa:**

$\mathbf{1 + 3 = 4 = 2^2}$

$\mathbf{1 + 3 + 5 = 9 = 3^2}$

$\mathbf{1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2}$

¿Cuál será el valor de 1 + 3 + 5 + … + 19? ¿Y de 1 + 3 + 5 + … + ***n*****?**

Expresa con palabras esta propiedad y demuéstrala.

$1 + 3 + 5 + \ldots + 19$ es la suma de los 10 primeros términos de la progresión 1, 3, 5, 7…
$a_n = 2n - 1$

$S_{10} = \dfrac{1 + 19}{2} \cdot 10 = 100 = 10^2$

$1 + 3 + 5 + \ldots + n \to S_n = \dfrac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = n^2$

La suma de los n primeros números impares es igual a n^2.

43 ▼▼▽ **Observa la expresión:**

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Completa con palabras: “*El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero más…*”.

Demuéstrala.

El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero, más el triple del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

Demostración:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) =$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

Reflexiona sobre la teoría

44 ▼▽▽ **¿Cuándo se dice que un número es raíz de un polinomio?**

Comprueba si 3 es raíz de alguno de estos polinomios:

$P = x^3 - 2x^2 + x - 12$

$Q = x^3 - 5x^2 - 7x$

$R = (x^4 - 5x + 10)(x - 3)$

¿Es 0 raíz de alguno de los polinomios anteriores?

Cuando al sustituir x por ese número, el valor del polinomio es 0.

$P = 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 - 12 = 27 - 18 + 3 - 12 = 0 \;\rightarrow\;$ 3 es raíz de P.

$Q = 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 = 27 - 45 - 21 \neq 0 \;\rightarrow\;$ 3 no es raíz de Q.

$R = (3^4 - 5 \cdot 3^3 + 10)\,(3 - 3) = 0 \;\rightarrow\;$ 3 es raíz de R.

45 ▼▽▽ **¿Cuál debe ser el valor de k para que –2 sea raíz del polinomio $x^3 - 5x^2 - 7x + k$? Justifica tu respuesta.**

Para que –2 sea raíz de ese polinomio, al dar a x ese valor el polinomio debe ser igual a 0. Por tanto:

$(-2)^3 - 5\,(-2)^2 - 7\,(-2) + k = 0 \;\rightarrow\; -8 - 20 + 14 + k = 0 \;\rightarrow\; k = 14$

46 ▼▽▽ **¿Cuál es el resultado de multiplicar una fracción por su inversa?**

Compruébalo con $\dfrac{x}{x+2}$ y su inversa.

El producto de una fracción por su inversa es igual a 1.

$$\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x} = \frac{x(x+2)}{(x+2)x} = 1$$

47 ▼▼▽ **a) Simplifica la expresión $(a + 1)^2 - (a - 1)^2$.**

b) Halla, sin utilizar la calculadora, el valor de: $2\,501^2 - 2\,499^2$

a) $(a + 1)^2 - (a - 1)^2 = (a^2 + 1 + 2a) - (a^2 + 1 - 2a) = a^2 + 1 + 2a - a^2 - 1 + 2a = 4a$

b) $2\,501^2 - 2\,499^2 = 4 \cdot 2\,500 = 10\,000$

48 ▼▼▽ **Averigua cuál debe ser el valor de a, en cada caso, para que las dos expresiones sean idénticas:**

a) $(3x + a)(3x - a) + 7$ y $9x^2 - 18$ b) $(x - a)^2 + 2xa - 46$ y $x^2 + 18$

a) $(3x + a)(3x - a) + 7 = 9x^2 - a^2 + 7$

Si $9x^2 - a^2 + 7 = 9x^2 - 18 \;\rightarrow\; -a^2 + 7 = -18 \;\rightarrow\; a^2 = 25$ $\begin{cases} a = 5 \\ a = -5 \end{cases}$

b) $(x - a)^2 + 2xa - 46 = x^2 + a^2 - 2xa + 2xa - 46 = x^2 + a^2 - 46$

Si $x^2 + a^2 - 46 = x^2 + 18 \;\rightarrow\; a^2 - 46 = 18 \;\rightarrow\; a^2 = 64$ $\begin{cases} a = 8 \\ a = -8 \end{cases}$

49 ▼▽▽ **¿Cuáles de las siguientes expresiones es una identidad? Justifícalo.**

a) $\sqrt{9x^2} = 3x$

b) $x(x + 1) = x^2 + 1$

c) $(x - 5)^2 = x^2 - 25$

a) Es una identidad: $\sqrt{9x^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2} = 3x$

b) y c) no son identidades.

50 ▼▼▽ **Expresa con palabras cada una de las siguientes relaciones:**

a) $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

b) $x(x + 1) = x^2 + x$

c) $x^2 \geq 0$

a) La raíz del cociente de dos números es igual al cociente de las raíces de esos números.

b) El producto de un número por el que le sigue es igual al cuadrado de ese número más él mismo.

c) El cuadrado de un número cualquiera es siempre mayor o igual que 0.

Soluciones a “Y para terminar”

PÁGINA 90

▼ Utiliza tu ingenio

De lógica

Cinco atletas comentan a su entrenador el resultado de la última carrera:

CARMEN: **Esta vez he llegado delante de Amaya.**

AMAYA: **Tina ha llegado detrás de Rosa.**

TINA: **Rosa no ha ganado.**

ROSA: **Carmen ha llegado la cuarta.**

LUISA: **Hoy hacía un día estupendo para correr.**

¿Cuál ha sido el orden de llegada?

Utilizaremos una tabla para ir resumiendo la información:

— Carmen ha llegado la cuarta.

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª
			Carmen	

— Esta vez he llegado delante de Amaya.

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª
			Carmen	Amaya

— Tina ha llegado detrás de Rosa.

— Rosa no ha ganado.

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª
	Rosa	Tina	Carmen	Amaya

Por tanto:

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª
Luisa	Rosa	Tina	Carmen	Amaya

4 Soluciones a “Y para terminar”

PÁGINA 91

▼ Investiga

Un triángulo curioso

Esta colección de números que se abre indefinidamente hacia abajo tiene multitud de regularidades curiosas, pero, antes que nada, averigua cómo se construye.

¿Podrías completar las casillas vacías?

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 ? ?
? ? 10 ? ? ?
....

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
....

- **Suma los números de cada fila y completa la tabla:**

1 1 → S_1
1 2 1 → S_2
1 3 3 1 → S_3
1 4 6 4 1 → S_4
....
1 n .... n 1 → S_n

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	…	S_n
2	**4**	**8**			**…**	

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	…	S_n
2	4	8	16	32	…	2^n

Escribe una expresión algebraica para calcular la suma de los términos de la fila enésima, S_n.

- **Fíjate en estas tres escaleras de números:**

1 1
1 2 1
1 3 3
1 4 6
1 5 10
....
1 n ? ....

Observa que:

$3 = 1 + 2$

$6 = 1 + 2 + 3$

$10 = ...$

¿Cuál es el tercer número de la 6.ª fila? | 1 | 6 | ? |

¿Y el de la número 20 (vigésima)? | 1 | 20 | ? |

Escribe una expresión algebraica para la tercera casilla de la enésima fila: | 1 | n | ? |

Los números de la tercera escalera coinciden con las sucesivas sumas de los primeros números naturales.

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 2 = 3$

$a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Así: $a_{20} = 1 + 2 + \dots + 20 = \dfrac{(1 + 20) \cdot 20}{2} = 210$

Y, por fin: $a_n = \dfrac{(1 + n) \cdot n}{2}$

Soluciones a la Autoevaluación

PÁGINA 91

¿Sabes expresar algebraicamente un enunciado?

1 **Escribe en lenguaje algebraico:**

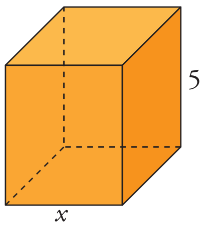
a) Si gasto los $\frac{2}{5}$ de lo que tengo, me quedan 12 €.

b) La mitad del resultado de sumar 5 unidades al triple de un número.

a) Tengo $x \rightarrow x - \frac{2}{5}x = 12$

b) Número $x \rightarrow \frac{3x+5}{2}$

2 **Expresa algebraicamente el área total y el volumen de un prisma de base cuadrada de lado x y de 5 cm de altura.**



Área total $= 2x^2 + 4 \cdot 5x = 2x^2 + 20x$

Volumen $= x^2 \cdot 5 = 5x^2$

¿Identificas una identidad entre varias expresiones algebraicas?

3 **¿Cuál de las siguientes expresiones es una identidad? Justifícalo.**

a) $(2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$ **b) $(x-1)^2 - 2x = x^2 - 1$** **c) $8x - 5 = 3x$**

a) Es una identidad.

$(2x-1)(2x+1) = 4x^2 + 2x - 2x - 1 = 4x^2 - 1$

b) No es una identidad.

$(x-1)^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 2x^2 = x^2 - 4x + 1 \neq x^2 - 1$

c) No es una identidad.

Solo es verdadera si $x = 1$.

¿Operas con polinomios con agilidad y eficacia?

4 **Efectúa y reduce:**

a) $x(3x-2) - (x-3)(2x-1)$ **b) $4\left[(x-2)^2 - \frac{3}{4}x^2 - 4\right]$**

a) $x(3x-2) - (x-3)(2x-1) = 3x^2 - 2x - (2x^2 - x - 6x + 3) =$

$= 3x^2 - 2x - 2x^2 + x + 6x - 3 = x^2 + 5x - 3$

b) $4\left[(x-2)^2 - \frac{3}{4}x^2 - 4\right] = 4\left[x^2 - 4x + 4 - \frac{3}{4}x^2 - 4\right] = 4x^2 - 16x + 16 - 3x^2 - 16 = x^2 - 16x$

Soluciones a la Autoevaluación

5 **Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica:**

$$\frac{5(x-1)}{9}+\frac{7x-2}{12}-\frac{x(x+1)}{2}$$

$$\frac{5(x-1)}{9}+\frac{7x-2}{12}-\frac{x(x+1)}{2} \to 36\left[\frac{5x-5}{9}+\frac{7x-2}{12}-\frac{x^2+x}{2}\right]=$$

$$= 4(5x-5)+3(7x-2)-18(x^2+x) = 20x-20+21x-6-18x^2-18x = -18x^2+23x-26$$

¿Manejas con soltura las identidades notables?

6 **Escribe como cuadrado de una suma o de una diferencia: $9-12x+4x^2$.**

$9-12x+4x^2=(2x-3)^2$

7 **Expresa como producto: $9x^3-x$.**

$9x^3-x=x(9x^2-1)=x(3x+1)(3x-1)$

¿Sabes operar con fracciones algebraicas sencillas?

8 **Simplifica: $\frac{3x-3}{x^2-x}$**

$$\frac{3x-3}{x^2-x}=\frac{3(x-1)}{x(x-1)}=\frac{3}{x}$$

9 **Efectúa: $\frac{3-x}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{x+5}{2x}$**

$$\frac{3-x}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{x+5}{2x}=\frac{2(3-x)+2x-x(x+5)}{2x^2}=\frac{6-2x+2x-x^2-5x}{2x^2}=\frac{-x^2-5x+6}{2x^2}$$

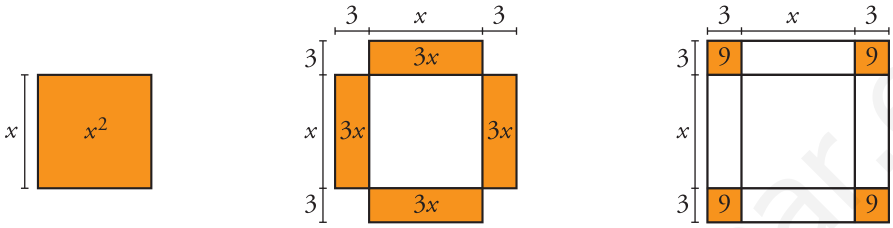
5 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 93

PARA EMPEZAR…

▼ Resolución de ecuaciones al estilo árabe

Observa cómo resolvían los árabes, geométricamente, algunas ecuaciones de segundo grado: las del tipo $x^2 + px = q$. Por ejemplo, $x^2 + 12x = 64$:



ÁREA: x^2 ÁREA: $x^2 + 12x (= 64)$ ÁREA: $64 + 4 \cdot 9 = 100$

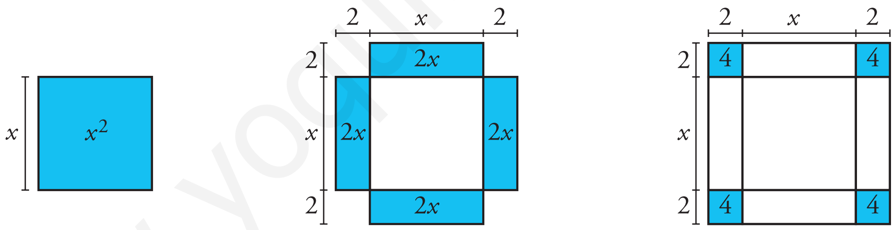
El área del último cuadrado es 100. Su lado es 10.

$3 + x + 3 = 10 \rightarrow x = 4$

■ **Revisa minuciosamente todos los pasos anteriores y resuelve del mismo modo estas ecuaciones:**

a) $x^2 + 8x = 84$ **b) $x^2 + 20x = 169$**

a) $x^2 + 8x = 84$

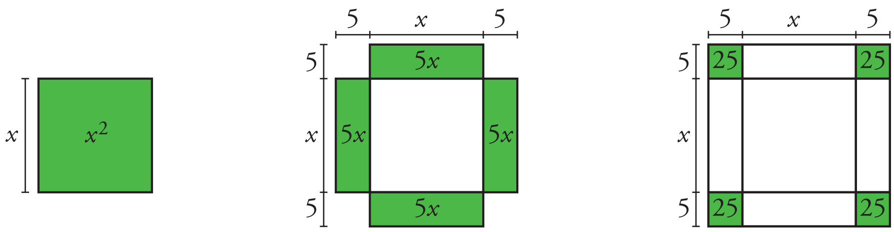


ÁREA: x^2 ÁREA: $x^2 + 8x (= 84)$ ÁREA: $84 + 4 \cdot 4 = 100$

El área del último cuadrado es 100. Por tanto, su lado mide 10. Así:

$2 + x + 2 = 10 \rightarrow x = 6$

b) $x^2 + 20x = 169$



ÁREA: x^2 ÁREA: $x^2 + 20x (= 169)$ ÁREA: $169 + 4 \cdot 25 = 269$

El área del último cuadrado es 269. Por tanto, su lado mide 16,4.

$5 + x + 5 = 16,4 \rightarrow x = 6,4$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

▼ Traduce a lenguaje simbólico

Según la mitología griega, un epitafio sobre la tumba de Diofanto de Alejandría reza, más o menos, así:

Su juventud ocupó la sexta parte de su vida. Durante la siguiente doceava parte, su mejilla se cubrió de vello. Pasó una séptima parte más antes de casarse. Cinco años después tuvo un hijo. Este murió a la mitad de la edad que alcanzó su padre. Diofanto aún vivió cuatro años después de la muerte de su hijo.

■ **Traduce, paso a paso, a lenguaje algebraico, la descripción de la vida de Diofanto y comprueba que murió con 84 años.**

■ Supongamos que la vida entera de Diofanto duró x años. Entonces:

- Juventud: $\frac{x}{6}$
- Su mejilla se cubrió de vello: $+\frac{x}{12}$
- Antes de casarse: $+\frac{x}{7}$
- Tuvo un hijo: $+5$
- Su hijo murió a los $\frac{x}{2}$ años.
- Diofanto vivió luego: $+4$

Por tanto, Diofanto vivió:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \to x = \frac{14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336}{84} \to$$

$$\to x = \frac{75x + 756}{84} \to$$

$$\to 84x = 75x + 756 \to 9x = 756 \to x = 84$$

Diofanto vivió 84 años.

5 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 94

1 ¿Es 5 solución de alguna de las siguientes ecuaciones? Justifica tu respuesta:

a) $8x + 3 = 11x - 12$
b) $x^4 - x^3 = 500$
c) $3x - 7 = x^2 - 10$
d) $1^x = 5$
e) $x^2 - 12 = 4x - 7$
f) $2^{x-1} = 16$
g) $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 161$
h) $10x + 25 = x^3$
i) $x^2 - 20 = 2x - 5$
j) $\sqrt{3x + 1} = 16$
k) $(2x - 3)^2 = 144$
l) $3(x^2 + 3) - 84 = 0$

a) $\left.\begin{array}{l} 8 \cdot 5 + 3 = 43 \\ 11 \cdot 5 - 12 = 43 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ es solución de la ecuación.

b) $\left.\begin{array}{l} 5^4 - 5^3 = 500 \\ 500 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ es solución de la ecuación.

c) $\left.\begin{array}{l} 3 \cdot 5 - 7 = 8 \\ 5^2 - 10 = 15 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ no es solución de la ecuación.

d) $\left.\begin{array}{l} 1^5 = 1 \\ 5 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ no es solución de la ecuación.

e) $\left.\begin{array}{l} 5^2 - 12 = 13 \\ 4 \cdot 5 - 7 = 13 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ es solución de la ecuación.

f) $\left.\begin{array}{l} 2^{5-1} = 16 \\ 16 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ es solución de la ecuación.

g) $\left.\begin{array}{l} 5^3 + 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 161 \\ 161 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ es solución de la ecuación.

h) $\left.\begin{array}{l} 10 \cdot 5 + 25 = 75 \\ 5^3 = 125 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ no es solución de la ecuación.

i) $\left.\begin{array}{l} 5^2 - 20 = 5 \\ 2 \cdot 5 - 5 = 5 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ es solución de la ecuación.

j) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{3 \cdot 5 + 1} = 4 \\ 16 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ no es solución de la ecuación.

k) $\left.\begin{array}{l} (2 \cdot 5 - 3)^2 = 49 \\ 144 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ no es solución de la ecuación.

l) $\left.\begin{array}{l} 3(5^2 + 3) - 84 = 0 \\ 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ es solución de la ecuación.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

2 **En el ejercicio anterior hay varias ecuaciones polinómicas. Escríbelas y di cuál es su grado.**

a) $8x + 3 = 11x - 12$	Ecuación polinómica de grado 1.
b) $x^4 - x^3 = 500$	Ecuación polinómica de grado 4.
c) $3x - 7 = x^2 - 10$	Ecuación polinómica de grado 2.
e) $x^2 - 12 = 4x - 7$	Ecuación polinómica de grado 2.
g) $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 161$	Ecuación polinómica de grado 3.
h) $10x + 25 = x^3$	Ecuación polinómica de grado 3.
i) $x^2 - 20 = 2x - 5$	Ecuación polinómica de grado 2.
k) $(2x - 3)^2 = 144$	Ecuación polinómica de grado 2.
l) $3(x^2 + 3) - 84 = 0$	Ecuación polinómica de grado 2.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 95

3 **Tanteando, halla la solución entera de las siguientes ecuaciones:**

a) $x^3 + x^2 = 150$

b) $3^x = 2\,187$

c) $x^x = 46\,656$

d) $\sqrt{7x + 4} = 9$

e) $5^{x+1} = 15\,625$

f) $\sqrt{x - 12} = x - 8$

a) Si $x = 4$, entonces $4^3 + 4^2 = 64 + 16 = 80$. Por tanto, la solución no es válida.

Sin embargo, si $x = 5$, entonces $5^3 + 5^2 = 125 + 25 = 150$. Luego $x = 5$ es la solución.

b) Si $x = 5$, entonces $3^5 = 243$. Por tanto, la solución no es válida.

Si $x = 6$, entonces $3^6 = 729$. Por tanto, la solución no es válida.

Sin embargo, si $x = 7$, entonces $3^7 = 2\,187$. Luego $x = 7$ es la solución.

c) Si $x = 7$, entonces $7^7 = 823\,543$. Por tanto, la solución no es válida.

Si $x = 6$, entonces $6^6 = 46\,656$. Luego $x = 6$ es la solución.

d) A esta solución es fácil llegar, ya que lo de dentro de la raíz debe valer 81 para que al hacer la raíz salga 9. Si probamos con $x = 10$, tendríamos 74 dentro de la raíz, que no vale. Sin embargo, con $x = 11$, obtenemos $77 + 4 = 81$, por lo tanto, $x = 11$ es la solución.

e) Si $x = 6$, entonces $5^{6+1} = 5^7 = 78\,125$. Por tanto, la solución no es válida.

Si $x = 5$, entonces $5^{5+1} = 5^6 = 15\,625$. Luego $x = 5$ es la solución.

f) Lo primero que vemos es que $x > 12$, ya que si no saldría la raíz de un número negativo, lo cual es imposible. Si probamos con $x = 13$, tendríamos $1 = 5$, que no vale. Si probamos con $x = 16$, tendríamos $2 = 8$, que no vale. Podemos observar que según probemos con números más altos, más dispares van a ser las igualdades. Podemos concluir que esta ecuación no tiene solución.

4 **Encuentra la solución, aproximando hasta las décimas, de las siguientes ecuaciones. Hazlo por tanteo, ayudándote de la calculadora.**

a) $x^3 + 1 = 100$

b) $x^5 = 1\,500$

c) $x^6 - 40 = 1\,460$

d) $x^3 + x^2 = 200$

e) $x^3 - x^2 = 200$

a) Es lo mismo que hallar $x^3 = 99$.

Damos valores enteros a x:

$4^3 = 65 < 99$

$5^3 = 126 > 99$

Por tanto, x es mayor que 4 y menor que 5.

Damos a x los valores 4,5; 4,6; 4,7…

$4{,}5^3 = 92{,}125 < 99$

$4{,}6^3 = 98{,}336 < 99$

$4{,}7^3 = 104{,}823 > 99$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 4{,}6$.

b) Damos valores enteros a x:

$4^5 = 1\,024 < 1\,500$

$5^5 = 3\,125 > 1\,500$

Por tanto, x es mayor que 4 y menor que 5.

Damos a x los valores 4,2; 4,3; 4,4…

$4{,}2^5 = 1\,306{,}912\ldots < 1\,500$

$4{,}3^5 = 1\,470{,}084\ldots < 1\,500$

$4{,}4^5 = 1\,649{,}162\ldots > 1\,500$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 4{,}3$.

c) Es lo mismo que hallar $x^6 = 1\,500$.

Damos valores enteros a x:

$3^6 = 729 < 1\,500$

$4^5 = 4\,096 > 1\,500$

Por tanto, x es mayor que 3 y menor que 4.

Damos a x los valores 3,3; 3,4; 3,5…

$3{,}3^6 = 1\,291{,}467\ldots < 1\,500$

$3{,}4^6 = 1\,544{,}804\ldots > 1\,500$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 3{,}3$.

d) Damos valores enteros a x:

$5^3 + 5^2 = 150 < 200$

$6^3 + 6^2 = 252 > 200$

Por tanto, x es mayor que 5 y menor que 6.

Damos a x los valores 5,3; 5,4; 5,5…

$5{,}3^3 + 5{,}3^2 = 176{,}967 < 200$

$5{,}4^3 + 5{,}4^2 = 186{,}624 < 200$

$5{,}5^3 + 5{,}5^2 = 196{,}625 < 200$

$5{,}6^3 + 5{,}6^2 = 206{,}976 > 200$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 5{,}5$.

e) Damos valores enteros a x:

$6^3 - 6^2 = 180 < 200$

$7^3 - 7^2 = 294 > 200$

Por tanto, x es mayor que 6 y menor que 7.

Damos a x los valores 6,1; 6,2; 6,3…

$6{,}1^3 - 6{,}1^2 = 189{,}771 < 200$

$6{,}2^3 - 6{,}2^2 = 199{,}888 < 200$

$6{,}3^3 - 6{,}3^2 = 210{,}357 > 200$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 6{,}2$.

5 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 97

1 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{3x}{15} - x = -\frac{3x}{3} + \frac{9}{5}$

b) $\frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{4x}{27} = \frac{11}{27} - \frac{x}{9}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x-3}{8} + \frac{2x+2}{16} = \frac{x-2}{2}$

d) $\frac{13+x}{20} - \frac{5x}{2} = \frac{10+x}{5} + \frac{1-12x}{10}$

e) $3x - \frac{x+3}{4} = 13$

f) $4 - \frac{x+2}{4} = x - 4$

g) $\frac{x}{2} - \frac{2(x+2)}{7} = \frac{x-3}{4}$

h) $\frac{1-x}{25} - \frac{x}{6} + \frac{x+7}{9} = \frac{2}{5} - \frac{3x}{15}$

i) $\frac{(1+x)^2}{5} = \frac{2x+4}{25} + \frac{x^2}{5} + \frac{1}{5}$

j) $\frac{x-4}{8} + \frac{9-x}{12} - \frac{2x-7}{24} + 5 = x - 8$

k) $x + \frac{9(5+x)}{5} = 9 - x$

l) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{4} = \frac{3(4x^2+1)}{12} - x$

m) $(x-3)(x+3) = \frac{3(x-1)}{2} + x^2$

n) $\frac{x-7}{4} + \frac{25(x-2)}{3} = \frac{5x+35}{4} + \frac{5}{2}(x-7)$

a) $\frac{3x}{15} - x = -\frac{3x}{3} + \frac{9}{5}$

$3x - 15x = -15x + 27$

$3x - 15x + 15x = 27$

$3x = 27$

$x = 9$

b) $\frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{4x}{27} = \frac{11}{27} - \frac{x}{9}$

$9x + 3x - 4x = 11 - 3x$

$9x + 3x - 4x + 3x = 11$

$11x = 11$

$x = 1$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x-3}{8} + \frac{2x+2}{16} = \frac{x-2}{2}$

$8x + 2(x-3) + 2x + 2 = 8(x-2)$

$8x + 2x - 6 + 2x + 2 = 8x - 16$

$8x + 2x + 2x - 8x = -16 + 6 - 2$

$4x = -12$

$x = -3$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

d) $\dfrac{13+x}{20} - \dfrac{5x}{2} = \dfrac{10+x}{5} + \dfrac{1-12x}{10}$

$13 + x - 50x = 4(10 + x) + 2(1 - 12x)$

$13 + x - 50x = 40 + 4x + 2 - 24x$

$x - 50x - 4x + 24x = 40 + 2 - 13$

$-29x = 29$

$x = -1$

e) $3x - \dfrac{x+3}{4} = 13$

$12x - (x + 3) = 52$

$12x - x - 3 = 52$

$12x - x = 52 + 3$

$11x = 55$

$x = 5$

f) $4 - \dfrac{x+2}{4} = x - 4$

$16 - (x + 2) = 4(x - 4)$

$16 - x - 2 = 4x - 16$

$-x - 4x = -16 - 16 + 2$

$-5x = -30$

$x = 6$

g) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{2(x+2)}{7} = \dfrac{x-3}{4}$

$14x - 8(x + 2) = 7(x - 3)$

$14x - 8x - 16 = 7x - 21$

$14x - 8x - 7x = -21 + 16$

$-x = -5$

$x = 5$

h) $\dfrac{1-x}{25} - \dfrac{x}{6} + \dfrac{x+7}{9} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{3x}{15}$

$18(1 - x) - 75x + 50(x + 7) = 180 - 90x$

$18 - 18x - 75x + 50x + 350 = 180 - 90x$

$-18x - 75x + 50x + 90x = 180 - 18 - 350$

$47x = -188$

$x = -4$

i) $\dfrac{(1+x)^2}{5} = \dfrac{2x+4}{25} + \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{1}{5}$

$5(1+x)^2 = 2x + 4 + 5x^2 + 5$

$5(1 + 2x + x^2) = 2x + 5x^2 + 9$

$5 + 10x + 5x^2 = 2x + 5x^2 + 9$

$10x + 5x^2 - 2x - 5x^2 = 9 - 5$

$8x = 4 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$

j) $\dfrac{x-4}{8} + \dfrac{9-x}{12} - \dfrac{2x-7}{24} + 5 = x - 8$

$3(x-4) + 2(9-x) - (2x-7) + 120 = 24(x-8)$

$3x - 12 + 18 - 2x - 2x + 7 + 120 = 24x - 192$

$3x - 2x - 2x - 24x = -192 + 12 - 18 - 7 - 120$

$-25x = -325$

$x = 13$

k) $x + \dfrac{9(5+x)}{5} = 9 - x$

$5x + 9(5+x) = 5(9-x)$

$5x + 45 + 9x = 45 - 5x$

$5x + 9x + 5x = 45 - 45$

$19x = 0$

$x = 0$

l) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{4} = \dfrac{3(4x^2+1)}{12} - x$

$3(4x^2 - 1) = 3(4x^2 + 1) - 12x$

$12x^2 - 3 = 12x^2 + 3 - 12x$

$12x^2 - 12x^2 + 12x = 3 + 3$

$12x = 6$

$x = \dfrac{1}{2}$

m) $(x-3)(x+3) = \dfrac{3(x-1)}{2} + x^2$

$2(x^2 - 9) = 3(x-1) + 2x^2$

$2x^2 - 18 = 3x - 3 + 2x^2$

$2x^2 - 3x - 2x^2 = -3 + 18$

$-3x = 15$

$x = -5$

n) $\frac{x-7}{4} + \frac{25(x-2)}{3} = \frac{5x+35}{4} + \frac{5}{2}(x-7)$

$3(x-7) + 100(x-2) = 3(5x+35) + 30(x-7)$

$3x - 21 + 100x - 200 = 15x + 105 + 30x - 210$

$3x + 100x - 15x - 30x = 105 - 210 + 21 + 200$

$58x = 116$

$x = 2$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 98

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

d) $5x^2 - 7x + 3 = 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

f) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

g) $x^2 - 3x + 15 = 0$

h) $x^2 - 0{,}1x + 0{,}2 = 0$

a) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 3$ y $x_2 = 2$

b) $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{18} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \dfrac{-6 \pm 0}{18} \rightarrow x = \dfrac{-1}{3}$ Solución doble.

c) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{18} = \dfrac{6 \pm 0}{18} = \dfrac{1}{3}$ Solución doble.

d) $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{10} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 60}}{10} = \dfrac{7 \pm \sqrt{-11}}{10}$ No tiene solución.

e) $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \dfrac{-5 \pm 7}{4} \rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}$ y $x_2 = -3$

f) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{12} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \dfrac{5 \pm 1}{12} \rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}$ y $x_2 = \dfrac{1}{3}$

g) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 60}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-51}}{2}$ No tiene solución.

h) $x = \dfrac{0{,}1 \pm \sqrt{0{,}01 - 4 \cdot 1 \cdot 0{,}2}}{2} = \dfrac{0{,}1 \pm \sqrt{0{,}01 - 0{,}8}}{2} = \dfrac{0{,}1 \pm \sqrt{-0{,}79}}{2}$

No tiene solución.

PÁGINA 99

2 Resuelve:

a) $7x^2 - 28 = 0$

b) $7x^2 + 28 = 0$

c) $4x^2 - 9 = 0$

d) $3x^2 + 42x = 0$

e) $3x^2 = 42x$

f) $11x^2 - 37x = 0$

g) $2(x + 5)^2 + (x - 3)^2 = 14(x + 4)$

h) $7x^2 + 5 = 68$

a) $7x^2 - 28 = 0$

$7x^2 = 28$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4} \;\rightarrow\; x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

b) $7x^2 + 28 = 0$

$7x^2 = -28$

$x^2 = -4$

$x = \pm\sqrt{4}$ No tiene solución.

c) $4x^2 - 9 = 0$

$4x^2 = 9$

$x^2 = \frac{9}{4}$

$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \;\rightarrow\; x_1 = \frac{3}{2}$ y $x_2 = -\frac{3}{2}$

d) $3x^2 + 42x = 0$

$3x(x + 14) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0$ y $x_2 = -14$

e) $3x^2 = 42x$

$3x^2 - 42x = 0$

$3x(x - 14) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0$ y $x_2 = 14$

f) $11x^2 - 37x = 0$

$x(11x - 37) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{37}{11}$

g) $2(x + 5)^2 + (x - 3)^2 = 14x + 56$

$2(x^2 + 10x + 25) + (x^2 - 6x + 9) = 14x + 56$

$2x^2 + 20x + 50 + x^2 - 6x + 9 = 14x + 56$

$3x^2 + 3 = 0$

$x^2 = -1 \;\rightarrow\;$ No tiene solución.

h) $7x^2 + 5 = 68$

$7x^2 = 63$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9} \;\rightarrow\; x_1 = 3$ y $x_2 = -3$

PÁGINA 100

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(3x+4)(5x-7) = (2x+7)^2 + 53$ **b)** $\dfrac{x^2-3x}{2} + 2 = \dfrac{x+12}{6}$

c) $\dfrac{(x+1)^2}{2} - \dfrac{3(x-1)}{4} + \dfrac{3x(x+1)}{2} = \dfrac{3}{2}$ **d)** $3x(x+1) - \dfrac{(x-2)^2}{2} = (x+1)(x-1) + 15$

a) $(3x+4)(5x-7) = (2x+7)^2 + 53$

$15x^2 - 21x + 20x - 28 = 4x^2 + 28x + 49 + 53$

$15x^2 - 4x^2 - 21x + 20x - 28x - 28 - 49 - 53 = 0$

$11x^2 - 29x - 130 = 0$

$$x = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 4 \cdot 11 \cdot (-130)}}{22} = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 5\,720}}{22} = \frac{29 \pm \sqrt{6\,561}}{22} =$$

$$= \frac{29 \pm 81}{22} \rightarrow x_1 = 5 \text{ y } x_2 = \frac{-52}{22} = \frac{-26}{11}$$

b) $\dfrac{x^2-3x}{2} + 2 = \dfrac{x+12}{6}$

$3(x^2 - 3x) + 12 = x + 12$

$3x^2 - 9x + 12 - x - 12 = 0$

$3x^2 - 10x = 0 \rightarrow x(3x-10) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \text{ y } x_2 = \dfrac{10}{3}$

c) $\dfrac{(x+1)^2}{2} - \dfrac{3(x-1)}{4} + \dfrac{3x(x+1)}{2} = \dfrac{3}{2}$

$2(x+1)^2 - 3(x-1) + 6x(x+1) = 6$

$2(x^2 + 2x + 1) - 3x + 3 + 6x^2 + 6x = 6$

$2x^2 + 4x + 2 - 3x + 3 + 6x^2 + 6x - 6 = 0$

$8x^2 + 7x - 1 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 8 \cdot (-1)}}{16} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{16} = \frac{-7 \pm 9}{16} \rightarrow x_1 = \frac{1}{8} \text{ y } x_2 = -1$$

d) $3x(x+1) - \dfrac{(x-2)^2}{2} = (x+1)(x-1) + 15$

$3x^2 + 3x - \dfrac{(x-2)^2}{2} = x^2 - x + x - 1 + 15$

$6x^2 + 6x - x^2 + 4x - 4 = 2x^2 - 2x + 2x - 2 + 30$

$3x^2 + 10x - 32 = 0$

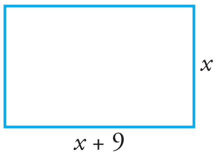
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot (-32)}}{6} = \frac{-10 \pm \sqrt{484}}{6} = \frac{-10 \pm 22}{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = 2 \text{ y } x_2 = \frac{-32}{6} = \frac{-16}{3}$$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 101

1 La base de un rectángulo es 9 cm mayor que su altura. Su área mide 400 cm². Calcula las dimensiones de este rectángulo.



$$x \cdot (x + 9) = 400$$

$$x^2 + 9x - 400 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = -25 \end{cases}$$

- $x_1 = 16$ La altura es de 16 cm y la base es de 16 + 9 = 25 cm.
- $x_2 = -25$ No es una solución válida, porque los lados no pueden tener una medida negativa.

2 Al mezclar 60 kg de café de 7,20 €/kg con café superior de 9,60 €/kg, resulta una mezcla de 8,70 €/kg. ¿Cuánto café superior se ha utilizado?

Coste café barato + Coste café superior = Coste de la mezcla

$60 \cdot 7{,}20 + x \cdot 9{,}60 = (60 + x) \cdot 8{,}70$

$0{,}9x = 90 \rightarrow x = 100$

Se han utilizado 100 kg de café superior.

PÁGINA 102

Practica

Ecuaciones: soluciones por tanteo

1 ▼▽▽ **¿Es 3 ó –2 solución de alguna de las siguientes ecuaciones? Compruébalo.**

a) $\dfrac{3-x}{5} + \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{3}$ **b)** $2^x + 2^{x-1} - 2^{x+1} = -4$

c) $\sqrt{14-x} = 4$ **d)** $(2-x)^3 + 3x = x^2 - 1$

a) $x = 3 \rightarrow \dfrac{3-3}{5} + \dfrac{3}{3} \neq \dfrac{1}{3} \rightarrow 0 + 1 \neq \dfrac{1}{3} \rightarrow$ 3 no es solución.

$x = -2 \rightarrow \dfrac{3-(-2)}{5} + \dfrac{-2}{3} = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \rightarrow$ –2 sí es solución.

b) $x = 3 \rightarrow 2^3 + 2^2 - 2^4 = 8 + 4 - 16 = -4 \rightarrow$ 3 es solución.

$x = -2 \rightarrow 2^{-2} + 2^{-3} - 2^{-1} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2} \neq -4 \rightarrow$ –2 no es solución.

c) $x = 3 \rightarrow \sqrt{14-3} \neq 4 \rightarrow$ 3 no es solución.

$x = -2 \rightarrow \sqrt{14-(-2)} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow$ –2 es solución.

d) $x = 3 \rightarrow \left.\begin{array}{l}(2-3)^3 + 3 \cdot 3 = -1 + 9 = 8 \\ 3^2 - 1 = 8\end{array}\right\} \rightarrow$ 3 es solución.

$x = -2 \rightarrow \left.\begin{array}{l}(2-(-2))^3 + 3(-2) = 64 - 6 = 58 \\ (-2)^2 - 1 = 3\end{array}\right\} \rightarrow$ –2 no es solución.

2 ▼▽▽ Resuelto en el libro del alumno.

3 ▼▽▽ **Resuelve mentalmente y explica el proceso que has seguido.**

a) $(x-2)^2 = 100$ **b)** $7 - \dfrac{x+2}{3} = 4$

c) $\dfrac{5x-13}{4} = 3$ **d)** $\dfrac{x^4+2}{3} = 6$

e) $3 - 2^{x-5} = 2$ **f)** $\sqrt{x-7} = 5$

a) $x - 2$ puede ser 10 o –10 $\left\langle \begin{array}{l} 2x - 2 = 10 \rightarrow x = 12 \\ x - 2 = -10 \rightarrow x = -8 \end{array}\right.$

b) $\dfrac{x+2}{3}$ tiene que ser igual a 3 $\rightarrow$ $x + 2$ tiene que valer 9 $\rightarrow$ $x = 7$

c) $5x - 13$ tiene que ser igual a 12 $\rightarrow$ $5x$ tiene que ser igual a 25 $\rightarrow$ $x = 5$

d) $x^4 + 2$ tiene que ser igual a 18 $\rightarrow$ x^4 tiene que valer 16 $\rightarrow$ $x = 2$ o $x = -2$

e) 2^{x-5} tiene que valer 1 $\rightarrow$ $x - 5$ tiene que ser igual a 0 $\rightarrow$ $x = 5$

f) $x - 7$ tiene que ser 25 $\rightarrow$ $x = 32$

4 ▼▽▽ **Busca por tanteo una solución exacta de cada una de las siguientes ecuaciones:**

a) $3^{x-5} = 27$ **b)** $\sqrt{x+9} = 13$

c) $(x+1)^3 = 216$ **d)** $x^3 - x^2 - x = 15$

a) $x = 8$ b) $x = 160$

c) $x = 5$ d) $x = 3$

5 ▼▼▽ **Busca por tanteo una solución aproximada de las siguientes ecuaciones:**

a) $x^3 = 381$ **b)** $x^4 - x^2 = 54$ **c)** $x - \sqrt{x+5} = 0$

d) $3^{x-1} = 0{,}005$ **e)** $5^x = 0{,}32$ **f)** $x^{0{,}75} = 17$

a) $x \approx 7{,}25$ b) $x \approx 4{,}14$ c) $x \approx 3$

d) $x \approx -4$ e) $x \approx -0{,}7$ f) $x \approx 44$

Ecuaciones de primer grado

6 ▼▽▽ **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución de cada una:**

a) $3x - 2(x+3) = x - 3(x+1)$

b) $4 + x - 4(1-x) + 5(2+x) = 0$

c) $2x + 7 - 2(x-1) = 3(x+3)$

d) $4(2x-7) - 3(3x+1) = 2 - (7-x)$

a) $3x - 2(x+3) = x - 3(x+1) \rightarrow 3x - 2x - 6 = x - 3x - 3 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$

Comprobación: $3 \cdot 1 - 2(1+3) = 1 - 3(1+1) \rightarrow -5 = -5$

b) $4 + x - 4(1-x) + 5(2+x) = 0 \rightarrow 4 + x - 4 + 4x + 10 + 5x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 10x = -10 \rightarrow x = -1$

Comprobación: $4 - 1 - 4(1+1) + 5(2-1) = 4 - 1 - 8 + 5 = 0$

c) $2x + 7 - 2(x-1) = 3(x+3) \rightarrow 2x + 7 - 2x + 2 = 3x + 9 \rightarrow 0 = 3x \rightarrow x = 0$

Comprobación: $2 \cdot 0 + 7 - 2(0-1) = 3 \cdot (0+3) \rightarrow 9 = 9$

d) $4(2x-7) - 3(3x+1) = 2 - (7-x) \rightarrow 8x - 28 - 9x - 3 = 2 - 7 + x \rightarrow$

$\rightarrow -2x = 26 \rightarrow x = -13$

Comprobación: $4[2(-13) - 7] - 3[3(-13) + 1] = 2 - [7 - (-13)] \rightarrow$

$\rightarrow -132 + 114 = 2 - 20 \rightarrow -18 = -18$

7 ▼▽▽ **Comprueba si estas dos ecuaciones son equivalentes:**

$$\mathbf{2(x-1)+x+1=2x+1}$$

$$\mathbf{2x-1-(x-1)=2(3x-5)}$$

- $2(x-1)+x+1=2x+1 \;\rightarrow\; 2x-2+x+1=2x+1 \;\rightarrow\; x=2$
- $2x-1-(x-1)=2(3x-5) \;\rightarrow\; 2x-1-x+1=6x-10 \;\rightarrow\; -5x=-10 \;\rightarrow\; x=2$

Son equivalentes, porque tienen la misma solución.

8 ▼▽▽ **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\mathbf{2(2-3x)-3(3-2x)=4(x+1)+3(4-5x)}$

b) $\mathbf{\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{x+1}{3}-2}$

c) $\mathbf{1=\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{x}{2}}$

d) $\mathbf{\dfrac{3x+4}{5}=\dfrac{x+2}{2}}$

e) $\mathbf{\dfrac{5x-16}{6}=-\dfrac{x+8}{12}+\dfrac{x+1}{3}}$

f) $\mathbf{\dfrac{2x-4}{3}=3-\dfrac{4+x}{2}}$

a) $2(2-3x)-3(3-2x)=4(x+1)+3(4-5x)$

$4-6x-9+6x=4x+4+12-15x \;\rightarrow\; 11x=21 \;\rightarrow\; x=\dfrac{21}{11}$

b) $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{x+1}{3}-2 \;\rightarrow\; 15\left(\dfrac{x-3}{5}\right)=15\left(\dfrac{x+1}{3}-2\right)$

$3(x-3)=5(x+1)-30 \;\rightarrow\; 3x-9=5x+5-30 \;\rightarrow\; 16=2x \;\rightarrow\; x=8$

c) $1=\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{x}{2} \;\rightarrow\; 6\cdot 1=6\left(\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{x}{2}\right) \;\rightarrow\; 6=2(x+3)-3x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 6=2x+6-3x \;\rightarrow\; x=0$

d) $\dfrac{3x+4}{5}=\dfrac{x+2}{2} \;\rightarrow\; 2(3x-4)=5(x+2) \;\rightarrow\; 6x-8=5x+10 \;\rightarrow\; x=18$

e) $\dfrac{5x-16}{6}=-\dfrac{x+8}{12}+\dfrac{x+1}{3} \;\rightarrow\; 12\left(\dfrac{5x-16}{6}\right)=12\left(-\dfrac{x+8}{12}+\dfrac{x+1}{3}\right) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2(5x-16)=-(x+8)+4(x+1) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 10x-32=-x-8+4x+4 \;\rightarrow\; 7x=28 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x=4$

f) $\dfrac{2x-4}{3}=3-\dfrac{4+x}{2} \;\rightarrow\; 6\left(\dfrac{2x-4}{3}\right)=6\left(3-\dfrac{4+x}{2}\right) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2(2x-4)=18-3(4+x) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 4x-8=18-12-3x \;\rightarrow\; 7x=14 \;\rightarrow\; x=2$

9 ▼▼▽ **Resuelve y comprueba la solución de cada una de las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{x+2}{2} - \dfrac{x+3}{3} = -\dfrac{x-4}{4} + \dfrac{x-5}{5}$

b) $\dfrac{3x+2}{5} - \dfrac{4x-1}{10} + \dfrac{5x-2}{8} = \dfrac{x+1}{4}$

c) $\dfrac{x+5}{5} - \dfrac{x+5}{24} = \dfrac{x+6}{10} + \dfrac{x+4}{60}$

a) $\dfrac{x+2}{2} - \dfrac{x+3}{3} = -\dfrac{x-4}{4} + \dfrac{x-5}{5} \;\to\; 60\left(\dfrac{x+2}{2} - \dfrac{x+3}{3}\right) = 60\left(-\dfrac{x-4}{4} + \dfrac{x-5}{5}\right)$

$30(x+2) - 20(x+3) = -15(x-4) + 12(x-5) \;\to$

$\to\; 30x + 60 - 20x - 60 = -15x + 60 + 12x - 60 \;\to$

$\to\; 37x = 0 \;\to\; x = 0$

Comprobación: $\dfrac{0+2}{2} - \dfrac{0+3}{3} = -\dfrac{0-4}{4} + \dfrac{-5}{5} \;\to\; 1 - 1 = 1 - 1 \;\to\; 0 = 0$

b) $\dfrac{3x+2}{5} - \dfrac{4x-1}{10} + \dfrac{5x-2}{8} = \dfrac{x+1}{4} \;\to\; 40\left(\dfrac{3x+2}{5} - \dfrac{4x-1}{10} + \dfrac{5x-2}{8}\right) = 40\left(\dfrac{x+1}{4}\right)$

$8(3x+2) - 4(4x-1) + 5(5x-2) = 10(x+1) \;\to$

$\to\; 24x + 16 - 16x + 4 + 25x - 10 = 10x + 10 \;\to$

$\to\; 23x = 0 \;\to\; x = 0$

Comprobación: $\dfrac{2}{5} - \dfrac{-1}{10} + \dfrac{-2}{8} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{x+5}{5} - \dfrac{x+5}{24} = \dfrac{x+6}{10} + \dfrac{x+4}{60} \;\to\; 120\left(\dfrac{x+5}{5} - \dfrac{x+5}{24}\right) = 120\left(\dfrac{x+6}{10} + \dfrac{x+4}{60}\right)$

$24(x+5) - 5(x+5) = 12(x+6) + 2(x+4) \;\to$

$\to\; 24x + 120 - 5x - 25 = 12x + 72 + 2x + 8 \;\to$

$\to\; 5x = -15 \;\to\; x = -3$

Comprobación: $\dfrac{-3+5}{5} - \dfrac{-3+5}{24} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{19}{60}$

$\dfrac{-3+6}{6} + \dfrac{-3+4}{60} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{60} = \dfrac{19}{60}$

10 ▼▼▽ **Comprueba que las siguientes ecuaciones son de primer grado y halla sus soluciones:**

a) $(4x-3)(4x+3) - 4(3-2x)^2 = 3x$

b) $2x(x+3) + (3-x)^2 = 3x(x+1)$

c) $(2x-3)^2 + (x-2)^2 = 3(x+1) + 5x(x-1)$

d) $\dfrac{x(x+1)}{2} - \dfrac{(2x-1)^2}{8} = \dfrac{3x+1}{4} - \dfrac{1}{8}$

a) $(4x-3)(4x+3)-4(3-2x)^2=3x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 16x^2-9-4(9+4x^2-12x)=3x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 16x^2-9-36-16x^2+48x=3x \;\rightarrow\; 45x=45 \;\rightarrow\; x=1$

b) $2x(x+3)+(3-x)^2=3x(x+1) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2x^2+6x+9+x^2-6x=3x^2+3x \;\rightarrow\; 9=3x \;\rightarrow\; x=3$

c) $(2x-3)^2+(x-2)^2=3(x+1)+5x(x-1) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 4x^2+9-12x+x^2+4-4x=3x+3+5x^2-5x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 13-16x=-2x+3 \;\rightarrow\; 10=14x \;\rightarrow\; x=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$

d) $\frac{x(x+1)}{2}-\frac{(2x-1)^2}{8}=\frac{3x+1}{4}-\frac{1}{8} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 8\left(\frac{x(x+1)}{2}-\frac{(2x-1)^2}{8}\right)=8\left(\frac{3x+1}{4}-\frac{1}{8}\right) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 4x(x-1)-(2x-1)^2=2(3x+1)-1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 4x^2-4x-(4x^2+1-4x)=6x+2-1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; -1=6x+1 \;\rightarrow\; -2=6x \;\rightarrow\; x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$

5

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 103

Ecuaciones de segundo grado

11 ▼▽▽ **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado sin utilizar la fórmula de resolución:**

a) $3x^2 - 12x = 0$ **b)** $x - 3x^2 = 0$

c) $2x^2 - 5x = 0$ **d)** $2x^2 - 8 = 0$

e) $9x^2 - 25 = 0$ **f)** $4x^2 + 100 = 0$

g) $16x^2 = 100$ **h)** $3x^2 - 6 = 0$

a) $3x^2 - 12x = 0 \;\to\; 3x(x-4) = 0 \left\langle \begin{matrix} x = 0 \\ x = 4 \end{matrix} \right.$

b) $x - 3x^2 = 0 \;\to\; x(1-3x) = 0 \left\langle \begin{matrix} x = 0 \\ x = 1/3 \end{matrix} \right.$

c) $2x^2 - 5x = 0 \;\to\; x(2x-5) = 0 \left\langle \begin{matrix} x = 0 \\ x = 5/2 \end{matrix} \right.$

d) $2x^2 - 8 = 0 \;\to\; 2x^2 = 8 \;\to\; x^2 = 4 \left\langle \begin{matrix} x = 2 \\ x = -2 \end{matrix} \right.$

e) $9x^2 - 25 = 0 \;\to\; 9x^2 = 25 \;\to\; x^2 = \dfrac{25}{9} \left\langle \begin{matrix} x = 5/3 \\ x = -5/3 \end{matrix} \right.$

f) $4x^2 + 100 = 0 \;\to\; 4x^2 = -100$ No tiene solución.

g) $16x^2 = 100 \;\to\; x^2 = \dfrac{100}{16} \left\langle \begin{matrix} x = 10/4 = 5/2 \\ x = -104 = -5/2 \end{matrix} \right.$

h) $3x^2 - 6 = 0 \;\to\; 3x^2 = 6 \;\to\; x^2 = 2 \left\langle \begin{matrix} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{matrix} \right.$

12 ▼▽▽ **Resuelve.**

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$ **b)** $x^2 + 9x + 20 = 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ **d)** $x^2 + x + 3 = 0$

e) $4x^2 + 28x + 49 = 0$ **f)** $x^2 - 2x + 3 = 0$

g) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ **h)** $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

a) $x^2 + 4x - 21 = 0 \;\to\; x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 21 \cdot 4}}{2} = \dfrac{-4 \pm 10}{2} \left\langle \begin{matrix} x = 3 \\ x = -7 \end{matrix} \right.$

b) $x^2 + 9x + 20 = 0 \;\to\; x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 20}}{2} = \dfrac{-9 \pm 1}{2} \left\langle \begin{matrix} x = -4 \\ x = -5 \end{matrix} \right.$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0 \;\to\; x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{18} = \dfrac{12 \pm 0}{18} = \dfrac{2}{3}$

d) $x^2 + x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3}}{2}$ No tiene solución.

e) $4x^2 + 28x + 49 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-28 \pm \sqrt{784 - 4 \cdot 4 \cdot 49}}{8} = \dfrac{-28 \pm 0}{8} = -\dfrac{7}{2}$

f) $x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3}}{2}$ No tiene solución.

g) $4x^2 - 20x + 25 = 0 \rightarrow x = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{8} = \dfrac{20 \pm 0}{8} = \dfrac{5}{2}$

h) $-2x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-2) \cdot 2}}{-4} = \dfrac{-3 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = -2/4 = -1/2 \\ x = 2 \end{cases}$

13 ▼▽▽ **Resuelve igualando a cero cada uno de los factores:**

a) $\boldsymbol{x(3x - 1) = 0}$ **b)** $\boldsymbol{3x(x + 2) = 0}$

c) $\boldsymbol{(x + 1)(x + 3) = 0}$ **d)** $\boldsymbol{(x - 5)(x + 5) = 0}$

e) $\boldsymbol{(x - 5)^2 = 0}$ **f)** $\boldsymbol{(2x - 5)^2 = 0}$

a) $x = 0;\ 3x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{3}$ *Soluciones*: $x = 0;\ x = \dfrac{1}{3}$

b) $3x = 0;\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$ *Soluciones*: $x = 0;\ x = -2$

c) $x + 1 = 0;\ x + 3 = 0$ *Soluciones*: $x = -1;\ x = -3$

d) $x - 5 = 0;\ x + 5 = 0$ *Soluciones*: $x = 5;\ x = -5$

e) $x - 5 = 0$ *Solución*: $x = 5$

f) $2x - 5 = 0$ *Solución*: $x = \dfrac{5}{2}$

14 ▼▼▽ **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{(2x + 1)(x - 3) = (x + 1)(x - 1) - 8}$

b) $\boldsymbol{(2x - 3)(2x + 3) - x(x + 1) - 5 = 0}$

c) $\boldsymbol{(2x + 1)^2 = 4 + (x + 2)(x - 2)}$

d) $\boldsymbol{(x + 4)^2 - (2x - 1)^2 = 8x}$

a) $(2x + 1)(x - 3) = (x + 1)(x - 1) - 8 \rightarrow 2x^2 - 6x + x - 3 = x^2 - 1 - 8 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} \rightarrow x = \dfrac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

b) $(2x - 3)(2x + 3) - x(x + 1) - 5 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2 - 9 - x^2 - x - 5 = 0 \rightarrow 3x^2 - x - 14 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-14)}}{6} = \dfrac{1 \pm \sqrt{169}}{6} = \dfrac{1 \pm 13}{6} \begin{cases} x = 7/3 \\ x = -2 \end{cases}$

c) $(2x + 1)^2 = 4 + (x + 2)(x - 2) \ \to$

$\to\ 4x^2 + 1 + 4x = 4 + x^2 - 4 \ \to\ 3x^2 + 4x + 1 = 0 \ \to$

$\to\ x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \dfrac{-4 \pm 2}{6} \begin{cases} x = -1/3 \\ x = -1 \end{cases}$

d) $(x + 4)^2 - (2x - 1)^2 = 8x \ \to$

$\to\ x^2 + 16 + 8x - (4x^2 + 1 - 4x) - 8x = 0 \ \to$

$\to\ x^2 + 16 + 8x - 4x^2 - 1 + 4x - 8x = 0 \ \to\ -3x^2 + 4x + 15 = 0 \ \to$

$\to\ x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-3) \cdot 15}}{-6} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{196}}{-6} = \dfrac{-4 \pm 14}{-6} \begin{cases} x = -5/3 \\ x = 3 \end{cases}$

15 ▼▼▽ **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\dfrac{(5x - 4)(5x + 4)}{4} = \dfrac{(3x - 1)^2 - 9}{2}$

b) $\dfrac{x}{3}(x - 1) - \dfrac{x}{4}(x + 1) + \dfrac{3x + 4}{12} = 0$

c) $\dfrac{(x - 1)(x + 2)}{12} - \dfrac{(x + 1)(x - 2)}{6} - 1 = \dfrac{x - 3}{3}$

d) $\dfrac{(x - 1)^2 - 3x + 1}{15} + \dfrac{x + 1}{5} = 0$

e) $\dfrac{x + 1}{2} - \dfrac{(x - 1)^2}{4} - \dfrac{x + 2}{3} + \dfrac{(x - 2)^2}{6} = \dfrac{1}{6}$

a) $\dfrac{(5x - 4)(5x + 4)}{4} = \dfrac{(3x - 1)^2 - 9}{2} \ \to$

$\to\ \dfrac{25x^2 - 16}{4} = \dfrac{2(9x^2 + 1 - 6x - 9)}{4} \ \to$

$\to\ 25x^2 - 16 = 18x^2 + 2 - 12x - 18 \ \to\ 7x^2 + 12x = 0 \ \to$

$\to\ x(7x + 12) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -12/7 \end{cases}$

b) $\dfrac{x}{3}(x - 1) - \dfrac{x}{4}(x + 1) + \dfrac{3x + 4}{12} = 0 \ \to$

$\to\ 12\left(\dfrac{x}{3}(x - 1) - \dfrac{x}{4}(x + 1) + \dfrac{3x + 4}{12}\right) \ \to$

$\to\ 4x(x - 1) - 3x(x + 1) + 3x + 4 = 0 \ \to\ 4x^2 - 4x - 3x^2 - 3x + 3x + 4 = 0 \ \to$

$\to\ x^2 - 4x + 4 = 0 \ \to\ x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} = 2$

c) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{12} - \dfrac{(x+1)(x-2)}{6} - 1 = \dfrac{x-3}{3} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \dfrac{x^2+x-2}{12} - \dfrac{x^2-x-2}{6} - 1 = \dfrac{x-3}{3} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 12\left(\dfrac{x^2+x-2}{12} - \dfrac{x^2-x-2}{6} - 1\right) = 12\left(\dfrac{x-3}{3}\right) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 + x - 2 - 2(x^2 - x - 2) - 12 = 4(x-3) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 + x - 2 - 2x^2 + 2x + 4 - 12 = 4x - 12 \;\rightarrow\; -x^2 - x + 2 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 + x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

d) $\dfrac{(x-1)^2 - 3x + 1}{15} + \dfrac{x+1}{5} = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 15\left[\dfrac{(x-1)^2 - 3x + 1}{15} + \dfrac{x+1}{5}\right] = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 - 2x + 1 - 3x + 1 + 3x + 3 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 - 2x + 5 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5}}{2} \;\rightarrow$ No tiene solución.

e) $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{x+2}{3} + \dfrac{(x-2)^2}{6} = \dfrac{1}{6} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 12\left(\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{x+2}{3} + \dfrac{(x-2)^2}{6}\right) = 12 \cdot \dfrac{1}{6} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 6(x+1) - 3(x^2 - 2x + 1) - 4(x+2) + 2(x^2 - 4x + 4) = 2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 6x + 6 - 3x^2 + 6x - 3 - 4x - 8 + 2x^2 - 8x + 8 = 2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; -x^2 + 3 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 3 \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$

Aplica lo aprendido

16 ▼▽▽ **La suma de tres números naturales consecutivos es igual al quíntuple del menor menos 11. ¿Cuáles son esos números?**

Llamemos x, $x+1$, $x+2$ a los números. Así:

$x + x + 1 + x + 2 = 5x - 11 \;\rightarrow\; 14 = 2x \;\rightarrow\; x = 7$

Los números son 7, 8 y 9.

17 ▼▽▽ **Calcula un número tal que sumándole su mitad se obtiene lo mismo que restando 6 a los 9/5 de ese número.**

$x + \dfrac{x}{2} = \dfrac{9}{5}x - 6 \;\rightarrow\; 10\left(x + \dfrac{x}{2}\right) = 10\left(\dfrac{9}{5}x - 6\right) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 10x + 5x = 18x - 60 \;\rightarrow\; 60 = 3x \;\rightarrow\; x = 20$

El número es 20.

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

18 ▼▽▽ **Halla tres números impares consecutivos tales que su suma sea 117. (Un número impar es $2x + 1$).**

$2x + 1 + 2x + 3 + 2x + 5 = 117 \rightarrow 6x = 108 \rightarrow x = 18$

Los números son 37, 39 y 41.

19 ▼▽▽ **He pagado 14,30 € por un bolígrafo, un cuaderno y una carpeta. Si el precio de la carpeta es 5 veces el del cuaderno y este cuesta el doble que el bolígrafo, ¿cuál es el precio de cada artículo?**

Precio del bolígrafo, x; cuaderno, $2x$; carpeta, $5 \cdot 2x$.

$x + 2x + 10x = 14{,}30 \rightarrow 13x = 14{,}30 \rightarrow x = 1{,}1$

El bolígrafo cuesta 1,1 €; el cuaderno, 2,2 €, y la carpeta, 11 €.

20 ▼▽▽ **Calcula la altura de un árbol que es 1 m más corto que un poste que mide el doble que el árbol.**

Altura del árbol: x; altura del poste, $2x$

$x = 2x - 1 \rightarrow x = 1$ m.

El árbol mide 1 m.

21 ▼▽▽ **Una botella y un tapón cuestan 1€. La botella cuesta 90 céntimos más que el tapón. ¿Cuál es el precio de cada uno?**

Precio del tapón: x; precio de la botella: $x + 0{,}9$

$x + x + 0{,}9 = 1 \rightarrow 2x = 1 - 0{,}9 \rightarrow 2x = 0{,}1 \rightarrow x = 0{,}05$

El tapón cuesta 0,05 €, y la botella, 0,95 €.

22 ▼▽▽ **El precio de unos zapatos ha subido un 15% en diciembre y ha bajado un 20% en enero. De esta forma, el precio inicial ha disminuido en 6,96 €. ¿Cuál era el precio inicial?**

$x \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}8 = x - 6{,}96 \rightarrow 0{,}92x = x - 6{,}96 \rightarrow 6{,}96 = 0{,}08x \rightarrow x = 87$ €

El precio inicial era 87 €.

23 ▼▽▽ **Álvaro y Yago han comprado dos videojuegos que tenían el mismo precio, pero han conseguido una rebaja del 16% y del 19%, respectivamente. Si Álvaro pagó 1,26 € más que Yago, ¿cuál era el precio que tenía el videojuego?**

Luis pagó $0{,}84x$ y Miguel pagó $0{,}81x$.

$0{,}84x = 0{,}81x + 1{,}26 \rightarrow 0{,}03x = 1{,}26 \rightarrow x = 42$

El precio del videojuego era 42 €.

24 ▼▽▽ **Calcula el capital que, colocado al 6% de interés compuesto durante dos años, se ha convertido en 3 293 €.**

x es el capital inicial.

$x \cdot 1{,}06^2 = 3\,293 \quad \to \quad x = \dfrac{3\,293}{1{,}06^2} \approx 2\,930{,}76$ €

El capital inicial era 2 930,76 €.

25 ▼▽▽ **Con 3,5 € más del dinero que tengo, podría comprar la camiseta de mi equipo. Si tuviera el doble, me sobrarían 7,25 €. ¿Cuánto dinero tengo?**

x es el dinero que tengo.

$x + 3{,}5 = 2x - 7{,}25 \quad \to \quad 3{,}5 + 7{,}25 = x \quad \to$

$\to \quad x = 10{,}75$ € es el dinero que tengo.

26 ▼▽▽ **Tres amigos trabajan 20, 30 y 50 días en un negocio. Al cabo de tres meses se reparten los beneficios, correspondiendo al tercero 300 € más que al segundo. ¿Cuál fue la cantidad repartida?**

x son los beneficios.

20 + 30 + 50 = 100 días de trabajo.

Las partes que corresponden a cada uno son:

$\dfrac{x}{100} \cdot 20; \ \dfrac{x}{100} \cdot 30$ y $\dfrac{x}{100} \cdot 50$

$\dfrac{x}{100} \cdot 30 + 300 = \dfrac{x}{100} \cdot 50 \quad \to \quad \dfrac{3x}{10} + 300 = \dfrac{5x}{10} \quad \to \quad 300 = \dfrac{2x}{10} \quad \to$

$\to \quad x = 1\,500$ € es la cantidad repartida.

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 104

27 ▼▽▽ **Si al cuadrado de un número le restamos su triple, obtenemos 130. ¿Cuál es el número?**

x es el número buscado.

$x^2 - 3x = 130 \ \rightarrow \ x^2 - 3x - 130 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 130}}{2} = \frac{3 \pm 23}{2} \begin{cases} x = 13 \\ x = -10 \end{cases}$$

El número puede ser 13 o –10. Hay dos soluciones.

28 ▼▽▽ **Halla dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 145.**

Los números son x y $x + 1$.

$x^2 + (x + 1)^2 = 145 \ \rightarrow \ x^2 + x^2 + 1 + 2x - 145 = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 2x^2 + 2x - 144 = 0 \ \rightarrow \ x^2 + x - 72 = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 72 \cdot 4}}{2} = \frac{-1 \pm 17}{2} \begin{cases} x = 8 \\ x = -9 \end{cases}$$

Son 8 y 9, o bien, –9 y –8. Hay dos soluciones.

29 ▼▽▽ **Si al producto de un número natural por su siguiente le restamos 31, obtenemos el quíntuple de la suma de ambos.**

¿De qué número se trata?

x es el número que buscamos.

$x(x + 1) - 31 = 5(x + x + 1) \ \rightarrow \ x^2 + x - 31 = 10x + 5 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ x^2 - 9x - 36 = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \ x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 36}}{2} = \frac{9 \pm 15}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -3 \end{cases}$$

El número puede ser 12, o bien, –3. Hay dos soluciones.

Resuelve problemas

30 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno.

31 ▼▼▽ **Del dinero de una cuenta bancaria retiramos 1/7; ingresamos después 2/15 de lo que quedó y aún faltan 12 € para tener la cantidad inicial. ¿Cuánto dinero había en la cuenta?**

x es el dinero de la cuenta.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Retiramos } \dfrac{1}{7}x \;\rightarrow\; \text{quedan } \dfrac{6}{7}x \\ \text{Ingresamos } \dfrac{2}{15}\cdot\dfrac{6}{7}x = \dfrac{4}{35}x\end{array}\right\} \dfrac{6}{7}x + \dfrac{4}{35}x + 12 = x \;\rightarrow\; \dfrac{34}{35}x + 12 = x \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 12 = \frac{1}{35}x \;\rightarrow\; x = 420 \text{ € había en la cuenta.}$$

32 ▼▼▽ **De un depósito de agua se sacan un 2/7 de su contenido; después, 40 litros, y por último, 5/11 del agua restante, quedando aún 60 *l*.**

¿Cuánta agua había en el depósito?

x son los litros que hay en el depósito.

Sacamos $\frac{2}{7}x \;\rightarrow\;$ quedan $\frac{5}{7}x$ Sacamos 40 *l* $\;\rightarrow\;$ quedan $\frac{5}{7}x - 40$

Sacamos $\frac{5}{11}\left(\frac{5}{7}x - 40\right) \;\rightarrow\;$ quedan $\frac{6}{11}\left(\frac{5}{7}x - 40\right)$

Quedan $\frac{30}{77}x - \frac{240}{11} = 60 \;\rightarrow\; 30x - 1\,680 = 4\,620 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = 210$ litros de agua había en el depósito.

33 ▼▽▽ Resuelto en el libro del alumno.

34 ▼▽▽ **Un padre de 43 años tiene dos hijos de 9 y 11 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?**

x son los años que tienen que pasar.

$(9 + x) + (11 + x) = 43 + x \;\rightarrow\; 20 + 2x = 43 + x \;\rightarrow\; x = 23$

Han de transcurrir 23 años.

35 ▼▼▽ **La edad actual de un padre es el triple que la de su hijo y dentro de 14 años será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?**

x es la edad del hijo $\;\rightarrow\; 3x$ es la edad del padre.

Dentro de 14 años la edad del hijo será $x + 14$, y la del padre, $3x + 14$.

$(x + 14)2 = 3x + 14 \;\rightarrow\; 2x + 28 = 3x + 14 \;\rightarrow\; x = 14$

El hijo tiene 14 años, y el padre, 42 años.

36 ▼▽▽ **Estamos haciendo bocadillos de chorizo para llevar de excursión. Si ponemos 4 rodajas en cada uno, sobran 12, y si ponemos 5, nos faltan 8. ¿Cuántos bocadillos queremos preparar?**

Número de bocadillos que queremos preparar: x

$4x + 12 = 5x - 8 \;\rightarrow\; x = 20$

Queremos preparar 20 bocadillos.

37 ▼▽▽ **En una fiesta celebrada en un restaurante gallego se sirvieron cigalas (un plato para cada dos personas), almejas (un plato para cada 3) y percebes (un plato para cada 4). Si en total se sirvieron 65 platos, ¿cuántas personas había?**

Número de personas que había en la fiesta: x

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 65 \;\rightarrow\; \frac{13}{12}x = 65 \;\rightarrow\; x = \frac{65 \cdot 12}{13} = 60$$

Había 60 personas.

38 ▼▼▽ **¿Cuántos litros de aceite de orujo de 1,6 €/*l* tenemos que añadir a 60 *l* de aceite de oliva de 2,8 €/*l* para obtener una mezcla de 2,5 €/*l*?**

☞ ***Mira el problema resuelto 2 de la página 101.***

x son los litros de aceite de orujo.

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
ORUJO	x	1,6	$1{,}6x$
OLIVA	60	2,8	$2{,}8 \cdot 60$
MEZCLA	$x + 60$	2,5	$2{,}5(x + 60)$

$$1{,}6x + 168 = 2{,}5x + 150 \;\rightarrow\; 18 = 0{,}9x \;\rightarrow\; x = 20\ l$$

Tenemos que añadir 20 litros.

39 ▼▼▽ **Al mezclar 30 kg de pintura con 50 kg de otra de calidad inferior, obtenemos una mezcla a 3,30 €/kg. Si el precio de la barata es la mitad que el de la otra, ¿cuál es el precio de cada pintura?**

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
PINTURA I	30	$2x$	$60x$
PINTURA II	50	x	$50x$
MEZCLA	80	3,30	$80 \cdot 3{,}3$

$$60x + 50x = 264 \;\rightarrow\; 110x = 264 \;\rightarrow\; x = 2{,}4\text{ €/kg}$$

La pintura cara vale 4,8 €/kg, y la pintura barata, 2,4 €/kg.

PÁGINA 105

40 ▼▼▽ **Una marca de café de 14,15 €/kg se elabora con un 30% de café colombiano de 18 €/kg, y el resto, con otro. ¿Cuál es el precio de ese otro?**

Para obtener 1 kg de mezcla, ponemos 0,3 kg de café colombiano y 0,7 kg del otro café.

$0{,}3 \cdot 18 + 0{,}7x = 1 \cdot 14{,}15 \ \rightarrow\ 0{,}7x = 8{,}75 \ \rightarrow\ x = 12{,}5$ €/kg

El precio del café barato es 12,5 €/kg.

41 ▼▼▽ **Un centro escolar contrató un autobús para una salida al campo. Con todas las plazas ocupadas, el precio del billete es 12 €; pero quedaron 4 plazas libres, por lo que el viaje costó 13,5 €. ¿Cuántas plazas tiene el autobús?**

☞ ***Con x plazas a 12 € se obtiene lo mismo que con $x - 4$ plazas a 13,5 €.***

x es el número total de plazas.

$x \cdot 12 = (x - 4) \cdot 13{,}5 \ \rightarrow\ 12x = 13{,}5x - 54 \ \rightarrow\ 54 = 1{,}5x \ \rightarrow$

$\rightarrow\ x = 36$ es el número de plazas que tiene el autobús.

42 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno.

43 ▼▼▽ **Un ciclista que va a 21 km/h tarda tres cuartos de hora en alcanzar a otro que le lleva una ventaja de 2,25 km.**

¿Qué velocidad lleva el que va delante?

☞ ***La velocidad con la que se acercan es la diferencia de las velocidades absolutas.***

x es la velocidad del que va delante.

La velocidad con que se acercan es $21 - x$.

Con esa velocidad, deben recorrer 2,25 km en 0,75 h.

$$2{,}25 = (21 - x) \cdot 0{,}75 \ \rightarrow\ \frac{2{,}25}{0{,}75} = 21 - x \ \rightarrow\ 3 = 21 - x \ \rightarrow\ x = 18 \text{ km/h}$$

44 ▼▼▽ **La distancia entre dos ciudades, A y B, es 280 km. Un tren sale de A a 80 km/h, y media hora más tarde sale un coche de B hacia A que tarda 1,2 horas en cruzarse con el tren. ¿Qué velocidad lleva el coche?**

☞ ***Ten en cuenta que el tren ha recorrido 40 km cuando sale el coche.***

El tren ha recorrido $80 \cdot 0{,}5 = 40$ km antes de que salga el coche. La distancia que hay entre los dos es ahora 240 km.

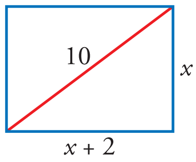
Si x es la velocidad del coche, se acercan a $(80 + x)$ km/h.

$$(80 + x)1{,}2 = 240 \ \rightarrow\ 80 + x = \frac{240}{1{,}2} \ \rightarrow\ 80 + x = 200 \ \rightarrow\ x = 120 \text{ km/h}$$

5 Soluciones a "Ejercicios y problemas"

45 ▼▼▽ **Calcula los lados de un rectángulo cuya diagonal mide 10 cm y en el que la base mide 2 cm más que la altura.**

☞ ***Mira el problema resuelto 1 de la página 101.***



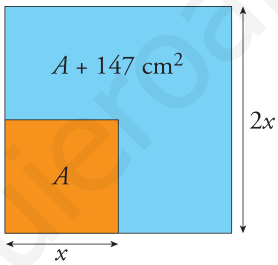
$$x^2 + (x+2)^2 = 10^2 \;\rightarrow\; x^2 + x^2 + 4x + 4 = 100 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2x^2 + 4x - 96 = 0 \;\rightarrow\; x^2 + 2x - 48 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-48)}}{2} = \frac{-2 \pm 14}{2} \begin{cases} x = 6 \\ x = -8. \text{ No vale.} \end{cases}$$

La altura mide 6 cm, y la base, 8 cm.

46 ▼▼▽ **Si duplicamos el lado de un cuadrado, su área aumenta en 147 cm². ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?**



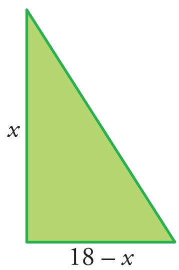
$$\left.\begin{array}{l}\text{Área del mayor: } (2x)^2 \\ \text{Área del menor: } x^2\end{array}\right\} \; 4x^2 - x^2 = 147 \;\rightarrow\; 3x^2 = 147 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2 = 49 \begin{cases} x = 7 \\ x = -7. \text{ No vale.} \end{cases}$$

El lado del cuadrado mide 7 cm.

47 ▼▼▽ **Los catetos de un triángulo rectángulo suman 18 cm y su área es 40 cm². Halla los catetos de este triángulo.**

☞ ***Si un cateto mide x cm, el otro medirá (18 – x) cm.***

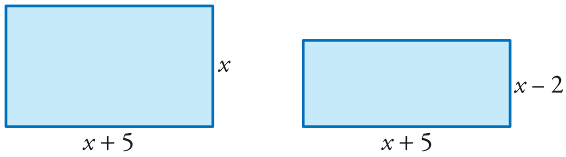


$$\text{Área: } \frac{x(18-x)}{2} = 40 \;\rightarrow\; 18x - x^2 = 80 \;\rightarrow\; x^2 - 18x + 80 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 4 \cdot 80}}{2} = \frac{18 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 11 \\ x = 7 \end{cases}$$

Los catetos miden 7 cm y 11 cm, respectivamente.

48 ▼▼▽ **La base de un rectángulo mide 5 cm más que la altura. Si disminuimos la altura en 2 cm, el área del nuevo rectángulo será 60 cm². ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?**



$$(x+5)(x-2) = 60 \;\rightarrow\; x^2 + 3x - 10 = 60 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2 - 3x - 70 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(-70)}}{2} = \frac{3 \pm 17}{2} \begin{cases} x = 10 \\ x = -7. \text{ No vale.} \end{cases}$$

La altura mide 7 cm, y la base, 12 cm.

49 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno.

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 106

50 ▼▼▽ **Dos grifos llenan un depósito en 3 horas. Si solo se abre uno de ellos, tardaría 5 horas. ¿Cuánto tardará el otro grifo en llenar el depósito?**

Los dos grifos juntos, en 1 hora, llenan $\frac{1}{3}$ del depósito.

Uno de los grifos llena, en 1 hora, $\frac{1}{5}$ del depósito.

El otro grifo, en 1 hora, llena $\frac{1}{x}$ del depósito.

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \;\rightarrow\; \frac{1}{x} = \frac{2}{15} \;\rightarrow\; x = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ h}$$

El otro grifo tarda 7 horas y media en llenar el depósito.

51 ▼▼▽ **Un grifo tarda el doble que otro en llenar un depósito. Abriendo los dos a la vez, tardan 8 horas. ¿Cuánto tardará cada uno de ellos en llenarlo?**

Un grifo llena, en 1 h, $\frac{1}{x}$ del depósito, y el otro grifo llena, en 1 h, $\frac{1}{2x}$ del depósito.

Los dos juntos, en 1 hora, llenan $\frac{1}{8}$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{8} \;\rightarrow\; \frac{3}{2x} = \frac{1}{8} \;\rightarrow\; 2x = 24 \;\rightarrow\; x = 12 \text{ h}$$

Uno de los grifos tarda 12 h, y el otro, 24 horas en llenar el depósito.

52 ▼▼▽ **Regalé la mitad de mis discos a mi novia y la mitad del resto a mi hermano. De los que regalé, la tercera parte eran de pop, y los otros 6, de rock. ¿Cuántos discos regalé y cuántos tenía?**

Tenía x discos.

Regalé $\frac{x}{2}$ $\rightarrow$ quedan $\frac{x}{2}$ $\rightarrow$ regalo la mitad $\frac{x}{4}$

En total regalé $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = \frac{3}{4}x$

La tercera parte $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x$ eran de pop.

Los otros $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{1}{2}x$ son los 6 de rock.

$\frac{1}{2}x = 6 \;\rightarrow\; x = 12$ discos son los que tenía y $\frac{3}{4} \cdot 12 = 9$ discos son los que regalé.

Problemas “+”

53 ▼▼▽ **La cuarta parte de los clientes de un hotel están en régimen de pensión completa, y el resto, en media pensión. De estos últimos, 1/3 almuerzan y el resto cenan. Los 2/3 de pensión completa y la mitad de los que cenan toman vino, y son 180. ¿Cuántos clientes hay en el hotel? ¿Cuántos cenan en él?**

En el hotel hay x clientes.

$\frac{x}{4}$ están en pensión completa $\rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{4} = \frac{x}{6}$ toman vino.

$\frac{3}{4}x$ están en media pensión $\rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{x}{2}$ cenan $\rightarrow \frac{1}{2}\frac{x}{2}$ toman vino.

$\frac{x}{6} + \frac{x}{4} = 180 \rightarrow \frac{5}{12}x = 180 \rightarrow x = 432$ clientes hay en el hotel.

Cenan en el hotel $\frac{1}{2} \cdot 432 = 216$ clientes.

54 ▼▼▽ **Ana, en su camino diario al colegio, ha comprobado que si va andando a 4 km/h, llega 5 minutos tarde, pero si se da prisa y va a 5 km/h, llega 10 minutos antes de la hora. ¿Cuál es la distancia al colegio? ¿Llegará puntual si hace la mitad del camino a 4 km/h y la otra mitad a 5 km/h?**

a) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{x}{20} = \frac{1}{4} \rightarrow x = 5$ km

$\left.\begin{array}{l}\text{Si va a 4 km/h tarda 1,25} \rightarrow \text{1 h y 15 min}\\ \text{Si va a 5 km/h tarda 1 h}\end{array}\right\}$ Tiene que tardar 1 h y 10 min

b) $\underset{v\,=\,4\text{ km/h}}{\overset{2,5}{\longmapsto}}\underset{v\,=\,5\text{ km/h}}{\overset{2,5}{\longmapsto}} \rightarrow \frac{2,5}{4} + \frac{2,5}{5} = 0,625 + 0,5 = 1,125 \rightarrow$ 1 h 7' 30''

Llega un poco antes de la hora.

55 ▼▼▽ **Luis y Miguel van a visitar a sus abuelos. Como solo tienen una bicicleta, acuerdan que Miguel la lleve hasta la mitad del camino y la deje allí hasta que Luis, que sale andando, la recoja. La segunda mitad, Miguel caminará y Luis irá en bicicleta. De esta forma, tardan una hora en llegar a su destino. El que camina va a 4 km/h, y el que va en bicicleta, a 12 km/h. ¿Cuál es la distancia que han recorrido? ¿Cuánto tiempo estuvo parada la bicicleta?**

t: tiempo que emplea Miguel en recorrer la mitad del camino en bicicleta.

$12t = 4(1 - t) \rightarrow 16t = 4 \rightarrow t = \frac{1}{4}$ h

Andando tarda $\frac{3}{4}$ h.

Distancia: $12 \cdot \frac{1}{4} + 4\frac{3}{4} = 3 + 3 = 6$ km

Tiempo de bicicleta parada: La deja cuando ha pasado $\frac{1}{4}$ h y el otro la recoge a los $\frac{3}{4}$ h.

Está parada $\frac{1}{2}$ hora.

56 ▼▼▼ **Carmen hace cuentas sobre las compras que ha hecho y observa que el abrigo le ha costado el triple que el bolso; el bolso, 5 € menos que la camisa; la camisa, 6 € más que los deportivos; los deportivos, el doble que el estuche; el estuche, la mitad que el pantalón, y este, 120 € menos que la suma de todos los demás artículos. Calcula el precio de cada compra y el dinero que se gastó Carmen.**

$A = 3B;\ \ B = C - 5;\ \ C = D + 6;\ \ D = 2E;\ \ E = \dfrac{P}{2}$

$P = A + B + C + D + E - 120$

$A = 3(C - 5) = 3(D + 6 - 5) = 3(D + 1) = 3(2E + 1) = 3(P + 1) = 3P + 3$

$B = D + 6 - 5 = D + 1 = 2E + 1 = P + 1$

$C = 2E + 6 = P + 6$

$D = P$

$P = 3P + 3 + P + 1 + P + 6 + P + \dfrac{P}{2} - 120 \ \to\ 5P + \dfrac{P}{2} = 110 \ \to$

$\to\ \dfrac{11P}{2} = 110 \ \to\ P = 20$ € precio pantalón.

$E = 10$ € estuche; $D = 20$ € deportivos; $C = 26$ € camisa

$B = 21$ € bolso; $A = 63$ € abrigo

Gasto total: 140 €

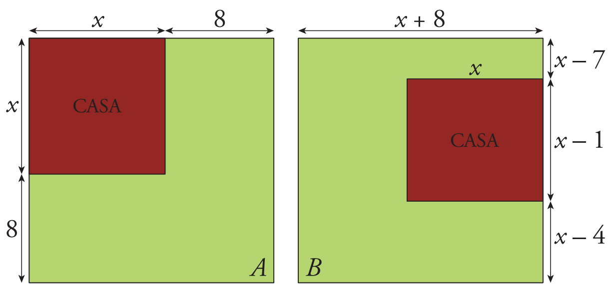
57 ▼▼▼ **Estas dos figuras representan dos terrenos de la misma superficie. En cada una se ha construido una vivienda y el resto de la parcela se ha dedicado a jardín.**

a) Escribe las expresiones algebraicas para la superficie de cada parcela.

b) Escribe las expresiones algebraicas para la superficie del jardín en cada caso.

c) ¿Cuál debe ser el valor de x para que el área de las dos parcelas sea la misma?

d) Halla, para ese valor de x, la superficie de cada casa y la superficie de cada jardín.



a) Superficie A: $(x + 8)^2$. Superficie B: $(x + 8)(3x - 12)$

b) Jardín A: $(x + 8)^2 - x^2 = x^2 + 16x + 64 - x^2 = 16x + 64$

Jardín B: $(x + 8)(3x - 12) - x(x - 1) = 3x^2 + 12x - 96 - x^2 + x = 2x^2 + 13x - 96$

c) $(x+8)^2 = 3x^2 + 12x - 96 \rightarrow x^2 + 16x + 64 - 3x^2 - 12x + 96 = 0 \rightarrow$

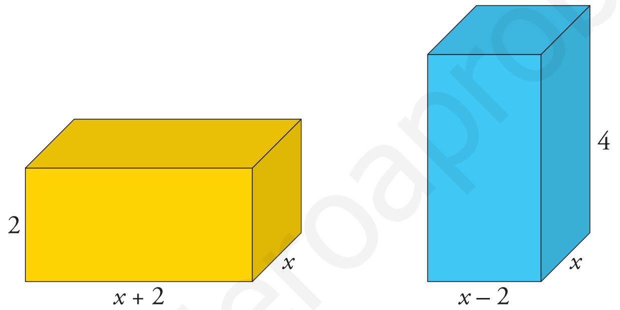
$\rightarrow -2x^2 + 4x + 160 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 80 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+320}}{2} = \dfrac{2 \pm 18}{2}$ $\begin{cases} x = 10 \\ x = -8. \text{ No vale.} \end{cases}$

Debe ser $x = 10$ m.

d) $A = \begin{cases} \text{Casa} = 100 \text{ m}^2 \\ \text{Jardín} = 224 \text{ m}^2 \end{cases}$ $B = \begin{cases} \text{Casa} = 10 \cdot 9 = 90 \text{ m}^2 \\ \text{Jardín} = 2 \cdot 10^2 + 13 \cdot 10 - 96 = 234 \text{ m}^2 \end{cases}$

58 ▼▼▼ **En una empresa disponen de dos modelos de cajas sin tapa para empaquetar. Los dos tienen la altura fija y base variable, como las de la figura. Los directivos dudan entre elegir el valor de x para el cual las cajas tengan el mismo volumen, o elegirlo de forma que la cantidad de cartón empleada para su fabricación sea la misma. ¿Es posible encontrar un valor de x que cumpla las dos condiciones?**



$V_A = 2x(x+2)$ $V_B = 4x(x-2)$

Si $V_A = V_B \rightarrow 2x^2 + 4x = 4x^2 - 8x \rightarrow 2x^2 - 12x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 6x = 0$ $\begin{cases} x = 0 \text{ no vale.} \\ x = 6 \text{ cm} \end{cases}$

$S_A = 2 \cdot 2(x+2) + 2 \cdot 2x + x(x+2) = 4x + 8 + 4x + x^2 + 2x \rightarrow S_A = x^2 + 10x + 8$

$S_B = x(x-2) + 2 \cdot 4x + 2 \cdot 4(x-2) = x^2 - 2x + 8x + 8x - 16 \rightarrow S_B = x^2 + 14x - 16$

Si $S_A = S_B \rightarrow x^2 + 10x + 8 = x^2 + 14x - 16 \rightarrow$

$\rightarrow 8 + 16 = 14x - 10x \rightarrow 24 = 4x \rightarrow x = 6$ cm

59 ▼▼▽ **Para saldar una deuda, un banco me ofrece dos opciones: pagarla dentro de 2 años con un 8% de interés anual o pagarla dentro de 9 meses al 15% de interés anual. Con la segunda opción pago 577,3 € menos que con la primera. Calcula el dinero que debo.**

x es el dinero que debo; 15% anual $\approx \dfrac{15}{12} = 1{,}25$ mensual

Con la 1.ª opción pago $x \cdot 1{,}08^2$.

Con la 2.ª opción pago $x(1{,}0125)^9$.

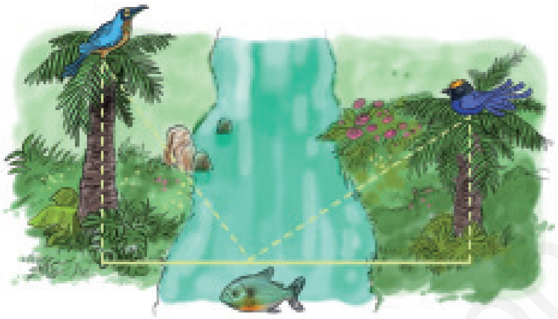
$x \cdot 1{,}08^2 - x(1{,}0125)^9 = 577{,}3 \rightarrow 0{,}048x = 577{,}3$

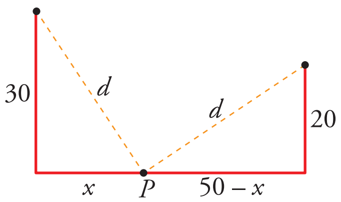
$x = 12\,000$ € es el dinero que debo.

PÁGINA 107

60 ▼▼▼ **En las dos orillas de un río hay dos palmeras. La más alta mide 30 codos; la otra, 20 codos, y la distancia entre ambas es de 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. Al descubrir los dos pájaros un pez en la superficie del río, se lanzan rápidamente, alcanzando al pez al mismo tiempo.**

¿A qué distancia del tronco de la palmera más alta apareció el pez?





$$\left.\begin{array}{l} d^2 = 20^2 + (50 - x)^2 \\ d^2 = 30^2 + x^2 \end{array}\right\}$$ La distancia a P es la misma desde las dos palmeras.

$20^2 + (50 - x)^2 = 30^2 + x^2 \;\rightarrow\; 400 + 2\,500 - 100x + x^2 = 900 + x^2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2\,000 = 100x \;\rightarrow\; x = 20$ m

A 20 m de la palmera más alta.

61 ▼▼▽ **Si a un número de dos cifras le restamos el que resulta de invertir el orden de estas, el resultado es 18. Averigua cuál es el número sabiendo que la cifra de las unidades es 2.**

x es la cifra de las decenas. El número es $10x + 2$.

$(10x + 2) - (20 + x) = 18 \;\rightarrow\; 9x - 18 = 18 \;\rightarrow\; 9x = 36 \;\rightarrow\; x = 4$

El número buscado es 42.

62 ▼▼▽ **Un pintor tarda 3 horas más que otro en pintar una pared. Trabajando juntos pintarían la misma pared en 2 horas. Calcula cuánto tarda cada uno en hacer el mismo trabajo en solitario.**

Un pintor, en 1 hora, pinta $\dfrac{1}{x}$ de la pared.

El otro pintor, en 1 hora, pinta $\dfrac{1}{x+3}$ de la pared.

Entre los dos, en 1 hora, pintan $\dfrac{1}{2}$ de la pared.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; 2x(x+3)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)=2x(x+3)\frac{1}{2} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2(x+3)+2x=x(x+3) \;\rightarrow\; 2x+6+2x=x^2+3x \;\rightarrow\; x^2-x-6=0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 6}}{2}=\frac{1\pm 5}{2} \begin{cases} x=3 \\ x=-2. \text{ No vale.}\end{cases}$$

Uno tarda 3 h y el otro tarda 6 horas en hacer el trabajo en solitario.

Reflexiona sobre la teoría

63 ▼▽▽ **Si al resolver una ecuación de primer grado llegamos a $0 \cdot x = 3$, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación? ¿Y si llegamos a $0 \cdot x = 0$?**

$0 \cdot x = 3$ La ecuación no tiene solución, porque ningún número multiplicado por 0 puede ser igual a 3.

$0 \cdot x = 0$ La ecuación tiene infinitas soluciones, porque cualquier número multiplicado por 0 es igual a 0.

64 ▼▼▽ **Algunas de las siguientes “ecuaciones” no tienen solución y otras tienen infinitas soluciones. Resuélvelas y comprueba los resultados (recuerda que, en realidad, estas igualdades no son ecuaciones, ya que no tienen término en x).**

a) $4(2x+1)-3(x+3)=5(x-2)$

b) $2(x-3)+1=3(x-1)-(2+x)$

c) $\dfrac{3x+1}{2}=2x-\dfrac{x-1}{2}$

d) $x+\dfrac{2x-7}{4}=2x+\dfrac{1-x}{2}$

a) $4(2x+1)-3(x+3)=5(x-2) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 8x+4-3x-9=5x-10 \;\rightarrow\; 0x=-5 \;\rightarrow$ No tiene solución.

b) $2(x-3)+1=3(x-1)-(2+x) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2x-6+1=3x-3-2-x \;\rightarrow\; 0x=0 \;\rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

c) $\dfrac{3x+1}{2}=2x-\dfrac{x-1}{2} \;\rightarrow\; 2\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)=2\left(\dfrac{x-1}{2}\right) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 3x+1=4x-x+1 \;\rightarrow\; 0x=0 \;\rightarrow$

$\rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

d) $x+\dfrac{2x-7}{4}=2x+\dfrac{1-x}{2} \;\rightarrow\; 4\left(x+\dfrac{2x-7}{4}\right)=4\left(2x+\dfrac{1-x}{2}\right) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 4x+2x-7=8x+2-2x \;\rightarrow\; 0x=9 \;\rightarrow$ No tiene solución.

65 ▼▽▽ Resuelto en el llibro del alumno

66 ▼▽▽ **Inventa ecuaciones de segundo grado con:**

a) Dos soluciones: $x = -2$ y $x = 3$

b) Dos soluciones: $x = 3$ y $x = -\frac{2}{3}$

c) Dos soluciones: $x = 0$ y $x = -5$

d) Una solución: $x = 4$

e) Ninguna solución.

a) $(x + 2)(x - 3) = 0 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

b) $(x - 3)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0 \rightarrow x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = 0 \rightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$

c) $x(x + 5) = 0 \rightarrow x^2 + 5x = 0$

d) $(x - 4)^2 = 0$

e) $x^2 + 100 = 0$

67 ▼▽▽ **Si el discriminante de una ecuación de segundo grado es $\Delta = 5$, ¿qué podemos decir del número de soluciones de la ecuación? ¿Y si $\Delta = 0$?**

Si $\Delta = 5$, el número de soluciones es 2.

Si $\Delta = 0$, el número de soluciones es 1.

68 ▼▽▽ **En la ecuación $x^2 - 14x + m = 0$:**

a) ¿Qué valor debe tomar m para que tenga dos soluciones iguales?

b) ¿Y para que sean distintas?

c) ¿Y para que no tenga solución?

a) $x^2 - 14x + m = 0$

$\Delta = 14^2 - 4 \cdot m = 0 \rightarrow 196 - 4m = 0 \rightarrow m = 49$

b) Para que sean distintas, $m \neq 49$ y $m < 49$.

c) Para que no tenga solución, $196 - 4m < 0 \rightarrow 196 < 4m \rightarrow m > 49$.

69 ▼▽▽ **¿Cuál debe ser el valor de a para que $x = 2$ sea solución de la ecuación $(x - 3)^2 - x^3 + a = 0$? Justifica tu respuesta.**

$(x - 3)^2 - x^3 + a = 0 \rightarrow (2 - 3)^2 - 2^3 + a = 0 \rightarrow 1 - 8 + a = 0 \rightarrow a = 7$

70 ▼▽▽ **¿Son equivalentes las ecuaciones $x^2 - 2x = 0$ y $2x - 4 = 0$? Justifica tu respuesta.**

$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \end{array} \right.$

$2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$

No son equivalentes, porque no tienen las mismas soluciones.

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

71 ▼▼▽ **La ecuación $x^2 + bx + 4 = 0$, ¿puede tener por soluciones 2 y 3? Razona tu respuesta.**

$x^2 + bx + 4 = 0$

$2^2 + 2b + 4 = 0 \;\rightarrow\; b = -4$

$3^2 + 3b + 4 = 0 \;\rightarrow\; b = -\dfrac{13}{3}$

No, porque para que 2 sea solución tiene que ser $b = -4$, y para que 3 sea solución, $b = -\dfrac{13}{3}$. Solo sería posible si obtuviéramos el mismo valor para b en ambos casos.

72 ▼▼▽ **Expresa en función de m la solución de la ecuación $mx - x = 4m$.**

¿Para qué valor de m la ecuación no tiene solución?

$mx - x = 4m \;\rightarrow\; x(m - 1) = 4m \;\rightarrow\; x = \dfrac{4m}{m - 1}$

No tiene solución para $m = 1$.

Soluciones a “Y para terminar…”

PÁGINA 108

Investiga

El timo del genio

Cuenta una vieja leyenda china que un genio vivía en un desfiladero y ofrecía a los viajeros el siguiente trato:

— Para pasar por mi morada has de permitir, como peaje, que coja de tu bolsa tantas monedas como quepan en mi mano (cantidad fija).

— Después, como prueba de amistad, utilizaré mi magia para doblar tu capital y te irás en paz.

Un campesino algo ambicioso desenterró sus ahorros y se empeñó en pasar tres veces por el desfiladero. Sin embargo, se encontró al final con la bolsa vacía.

Sabiendo que el campesino desenterró más de 10 pero menos de 20 doblones, ¿cuántas monedas cabían en la mano del genio?

- **Intenta, primero, resolverlo a tu aire.**
- **Ayuda: quizá te resulte más fácil si utilizas el lenguaje algebraico.**

	ENTRA CON…	PEAJE	TRAS EL PEAJE	SALE CON…
PRIMERA VEZ	x	a	$x - a$	$2x - 2a$
SEGUNDA VEZ	$2x - 2a$	a	$2x - 3a$	$4x - 6a$
TERCERA VEZ	$4x - 6a$	a	$4x - 7a$	0

El campesino lleva 14 doblones. El genio se queda cada vez con 8 doblones antes de multiplicar por 2 la cantidad.

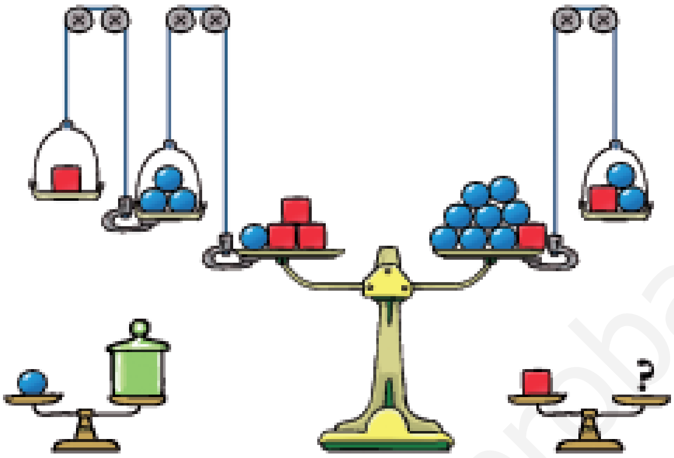
$$14 \quad \rightarrow \quad (14 - 8) \cdot 2 = 12 \quad \rightarrow \quad (12 - 8) \cdot 2 = 8 \quad \rightarrow \quad (8 - 8) \cdot 2 = 0$$

5 Soluciones a “Y para terminar…”

PÁGINA 109

▼ Utiliza tu ingenio

En perfecto equilibrio



Si cada bola pesa un kilo, ¿cuánto pesa una caja?

Las poleas sirven para restar peso. Teniendo esto en cuenta, las balanzas y los juegos de poleas dan lugar a la siguiente ecuación (llamamos x al peso de la caja):

$$3x + 1 - (3 - x) = 8 + x - (x + 2)$$

Su solución es $x = 2$. La caja pesa 2 kilogramos.

Usa la equis

Has de completar esta tabla, de forma que sumando los números de dos casillas consecutivas obtengas el número de la siguiente.

5						81
1	2	3	4	5	6	7

5	x	$5 + x$	$5 + 2x$	$10 + 3x$	$15 + 5x$	$25 + 8x =$ **81**

La solución de la ecuación es $x = 7$. Por tanto, la tabla queda así:

5	7	12	19	31	50	81
1	2	3	4	5	6	7

Ingéniatelas como puedas…

…para buscar una solución de esta ecuación:

$$7 + \sqrt{1 + \sqrt{5 - \sqrt{30 - \sqrt{13 + \sqrt{x}}}}} = 8$$

$x = 144$

Soluciones a la Autoevaluación

PÁGINA 109

¿Puedes saber, en algunos casos, cuál es la solución de una ecuación sin despejar la incógnita?

1 Resuelve mentalmente:

a) $x^3 - 27 = 0$ **b)** $(x - 45)^2 = 0$ **c)** $\sqrt{x + 2} = 5$

a) $x = 3$ b) $x = 45$ c) $x = 23$

2 ¿Cuáles de los números –1, 0, 2 son soluciones de la ecuación $x^3 - 3x - 2 = 0$**?**

$-1 + 3 - 2 = 0$ $x = -1$ es solución.

$0 - 0 - 2 \neq 0$ $x = 0$ no es solución.

$8 - 6 - 2 = 0$ $x = 2$ es solución

3 Resuelve por tanteo, con ayuda de la calculadora:

a) $x^4 - x^2 = 5$ **b)** $(x - 14)^3 = x + 10$

a) $x = 1{,}68$ b) $x = 17$

¿Resuelves con soltura ecuaciones de primer grado e identificas las ecuaciones que no tienen solución y las que tienen infinitas soluciones?

4 Resuelve:

a) $3(5 - x) + 2x = 8 - (1 + x)$ **b)** $3(x - 1) + 3 - x = 2x$

c) $8 - 2(2 - x) = 9 + 2x$ **d)** $\dfrac{3x - 2}{5} - \dfrac{3(x + 1)}{10} = \dfrac{3 - x}{4} - \dfrac{9}{10}$

a) $15 - 3x + 2x = 7 - x \rightarrow 0 \cdot x = 7 - 15 = -8 \rightarrow$ No tiene solución.

b) $3x - 3 + 3 - x - 2x = 0 \rightarrow 2x - 2x = 0 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$ Infinitas soluciones.

c) $8 - 4 + 2x = 9 + 2x \rightarrow 8 - 4 - 9 = 2x - 2x \rightarrow -5 = 0x \rightarrow$ No tiene solución.

d) $20\left(\dfrac{3x - 2}{5} - \dfrac{3x + 3}{10}\right) = 20\left(\dfrac{3 - x}{4} - \dfrac{9}{10}\right)$

$12x - 8 - 6x - 6 = 15 - 5x - 18$

$12x - 6x + 5x = 15 - 18 + 8 + 6 \rightarrow 11x = 11 \rightarrow x = 1$

¿Dominas la resolución de ecuaciones de segundo grado, tanto completas como incompletas?

5 Resuelve:

a) $5x^2 - 2x = 0$ **b)** $4x^2 - 9 = 0$ **c)** $(x + 5)^2 = 0$ **d)** $2x^2 - 3x + 2 = 0$

a) $5x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(5x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2/5 \end{cases}$

b) $4x^2 - 9 = 0 \rightarrow 4x^2 = 9 \left\langle \begin{array}{l} x = 3/2 \\ x = -3/2 \end{array} \right.$

c) $(x - 5)^2 = 0 \rightarrow x = 5$

d) $2x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{4} \rightarrow$ No tiene solución.

6 **Resuelve:** $\dfrac{(x-2)(x-3)}{6} - \dfrac{(x-1)^2}{4} = 2 - x$

$\dfrac{x^2 - 5x + 6}{6} - \dfrac{x^2 - 2x + 1}{4} = 2 - x \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 - 10x + 12 - 3x^2 + 6x - 3 = 24 - 12x \rightarrow$

$\rightarrow -x^2 + 8x - 15 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \rightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \dfrac{8 \pm 2}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = 5 \\ x = 3 \end{array} \right.$

¿Sabes traducir problemas a ecuaciones y resolverlos?

7 **Un poste tiene 1/5 de su longitud clavado en el suelo; 1/3 del resto está sumergido en agua y la parte emergente mide 4 m. ¿Cuál es la longitud del poste?**

$\dfrac{x}{5}$ en suelo; $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{5}x$ en agua; 4 m emergido

$\dfrac{x}{5} + \dfrac{4x}{15} + 4 = x \rightarrow 3x + 4x + 60 = 15x$

$8x = 60 \rightarrow x = 7{,}5$ m

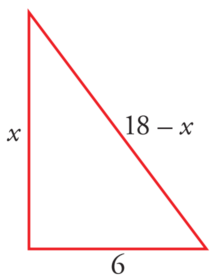
8 **Una lancha de vigilancia marítima persigue a un barco con un cargamento ilegal que le lleva 2 millas de ventaja y lo alcanza al cabo de media hora. Si la velocidad de la lancha es de 15 nudos, ¿cuál es la velocidad del barco?**

2 millas de ventaja

LANCHA: $t = \dfrac{e}{v} \rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x + 2}{15} \rightarrow x + 2 = 7{,}5 \rightarrow x = 5{,}5$

BARCO: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{5{,}5}{v} \rightarrow v = 5{,}5 \cdot 2 = 11$ nudos

9 **Con una cuerda de 24 m de longitud hacemos un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos mide 6 m. ¿Cuánto miden el otro cateto y la hipotenusa?**



$x^2 + 6^2 = (18 - x)^2$

$x^2 + 36 = 324 - 36x + x^2 \rightarrow 36x = 288 \rightarrow x = 8$

Catetos: 6 y 8 m; hipotenusa: 10 m.

6 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 111

PARA EMPEZAR…

▼ Un problema propuesto por Diofanto

Diofanto proponía problemas como este:

Obtener dos números que suman 20 y cuyos cuadrados suman 208.

Nosotros lo resolveríamos traduciéndolo a un sistema de ecuaciones, pero él lo hacía con una única ecuación. Y esa ecuación que proponía era especialmente sencilla, porque denominaba hábilmente los números que intervenían en el enunciado.

En el caso que hemos propuesto, llamaba $10 - x$ y $10 + x$ a los números (ingenioso, ¿verdad?). La ecuación que obtenía, por tanto, era $(10 - x)^2 + (10 + x)^2 = 208$.

■ **Completa tú la resolución.**

$(10 - x)^2 + (10 + x)^2 = 208$

$100 + x^2 - 20x + 100 + x^2 + 20x = 208$

$2x^2 + 200 = 208$

$x^2 + 100 = 104$

$x^2 = 4 \rightarrow x = 2, \; x = -2$

Por tanto, los números son el 8 y el 12.

■ **Haz, de forma similar, este otro: La suma de dos números es 32 y la de sus cuadrados, 530. ¿Cuáles son esos números?**

Llamamos a los números $16 - x$ y $16 + x$.

Por tanto, la ecuación queda:

$(16 - x)^2 + (16 + x)^2 = 530$

$256 + x^2 - 32x + 256 + x^2 + 32x = 530$

$2x^2 + 512 = 530$

$2x^2 = 18$

$x^2 = 9 \rightarrow x = 3, \; x = -3$

Así, los números son el 13 y el 19.

▼ Otros problemas para resolver según tu ingenio

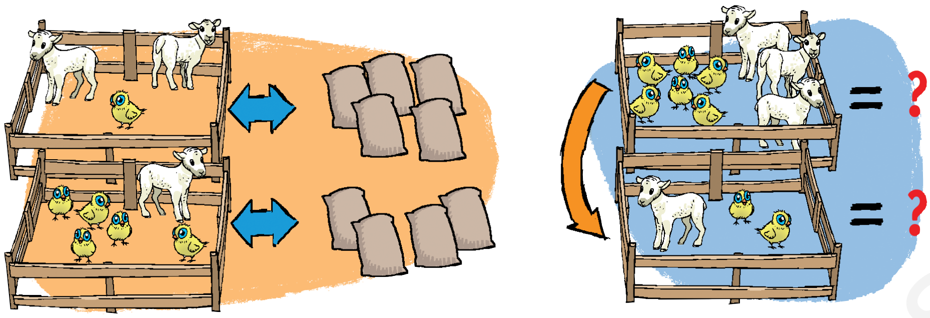
Prueba a resolver estos problemas sin utilizar sistemas:

■ **Sabiendo que ● ■ ■ = 12 y que ● ● ■ = 9, averigua cuánto valen ● y ■.**

Indicación: **● ● ● ■ ■ ■ = ? → ● ■ = ?**

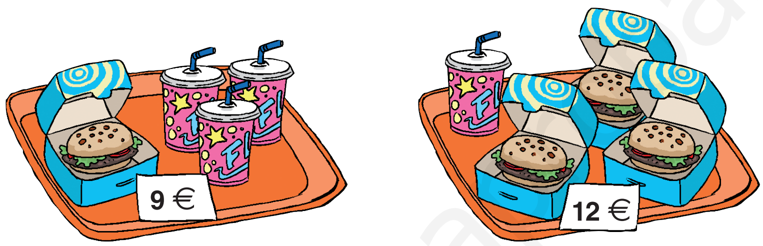
6 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

- **Un ganadero y un agricultor intercambian sus productos:**



¿Cuántos kilos de trigo cuesta un cordero? ¿Y un pollo?

- **¿Cuánto cuesta una hamburguesa? ¿Y un refresco?**



a) Sumamos las dos ecuaciones:

●●●■■■ = 21 → 3 · (●■) = 21 → ●■ = 7

Sustituimos en la primera ecuación:

7 + ■ = 12 → ■ = 5 → ● = 2

b) Sumamos las dos ecuaciones:

3 corderos + 6 pollos = 540 kg → 3 · (1 cordero + 2 pollos) = 540 →

→ 1 cordero + 2 pollos = 180

Sustiuimos en la segunda ecuación:

180 kg + 3 pollos = 240 → 1 pollo = 20 kg de trigo →

→ 1 cordero + 2 · 20 = 180 →

→ 1 cordero = 140 kg de trigo

c) Sumamos las dos ecuaciones:

4 refrescos + 4 hamburguesas = 21 € →

→ 4 · (1 refresco + 1 hamburguesa) = 21 →

→ 1 refresco + 1 hamburguesa = 5,25 €

Sustituimos en la primera ecuación:

5,25 + 2 refrescos = 9 → 1 refresco = 1,875 € →

→ 1 hamburguesa + 3 · 1,875 = 6 →

→ 1 hamburguesa = 3,375 €

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 112

1 **Comprueba si cada uno de los pares de valores siguientes es solución de la ecuación $4x - 3y = 12$:**

a) $x = 6, \ y = 4$ **b)** $x = 6, \ y = 12$ **c)** $x = 0, \ y = -4$

a) $4 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 24 - 12 = 12$

$x = 6, \ y = 4$ sí es solución de la ecuación.

b) $4 \cdot 6 - 3 \cdot 12 = 24 - 36 = -12$

$x = 6, \ y = 12$ no es solución de la ecuación.

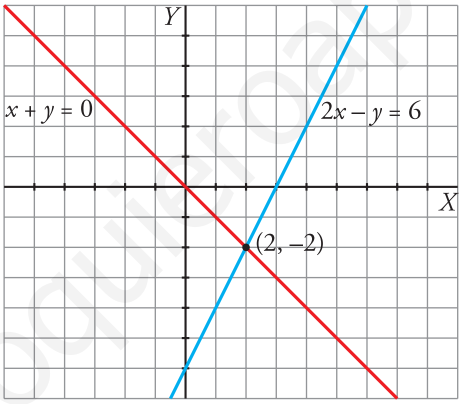
c) $4 \cdot 0 - 3(-4) = 0 + 12 = 12$

$x = 0, \ y = -4$ sí es solución de la ecuación.

2 **Representa las rectas de ecuaciones:**

$$2x - y = 6 \qquad x + y = 0$$

¿Cuál es la solución común a ambas ecuaciones?



Solución común a las dos ecuaciones: $x = 2, \ y = -2$. Punto $(2, -2)$.

6 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 113

1 **Di si alguno de los pares $x = -1,\ y = 4$ y $x = 7,\ y = 8$ es solución de cada uno de los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} -6x + 5y = 26 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + 4y = 18 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + y = 43 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} -6x + 5y = 26 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$

$x = -1,\ y = 4$	$x = 7,\ y = 8$
$6 + 20 = 26$ sí	$-42 + 40 = -2$, NO
$-1 - 8 = -9$ sí	$7 - 16 = -9$, sí
SÍ ES SOLUCIÓN	NO ES SOLUCIÓN

b) $\begin{cases} -2x + 4y = 18 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

$x = -1,\ y = 4$	$x = 7,\ y = 8$
$2 + 16 = 18$, sí	$-14 + 32 = 18$, sí
$-3 - 8 = -11$, NO	$21 - 16 = 5$, sí
NO ES SOLUCIÓN	SÍ ES SOLUCIÓN

c) $\begin{cases} 5x + y = 43 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

$x = -1,\ y = 4$	$x = 7,\ y = 8$
$-5 + 4 = -1$, NO	$35 + 8 = 43$, sí
$-3 + 4 = 1$, sí	$21 + 8 = 29$, NO
NO ES SOLUCIÓN	NO ES SOLUCIÓN

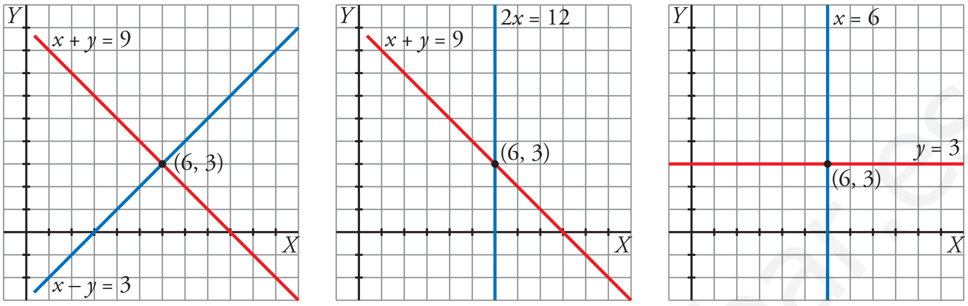
d) $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = -1 \end{cases}$

$x = -1,\ y = 4$	$x = 7,\ y = 8$
$-1 + 4 = 3$, NO	$7 + 8 = 15$, sí
$-1 - 4 = -5$, NO	$7 - 8 = -1$, sí
NO ES SOLUCIÓN	SÍ ES SOLUCIÓN

PÁGINA 114

1 **Representa estos tres sistemas equivalentes que se obtienen para resolver el primero de ellos:**

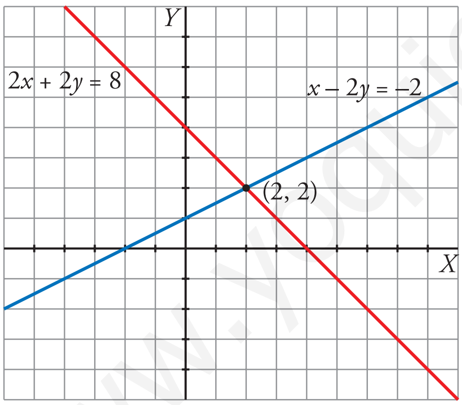
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ 2x \quad\;\; = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$



2 **Representa los pares de rectas correspondientes a cada sistema y di si son equivalentes:**

a) $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y - x = 0 \\ y \quad\;\; = 2 \end{cases}$

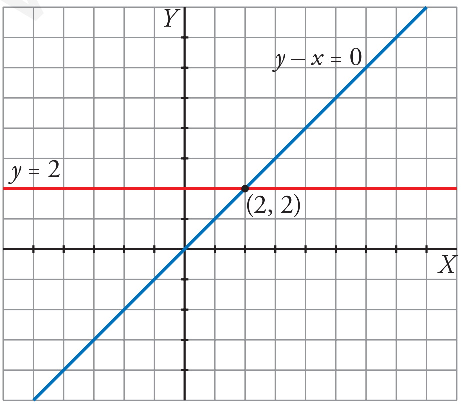
a) $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$



Punto en común: (2, 2)

Solución del sistema: $x = 2$, $y = 2$

b) $\begin{cases} y - x = 0 \\ y \quad\;\; = 2 \end{cases}$



Punto en común: (2, 2)

Solución del sistema: $x = 2$, $y = 2$

Los dos sistemas de ecuaciones tienen la misma solución. Por tanto, son equivalentes.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 115

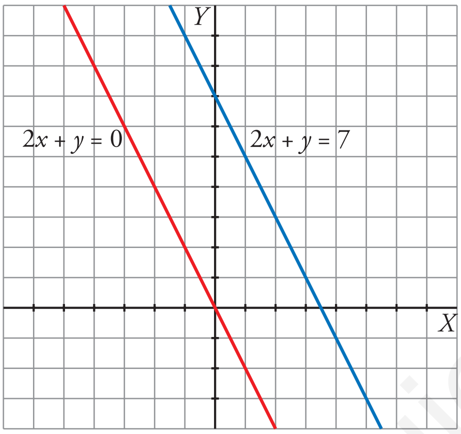
1 Fijándote en sus ecuaciones, di cuál de estos sistemas tiene una solución, cuál es incompatible y cuál indeterminado. Compruébalo representando las rectas:

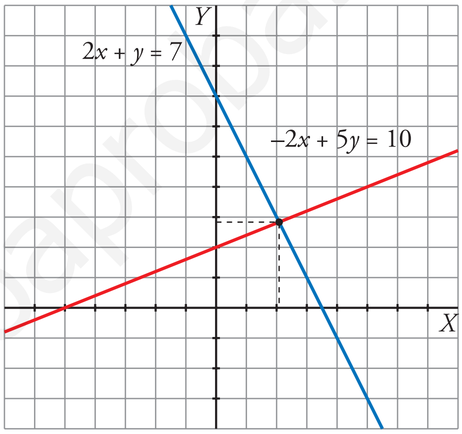
a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ Sistema incompatible

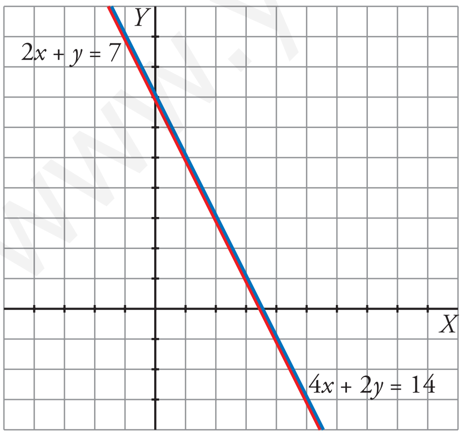
b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$ Sistema con una solución

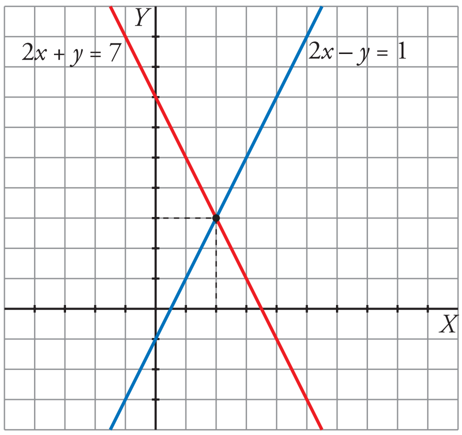




c) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ Sistema indeterminado

d) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ Sistema con una solución





2 **Completa estos sistemas para que el primero tenga la solución $x = 6$, $y = -1$, el segundo sea incompatible, y el tercero y el cuarto sean indeterminados:**

a) $\begin{cases} x - 4y = \dots \\ 2x \dots = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + \ \ y = 8 \\ 4x + 2y = \dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x \dots = \dots \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + 11y = \dots \\ \dots + 33y = 9 \end{cases}$

a) $6 - 4(-1) = 10$

$2 \cdot 6 + a \cdot (-1) = 13 \rightarrow a = -1$

El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 4y = 10 \\ 2x - \ \ y = 13 \end{cases}$ tiene como solución $x = 6$, $y = -1$.

b) Respuesta abierta.

$$\begin{cases} 2x + \ \ y = 8 \\ 4x + 2y = 2(2x + y) \end{cases}$$

Para que el sistema sea incompatible, podemos igualarlo a cualquier número distinto de 16.

c) Como $4x = 2(2x)$, para obtener la segunda ecuación multiplicamos la primera por 2. Al ser una ecuación equivalente, nos dará la misma recta, lo que es un sistema indeterminado.

$$\begin{cases} 2x + \ \ y = 8 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$$

d) Como $33y = 3(11y)$, para obtener la segunda ecuación multiplicamos la primera por 3. Esto nos dará el primer miembro de la igualdad; dividiremos el segundo miembro de la segunda ecuación por 3 para obtener el segundo miembro de la primera.

$$\begin{cases} 5x + 11y = 3 \\ 15 + 33y = 9 \end{cases}$$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 116

1 **Resuelve, por el método de sustitución, los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 3x - \ \ y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 9y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 4y = 11 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 13 \end{cases} \rightarrow y = \dfrac{5-x}{3}$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$5x + 7 \cdot \frac{5-x}{3} = 13 \rightarrow 5x + \frac{35-7x}{3} = 13 \rightarrow 15x + 35 - 7x = 39 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8x = 4 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{5 - \frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{9}{2}}{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Solución: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{3}{2}$

b) $\begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 3x - \ \ y = 3 \end{cases} \rightarrow y = 3x - 3$

Sustituyendo:

$$6x + 3(3x - 3) = 0 \rightarrow 6x + 9x - 9 = 0 \rightarrow 15x = 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \rightarrow y = 3 \cdot \frac{3}{5} - 3 = -\frac{6}{5}$$

Solución: $x = \dfrac{3}{5}$, $y = -\dfrac{6}{5}$

c) $\begin{cases} 3x + 9y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \rightarrow y = \dfrac{4-3x}{9}$

Sustituyendo:

$$2x + 3 \cdot \frac{4-3x}{9} = 1 \rightarrow 2x + \frac{4-3x}{9} = 1 \rightarrow 6x + 4 - 3x = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{3} \rightarrow y = \frac{4 - 3 \cdot \frac{(-1)}{3}}{9} = \frac{5}{9}$$

Solución: $x = -\dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{5}{9}$

d) $\begin{cases} x - 4y = 11 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases} \rightarrow y = \dfrac{x - 11}{4}$

Sustituyendo:

$$5x + 7 \cdot \frac{x - 11}{4} = 1 \rightarrow 5x + \frac{7x - 77}{4} = 1 \rightarrow 20x + 7x - 77 = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 27x = 81 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = \frac{3 - 11}{4} = -2$$

Solución: $x = 3,\ y = -2$

PÁGINA 117

2 **Resuelve, por el método de igualación, los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 5x+7y=13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x+3y=0 \\ 3x-\ \ y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+9y=4 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-4y=11 \\ 5x+7y=1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{cases} x+3y=5 \ \to\ x=5-3y \\ 5x+7y=13 \ \to\ x=\dfrac{13-7y}{5} \end{cases}\right\} \to\ 5-3y=\dfrac{13-7y}{5} \ \to\ 25-15y=13-7y \ \to$

$\to\ -8y=-12 \ \to\ y=\dfrac{-12}{-8}=\dfrac{3}{2} \ \to\ x=5-3\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$

Solución: $x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{3}{2}$

b) $\left.\begin{cases} 6x+3y=0 \ \to\ y=\dfrac{-6x}{3}=-2x \\ 3x-\ \ y=3 \ \to\ y=3x-3 \end{cases}\right\} \to\ -2x=3x-3 \ \to\ -5x=-3 \ \to$

$\to\ x=\dfrac{3}{5} \ \to\ y=-2\cdot\dfrac{3}{5}=-\dfrac{6}{5}$

Solución: $x=\dfrac{3}{5},\ y=-\dfrac{6}{5}$

c) $\left.\begin{cases} 3x+9y=4 \ \to\ y=\dfrac{4-3x}{9} \\ 2x+3y=1 \ \to\ y=\dfrac{1-2x}{3} \end{cases}\right\} \to\ \dfrac{4-3x}{9}=\dfrac{1-2x}{3} \ \to\ 4-3x=3-6x \ \to$

$\to\ 3x=-1 \ \to\ x=-\dfrac{1}{3} \ \to\ y=\dfrac{1-2\cdot\dfrac{(-1)}{3}}{3}=\dfrac{5}{9}$

Solución: $x=-\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{5}{9}$

d) $\left.\begin{cases} x-4y=11 \ \to\ x=11+4y \\ 5x+7y=1 \ \to\ x=\dfrac{1-7y}{5} \end{cases}\right\} \to\ 11+4y=\dfrac{1-7y}{5} \ \to\ 55+20y=1-7y$

$\to\ 27y=-54 \ \to\ y=-2 \ \to\ x=11+4\cdot 2=19$

Solución: $x=19,\ y=-2$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 118

3 Resuelve, por el método de reducción, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 4x - 5y = 38 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 4y = 11 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 4x - 5y = 38 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 7x = 49 \rightarrow x = 7 \rightarrow 3 \cdot 7 + 5y = 11 \rightarrow$

$\rightarrow 5y = -10 \rightarrow y = -2$

Solución: $x = 7,\ y = -2$

b) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x - 15y = -25 \\ 5x + 7y = 13 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} -8y = -12 \rightarrow$

$\rightarrow y = \dfrac{-12}{-8} = \dfrac{3}{2} \rightarrow x + 3 \cdot \dfrac{3}{2} = 5 \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Solución: $x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{3}{2}$

c) $\begin{cases} x - 4y = 11 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x + 20y = -55 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 27y = -54 \rightarrow y = -2 \rightarrow$

$\rightarrow x - 4 \cdot (-2) = 11 \rightarrow x = 3$

Solución: $x = 3,\ y = -2$

d) $\begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 9x - 3y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 15x = 9 \rightarrow x = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5} \rightarrow$

$\rightarrow 3 \cdot \dfrac{3}{5} - y = 3 \rightarrow y = \dfrac{9}{5} - 3 = \dfrac{-6}{5}$

Solución: $x = \dfrac{3}{5},\ y = \dfrac{-6}{5}$

6 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 119

4 **Resuelve este sistema simplificando previamente:**

$$\begin{cases} 5(x+3)-2(y-1)=3(5x-y)-8x \\ \dfrac{x+1}{7}-\dfrac{y}{5}=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(x+3)-2(y-1)=3(5x-y)-8x \\ \dfrac{x+1}{7}-\dfrac{y}{5}=2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5x+15-2y+2=15x-3y-8x \\ 5x+5-7y=70 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x+\ \ y=-17 \\ \ 5x-7y=65 \end{cases}$$

Por reducción:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -14x+7y=-119 \\ \quad 5x-7y=\ \ \ 65 \end{cases} \\ \hline -9x \qquad = -54 \end{array} \rightarrow x=6 \rightarrow y=-17+2\cdot 6=-5$$

Solución: $x=6$, $y=-5$

5 **Resuelve este sistema aplicando dos veces el método de reducción:**

$$\begin{cases} 7x+\ \ 5y=11 \\ 35x-12y=129 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x+\ \ 5y=11 \\ 35x-12y=129 \end{cases}$$

Obtenemos la y:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -35x-25y=-55 \\ \ \ 35x-12y=129 \end{cases} \\ \hline \qquad -37y=74 \end{array} \rightarrow y=-2$$

Obtenemos la x:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} \ \ 84x+60y=132 \\ 175x-60y=645 \end{cases} \\ \hline 259x \qquad =777 \end{array} \rightarrow x=3$$

Solución: $x=3$, $y=-2$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 120

1 **Dos poblaciones A y B distan 25 km. Un peatón sale de A hacia B a una velocidad de 4 km/h. Simultáneamente, sale de B hacia A otro a 6 km/h. Calcula el tiempo que tardan en cruzarse y la distancia que ha recorrido cada uno hasta ese instante.**

La ecuación del espacio recorrido por el peatón que sale de A es

$$x = 4 \cdot t$$

Como la distancia entre A y B es 25 km, la ecuación para el otro peatón es:

$$25 - x = 6 \cdot t$$

El momento del encuentro se expresa mediante un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 4t \\ 25 - x = 6t \end{cases}$$

$$25 = 10t \;\rightarrow\; t = 2{,}5 \;\rightarrow\; x = 4 \cdot 2{,}5 = 10$$

Por tanto, el encuentro se produce a las 2 h 30 min y a 10 km de la ciudad A.

2 **Dos poblaciones distan 120 km entre sí. En el mismo instante salen un peatón de A hacia B a una velocidad de 6 km/h y un ciclista de B hacia A a 24 km/h. ¿Cuánto tardan en encontrarse? ¿Qué distancia recorre el peatón?**

La ecuación para el peatón es:

$$x = 6t$$

La ecuación para el ciclista es:

$$120 - x = 24t$$

El encuentro se expresa mediante un sistema:

$$\begin{cases} x = 6t \\ 120 - x = 24t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 6t = 0 \\ -x - 24t = -120 \end{cases}$$

$$-30t = -120 \;\rightarrow\; t = 4 \;\rightarrow\; x = 6 \cdot 4 = 24$$

Por tanto, se cruzan a las 4 h de haber iniciado su viaje, cuando el peatón ha recorrido 24 km.

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 121

Practica

Solución de un sistema de ecuaciones

1 ▼▽▽ **Comprueba si $x = 2$, $y = -1$ es solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 5x + y = -10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 5x + y = -10 \end{cases} \to \begin{cases} 2 \cdot 2 - (-1) = 5 \neq -4 \\ 5 \cdot 2 - 1 = 9 \neq -10 \end{cases} \to$ No es solución.

b) $\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \to \begin{cases} 3 \cdot 2 - 4(-1) = 10 \\ 4 \cdot 2 + 3(-1) = 5 \end{cases} \to$ Sí es solución de este sistema.

2 ▼▽▽ **Completa los siguientes sistemas de ecuaciones para que ambos tengan la solución $x = 3$, $y = -1/2$:**

a) $\begin{cases} 3x + 2y = \dots \\ x - 4y = \dots \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = \dots \\ x - y = \dots \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x + 2y = \dots \\ x - 4y = \dots \end{cases} \to \begin{cases} 3 \cdot 3 + 2\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 9 - 1 = 8 \\ 3 - 4\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3 + 2 = 5 \end{cases} \to \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = \dots \\ x - y = \dots \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} = 1 \\ 3 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2} \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 1 \\ x - y = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

3 ▼▽▽ **a) Busca dos soluciones de la ecuación $3x - y = 1$.**

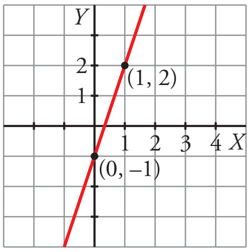
b) Representa gráficamente la recta $3x - y = 1$.

c) Un punto cualquiera de la recta, ¿es solución de la ecuación?

a) $3x - y = 1$

Si $x = 1$: $3 \cdot 1 - y = 1 \to y = 2$

Si $x = 0$: $3 \cdot 0 - y = 1 \to y = -1$

b) 

c) Todos los puntos de la recta son soluciones de la ecuación.

4 ▼▽▽ **a) Representa gráficamente en los mismos ejes las dos rectas siguientes:**

$$\mathbf{2x + y = 3} \qquad \mathbf{x - y = 3}$$

b) Di cuál es la solución de este sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

c) Di si son equivalentes los sistemas:

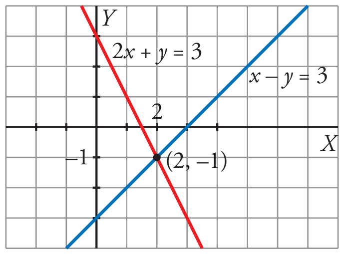
$$S: \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases} \qquad S': \begin{cases} y + 1 = 0 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}$$

a) $2x + y = 3$

x	0	1
y	3	1

$x - y = 3$

x	0	1
y	–3	–2



b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{array}\right\}$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$, que corresponde al punto de corte de ambas rectas.

c) Por el apartado anterior, sabemos que la solución de S es $x = 2$, $y = -1$. Probemos si es solución del segundo:

$$\begin{cases} -1 + 1 = 0 \\ 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) = 10 \end{cases} \rightarrow \text{ sí es solución.}$$

Por tanto, S y S' son equivalentes.

Resolución de sistemas de ecuaciones

5 ▼▼▽ **Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3x - \ \ y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - \ \ y = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x + 8y = -2 \end{cases}$

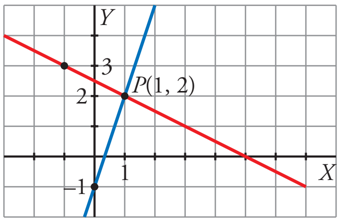
a) $\begin{cases} 3x - \ \ y = 1 \\ \ \ x + 2y = 5 \end{cases}$

$3x - y = 1$

x	0	1
y	–1	2

$x + 2y = 5$

x	1	–1
y	2	3



Solución: $x = 1, \ y = 2$

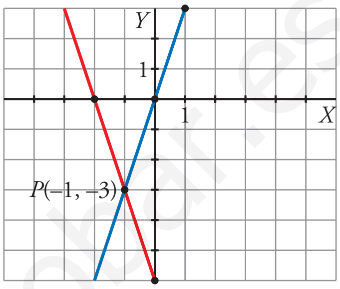
b) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$

$3x - y = 0$

x	0	1
y	0	3

$3x + y = -6$

x	0	–2
y	–6	0



Solución: $x = -1, \ y = -3$

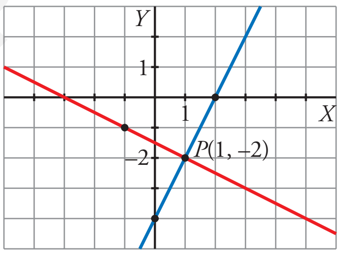
c) $\begin{cases} \ \ x + 3y = -5 \\ 2x - \ \ y = 4 \end{cases}$

$x + 3y = -5$

x	1	–2
y	–2	–1

$2x - y = 4$

x	0	1
y	–4	–2



Solución: $x = 1, \ y = -2$

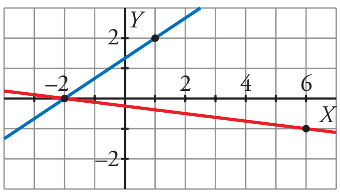
d) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ \ \ x + 8y = -2 \end{cases}$

$2x - 3y = -4$

x	1	–2
y	2	0

$x + 8y = -2$

x	6	–2
y	–1	0



Solución: $x = -2, \ y = 0$

6 ▼▽▽ **Resuelve por sustitución.**

a) $\begin{cases} \ \ x + 3y = 0 \\ 2x + \ \ y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 3y = -25 \\ \ \ x - 5y = -17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - \ \ y = -6 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 16 = 2y \\ 2y - 3x = 16 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 0 \\ 2x + \ \ y = -5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = -3y \\ 2(-3y) + y = -5 \ \ \to \end{array}$

$\to \ -6y + y = -5 \ \to \ -5y = -5 \ \to \ y = 1 \ \to \ x = -3 \cdot 1 = -3$

Solución: $x = -3, \ y = 1$

b) $\left.\begin{array}{r} 8x - 3y = -25 \\ x - 5y = -17 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow\ x = -17 + 5y\ \rightarrow\ 8(-17 + 5y) - 3y = -25\ \rightarrow\ -136 + 40y - 3y = -25\ \rightarrow$

$\rightarrow\ 37y = 111\ \rightarrow\ y = 3\ \rightarrow\ x = -17 + 15 = -2$

Solución: $x = -2,\ y = 3$

c) $\left.\begin{array}{l} 7x - \ \ y = -6 \\ 4x + 3y = 3 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} 7x + 6 = y \\ 4x + 3(7x + 6) = 3\ \rightarrow\ 4x + 21x + 18 = 3\ \rightarrow \end{array}$

$\rightarrow\ 25x = -15\ \rightarrow\ x = \dfrac{-15}{25} = -\dfrac{3}{5}\ \rightarrow\ y = 7\left(-\dfrac{3}{5} + 6\right) = \dfrac{9}{5}$

Solución: $x = -\dfrac{3}{5},\ y = \dfrac{9}{5}$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x + 16 = 2y \\ 2y - 3x = 16 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} y = \dfrac{2x + 16}{2} = x + 8 \\ 2(x + 8) - 3x = 16\ \rightarrow \end{array}$

$\rightarrow\ 2x + 16 - 3x = 16\ \rightarrow\ -x = 0\ \rightarrow\ x = 0\ \rightarrow\ y = 8$

Solución: $x = 0,\ y = 8$

7 ▼▽▽ **Resuelve por igualación.**

a) $\begin{cases} x \qquad = 4 \\ x - y = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \ \ y = 6x \\ 7x = 2y - 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - 4y = -4 \\ 2x + \ \ y = -1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x \qquad = 4 \\ x - y = 6 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 6 + y \end{array}\right\}\ \rightarrow\ 6 + y = 4\ \rightarrow\ y = -2$

Solución: $x = 4,\ y = -2$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 3y = -4 \\ x - 2y = 6 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x = -4 - 3y \\ x = 6 + 2y \end{array}\right\}\ \rightarrow\ -4 - 3y = 6 + 2y\ \rightarrow\ -4 - 6 = 5y\ \rightarrow$

$\rightarrow\ y = -2\ \rightarrow\ x = -4 - 3(-2) = 2$

Solución: $x = 2,\ y = -2$

c) $\left.\begin{array}{l} y = 6x \\ 7x = 2y - 5 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} y = 6x \\ y = \dfrac{7x + 5}{2} \end{array}\right\}\ \rightarrow\ 6x = \dfrac{7x + 5}{2}\ \rightarrow\ 12x = 7x + 5\ \rightarrow\ 5x = 5\ \rightarrow$

$\rightarrow\ x = 1\ \rightarrow\ y = 6 \cdot 1 = 6$

Solución: $x = 1,\ y = 6$

d) $\left.\begin{array}{l} 3x - 4y = -4 \\ 2x + \ \ y = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{3x+4}{4} \\ y = -1 - 2x \end{array}\right\} \to \dfrac{3x+4}{4} = -1 - 2x \to 3x + 4 = -4 - 8x \to$

$\to \ 11x = -8 \ \to \ x = \dfrac{-8}{11} \ \to$

$\to \ y = -1 - 2\left(\dfrac{-8}{11}\right) = \dfrac{5}{11}$

Solución: $x = \dfrac{-8}{11}, \ y = \dfrac{5}{11}$

8 ▼▽▽ **Resuelve por reducción.**

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 2x + \ \ y = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - \ \ y = 7 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ x + \ \ y = 7/6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$

$2x \quad = 2 \ \to \ x = 1, \ y = -1$

Solución: $x = 1, \ y = -1$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x - y = 0 \\ 3x + y = -6 \end{array}\right\}$

$6x \quad = -6 \ \to \ x = -1, \ y = -3$

Solución: $x = -1, \ y = -3$

c) $\left.\begin{array}{l} 4x - 3y = 2 \\ 2x + \ \ y = -4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x - 3y = 2 \\ 6x + 3y = -12 \end{array}\right\}$

$10x \quad = -10 \ \to \ x = -1 \ \to \ 2(-1) + y = -4 \ \to \ y = -2$

Solución: $x = -1, \ y = -2$

d) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 3x - \ \ y = 7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 6x - 2y = 14 \end{array}\right\} \to 7x = 15 \to x = \dfrac{15}{7} \to \dfrac{15}{7} + 2y = 1 \to$

$\to \ y = \dfrac{1 - 15/7}{2} = -\dfrac{4}{7}$

Solución: $x = \dfrac{15}{7}, \ y = -\dfrac{4}{7}$

e) $\left.\begin{array}{l} x - 3y = 1 \\ 3x + 6y = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x - 6y = 2 \\ 3x + 6y = 2 \end{array}\right\} \to 5x = 4 \to x = \dfrac{4}{5} \to \dfrac{4}{5} - 3y = 1 \to$

$\to \ y = \dfrac{4/5 - 1}{3} = -\dfrac{1}{15}$

Solución: $x = \dfrac{4}{5}, \ y = -\dfrac{1}{15}$

f) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 3 \\ x + \ \ y = 7/6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 3 \\ -2x - 2y = -14/6 \end{array}\right\} \rightarrow x = 3 - \dfrac{14}{6} = \dfrac{2}{3} \rightarrow \dfrac{2}{3} + y = \dfrac{7}{6} \rightarrow$

$\rightarrow y = \dfrac{7}{6} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}$

Solución: $x = \dfrac{2}{3},\ y = \dfrac{1}{2}$

9 ▼▽▽ **Resuelve estos sistemas por el método que consideres más adecuado:**

a) $\begin{cases} x - \ \ y = 1 \\ 4x - 3y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x = 1 + y \\ 3 + 2y = 10x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x - \ \ y = 1 \\ 4x - 3y = 8 \end{array}\right\}$ Por sustitución: $\begin{cases} x = 1 + y \\ 4(1 + y) - 3y = 8 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow 4 + 4y - 3y = 8 \rightarrow y = 4 \rightarrow x = 1 + 4 = 5$

Solución: $x = 5,\ y = 4$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x = 1 + y \\ 3 + 2y = 10x \end{array}\right\}$ Por sustitución: $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 3 + 2(3x - 1) = 10x \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow 3 + 6x - 2 = 10x \rightarrow 1 = 4x \rightarrow x = \dfrac{1}{4} \rightarrow y = 3 \cdot \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{1}{4}$

Solución: $x = \dfrac{1}{4},\ y = -\dfrac{1}{4}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = -1 \\ 4x - 3y = -2 \end{array}\right\}$ Por reducción: $\left.\begin{array}{r} -4x - 10y = 2 \\ 4x - 3y = -2 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow -13y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow 2x + 5 \cdot 0 = -1 \rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Solución: $x = -\dfrac{1}{2},\ y = 0$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{array}\right\}$ Por reducción: $\left.\begin{array}{r} 6x - 4y = 4 \\ x + 4y = -5/3 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow 7x = \dfrac{7}{3} \rightarrow x = \dfrac{1}{3} \rightarrow 3 \cdot \dfrac{1}{3} - 2y = 2 \rightarrow -2y = 1 \rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

Solución: $x = \dfrac{1}{3},\ y = -\dfrac{1}{2}$

10 ▼▼▽ **Resuelve los sistemas siguientes:**

a) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x - 3 = 9y - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(3x - 2) = y - 1 \\ 3(x + y) + 2(x - y) = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 4 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + \dfrac{y - 2}{4} = 1 \\ x - \dfrac{3}{2}y = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{2 - x}{3} + \dfrac{3 + y}{6} = 2 \\ \dfrac{8 - 3x}{6} - \dfrac{2 + y}{9} = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{2} + \dfrac{y + 1}{4} = 1 \\ \dfrac{2x - 1}{2} - \dfrac{2y + 1}{6} = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ 5x - 3 = 9y - 3 \end{array}\right\}$ Por sustitución: $y = -2x \;\rightarrow\; 5x - 3 = 9(-2x) - 3 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 5x - 3 = -18x - 3 \;\rightarrow\; 23x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = -2 \cdot 0 = 0$

Solución: $x = 0,\; y = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} 2(3x - 2) = y - 1 \\ 3(x + y) + 2(x - y) = 8 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 6x - 4 = y - 1 \\ 3x + 3y + 2x - 2y = 8 \;\rightarrow\; 5x + y = 8 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 6x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{array}\right\}$

Por reducción: $11x = 11 \;\rightarrow\; x = 1 \;\rightarrow\; 6 \cdot 1 - y = 3 \;\rightarrow\; y = 3$

Solución: $x = 1,\; y = 3$

c) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 4 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 2 \end{array}\right\}$ Por reducción: $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 24 \\ 2x + \;\; y = 8 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 24 \\ -2x - \;\; y = -8 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow\; -4y = 16 \;\rightarrow\; y = -4 \;\rightarrow\; 2x - 3(-4) = 24 \;\rightarrow\; 2x = 12 \;\rightarrow\; x = 6$

Solución: $x = 6,\; y = -4$

d) $\left.\begin{array}{l} x + \dfrac{y - 2}{4} = 1 \\ x - \dfrac{3}{2}y = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x + \;\; y - 2 = 4 \\ 2x - 3y \;\; = 10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x + \;\; y = 6 \\ 2x - 3y = 10 \end{array}\right\}$ Por reducción:

$\left.\begin{array}{l} 12x + 3y = 18 \\ 2x - 3y = 10 \end{array}\right\} \rightarrow\; 14x = 28 \;\rightarrow\; x = 2 \;\rightarrow\; 2 - \dfrac{3}{2}y = 5 \;\rightarrow\; y = \dfrac{2 - 5}{3/2} = -2$

Solución: $x = 2,\; y = -2$

e) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2-x}{3}+\dfrac{3+y}{6}=2 \\ \dfrac{8-3x}{6}-\dfrac{2+y}{9}=2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} 2(2-x)+3+y=12 \\ 3(8-3x)-2(2+y)=36 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 4-2x+3+y=12 \\ 24-\ 9x-4-2y=36 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x+\ \ y=5 \\ -9x-2y=16 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} -4x+2y=10 \\ -9x-2y=16 \end{cases} \rightarrow\ -13x=26 \ \rightarrow\ x=-2 \ \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{2-(-2)}{3}+\dfrac{3+y}{6}=2 \ \rightarrow\ \dfrac{3+y}{6}=2-\dfrac{4}{3} \ \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{3+y}{6}=\dfrac{2}{3} \ \rightarrow\ y=1$

Solución: $x=-2,\ y=1$

f) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y+1}{4}=1 \\ \dfrac{2x-1}{2}-\dfrac{2y+1}{6}=1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} 2(x-1)+y+1=4 \\ 3(2x-1)-(2y+1)=6 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x-2+\ \ y+1=4 \\ 6x-3-2y-1=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+\ \ y=5 \\ 6x-2y=10 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 4x+2y=10 \\ 6x-2y=10 \end{cases} \rightarrow\ 10x=20 \ \rightarrow\ x=2 \ \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{2-1}{2}+\dfrac{y+1}{4}=1 \ \rightarrow\ \dfrac{y+1}{4}=\dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ y=1$

Solución: $x=2,\ y=1$

PÁGINA 122

11 ▼▼▽ **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, aplicando dos veces el método de reducción para despejar cada una de las incógnitas:**

a) $\begin{cases} 13x - 8y = 15 \\ 7x - 14y = 9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 9x - 13y = 54 \\ 11x - 7y = 22 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 13x - 8y = 15 \\ 7x - 14y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 91x - 56y = 105 \\ -91x + 182y = -117 \end{cases} \rightarrow 126y = -12 \rightarrow y = \dfrac{-2}{21}$

$\begin{cases} 182x - 112y = 210 \\ -56x + 112y = -72 \end{cases} \rightarrow 126x = 138 \rightarrow x = \dfrac{23}{21}$

Solución: $x = \dfrac{23}{21}$, $y = \dfrac{-2}{21}$

b) $\begin{cases} 9x - 13y = 54 \\ 11x - 7y = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 99x - 143y = 594 \\ -99x + 63y = -198 \end{cases} \rightarrow -80y = 396 \rightarrow y = -\dfrac{99}{20}$

$\begin{cases} 63x - 91y = 378 \\ -143x + 91y = -286 \end{cases} \rightarrow -80x = 92 \rightarrow x = -\dfrac{23}{20}$

Solución: $x = \dfrac{23}{20}$, $y = -\dfrac{99}{20}$

12 ▼▼▽ **Observa las ecuaciones que forman los siguientes sistemas y di cuál de ellos tiene una única solución, cuál no tiene solución y cuál tiene infinitas soluciones. Compruébalo representando las rectas que los forman:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = -3 \end{cases}$

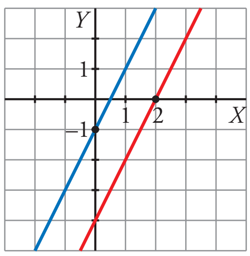
a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 8 \end{array}\right\}$ No tiene solución

$2x - y = 1$

x	0	2
y	–1	3

$4x - 2y = 8 \rightarrow 2x - y = 4$

x	0	2
y	–4	0

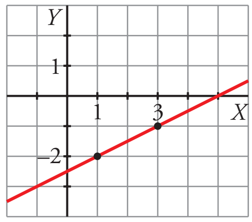


b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 10 \end{array}\right\}$ Tiene infinitas soluciones

$x - 2y = 5$ $\qquad$ $2x - 4y = 10 \;\rightarrow\; x - 2y = 5$

x	1	3
y	–2	–1

Es la misma recta



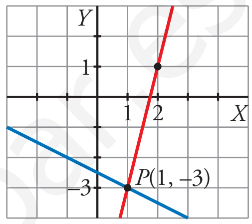
c) $\left.\begin{array}{r} 5x + 2y = -1 \\ 4x - \;\; y = 7 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, $x = 1$, $y = -3$.

$5x + 2y = -1$

x	1	–1
y	–3	–2

$4x - y = 7$

x	1	2
y	–3	1



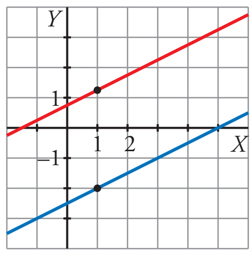
d) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = -3 \end{array}\right\}$ No tiene solución

$x - 2y = 5$

x	1	–1
y	–2	–3

$2x - 4y = -3$

x	1	3
y	5/4	9/4



13 ▼▼▽ **Resuelve los siguientes sistemas. Indica si alguno de ellos es incompatible o indeterminado.**

a) $\begin{cases} 2x - \;\; 5y = -2 \\ 3{,}25x - 2{,}5y = 8 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $\begin{cases} 0{,}2x - 1{,}7y = 6{,}1 \\ 1{,}23x + 0{,}8y = 3{,}75 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(x - 1) + y = 0 \\ 3(x + 1) + y = -5 \end{cases}$ $\qquad$ **d)** $\begin{cases} x + y = 4 - y \\ 3x - 5 = 7 - 6y \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - \;\; 5y = -2 \\ 3{,}25x - 2{,}5y = 8 \end{cases}$ Por reducción: $\begin{cases} 2x - 5y = -2 \\ -6{,}5x + 5y = -16 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow\; -4{,}5x = -18 \;\rightarrow\; x = 4 \;\rightarrow\; 2 \cdot 4 - 5y = -2 \;\rightarrow\; 10 = 5y \;\rightarrow\; y = 2$

Solución: $x = 4$, $y = 2$

b) $\begin{cases} 0{,}2x - 1{,}7y = 6{,}1 \\ 1{,}23x + 0{,}8y = 3{,}75 \end{cases}$ Por sustitución: $y = \dfrac{6{,}1 - 0{,}2x}{1{,}7}$

$1{,}23x + 0{,}8\left(\dfrac{6{,}1 - 0{,}2x}{1{,}7}\right) = 3{,}75 \;\rightarrow\; 1{,}23x + \dfrac{4{,}88 - 0{,}16x}{1{,}7} = 3{,}75 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2{,}091x + 4{,}88 - 0{,}16x = 6{,}375 \;\rightarrow$

$$\rightarrow 1{,}931x = 1{,}495 \rightarrow x = \frac{1{,}495}{1{,}931} = 0{,}77 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{6{,}1 - 0{,}2 \cdot 0{,}77}{1{,}7} = 3{,}5$$

Solución: $x = 0{,}77$, $y = 3{,}5$

c) $\begin{cases} 3(x-1) + y = 0 \\ 3(x+1) + y = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 3 + y = 0 \\ 3x + 3 + y = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x + y = -8 \end{cases}$

No tiene solución. Es incompatible.

d) $\begin{cases} x + y = 4 - y \\ 3x - 5 = 7 - 6y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$

Tiene infinitas soluciones. Es indeterminado.

Aplica lo aprendido

14 ▼▽▽ **Halla dos números tales que su suma sea 160, y su diferencia, 34.**

Llamamos x e y a los números.

$$\begin{cases} x + y = 160 \\ x - y = 34 \end{cases} \rightarrow 2x = 194 \rightarrow x = 97 \rightarrow 97 + y = 160 \rightarrow y = 63$$

Los números son 97 y 63.

15 ▼▽▽ **Por dos bolígrafos y tres cuadernos he pagado 7,80 €; por cinco bolígrafos y cuatro cuadernos, pagué 13,20 €. ¿Cuál es el precio de un bolígrafo? ¿Y de un cuaderno?**

x es el precio de un bolígrafo e y es el precio de un cuaderno.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7{,}80 \\ 5x + 4y = 13{,}2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7{,}80 - 3y}{2} \\ 5\left(\dfrac{7{,}80 - 3y}{2}\right) + 4y = 13{,}2 \end{cases} \rightarrow 39 - 15y + 8y = 26{,}4 \rightarrow$$

$$\rightarrow -7y = -12{,}6 \rightarrow y = 1{,}8 \text{ €} \rightarrow x = \frac{7{,}80 - 3 \cdot 1{,}8}{2} = 1{,}2 \text{ €}$$

Un bolígrafo cuesta 1,2 €, y un cuaderno, 1,8 €.

16 ▼▽▽ **Un librero ha vendido 45 libros, unos a 32 € y otros a 28 €. Obtuvo por la venta 1 368 €. ¿Cuántos libros vendió de cada clase?**

x son los libros de 32 € e y son los de 28 €.

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ 32x + 28y = 1\,368 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 45 - x \\ 32x + 28(45 - x) = 1\,368 \end{cases} \rightarrow 32x + 1\,260 - 28x = 1\,368 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x = 108 \rightarrow x = 27 \rightarrow y = 45 - 27 = 18$$

Vendió 27 libros de 32 € y 18 libros de 28 €.

17 ▼▽▽ **En un corral hay conejos y gallinas que hacen un total de 29 cabezas y 92 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?**

x es el número de gallinas, e y, el de conejos.

$$\begin{cases} x + y = 29 \\ 2x + 4y = 92 \end{cases} \to \begin{cases} y = 29 - x \\ 2x + 4(29 - x) = 92 \end{cases} \to$$

$$\to 2x + 116 - 4x = 92 \to -2x = -24 \to$$

$$\to x = 12 \to y = 29 - 12 = 17$$

Hay 12 gallinas y 17 conejos.

18 ▼▽▽ **Una cooperativa ha envasado 2 000 *l* de aceite en botellas de 1,5 *l* y 2 *l*. Si ha utilizado 1 100 botellas, ¿cuántas se han necesitado de cada clase?**

x son las botellas de 1,5 *l*, e y, las de 2 *l*.

$$\begin{cases} x + y = 1\,100 \\ 1{,}5x + 2y = 2\,000 \end{cases} \to \begin{cases} -2x - 2y = -2\,200 \\ 1{,}5x + 2y = 2\,000 \end{cases} \to$$

$$\to -0{,}5x = -200 \to x = 400 \to y = 1\,100 - 400 = 700$$

Se han utilizado 400 botellas de 1,5 *l* y 700 de 2 *l*.

19 ▼▽▽ **Halla dos números naturales tales que su suma sea 154, y su cociente, 8/3.**

Llamamos x e y a los números.

$$\begin{cases} x + y = 154 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{8}{3} \end{cases} \to \begin{cases} y = 154 - x \\ 3x = 8y \end{cases} \to 3x = 8(154 - x) \to 3x = 1\,232 - 8x \to$$

$$\to 11x = 1\,232 \to x = 112 \to y = 154 - 112 = 42$$

Los números son 112 y 42.

20 ▼▽▽ **Un examen tipo test consta de 50 preguntas y hay que contestar a todas. Por cada acierto se obtiene un punto y por cada fallo se restan 0,5 puntos. Si mi nota ha sido 24,5, ¿cuántos aciertos y cuántos fallos he tenido?**

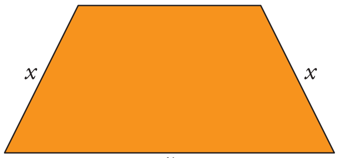
x es el número de aciertos, e y, el de fallos.

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x - 0{,}5y = 24{,}5 \end{cases} \to \begin{cases} -x - y = -50 \\ x - 0{,}5y = 24{,}5 \end{cases} \to -1{,}5y = -25{,}5 \to y = 17 \to x = 33$$

He tenido 33 aciertos y 17 fallos.

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

21 ▼▽▽ **Si la base mayor es la suma de los lados oblicuos y el perímetro es 38 m, ¿cuánto mide cada lado?**



$\begin{cases} y = 2x \\ 6 + 2x + y = 38 \end{cases} \to 6 + 2x + 2x = 38 \to 4x = 32 \to x = 8 \text{ m} \to y = 16 \text{ m}$

La base mayor mide 16 m, y los lados oblicuos, 8 m, respectivamente.

22 ▼▽▽ **Los alumnos de un centro escolar son 420 entre ESO y Bachillerato. El 42% de ESO y el 52% de Bachillerato son chicas, lo que supone un total de 196 mujeres. Calcula cuántos estudiantes hay en ESO y cuántos en Bachillerato.**

x es el número de alumnos de ESO e y los de Bachillerato.

$\begin{cases} x + y = 420 \\ 0{,}42x + 0{,}52y = 196 \end{cases} \to \begin{cases} y = 420 - x \\ 0{,}42x + 0{,}52(420 - x) = 196 \end{cases} \to$

$\to 0{,}42x - 0{,}52x = 196 - 218{,}4 \to$

$\to 0{,}1x = 22{,}4 \to x = 224 \to$

$\to y = 420 - 224 = 196$

Son 224 alumnos en la ESO y 196 en Bachillerato.

23 ▼▽▽ **He pagado 55,72 € por una camiseta y un pantalón que costaban 70 € entre los dos. La camiseta tenía un 18% de descuento, y el pantalón, un 22%. ¿Cuál era el precio original de cada artículo?**

La camiseta vale x; con la rebaja del 18% pago $0{,}82x$. El pantalón vale y; con la rebaja del 22% pago $0{,}78y$.

Por tanto:

$\begin{cases} x + y = 70 \\ 0{,}82x + 0{,}78y = 55{,}72 \end{cases} \to \begin{cases} y = 70 - x \\ 0{,}82x + 0{,}78(70 - x) = 55{,}72 \end{cases} \to$

$\to 0{,}82x + 54{,}6 - 0{,}78x = 55{,}72 \to$

$\to 0{,}04x = 1{,}12 \to x = 28 \to$

$\to y = 70 - 28 = 42$

La camiseta vale 28 €, y el pantalón, 42 €.

Comprobación: $\begin{cases} 28 + 42 = 70 \\ 22{,}96 + 32{,}76 = 55{,}72 \end{cases}$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

Resuelve problemas

24 ▼▼▽ **Halla dos números naturales que suman 140 y tales que al dividir el mayor entre el menor obtenemos 2 de cociente y 14 de resto.**

☞ ***Recuerda: Dividendo = divisor × cociente + resto.***

Los números son x e y.

$$\begin{cases} x + y = 140 \\ x = 2y + 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y + 14 + y = 140 \\ x = 2 \cdot 42 + 14 = 98 \end{cases} \rightarrow 3y = 126 \rightarrow y = 42$$

98 y 42 son los números buscados.

25 ▼▼▽ **La suma de las edades de una madre y su hijo es 56 años. Hace 10 años, la edad de la madre era el quíntuple de la edad que tenía el hijo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?**

	HOY	HACE 10 AÑOS
MADRE	x	$x - 10$
HIJO	y	$y - 10$
	56	$x - 10 = 5(y - 10)$

$$\begin{cases} x + y = 56 \\ x - 10 = 5(y - 10) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 56 \\ x - 10 = 5y - 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 56 - x \\ x - 10 = 5(56 - x) - 50 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 10 = 280 - 5x - 50 \rightarrow 6x = 240 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 40 \rightarrow y = 56 - 40 = 16$$

La madre tiene 40 años, y el hijo, 16 años.

26 ▼▼▽ **Hace tres años, la edad de Nuria era el doble de la de su hermana Marta. Dentro de 7 años, será los 4/3 de la que entonces tenga Marta. Calcula la edad actual de cada una.**

	HOY	HACE 3 AÑOS	DENTRO DE 7 AÑOS
NURIA	x	$x - 3$	$x + 7$
MARTA	y	$y - 3$	$y + 7$

$$\begin{cases} x - 3 = 2(y - 3) \\ x + 7 = \dfrac{4}{3}(y + 7) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 3 = 2y - 6 \\ 3x + 21 = 4y + 28 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y - 3 \\ 3(2y - 3) - 4y = 7 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow 6y - 9 - 4y = 7 \rightarrow 2y = 16 \rightarrow y = 8 \rightarrow x = 13$$

Nuria tiene 13 años, y Marta, 8 años.

27 ▼▼▽ **He cambiado un montón de monedas de 20 céntimos por monedas de 1 €, de manera que ahora tengo 24 monedas menos que antes. ¿Cuántas monedas de 20 céntimos tenía?**

Tengo x monedas de 0,20 €. El número de monedas de 1 € es y.

$$\begin{cases} x \cdot 0{,}2 = y \\ y = x - 24 \end{cases} \rightarrow \; 0{,}2x = x - 24 \;\rightarrow\; 24 = 0{,}8x \;\rightarrow\; x = 30 \;\rightarrow\; y = 30 - 24 = 6$$

Tenía 30 monedas de 0,2 € y las he cambiado por 6 monedas de 1 €.

PÁGINA 123

28 ▼▼▽ **Si Álvaro regala a Rita 4 de sus discos, ella tendrá el doble que él. Si Rita da 6 de sus discos a Álvaro, entonces será él quien tenga el doble que ella. ¿Cuántos discos tiene cada uno?**

Discos de Álvaro: x Discos de Rita: y

$$\begin{cases} 2(x-4) = y+4 \\ x+6 = 2(y-6) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-8 = y+4 \\ x+6 = 2y-12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x-12 \\ x+6 = 2(2x-12)-12 \end{cases}$$

$$x+6 = 4x-24-12 \rightarrow 3x = 42 \rightarrow x = 14 \rightarrow y = 2 \cdot 14 - 12 = 16$$

Álvaro tiene 14 discos, y Rita, 16.

29 ▼▼▽ **Un comerciante compró 35 juegos de un tipo y 25 de otro pagando por ellos 1 220 €. Con la venta de los primeros ganó un 25% y con los segundos perdió el 5%, de forma que obtuvo 170 € de ganancia sobre el precio de compra. Calcula el precio de compra de cada tipo de juego.**

Precios de compra de cada tipo de juego: x e y.

$$\begin{cases} 35x + 25y = 1\,220 \\ 1{,}25 \cdot 35x + 0{,}95 \cdot 25y = 1\,390 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7x + 5y = 244 \\ 43{,}75x + 23{,}75y = 1\,390 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{244-7x}{5} \rightarrow 43{,}75x + \left(\frac{244-7x}{5}\right) = 1\,390 \rightarrow$$

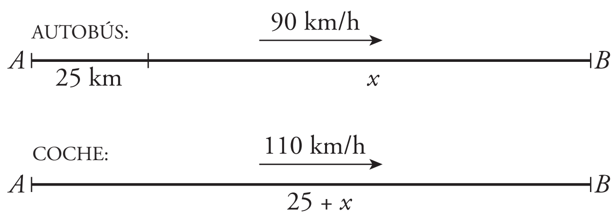
$$\rightarrow 43{,}75x + 1\,159 - 33{,}25x = 1\,390 \rightarrow$$

$$\rightarrow 10{,}5x = 231 \rightarrow x = 22 \rightarrow y = \frac{244 - 7 \cdot 22}{5} = 18$$

Los precios de compra fueron 22 € y 18 €, respectivamente.

30 ▼▼▽ **Un autobús sale de *A* a 90 km/h. Cuando ha recorrido 25 km, sale de *A* un coche a 110 km/h que quiere alcanzar al autobús. ¿Cuánto tiempo tarda en hacerlo y qué distancia recorre hasta conseguirlo?**

☞ ***Mira el problema resuelto de la página 120.***



	ESPACIO	VELOCIDAD	TIEMPO
AUTOBÚS	x	90	t
COCHE	$25 + x$	110	t

Sabemos que *espacio* = *velocidad* · *tiempo*.

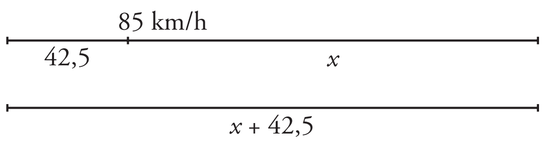
$$\left.\begin{array}{l} x = 90t \\ 25 + x = 110t \end{array}\right\} \rightarrow\ 25 + 90t = 110t \ \rightarrow\ 20t = 25 \ \rightarrow\ t = 1{,}25 \ \rightarrow\ x = 112{,}5$$

Tarda 1,25 h y recorre 137,5 km.

31 ▼▼▽ **Un tren regional sale de una estación a una velocidad de 85 km/h. Media hora más tarde sale otro más rápido en la misma dirección a 110 km/h. Calcula el tiempo que tardará en alcanzarlo y la distancia recorrida hasta lograrlo.**

t: tiempo que tarda en alcanzarlo.

x: distancia que recorre el tren regional hasta el alcance.



$85 \cdot 0{,}5 = 42{,}5$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 85t \\ x + 42{,}5 = 110t \end{array}\right. \rightarrow\ 85t + 42{,}5 = 110t \ \rightarrow\ 25t = 42{,}5 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ t = 1{,}7 \ \rightarrow\ x = 144{,}5 \ \rightarrow\ 144{,}5 + 42{,}5 = 187$$

Tarda 1h 42 min y recorre 187 km.

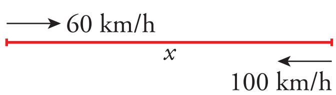
32 ▼▼▽ **Dos ciudades, *A* y *B*, distan 234 km. De *A* sale un autobús en dirección a *B* y simultáneamente sale de *B* un tren en dirección a *A*. Tardan en cruzarse 1 hora y 30 minutos. ¿Cuál es la velocidad de cada uno sabiendo que la del autobús supera a la del tren en 5 km/h?**

$$\left\{\begin{array}{l} x = v \cdot 1{,}5 \\ 234 - x = (v + 5) \cdot 1{,}5 \end{array}\right. \rightarrow\ 234 - 1{,}5v = 1{,}5v - 7{,}5 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 234 - 7{,}5 = 3v \ \rightarrow\ v = \frac{226{,}5}{3} = 75{,}5 \text{ km/h}$$

El tren va a 75,5 km/h, y el autobús, a 80,5 km/h.

33 ▼▼▽ **Un autobús escolar hace la ruta entre dos pueblos, *A* y *B*. Cuando va con niños, lleva una velocidad media de 60 km/h y tarda un cuarto de hora más que si va vacío, con una velocidad de 100 km/h. ¿Cuál es la distancia entre *A* y *B*?**



$$\left\{\begin{array}{l} x = 60t \\ x = 100(t - 0{,}25) \end{array}\right. \rightarrow\ 60t = 100t - 25 \ \rightarrow\ 40t = 25 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ t = 0{,}625 \ \rightarrow\ x = 60 \cdot 0{,}625 = 37{,}5$$

La distancia entre A y B es 37,5 km.

34 ▼▼▽ **Hemos mezclado aceite de oliva de 3,5 €/*l* con aceite de girasol de 2 €/*l* para obtener 50 *l* de mezcla a 3,08 €/*l*. Calcula la cantidad de aceite de oliva y de aceite de girasol que hemos mezclado.**

	CANTIDAD	PRECIO
OLIVA	x	3,5
GIRASOL	y	2
MEZCLA	50	3,08

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 3{,}5x + 2y = 50 \cdot 3{,}08 \end{cases} \to \begin{cases} y = 50 - x \\ 3{,}5x + 2(50 - x) = 154 \end{cases} \to$$

$$\to 3{,}5x + 100 - 2x = 154 \to$$

$$\to 1{,}5x = 54 \to x = 36 \to y = 14$$

36 *l* de aceite de oliva y 14 *l* de girasol.

35 ▼▼▽ **Si en un depósito que contiene agua a 50 °C añadimos agua a 15 °C, obtenemos 150 *l* a 36 °C. ¿Cuántos litros había en el depósito y cuántos hemos añadido?**

x son los litros de agua que había en el depósito.

y son los litros que hemos añadido.

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 50x + 15y = 150 \cdot 36 \end{cases} \to \begin{cases} y = 150 - x \\ 50x + 15(150 - x) = 5\,400 \end{cases} \to$$

$$\to 50x + 2\,250 - 15x = 5\,400 \to$$

$$\to 35x = 3\,150 \to x = 90 \to y = 150 - 90 = 60$$

Había 90 *l* de agua a 50° y hemos añadido 60 *l* de agua a 15°.

36 ▼▼▽ **Las dos cifras de un número suman 7. Si invertimos el orden de estas, obtenemos otro número que es igual al doble del anterior más 2 unidades. ¿Cuál es el número inicial?**

CIFRA DECENAS	CIFRA CENTENAS	NÚMERO INICIAL	NÚMERO INVERTIDO
x	y	$10x + y$	$10y + x$

1.ª condición: $x + y = 7$

2.ª condición: $10y + x = 2(10x + y) + 2$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 10y + x = 2(10x + y) + 2 \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 7 \\ 10y + x = 20x + 2y + 2 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} y = 7 - x \\ 10(7 - x) = 20x + 2(7 - x) + 2 \end{cases} \to$$

$$\to 70x - 10x + x = 20x + 14 - 2x + 2 \to 27x = 54 \to x = 2 \to y = 5$$

El número buscado es el 25.

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

37 ▼▼▽ **Si a un número de dos cifras le restamos el que resulta de invertir el orden de estas, obtenemos el doble de la cifra de las decenas del número inicial.**

Hállalo sabiendo que sus cifras suman 16.

x es la cifra de las decenas.

y es la cifra de las unidades.

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ (10x + y) - (10y + x) = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 16 - x \\ 10x + 16 - x - 10(16 - x) - x = 2x \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 10x + 16 - x - 160 + 10x - x = 2x \ \rightarrow\ 16x = 144 \ \rightarrow\ x = 9 \ \rightarrow\ y = 7$$

El número es 97.

Problemas "+"

38 ▼▼▽ **La encargada de un laboratorio químico tiene dos frascos que contienen cierto ácido diluido en agua. En el frasco A, el 10% es ácido, y el resto, agua. En el B, la mezcla es mitad y mitad. Para hacer un experimento necesita 80 g de una mezcla que tenga 25% de ácido y 75% de agua. ¿Qué cantidad debe coger de cada frasco para conseguirlo?**

Llamamos x a la cantidad que debe tomar del frasco A e y a la que debe tomar del frasco B.

- Proporción de ácido en la mezcla: $0{,}1x + 0{,}5y = 0{,}25 \cdot 80$
- Proporción de agua en la mezcla: $0{,}9x + 0{,}5y = 0{,}75 \cdot 80$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}5y = 20 \\ 0{,}9x + 0{,}5y = 60 \end{cases} \rightarrow x = 50,\ y = 30$

Debe tomar 50 g de A y 30 g de B.

39 ▼▼▽ **Luis quiere celebrar su cumpleaños con un grupo de amigos, invitándoles a merendar y al cine. En total son 10 personas. En un folleto de una cadena de hamburguesas se lee:**

Merienda y entrada al cine: 10,20 €	**OFERTA: 3 meriendas y 3 entradas al cine (una de ellas, gratis), 24,60 €**

¿Cuánto vale una merienda y cuánto una entrada al cine? ¿Tendrá suficiente dinero con los 80 € de su hucha?

Llamamos m al precio de una merienda y e al precio de una entrada al cine.

$$\left.\begin{aligned} m + e &= 10{,}20 \\ 3m + 2e &= 24{,}60 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2m + 2e &= 20{,}40 \\ 3m + 2e &= 24{,}60 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} m &= 4{,}20 \\ e &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Una merienda vale 4,20 €, y una entrada al cine, 6 €.

Para invitar a sus amigos, Luis tiene que pagar 3 invitaciones de la oferta y una más sin oferta.

$3 \cdot 24{,}60 + 10{,}20 = 84$ €

No tiene dinero suficiente, le faltan 4 €.

PÁGINA 124

40 ▼▼▼ **En un viaje dos turistas quieren comprar jamones y quesos. El conductor del autobús les exige que sus compras no excedan de 40 kg cada una. Cada turista consigue comprar sus 40 kg exactos. Entre los dos llevan 5 jamones, de igual peso y 5 quesos, todos del mismo peso. El primero ha comprado triple número de jamones que de quesos, y el segundo, doble número de quesos que de jamones. ¿Cuánto pesa cada jamón y cada queso?**

Primero averiguemos cuántos jamones y cuántos quesos lleva cada uno.

Llamamos x al n.º de quesos que lleva el primero e y al n.º de quesos que lleva el segundo.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 3x + \frac{y}{2} &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 1, \ y = 4$$

Por tanto, el primero lleva 1 queso y 3 jamones, y el segundo, 4 quesos y 2 jamones.

Calculamos ahora el peso de un queso, q, y el peso de un jamón, j.

$$\left.\begin{aligned} q + 3j &= 40 \\ 4q + 2j &= 40 \end{aligned}\right\} \rightarrow j = 12, \ q = 4$$

Cada jamón pesa 12 kg, y cada queso, 4 kg.

41 ▼▼▼ **Un tren sale de una ciudad con 134 pasajeros, entre hombres, mujeres y niños. Hace varias paradas y en cada una bajan 2 hombres y una mujer, y suben 4 niños. Llega a su destino con 143 pasajeros, de los cuales los hombres son los 2/3 de los niños, y las mujeres, los 3/4 de los hombres. ¿Cuántas paradas hizo el tren? ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay al llegar? ¿Y al partir?**

- En cada parada bajan 3 personas y suben 4; por tanto, aumenta un pasajero en cada parada.

  $143 - 134 = 9$

  El tren ha hecho 9 paradas.

- Llamemos x al número de hombres, y al número de mujeres y z al número de niños que hay al llegar.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 143 \\ x &= \frac{2}{3}z \\ y &= \frac{3}{4}x \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + \frac{3}{4}x + z &= 143 \\ x &= \frac{2}{3}z \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{7}{4}x + z &= 143 \\ x &= \frac{2}{3}z \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{3}z + z = 143 \rightarrow z = 66, \ x = 44, \ y = 33$$

Llegaron 66 niños, 33 mujeres y 44 hombres.

Como se bajan dos hombres en cada parada, han llegado $9 \cdot 2 = 18$ hombres menos que al partir. 9 mujeres menos que al partir y $9 \cdot 4 = 36$ niños más.

Las personas que había al partir son:

$44 + 18 = 62$ hombres

$33 + 9 = 42$ mujeres

$66 - 36 = 30$ niños

En total, 134.

Reflexiona sobre la teoría

42 ▼▽▽ **Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya única solución sea $x = 2$, $y = -1$.**

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \cdot 2 + 2(-1) = 4 \\ 2 - (-1) = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow x = 2,\ y = -1 \text{ es solución.}$$

43 ▼▽▽ **¿Cuál debe ser el valor de m para que los sistemas a) y b) sean equivalentes?**

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = m \\ y = 3 \end{cases}$

La solución de a) es $x = 5$, $y = 3$.

b) debe tener la misma solución: $5 - 3 = m \rightarrow m = 2$

44 ▼▽▽ **Comprueba si $x = 3$, $y = 1$ es solución de alguno de estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = 1 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = 1 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{matrix} 3 + 1 = 4 \\ 3 - 2 = 1 \\ 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0 \end{matrix}\right\} x = 3,\ y = 1$ es la solución de ese sistema.

b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{matrix} 3 - 1 = 2 \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 3 \\ 3 + 1 = 4 \neq 5 \end{matrix}\right\} x = 3,\ y = 1$ no es solución de ese sistema.

45 ▼▼▽ **Completa los siguientes sistemas de modo que el primero tenga la solución $x = 3$, $y = -2$; el segundo sea incompatible, y el tercero y el cuarto sean indeterminados:**

a) $\begin{cases} 3x + 2y = \dots \\ \dots - y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = \dots \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = \dots \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x + 2y = 7 \\ \dots - 4y = \dots \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x + 2y = \dots \\ \dots - \ \ y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 3 + 2(-2) = 5 \\ \dots = 8 + y = 8 - 2 = 6 \end{cases} \rightarrow$ *Solución*: $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x - \ \ y = 8 \end{cases}$

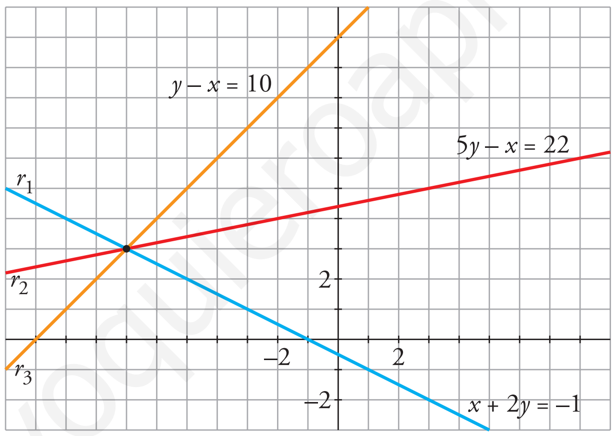
b) $\begin{cases} x + \ \ y = 5 \\ 2x + 2y = \dots \end{cases}$ Puede ser cualquier número distinto de 10.

Por ejemplo: $\begin{cases} x + \ \ y = 5 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = \dots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 2y = 7 \\ \dots - 4y = \dots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 7 \\ 2x - 4y = -14 \end{cases}$

46 ▼▼▽ **Observa la representación de las rectas r_1, r_2, r_3 y responde sin resolver.**



a) ¿Cuál es la solución de los siguientes sistemas?:

I) $\begin{cases} y - x = 10 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

II) $\begin{cases} 5y - x = 22 \\ y - x = 10 \end{cases}$

b) ¿Cuál es la solución de este sistema?:

$\begin{cases} y - x = 10 \\ 5y - x = 22 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

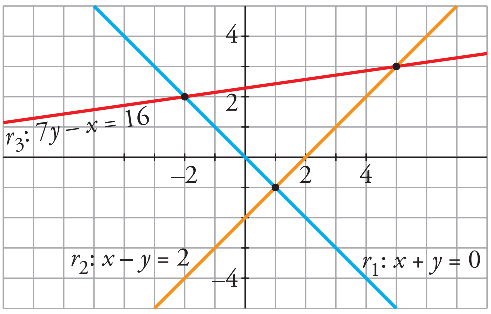
a) I) *Solución*: $x = -7$, $y = 3$

II) *Solución*: $x = -7$, $y = 3$

b) *Solución*: $x = -7$, $y = 3$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

47 ▼▼▽ **Observa la representación de las rectas r_1, r_2, r_3 y responde sin resolver.**



a) ¿Cuál es la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones?

I) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ II) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 7y - x = 16 \end{cases}$ III) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 7y - x = 16 \end{cases}$

b) ¿Tiene alguna solución este sistema?:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \\ 7y - x = 16 \end{cases}$$

a) I) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ *Solución*: $x = 1$, $y = -1$

II) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 7y - x = 16 \end{cases}$ *Solución*: $x = -2$, $y = 2$

III) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 7y - x = 16 \end{cases}$ *Solución*: $x = 5$, $y = 3$

b) No, porque las tres rectas no tienen ningún punto en común.

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 125

48 ▼▽▽ **¿Qué valores deben tomar *a* y *b* para que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones?**

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ ax + by = 15 \end{cases}$$

Escribe tres soluciones del sistema.

Para que tenga infinitas soluciones, la segunda ecuación debe ser proporcional a la primera.

Así: $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ ax + by = 15 \end{cases} \rightarrow a = 9 \text{ y } b = 6$

Soluciones: Damos valores a x para obtener puntos de la recta $3x + 2y = 5$:

$x = 1,\ y = 1;\ x = 0,\ y = \frac{5}{2};\ x = -1,\ y = 4$

49 ▼▽▽ **¿Qué condición deben cumplir *c* y *d* para que este sistema no tenga solución?**

$$\begin{cases} 3x + 2y = c \\ 6x + 4y = d \end{cases}$$

El sistema no tendrá solución cuando las dos rectas sean paralelas, es decir, cuando $d \neq 2c$.

50 ▼▽▽ **Resuelve este sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas y comprueba gráficamente su solución:**

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

☞ ***Halla la solución de las dos primeras ecuaciones y comprueba si verifica la tercera.***

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases} \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 1 - 4 = -3$

Comprobamos si se verifica la tercera ecuación: $2 + (-3) = -1$

La solución del sistema es $x = 2,\ y = -3$.

Profundiza

51 ▼▼▽ **Resolver por sustitución:** $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 52 \end{cases}$

Despejamos y en la 1.ª ecuación y sustituimos en la 2.ª:

$y = 2x - 2 \;\rightarrow\; x^2 + (2x-2)^2 = 52 \;\rightarrow\; 5x^2 - 8x - 48 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = \dfrac{8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 5 \cdot 48}}{10} = \dfrac{8 \pm 32}{10} \begin{cases} x = 4 \\ x = -12/5 \end{cases}$

Si $x = 4$, $y = 2 \cdot 4 - 2 = 6$.

Si $x = -\dfrac{12}{5}$, $y = 2\left(-\dfrac{12}{5}\right) - 2 = -\dfrac{34}{5}$.

52 ▼▼▽ **Resuelve por sustitución.**

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 - (x-2)^2 = 16 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 - x^2 + 4x - 4 = 16 \;\rightarrow\; 4x = 20 \;\rightarrow\; x = 5 \;\rightarrow\; y = 3$

Solución: $x = 5$, $y = 3$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x^2 - y^2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 2x^2 - (1-x)^2 = 2 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow\; 2x^2 - 1 + 2x - x^2 = 2 \;\rightarrow\; x^2 + 2x - 3 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

Si $x = 1$, $y = 0$.

Si $x = -3$, $y = 1 - (-3) = 4$.

53 ▼▼▽ **La diferencia de dos números es 2, y la de sus cuadrados, 20. Halla esos números.**

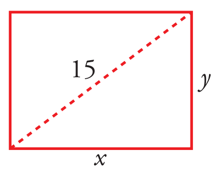
Los números son x e y.

$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ (2+y)^2 - y^2 = 20 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow\; 4 + 4y + y^2 - y^2 = 20 \;\rightarrow\; 4y = 16 \;\rightarrow\; y = 4 \;\rightarrow\; x = 6$

Los números son 6 y 4.

54 ▼▼▽ **La diagonal de un rectángulo mide 15 cm, y su perímetro, 42 cm. Calcula sus lados.**



$\begin{cases} 2x + 2y = 42 \\ x^2 + y^2 = 15^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 21 \\ x^2 + y^2 = 225 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} y = 21 - x \\ x^2 + (21-x)^2 = 225 \end{cases} \rightarrow\; x^2 + 441 - 42x + x^2 = 225 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\ 2x^2 - 42x + 216 = 0 \ \rightarrow\ x^2 - 21x + 108 = 0 \ \rightarrow$$

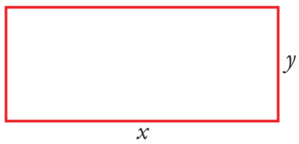
$$\rightarrow\ x = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 432}}{2} = \frac{21 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = 9 \end{cases}$$

Si $x = 12$, $y = 21 - 12 = 9$.

Si $x = 9$, $y = 21 - 9 = 12$.

Los lados del rectángulo miden 9 cm y 12 cm, respectivamente.

55 ▼▼▽ **El perímetro de un rectángulo es 68 m, y su área, 240 m². Halla sus lados.**



$$\begin{cases} 2x + 2y = 68 \\ xy = 240 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 34 \\ xy = 240 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 34 - x \\ x(34 - x) = 240 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 34x - x^2 = 240 \ \rightarrow\ x^2 - 34x + 240 = 0 \ \rightarrow$$

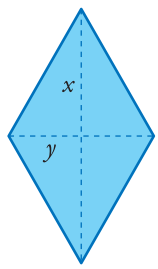
$$\rightarrow\ x = \frac{34 \pm \sqrt{34^2 - 240 \cdot 4}}{2} = \frac{34 \pm 14}{2} \begin{cases} x = 24 \\ x = 10 \end{cases}$$

Si $x = 10$, $y = 34 - 10 = 24$.

Si $x = 24$, $y = 34 - 24 = 10$.

Los lados del rectángulo miden 10 cm y 24 cm, respectivamente.

56 ▼▼▽ **Las diagonales de un rombo se diferencian en 6 cm y su área es 56 cm². Calcula la medida de las diagonales.**



$$\begin{cases} x - y = 6 \\ \dfrac{x \cdot y}{2} = 56 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 + y \\ (6 + y)y = 112 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 6y + y^2 = 112 \ \rightarrow\ y^2 + 6y - 112 = 0 \ \rightarrow$$

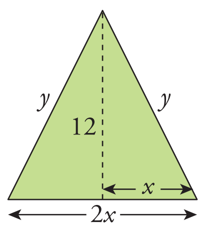
$$\rightarrow\ y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 112}}{2} = \frac{-6 \pm 22}{2} \begin{cases} y = 8 \\ y = -14 \ \text{(No vale).} \end{cases}$$

Si $y = 8$, $x = 6 + 8 = 14$.

Las diagonales miden 8 cm y 14 cm, respectivamente.

57 ▼▼▽ **El perímetro de un triángulo isósceles es 36 m. La altura relativa al lado desigual mide 12 m. Calcula la medida de los lados iguales.**

☞ ***Si llamas x a la mitad de la base, se simplifican los cálculos.***



6 Soluciones a “Ejercicios y problemas”

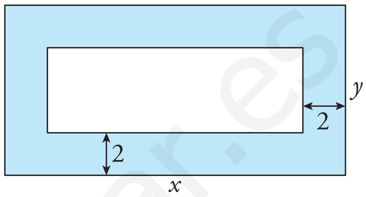
$$\begin{cases} 2x + 2y = 36 \\ y^2 - x^2 = 12^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 18 \\ y^2 - x^2 = 144 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 18 - x \\ (18 - x)^2 - x^2 = 144 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 324 - 36x + x^2 - x^2 = 144 \ \rightarrow\ 36x = 180 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x = 5 \ \rightarrow\ y = 18 - 5 = 13$$

Los lados iguales miden 13 cm.

58 ▼▼▼ **En una parcela rectangular de 60 m de perímetro se hace un jardín rectangular bordeado por un camino de 2 m de ancho. Calcula las dimensiones de la parcela sabiendo que el área del jardín es 112 m^2.**



$$\begin{cases} 2x + 2y = 60 \\ (x - 4)(y - 4) = 112 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ xy - 4x - 4y + 16 = 112 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 30 - x \\ x(30 - x) - 4x - 4(30 - x) + 16 = 112 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 30x - x^2 - 4x - 120 + 4x + 16 = 112 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ -x^2 + 30x - 216 = 0 \ \rightarrow\ x^2 - 30x + 216 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 216}}{2} =$$

$$= \frac{30 \pm 6}{2} \begin{cases} x = 18 \ \rightarrow\ y = 12 \\ x = 12 \ \rightarrow\ y = 18 \end{cases}$$

Las dimensiones de la parcela son 12 m y 18 m, respectivamente.

59 ▼▼▽ **Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:**

a) $\begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x - 3y = 9 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2y + z = 4 \\ x + y = 5 \\ z - 3 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = z \\ x - y = z \\ x + z = -4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x - 3y = 9 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2 \cdot 3 - 3y = 9 \ \rightarrow\ -3y = 3 \ \rightarrow\ y = -1 \\ 3 + (-1) - z = 1 \ \rightarrow\ -z = -1 \ \rightarrow\ z = 1 \end{cases}$

Solución: $x = 3,\ y = -1,\ z = 1$

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 4 \\ x + y = 5 \\ z - 3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 4 = 4 \\ x + y = 5 \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow 5x = 10 \rightarrow x = 2 \rightarrow 2 + y = 5 \rightarrow y = 3$

Solución: $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$

c) $\begin{cases} x + y = z \\ x - y = z \\ x + z = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = z \\ x - y = z \end{cases} \rightarrow 2x = 2z \rightarrow x = z \rightarrow z + z = -4 \rightarrow$

$\rightarrow 2z = -4 \rightarrow z = -2 \rightarrow -2 + y = -2 \rightarrow y = 0$

Solución: $x = -2,\ y = 0,\ z = -2$

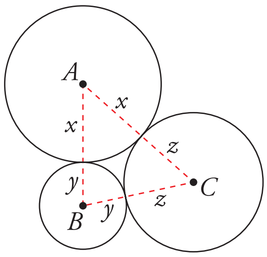
d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - y \rightarrow x = 5 - 4 = 1 \\ 5 - y + y + z = 3 \rightarrow z = -2 \\ y + z = 2 \rightarrow y + (-2) = 2 \rightarrow y = 4 \end{cases}$

Solución: $x = 1,\ y = 4,\ z = -2$

60 ▼▼▼ **Una pieza mecánica está formada por tres cilindros, cuyas secciones se ven en esta figura.**

Las distancias entre los centros de las bases de los cilindros son: $AB = 14$ cm; $AC = 17$ cm; $BC = 13$ cm.

¿Cuál es el radio de cada cilindro?



Según el enunciado:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = 14 = x + y \\ \overline{AC} = 17 = x + z \\ \overline{BC} = 13 = y + z \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 14 \\ x + z = 17 \\ y + z = 13 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 14 \\ x + z = 17 \\ -y - z = -13 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 14 \\ x - y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow 2x = 18 \rightarrow x = 9 \text{ cm} \rightarrow y = 5 \text{ cm} \rightarrow z = 8 \text{ cm}$

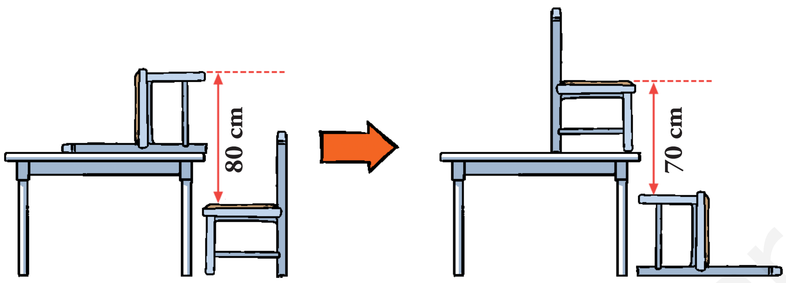
Por tanto, el radio de A es 9 cm; el de B, 5 cm; y el de C, 8 cm.

Soluciones a “Y para terminar…”

PÁGINA 126

▼ Utiliza el lenguaje matemático

Una mesa y dos sillas



- **Calcula la altura de la mesa.**
- **Describe detalladamente el proceso seguido.**

Será más fácil si usas el lenguaje algebraico.

$a + x - y = 70$

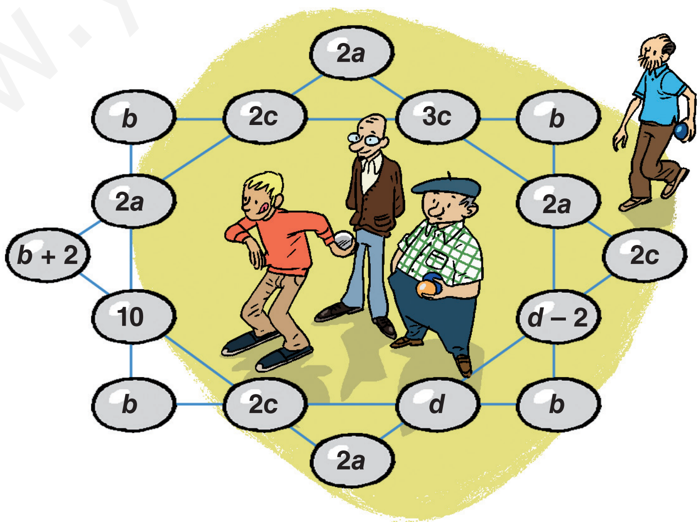
$a + y - x = 80$

Sumando ambas igualdades: $2a = 150 \quad \to \quad a = 75$

La altura de la mesa es de 75 cm.

▼ Utiliza tu ingenio

¡Qué lío!



Las ocho filas de cuatro números suman lo mismo.

¿Cuál es el valor de *a*, *b*, *c* y *d*?

— Igualando los lados derecho e izquierdo del rectángulo:

$$2b + 2a + 10 = 2b + 2a + d - 2 \;\rightarrow\; d = 12$$

— Igualando los lados superior e inferior del rectángulo:

$$2b + 5c = 2b + 2c + d \;\rightarrow\; c = 4$$

— Igualando el lado inferior derecho del rombo y el izquierdo del rectángulo:

$$2a + 2d - 2 + 2c = 2a + 2b + 10 \;\rightarrow\; b = 10$$

— Del lado inferior del rectángulo obtenemos el valor de una línea:

Valor de línea $\rightarrow$ $2b + 2c + d = 40$

— Igualando el lado izquierdo del rectángulo a 40:

$$2b + 2a + 10 = 40 \;\rightarrow\; a = 5$$

Solución: $a = 5$, $b = 10$, $c = 4$, $d = 12$.

▼ Utiliza tu ingenio

Incompleto

Se trata de completar este cuadrado mágico del que solo se conocen tres números.

Ya sabes que en un cuadrado mágico los tres números de cada fila, columna o diagonal, tienen la misma suma.

Igualando la diagonal principal con la primera fila, por un lado, y la segunda fila con la tercera columna, por otro:

a	5	26
23	x	b
c	d	e

$a + x + e = a + 31 \;\rightarrow\; x + e = 31$

$23 + x + b = 26 + b + e \;\rightarrow\; x - e = 3$

Y de ahí $\rightarrow$ $x = 17$

Soluciones a “Y para terminar…”

Igualando la primera fila y la primera columna:

$$a + 5 + 26 = a + 23 + c \quad \rightarrow \quad c = 8$$

Atendiendo a la segunda diagonal, vemos que una fila suma 51.

a	5	26
23	17	b
8	d	e

Con la información disponible es fácil completar los valores desconocidos.

20	5	26
23	17	11
8	29	14

6 Soluciones a “Y para terminar…”

PÁGINA 127

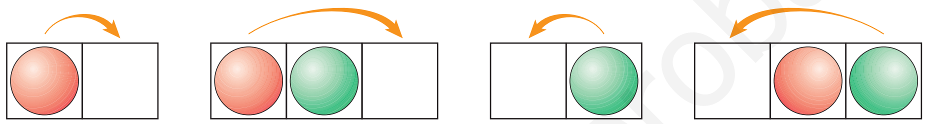
▼ Busca regularidades y generaliza

Un juego de fichas y un reto

OBJETIVO: Poner las rojas en el lugar de las verdes y las verdes en el de las rojas.

NORMAS:

- **Las rojas se desplazan únicamente hacia la derecha, y las verdes, hacia la izquierda.**
- **Los movimientos se realizan avanzando a la siguiente casilla o saltando sobre una ficha contraria.**



CUENTA Y COMPLETA LA TABLA:

N.º DE FICHAS DE CADA COLOR	1	2	3	4	…
N.º DE MOVIMIENTOS	?	8	?	?	…

Observa los resultados, busca regularidades y, si puedes, generaliza: ¿Cuántos movimientos hay que realizar para n fichas de cada color?

N.º DE FICHAS DE CADA COLOR	1	2	3	4	5	…	n
N.º DE MOVIMIENTOS	3	8	15	24	35	…	$n \cdot (n+2)$
REGULARIDADES	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 4$	$3 \cdot 5$	$4 \cdot 6$	$5 \cdot 7$	…	

PÁGINA 127

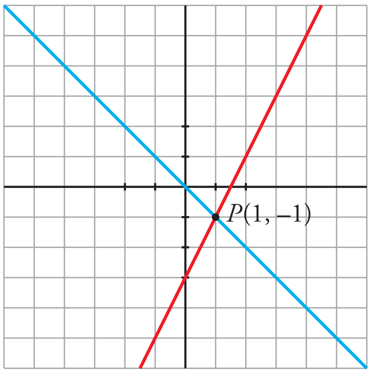
¿Sabes buscar soluciones de ecuaciones lineales con dos incógnitas, representarlas en el plano y localizar el punto de corte?

1 **a) Busca tres soluciones de la ecuación $2x - y = 3$.**

b) Dibuja en los mismos ejes $2x - y = 3$ y $x + y = 0$, y di cuál es la solución del sistema que forman.

a) $x = 0,\ y = -3;\ x = 1,\ y = -1;\ x = 2,\ y = 1$

b)



Solución: $x = 1,\ y = -1$

¿Reconoces los sistemas que tienen infinitas soluciones y los que no tienen ninguna?

2 **¿Cuál de los sistemas siguientes no tiene solución y cuál tiene infinitas soluciones?**

a) $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 9 \end{cases}$

a) Tiene infinitas soluciones. b) No tiene solución.

¿Conoces los distintos métodos de resolución de sistemas y los aplicas con agilidad y eficacia?

3 **Resuelve:**

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\[2mm] \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 2(2 + y) - 3y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 4 + 2y - 3y = 5 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ -y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Solución: $x = 1,\ y = -1$

b) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2 - 3y \\ x = 7 - 8y \end{cases} \to$

$\to 2 - 3y = 7 - 8y \to 8y - 3y = 7 - 2 \to 5y = 5 \to$

$\to y = 1 \to x = 2 - 3 = -1$

Solución: $x = -1,\ y = 1$

4 **Aplica el método de reducción para resolver el sistema siguiente:**

$$\begin{cases} \mathbf{7x + 2y = 12} \\ \mathbf{11x - 3y = -61} \end{cases}$$

$\begin{cases} 7x + 2y = 12 \\ 11x - 3y = -61 \end{cases} \to \begin{cases} -77x - 22y = -132 \\ 77x - 21y = -427 \end{cases} \to -43y = -559 \to y = 13$

$\begin{cases} 21x + 6y = 36 \\ 22x - 6y = -122 \end{cases} \to 43x = -86 \to x = -2$

Solución: $x = -2,\ y = 13$

¿Has aprendido a traducir problemas a sistemas de ecuaciones y resolverlos?

5 **Un agricultor comprueba que en el segundo de sus dos depósitos de agua para riego hay 10 litros más que en el primero. Traspasa 18 litros del segundo al primero y así este se queda con el doble que el segundo. Calcula la cantidad de agua que tenía cada depósito.**

Cantidad de agua en el primer depósito: x

Cantidad de agua en el segundo depósito: y

$\begin{cases} y = x + 10 \\ x + 18 = 2(y - 18) \end{cases} \to \begin{cases} y = x + 10 \\ x - 2y = -54 \end{cases} \to x - 2(x + 10) = -54 \to$

$\to x - 2x - 20 = -54 \to -x = -34 \to x = 34,\ y = 44$

El primero tenía 34 *l*, y el segundo, 44 *l*.

6 **Ana sale a caminar y lo hace a 4 km/h. Un cuarto de hora más tarde sale su hijo a correr por el mismo sendero y lo hace a 7 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarla?**

Llamemos t al tiempo que camina Ana hasta que su hijo le alcanza.

El espacio recorrido por ambos es el mismo:

$\begin{cases} e = 4t \\ e = 7(t - 1/4) \end{cases} \to 4t = 7t - \dfrac{7}{4} \to t = \dfrac{7}{12}\ \text{h} = 35\ \text{min}$

Tarda en alcanzarla: $35 - 15 = 20$ minutos

7 **He pagado 83 € por una cazadora y unos deportivos. En la cazadora me han rebajado el 20%, y en los deportivos, el 10%, y así me he ahorrado 17 €. ¿Cuáles eran los precios sin rebajar?**

Precio de la cazadora sin rebajar: x

Precio de los deportivos sin rebajar: y

$$\begin{cases} x + y = 83 + 17 = 100 \\ 0{,}8x + 0{,}9y = 83 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 100 - y \\ 0{,}8(100 - y) + 0{,}9y = 83 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 100 - y \\ 0{,}1y = 3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 70 \text{ € es el precio de la cazadora} \\ y = 30 \text{ € es el precio de los deportivos} \end{cases}$$

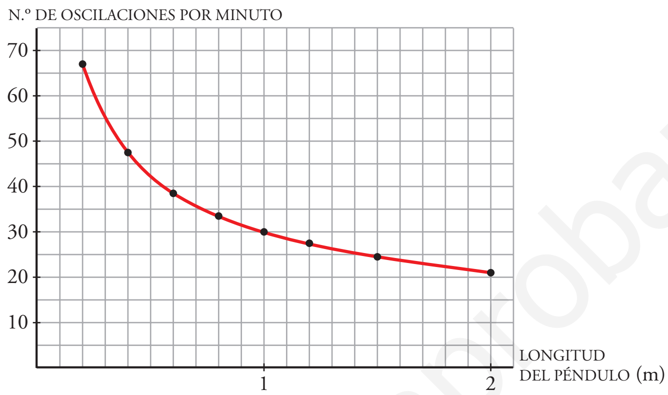
Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 131

PARA EMPEZAR…

▼ Una función para las oscilaciones de un péndulo

■ **Representa en tu cuaderno las observaciones, en una cuadrícula como la que aquí te proponemos.**



■ **Comprueba que los valores obtenidos en la tabla responden bastante bien a la siguiente relación:** $n = \dfrac{30}{\sqrt{l}}$.

Con calculadora: 30 ÷ √ 2 = 21.21320343 $\simeq$ 21

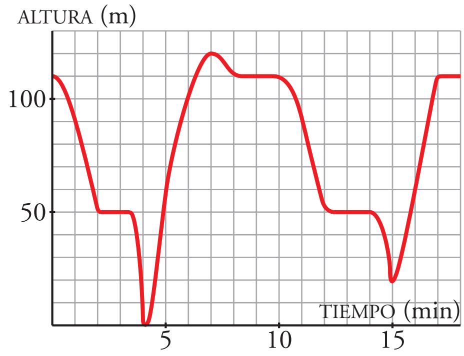
30 ÷ √ 1,5 = 24.49489742 $\simeq$ 24,5

Etcétera.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 132

1 Observando la gráfica, responde:



a) ¿A qué altura se encuentra el nido?

b) ¿A qué altura estaba el águila a los cinco minutos de empezar la observación?

c) ¿Desde qué altura otea para buscar caza?

d) ¿En qué instante caza al conejo?

e) ¿Cuánto tiempo pasa en el nido con su pareja y sus polluelos después de cazar al conejo?

f) ¿A qué altura volaba la paloma que caza?

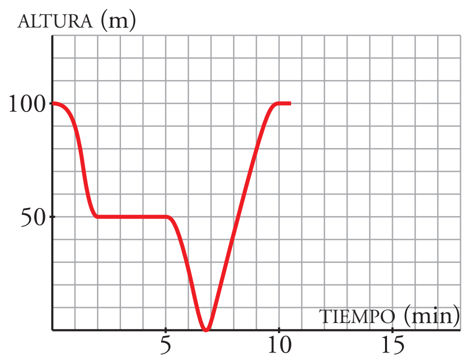
g) Desde que caza a la paloma, ¿cuánto tarda en subir al nido? Halla la velocidad de subida en metros por minuto.

a) A 110 metros.
b) A 60 metros.
c) A 50 metros.
d) A los 4 minutos.
e) 2 minutos.
f) A 20 metros.

g) Desde que caza la paloma tarda 2 minutos en subir al nido. La velocidad de subida es de 45 m/min.

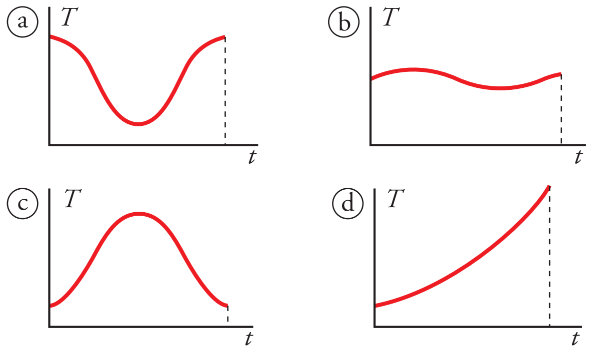
2 En unos ejes cartesianos, describe 10 minutos de un posible vuelo de una cigüeña, desde que sale de su nido en el campanario de una iglesia hasta que vuelve a él, después de haber cazado una rana.

Respuesta abierta. Una posible gráfica es la siguiente:



PÁGINA 133

3 Estas cuatro gráficas representan la temperatura máxima diaria (T) de cuatro ciudades, a lo largo del tiempo (t), durante un cierto año:



a) A la vista de las gráficas, ¿en cuál de estas cuatro ciudades oscila en menor medida la temperatura?

b) Una gráfica corresponde a una ciudad de nuestro país, y otra, a una ciudad de nuestras antípodas. ¿Qué gráficas son? Razona la respuesta.

c) Una gráfica es absurda. ¿Cuál es? ¿Por qué?

d) Elige una escala adecuada para cada variable y gradúa cada uno de los ejes.

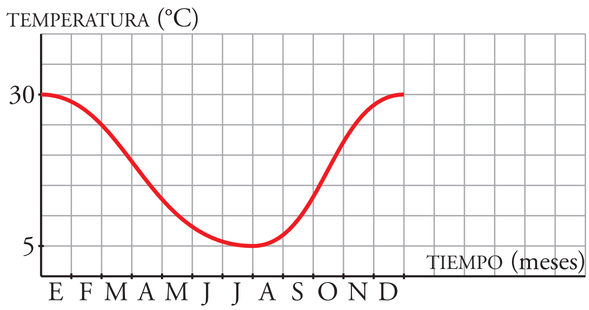
e) ¿Cuál es el dominio de las cuatro gráficas? A la vista de los recorridos de a y b, ¿qué puedes decir del clima de esas ciudades?

a) En la representada en la gráfica b.

b) La c pertenece a nuestro país (frío a principios y a final de año, calor a mediados de año), y la a, al de nuestras antípodas. Esto es porque cuando en un país es invierno, en el otro es verano, y viceversa.

c) La gráfica d es absurda, porque empieza el año haciendo mucho frío y termina haciendo mucho calor. Esto no tiene sentido ya que cuando termina un año empieza otro, por lo que la gráfica debería empezar y terminar aproximadamente en la misma temperatura.

d) Con las otras gráficas utilizaríamos las mismas escalas.



e) El dominio de las cuatro gráficas es [0, 1].

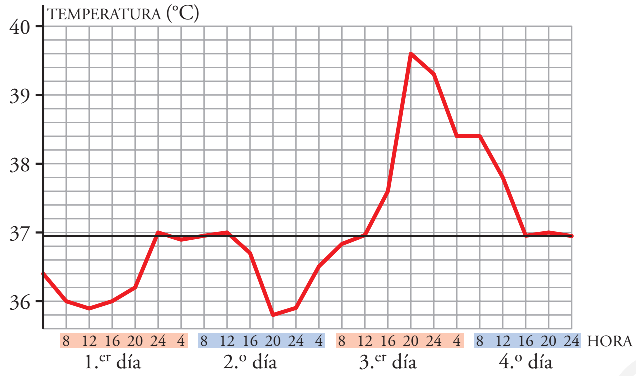
El clima de a es claramente continental, pues tiene temperaturas muy altas en verano y muy bajas en invierno.

El clima de b es tropical o semitropical, porque sus temperaturas se mantienen templadas todo el año.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 135

1 **La gráfica siguiente refleja la temperatura de un enfermo durante cuatro días:**



a) Desde las 12 h a las 24 h del 1.er día hay un *tramo creciente*. Describe otro tramo en el que la función sea creciente.

b) Describe dos tramos en los que la función sea *decreciente*.

c) Señala el *máximo*, indicando en qué momento se produce y qué temperatura alcanza el enfermo.

d) Señala el *mínimo*, indicando el momento y la temperatura.

a) Por ejemplo: desde las 20 h del 2.° día hasta las 20 h del 3.er día.

b) Por ejemplo:

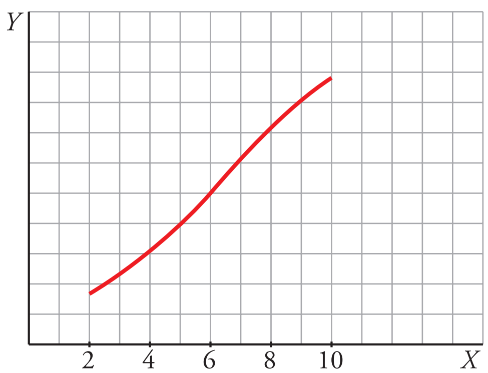
— Desde las 2 h del 3.er día hasta las 4 h del 3.er día.

— Desde las 8 h del 4.° día hasta las 16 h del 4.° día.

c) El máximo de temperatura que alcanza es 39,6 °C, a las 20 h del 3.er día.

d) El mínimo de temperatura que alcanza es 35,8 °C, a las 20 h del 2.° día.

2 **En unos ejes cartesianos representados sobre papel cuadriculado, representa una función definida en el intervalo 2-10 que sea creciente en todo el tramo.**



Soluciones a las actividades de cada epígrafe

3 **Representa una función definida en el intervalo 0-12 que tenga un mínimo en el punto (3, 2) y un máximo en (7, 8). Describe un tramo creciente y un tramo decreciente.**

Creciente de 3 hasta 7. Decreciente de 0 hasta 3 y de 7 hasta 12.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 136

1 **Una madre mira a su hijo dar vueltas en unos caballitos. En cada vuelta, que dura 30 s, se acercan hasta casi tocarse (2 m) y se alejan hasta 24 m.**

Representa en unos ejes la función:

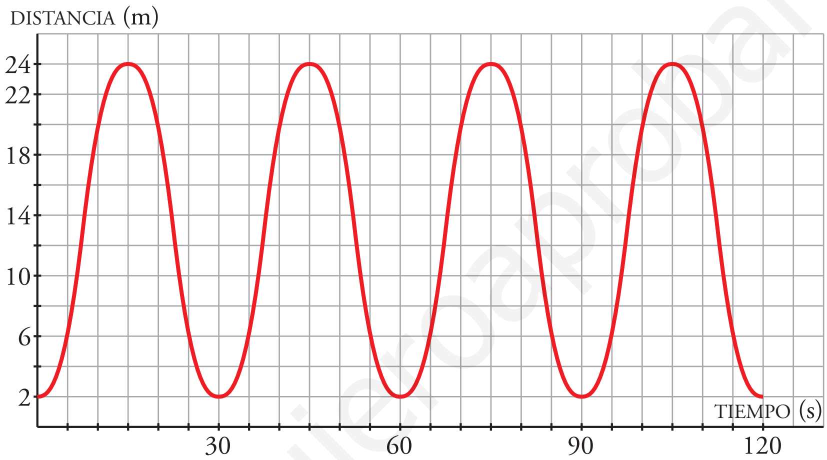
tiempo* → *distancia

Para ello, toma las escalas siguientes:

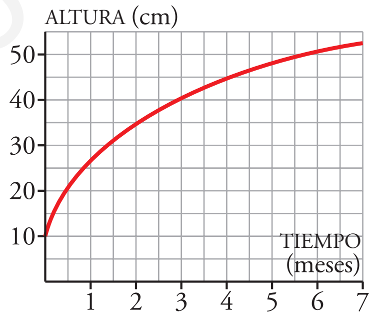
— Eje *X*: 1 cuadradito = 5 segundos

— Eje *Y*: 1 cuadradito = 2 metros

Representa un intervalo correspondiente a 4 vueltas.



2 **La gráfica representa el tamaño de una planta con el paso del tiempo.**



a) ¿Cuánto medía cuando se plantó?

b) ¿Es la función creciente? Explica por qué es lógico que lo sea.

c) ¿Se aprecia alguna tendencia en la función?

a) Medía 10 cm.

b) La función es creciente, porque a medida que aumenta la x, aumenta la y.

c) Paraece que la altura de la planta se aproxima a 55 cm o a 60 cm.

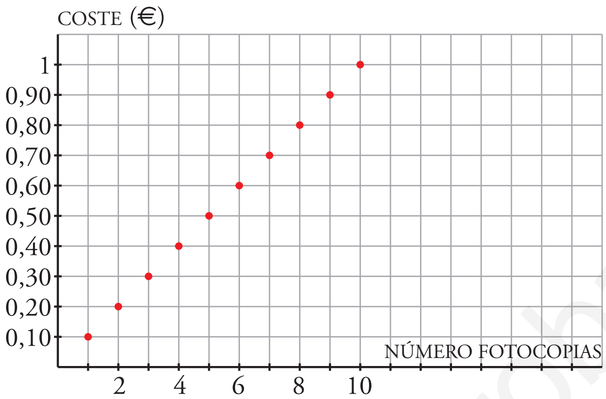
Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 137

1 **El precio de una fotocopia es 0,10 €. Representa esta función:**

número de fotocopias → coste

¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?



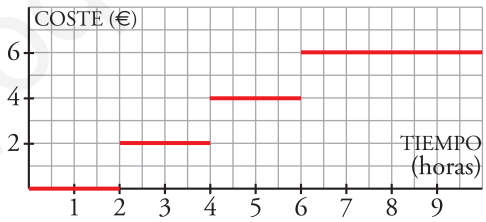
No se pueden unir los puntos ya que la variable independiente solo tiene sentido para los valores 0, 1, 2, 3, 4, … y no para los intermedios.

2 **La gráfica de la derecha muestra las tarifas del aparcamiento de un centro comercial.**

a) ¿Cuánto pagamos si estamos 1 h?

b) ¿Y si estamos 2 h y 30 min? ¿Y si estamos 8 h?

c) ¿Es una función continua?



a) Nada.

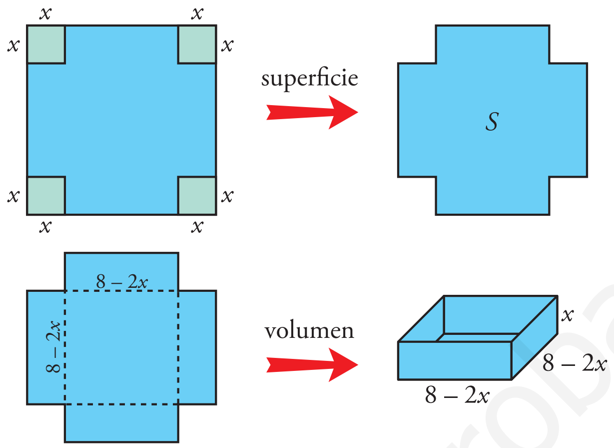
b) Pagamos 2 € si estamos 2 h 30 min, y 6 € si estamos 8 h.

c) No es continua.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 139

1 **Disponemos de una cartulina cuadrada de 8 dm de lado. Cortamos cuadraditos de lado x en las esquinas, tal como se indica en la figura y queremos saber la superficie de la figura que queda.**



Para obtener la expresión analítica de la superficie, S, resta al área del cuadrado el área de los cuadraditos cortados.

a) ¿Cuál es la expresión de la superficie S?

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

c) ¿Y el volumen de la caja que se puede formar?

a) $S = 64 - 4x^2$

b) Todos los valores comprendidos entre cero y cuatro.

c) $V = (8 - 2x)^2 \cdot x = 64x - 32x^2 + 4x^3$

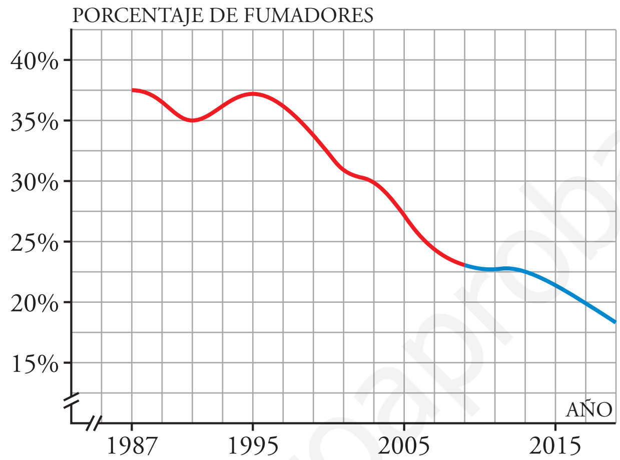
7 Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 140

Practica

Interpretación de gráficas

1 ▼▽▽ **En la gráfica siguiente viene representado el porcentaje de fumadores en España en los últimos años (parte roja), así como la previsión de cómo se supone que irá evolucionando dicho porcentaje en los años próximos (parte azul):**



a) ¿Cuáles son las dos variables que se relacionan?

b) ¿Entre qué años se ha hecho el estudio? ¿En cuáles hay solamente previsiones y no datos reales?

c) ¿Cuál es la escala que se ha considerado en el eje *X*? ¿Y en el eje *Y*?

d) Observa que tanto en el eje *X* como en el eje *Y* aparecen dos rayitas señaladas. ¿Cuál crees que es su significado?

e) ¿Cuál era el porcentaje de fumadores en el año 1987? ¿Y en 1991? ¿Y en 1995? ¿Y en 2005?

f) ¿En qué años se dio el porcentaje más alto de fumadores?

g) ¿Cuál es el porcentaje de fumadores previsto (aproximadamente) para el año 2015? ¿Y para 2017?

h) Si las previsiones se cumplieran respecto al porcentaje de fumadores, ¿este irá aumentando o disminuyendo en los próximos años?

i) Haz una descripción global de la gráfica, indicando el dominio, el crecimiento y el decrecimiento de la función, y sus máximos y mínimos.

a) Variable independiente: tiempo.

Variable dependiente: porcentaje de fumadores.

b) El estudio se ha hecho entre 1987 y 2009.

A partir de 2009.

c) Eje X: un cuadrado son dos años.

Eje Y: un cuadrado son 2,5%.

d) Las rayitas son "roturas de los ejes" e indican que no empezamos a contar de cero.

e) 1987: 37,5%; 1991: 35%; 1995: 37,5%; 2005: 27,5%.

f) El porcentaje más alto de fumadores se dio en los años 1987 y 1995 con un 37,5%.

g) El porcentaje de fumadores previsto para 2015 es, aproximadamente, 21,5%, y para 2017, 10%.

h) Disminuyendo.

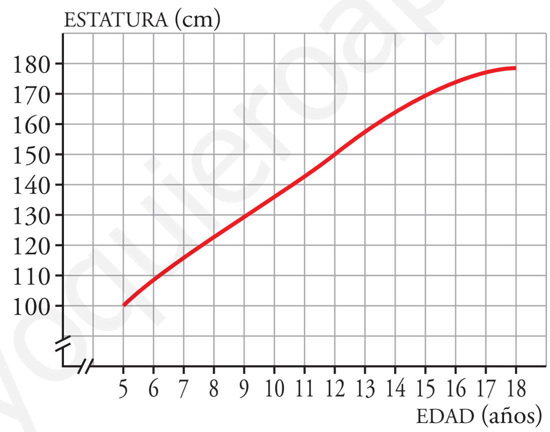
i) Dominio: desde 1987 hasta 2019.

Crecimiento: desde 1991 hasta 1995.

Decrecimiento: desde 1987 hasta 1991 y de 1995 hasta 2019.

Hay un máximo en 1995 y un mínimo en 1991.

2 ▼▽▽ **La estatura de Óscar entre los 5 y los 18 años viene representada en esta gráfica:**



a) ¿Cuáles son las variables que intervienen?

b) ¿Qué escala se utiliza para cada variable?

c) ¿Cuántos centímetros creció entre los 5 y los 8 años? ¿Y entre los 15 y los 18? ¿En cuál de estos dos intervalos el crecimiento fue mayor?

d) Observa que la gráfica al final crece más lentamente. ¿Crees que aumentará mucho más la estatura o que se estabilizará en torno a algún valor?

a) Variable independiente: edad.

Variable dependiente: estatura.

b) Eje X: un cuadrado es un año.

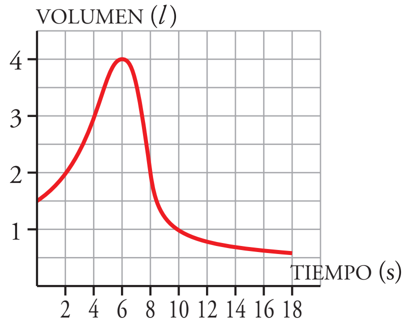
Eje Y: un cuadrado son 10 cm.

c) Entre los 5 y los 8 años creció 23 cm, y entre los 15 y los 18 años, 9 cm. El crecimiento fue mayor entre los 5 y los 8 años.

d) Por la trayectoria de la gráfica, parece que se estabilizará alrededor de 180 cm.

3 ▼▽▽ **Para medir la capacidad espiratoria de los pulmones, se hace una prueba que consiste en inspirar al máximo y, después, espirar tan rápido como se pueda en un aparato llamado espirómetro.**

Esta curva indica el volumen de aire que entra y sale de los pulmones.



a) ¿Cuál es el volumen en el momento inicial?

b) ¿Cuánto tiempo duró la observación?

c) ¿Cuál es la capacidad máxima de los pulmones de esta persona?

d) ¿Cuál es el volumen a los 10 segundos de iniciarse la prueba? ¿Y cuando termina?

a) 1,5 litros.

b) 18 segundos.

c) 4 litros.

d) A los 10 segundos, el volumen era de 1 litro. Cuando la prueba termina, el volumen de aire en los pulmones es de 0,6 litros.

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 141

4 ▼▼▽ **Cuatro amigos, Raquel, David, Isabel y Felipe, han quedado en la puerta del auditorio para asistir a un concierto de su grupo favorito. Al verse, han comentado cómo ha sido su recorrido:**

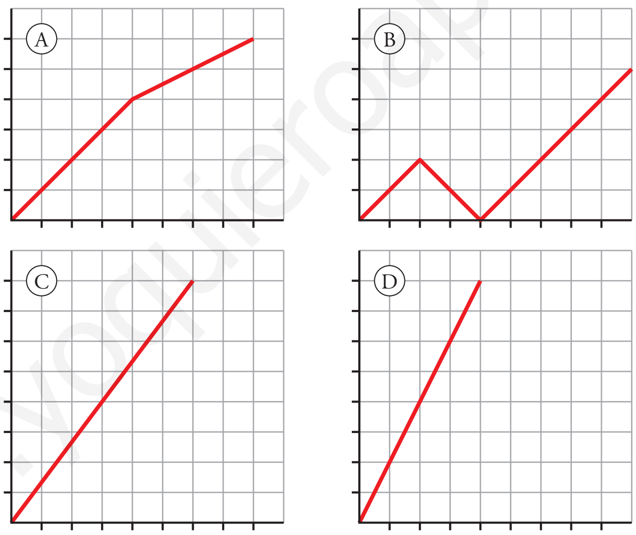
RAQUEL: ***He venido en coche. Además, he tenido mucha suerte, porque no he encontrado ningún atasco y he podido llegar directamente.***

DAVID: ***Pues yo venía muy bien, pero al darme cuenta de que había olvidado la entrada, he vuelto a por ella y, después, ya he venido bien hasta aquí.***

ISABEL: ***Yo venía andando a un paso rápido, pero me he encontrado con Ana a mitad de camino y hemos venido juntas con mucha más calma.***

FELIPE: ***Yo me he traído la moto y he venido directamente por un atajo. No he venido tan rápido como Raquel, pero lo he hecho de un tirón.***

Cada una de las gráficas siguientes muestra, en distinto orden, el movimiento que han llevado desde la salida de sus casas hasta la puerta del auditorio:



a) ¿Cuál es la gráfica que corresponde a la descripción que ha hecho cada uno?

b) ¿Quién vive más cerca del auditorio?

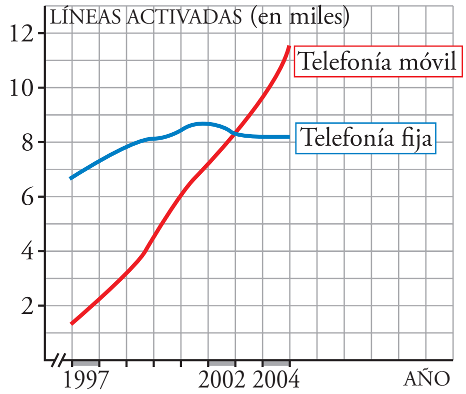
c) ¿Quién tardó menos tiempo en llegar?

a) Raquel → D; David → B; Isabel → A; Felipe → C

b) David.

c) Raquel.

5 ▼▽▽ **El uso de teléfonos móviles ha aumentado mucho en los últimos años. Sin embargo, la telefonía fija no ha sufrido grandes variaciones. En esta gráfica vemos qué ha ocurrido en una gran ciudad:**



a) **¿Cuántas líneas de telefonía fija y móvil había activadas, aproximadamente, a principios de 1997? ¿Y a principios de 2002? ¿Y a finales de 2004?**

b) **¿En qué momento (aproximado) había igual número de líneas de teléfonos fijos que de móviles?**

c) **¿Cuál ha sido el aumento de líneas en la telefonía fija de principios de 1997 a finales de 2004? ¿Y en la móvil? ¿En cuál ha sido mayor el aumento?**

a) Año 1997: → Telefonía fija: 6 500 líneas.
→ Telefonía móvil: 1 500 líneas.

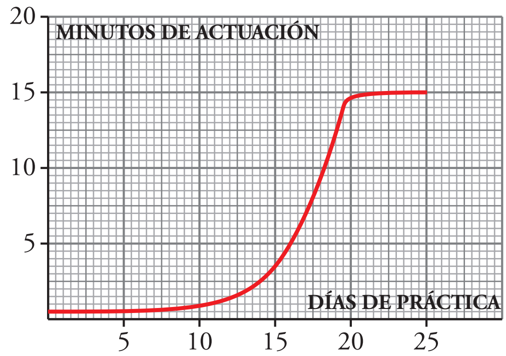
Año 2002: → Telefonía fija: 8 700 líneas.
→ Telefonía móvil: 7 200 líneas.

Año 2004: → Telefonía fija: 8 200 líneas.
→ Telefonía móvil: 9 900 líneas.

b) Al comienzo del año 2003.

c) El aumento de líneas activadas en la telefonía fija desde principio de 1997 a finales de 2004 es de 1 700 líneas, y en la telefonía móvil, de 10 000 líneas. El aumento ha sido mucho mayor en la telefonía móvil.

6 ▼▼▽ **Elvira está aprendiendo un juego de malabarismo y ha practicado unos días durante una hora. A medida que adquiere destreza, consigue actuar durante más tiempo. Observa la gráfica y responde:**



a) ¿Cuántos días ha estado practicando Elvira?

b) Según aumenta el número de días de práctica, ¿aumenta o disminuye el tiempo de actuación?

c) ¿Cuánto aumenta el tiempo de actuación en los 10 primeros días? ¿Y en los 10 siguientes? ¿Qué ocurre en los 5 últimos?

d) El tiempo máximo de actuación se ha ido estabilizando en torno a un valor. ¿Qué valor es?

a) 25 días.

b) Aumenta.

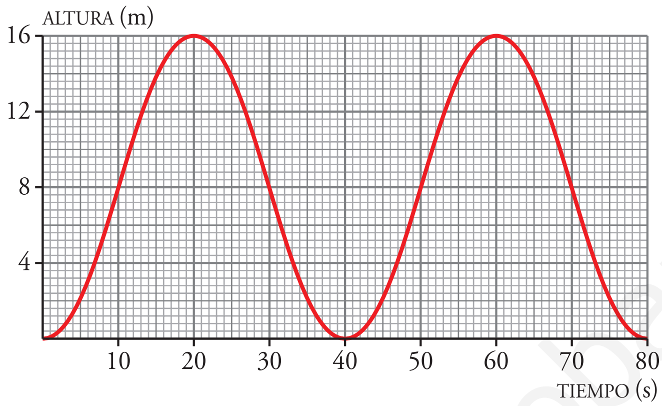
c) En los 10 primeros días, el tiempo de actuación aumenta medio minuto; en los 10 días siguientes, aumenta 13,5 minutos, y en los últimos 5 días, aumenta otro medio minuto.

d) 15minutos.

7 Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 142

7 ▼▼▽ **Los cestillos de una noria van subiendo y bajando a medida que la noria gira. Esta es la representación gráfica de la función *tiempo-distancia al suelo* de uno de los cestillos:**



a) ¿Cuánto tarda en dar una vuelta completa?

b) Observa cuál es la altura máxima y di cuál es el radio de la noria.

c) Explica cómo calcular la altura a los 130 segundos sin necesidad de continuar la gráfica.

a) 40 segundos.

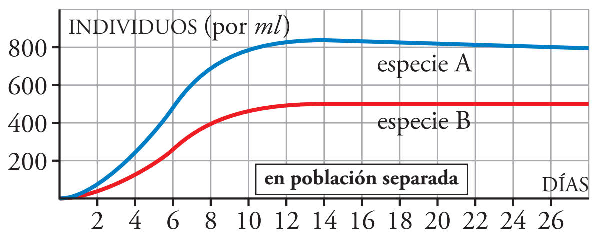
b) Altura máxima = 16 m

Radio de la noria = 8 m

c) A los 130 segundos está a 8 m de altura. Si divides 130 segundos entre 40 segundos que dura una vuelta, el resultado es 3,25 = 3 + 1/4. Por tanto, a los 130 segundos se han dado 3 vueltas y un cuarto.

Al cuarto de vuelta la altura es de 8 metros.

8 ▼▼▽ **Se ha realizado una experiencia con dos especies de seres vivos. La gráfica siguiente nos muestra el crecimiento de cada una de ellas, criándose por separado y en idénticas condiciones:**



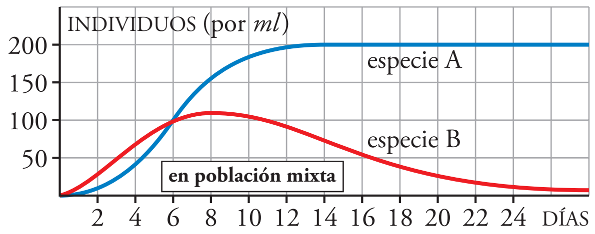
a) El número de individuos de cada especie, ¿crece indefinidamente o se va estabilizando en torno a algún valor?

b) ¿A qué valor tiende el número de individuos por mililitro en la especie A (en las condiciones estudiadas que se muestran en la gráfica)?

c) ¿Cuál de las dos especies se multiplica más rápidamente?

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

Observa en esta otra gráfica lo que sucede cuando se crían las dos especies en un mismo recipiente, compitiendo por el alimento:



d) Ambas poblaciones crecen de forma más lenta estando juntas que si se crían por separado. ¿A qué valor tiende el número de individuos de la especie A en este caso? (Observa los valores considerados en el eje *Y* en cada una de las dos gráficas. Fíjate en que la escala es distinta).

e) ¿Cuál es el número máximo de individuos que alcanza la población de la especie B?

f) ¿A qué valor tiende el número de individuos de B al avanzar los días? (Como la especie A se multiplica más rápidamente, consume más alimento; lo que hace que B tienda a desaparecer).

a) Se estabiliza.

b) A 800 individuos por mililitro.

c) La especie A.

d) A 200 individuos por mililitro.

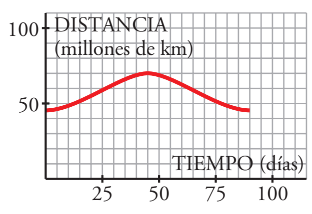
e) Aproximadamente, 110 individuos.

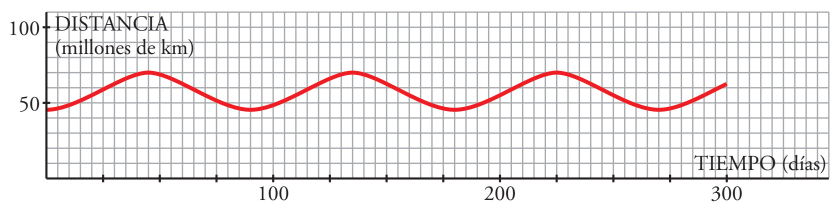
f) A 0 individuos, la población B tiende a desaparecer.

Resuelve problemas

9 ▼▼▽ **Mercurio tarda 88 días en completar su órbita alrededor del Sol. Su distancia al Sol oscila entre 70 y 46 millones de kilómetros.**

Completa la gráfica de la distancia de Mercurio al Sol durante 300 días.





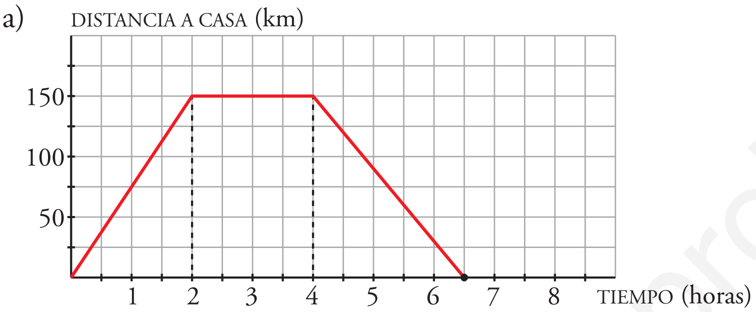
10 ▼▼▽ Luis ha tardado 2 horas en llegar desde su casa a una ciudad situada a 150 km de distancia, en la que tenía que asistir a una reunión de trabajo. Ha permanecido 2 horas en la ciudad y ha vuelto a su casa, invirtiendo 2 horas y media en el viaje de vuelta.

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia* a su casa.

b) Si suponemos que la velocidad es constante en el viaje de ida, ¿cuál sería esa velocidad?

c) Si también suponemos que la velocidad es constante en el viaje de vuelta, ¿cuál sería esa velocidad?

a)



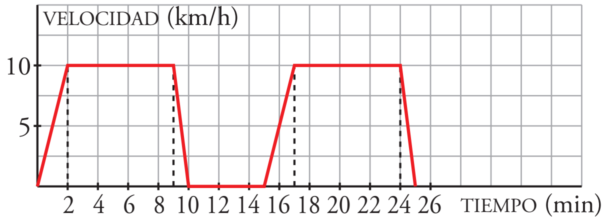
b) $v = \dfrac{150 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 75 \text{ km/h}$

c) $v = \dfrac{150 \text{ km}}{2{,}5 \text{ h}} = 60 \text{ km/h}$

PÁGINA 143

11 ▼▽▽ **Un tiovivo acelera durante 2 minutos hasta alcanzar una velocidad de 10 km/h. Permanece a esta velocidad durante 7 minutos y decelera hasta parar en 1 minuto. Tras permanecer 5 minutos parado, comienza otra vuelta.**

Dibuja la gráfica *tiempo-velocidad*.



12 ▼▼▽ **La libra es una unidad de peso que equivale a 0,45 kg.**

a) Completa la tabla siguiente:

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4	x
y (KILOS)		0,45					

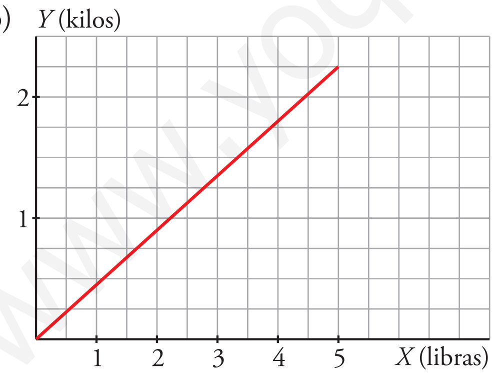
b) Representa la función que convierte libras en kilogramos.

c) Obtén la expresión analítica que relaciona estas dos variables.

a)

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4	x
y (KILOS)	0,225	0,45	0,675	0,9	1,35	1,8	$0{,}45x$

b)



c) $y = 0{,}45x$

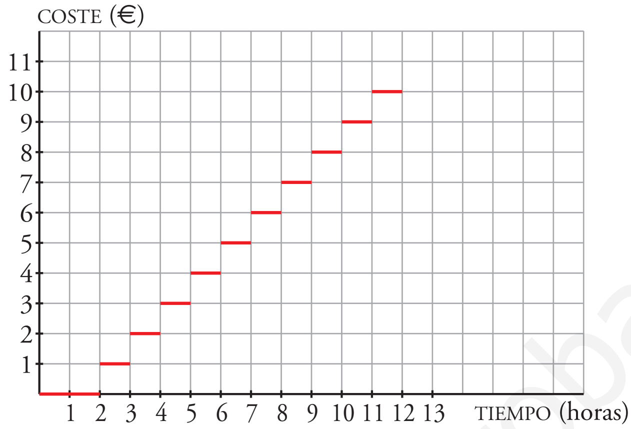
13 ▼▼▽ **Desde la concejalía de juventud del ayuntamiento de un pueblo se quiere promover el uso de la bicicleta. Para ello, han decidido alquilarlas según las tarifas siguientes:**

HORARIO: DE 9 DE LA MAÑANA A 9 DE LA NOCHE
Las dos primeras horas . . . . gratuito
3.ª hora o fracción, y sucesivas . . . . 1 €

El tiempo máximo diario es de 12 horas (desde las 9 de la mañana hasta las 9 de la noche).

Representa la gráfica de la función:

tiempo de uso de la bici-coste



14 ▼▼▽ **La dosis de un medicamento es de 0,25 g por cada kilo de peso del paciente, hasta un máximo de 15 g.**

a) ¿Cuántos gramos tiene que tomar un niño de 10 kg? ¿Y otro de 30 kg? ¿Y una persona de 70 kg?

b) ¿A partir de qué peso se toma la dosis máxima?

c) Representa la función *peso del paciente-dosis indicada*.

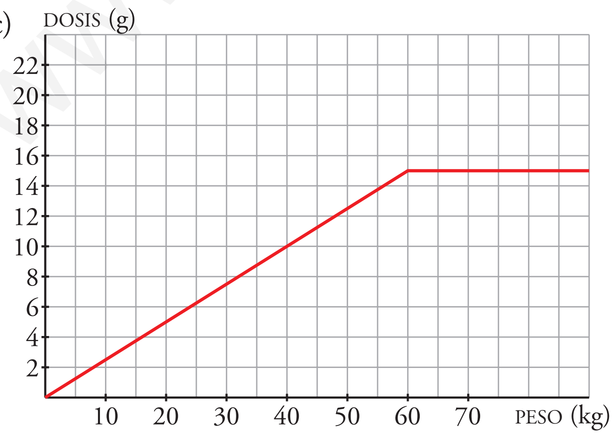
a) $10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$ g de medicamento tiene que tomar un niño de 10 kg.

$30 \cdot 0{,}25 = 7{,}5$ g de medicamento tiene que tomar un niño de 30 kg.

$70 \cdot 0{,}25 = 17{,}5$ g. Como se pasa del máximo, la persona de 68 kg tiene que tomar 15 g de medicamento.

b) A partir de 60 kg.

c)



15 ▼▼▽ **La tabla recoge la medida del perímetro del cráneo de un niño en los primeros meses de vida:**

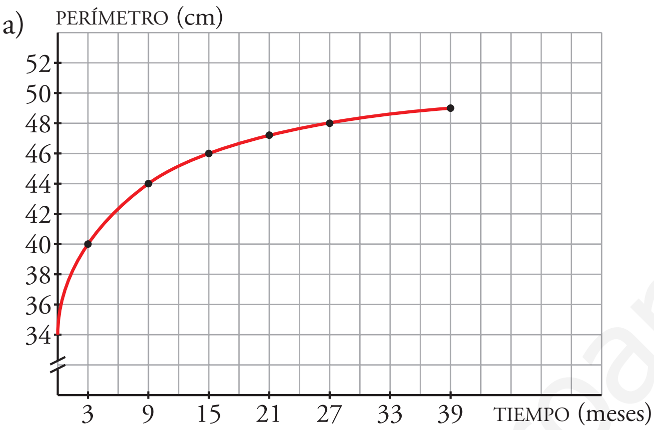
TIEMPO (meses)	0	3	9	15	21	27	33
PERÍMETRO (cm)	34	40	44	46	47	48	49

a) Haz una gráfica relacionando estas dos variables. Elige una escala adecuada.

b) ¿Qué tendencia se observa en el crecimiento del cráneo de un niño?

c) ¿Cuánto crees que medirá el perímetro craneal de un niño de 3 años?

a)



b) Al principio, el cráneo crece rápidamente, pero al pasar el tiempo, el crecimiento es cada vez menor.

c) Poco más de 49 cm.

16 ▼▼▽ **Haz una tabla de valores en la que se relacionen la base y la altura de los rectángulos cuya área es de 12 m^2.**

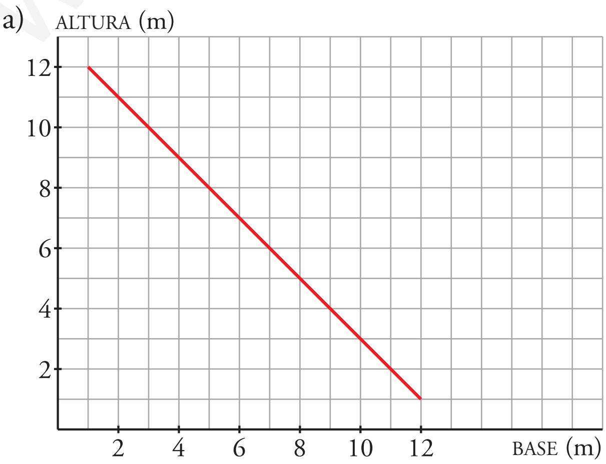
a) Representa gráficamente esta función.

b) ¿Cuál de las tres expresiones siguientes corresponde a esta función?:

$$y = \frac{x}{12} \qquad y = \frac{12}{x} \qquad y = 12x$$

BASE, x (m)	1	2	3	4	5	12	x
ALTURA, y (m)	12	6	4	3	2	1	$12/x$

a)



b) $y = \dfrac{12}{x}$

Problemas “+”

17 ▼▼▽ **Un meteorólogo se encuentra en lo alto de un puerto de montaña midiendo las variaciones de las temperaturas nocturnas con un termómetro de precisión. Por radio, transmite los datos a la estación científica más próxima, donde construyen la correspondiente gráfica.**

La primera transmisión fue así:

—“O.K… Comienzo mis observaciones: son las 20:00 h de la noche (las –4 h, porque faltan 4 horas para las 0:00 h). Transmitiré temperaturas cada dos horas, o cada hora si observo alguna variación importante, hasta las 10:00 h de la mañana. Ahora el termómetro marca 4 grados bajo cero…”.

La tabla adjunta muestra los datos transmitidos. En la última comunicación dijo que la temperatura estaba estabilizándose.

t (h)	–4	–2	0	2	4	6	7	8	9
T (°C)	–4	–3,75	–3,25	–2	0	4	3	0,5	2

a) Representa la gráfica *tiempo-temperatura* (*t-T*) que elaborarán en la estación científica.

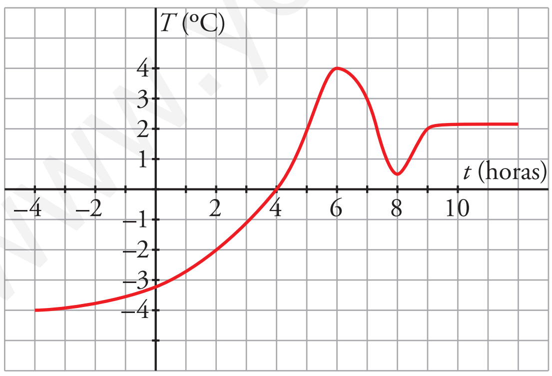
b) ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Cuál es el recorrido?

c) ¿En qué valores la gráfica corta a cada uno de los ejes? Explica su significado.

d) ¿En qué periodo de tiempo la temperatura asciende, por hora, más lentamente? ¿Y más rápidamente? ¿En qué momento es máxima?

e) ¿Se mantiene estable la temperatura a partir de algún momento? ¿Hacia qué valor tiende?

a)



b) Dominio [–4, 10]. Recorrido [–4, 4]

c) Corta al eje *t*(horas) en $t = 4$. Punto (4, 0); corta al eje *T* (temperatura en °C) en $T = -3{,}25$. Punto (0; –3,25).

d) La temperatura asciende más rápidamente en el intervalo [4, 6], 2 grados por hora.

El crecimiento más lento se da en el intervalo [–4, 0], 0,75° en 4 horas.

La temperatura máxima se da a las 6 horas.

e) Se estabiliza a partir de las 9. Tiende a 2 °C.

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 144

18 ▼▼▼ **El agua que vierte una fuente ornamental de un parque proviene de una cisterna oculta, cuya altura es de 90 cm. Antes de abrir el parque se procede a su llenado abriendo la llave de entrada de agua. Tarda 3 minutos, observándose una relación entre la altura a del agua en la cisterna y el tiempo t transcurrido, dada por la siguiente tabla:**

t (min)	0	1	1,5	2	3
a (cm)	0	50	67,5	80	90

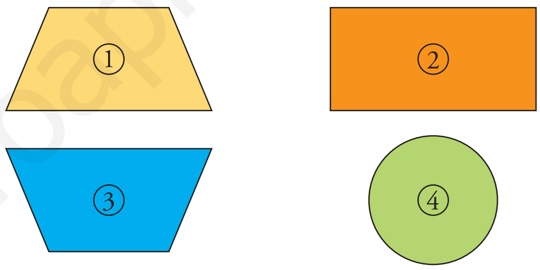
A continuación, la cisterna se vacía en 3 min, a la misma velocidad. Durante 1 min, el agua circula por las tuberías de la fuente, regresando a la cisterna para llenarla, y así sucesivamente.

a) Completa la tabla anterior hasta un tiempo de 15 minutos. Haz la gráfica de la función $t \to a$.

b) ¿Es continua dicha función? ¿Es periódica? ¿Cuál es su periodo? ¿En qué valores de t la cisterna está llena?

c) Durante el llenado, ¿sube el agua con igual rapidez en cada minuto? Justifícalo.

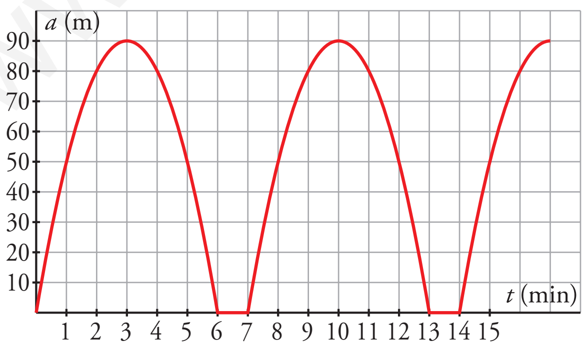
d) Teniendo en cuenta lo descubierto en c), ¿cuál de estas figuras representa la forma de la cisterna?



a)

t (min)	0	1	1,5	2	3	4	4,5	5	6	7
a (cm)	0	50	67,5	80	90	80	67,5	50	0	0

t (min)	8	8,5	9	10	11	11,5	12	13	14	15
a (cm)	50	67,5	80	90	80	67,5	50	0	0	50



b) La función es continua y periódica. El periodo es 7 min. La cisterna está llena a los 3 minutos, $t = 3$, y a los 10 minutos, $t = 10$ min.

c) En el primer minuto de llenado el agua sube 50 cm. Entre 1 y 2 minutos sube 30 cm y entre 2 y 3 sube 10 cm. Sube más rápidamente en el primer minuto.

d) La cisterna tiene la forma 3 porque al ser más estrecha en la parte de abajo sube la altura del agua más rápidamente que en la parte supeerior donde la cisterna es más ancha.

19 ▼▼▼ **El aparcamiento de un rascacielos de oficinas tiene una afluencia de entrada y salida de coches que varía cada hora. Hoy es viernes: se ha abierto a las 8 de la mañana y, durante la primera hora, entran 5 coches por minuto. Entre las 9 y las 10 h entran 3 coches por minuto. De 10 a 11 h entran 2 coches por minuto y sale 1 coche cada 3 minutos. De 11 a 12 h, el aparcamiento está completo. De 12 a 13 horas entra 1 coche y salen 2, cada minuto. A partir de las 13 horas comienza a vaciarse, a un ritmo de 5 coches cada 2 minutos.**

Suponemos en todo momento que cualquier coche que entra se queda un tiempo determinado.

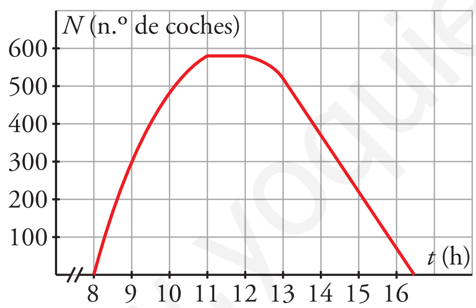
a) Construye la tabla y la gráfica que relaciona N (número de coches que hay en el aparcamiento) con t (horas del día).

b) ¿Cuál es la capacidad máxima del aparcamiento? ¿Entre qué periodos de la mañana es creciente la afluencia? ¿Y decreciente?

c) ¿Cuántos coches quedan a las 15 h? ¿A qué hora está, nuevamente, vacío?

a)

***t* (h)**	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N	0	300	480	580	580	520	370	220	70



b) La capacidad máxima es 580 coches.

Es creciente entre las 8 y las 11 h.

Es decreciente entre las 12 y las 16 h 20 min.

c) A las 15 h quedan 220 coches.

Se vacía a las 16 h 28 min.

20 ▼▼▽ **a) Un coche arranca en el instante $t = 0$ segundos, aumenta su velocidad de manera uniforme hasta 10 m/s en $t = 30$ segundos, mantiene esta velocidad desde $t = 30$ segundos hasta $t = 70$ segundos, y frena en 20 segundos, disminuyendo su velocidad hasta pararse. Representa la gráfica que relaciona el tiempo (en segundos) con la velocidad (en m/s).**

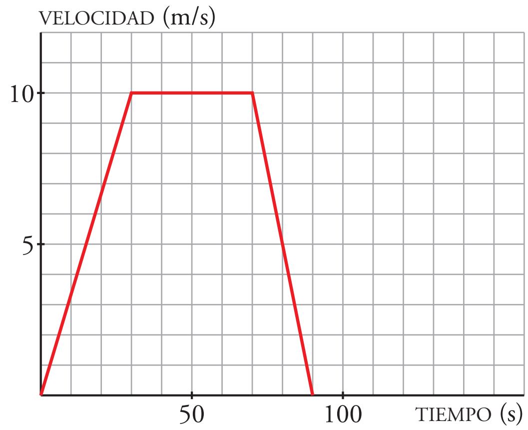
b) Hoy había mucho atasco. Rocío ha salido de casa y ha tardado 30 minutos en recorrer 10 km. Después, ha parado durante 40 minutos para hacer unas compras, y ha tardado 20 minutos en regresar a casa.

Representa la gráfica que relaciona el tiempo (en minutos) con la distancia a su casa (en km).

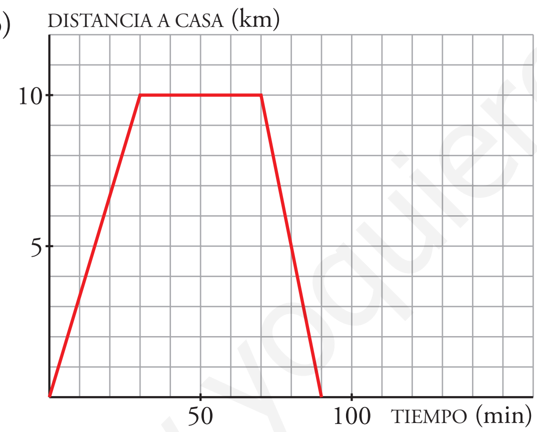
c) **Aunque los dibujos de las dos gráficas anteriores sean iguales, están representando casos muy distintos.**

Representa ahora la gráfica que relaciona el tiempo (en minutos) con el espacio total recorrido (en km) para la situación del apartado b).

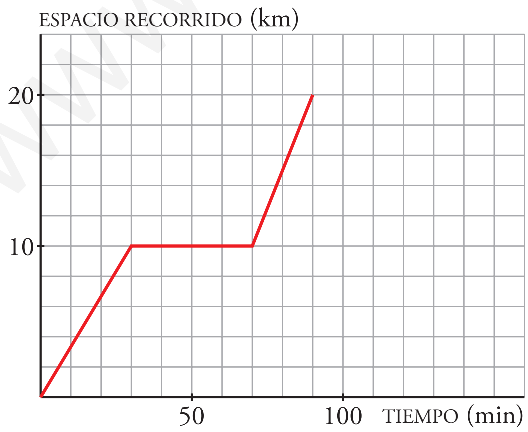
a)



b)

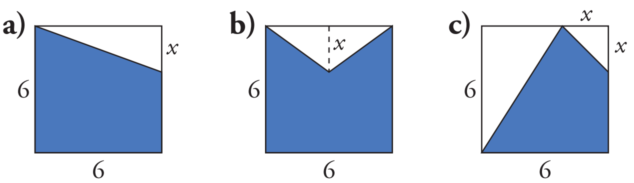


c)



PÁGINA 145

21 ▼▼▽ **Escribe en función de x el área de la parte coloreada en cada una de estas figuras:**



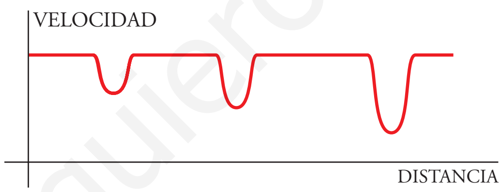
y = área de la parte coloreada

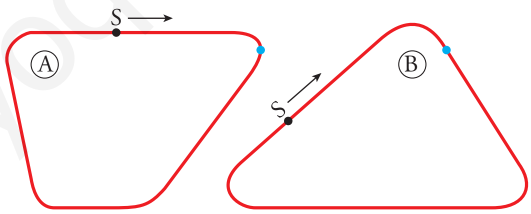
a) $y = 36 - 3x$

b) $y = 36 - 3x$

c) $y = -\dfrac{x^2}{2} + 3x + 18$

22 ▼▼▼ **Esta gráfica muestra cómo varía la velocidad de un coche al recorrer uno de los circuitos dibujados más abajo.**



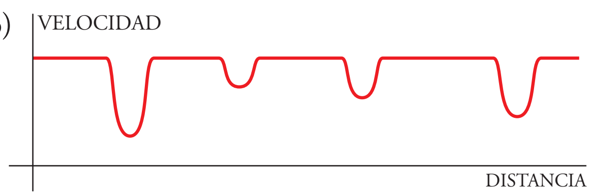


a) ¿A cuál de los dos corresponde?

b) Haz la gráfica correspondiente al otro.

a) Corresponde al circuito B. Al llegar a la curva, el coche debe bajar su velocidad, tanto más cuanto más cerrada es la curva. Esto se aprecia en la gráfica: tres frenazos, cada uno más fuerte que el anterior, como corresponde a los tres ángulos del circuito B en el orden en que se toman desde la salida, S.

b)

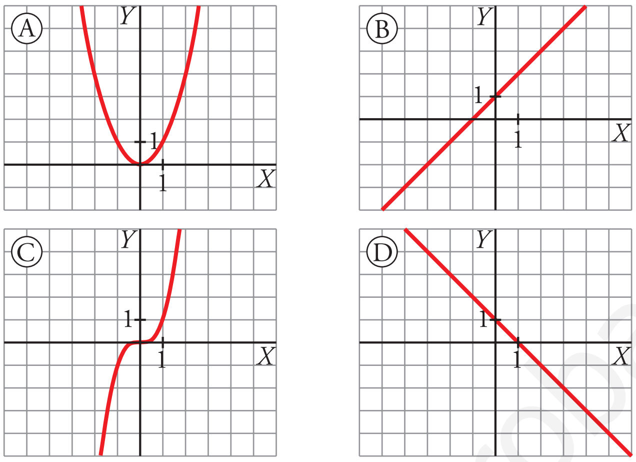


Soluciones a "Ejercicios y problemas"

Reflexiona sobre la teoría

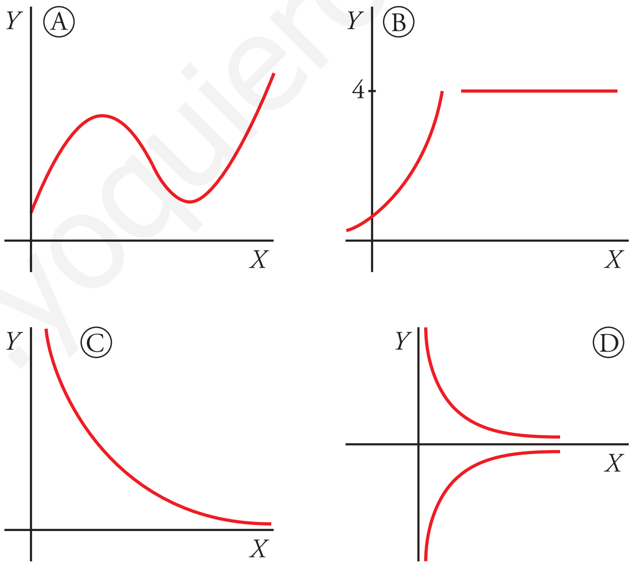
23 ▼▼▽ **Relaciona cada gráfica con una de las expresiones analíticas siguientes:**

1) $y = x + 1$ **2)** $y = x^3$ **3)** $y = x^2$ **4)** $y = -x + 1$



1) → B 2) → C 3) → A 4) → D

24 ▼▼▽ **Observa las siguientes gráficas y responde:**



a) ¿Cuál de ellas no corresponde a una función?

b) ¿Cuál corresponde a una función discontinua?

c) ¿Cuál es la de una función decreciente en todo su dominio?

d) ¿Alguna de ellas tiene máximo o mínimo?

e) Di el valor al que tiende cada una de las funciones cuando x toma valores muy grandes.

a) La gráfica D no es una función.

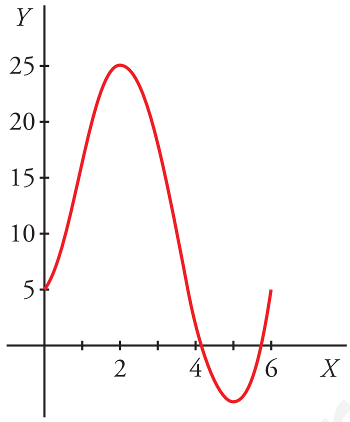
b) La B.

c) La Ⓒ.

d) Tiene máximo y mínimo la Ⓐ.

e) Ⓐ tiende a ∞; Ⓑ tiende a 4; Ⓒ tiende a 0.

25 ▼▼▽



a) Indica cuál es el dominio de definición de esta función.

b) Di dónde crece, donde decrece y si tiene máximo y mínimo.

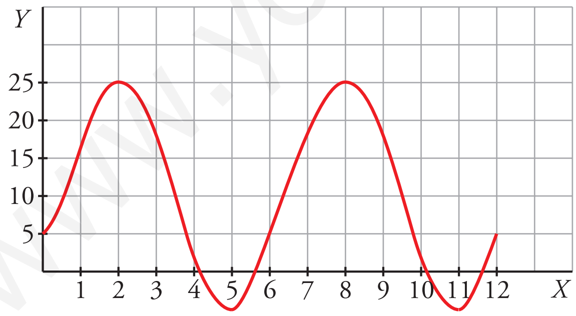
c) Si sabemos que es una función periódica de periodo 6, representa la gráfica para valores de *x* comprendidos entre 6 y 12.

a) Dominio: [0, 6]

b) Crece de 0 a 2 y de 5 a 6.

Tiene máximo (2, 25) y mínimo (5, –5).

c)



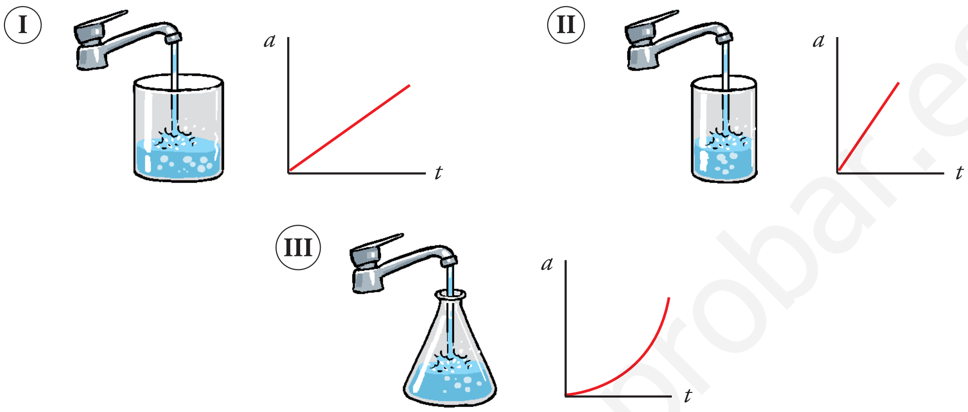
Soluciones a “Y para terminar…”

PÁGINA 146

▼ Reflexiona y decide

Al abrir un grifo sobre un recipiente, la altura (*a*) que alcanza el líquido está en función (depende) del tiempo transcurrido (*t*).

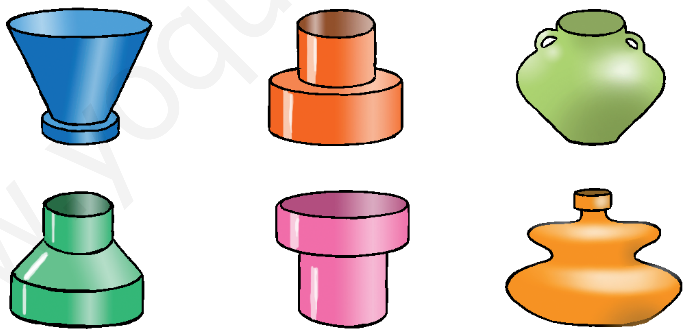
Y al representar esa función vemos que cada recipiente tiene una gráfica característica.

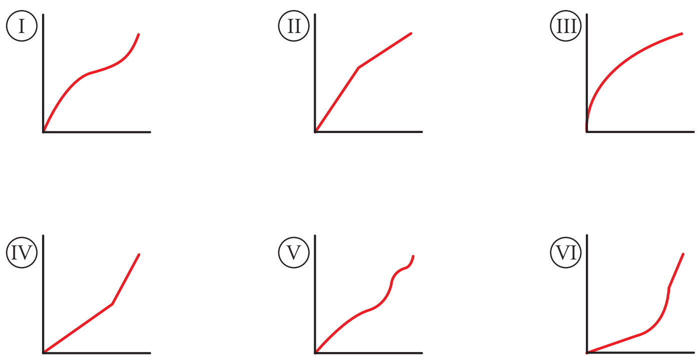


— En los dos primeros recipientes, el nivel sube uniformemente, aunque en el segundo más rápido que en el primero.

— En el tercer recipiente, el nivel sube despacio al principio y rápido al final.

- **Asocia cada uno de estos recipientes con su gráfica:**





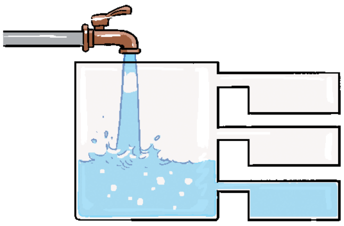
A – III; B – IV; C – I; D – VI; E – II; F – V

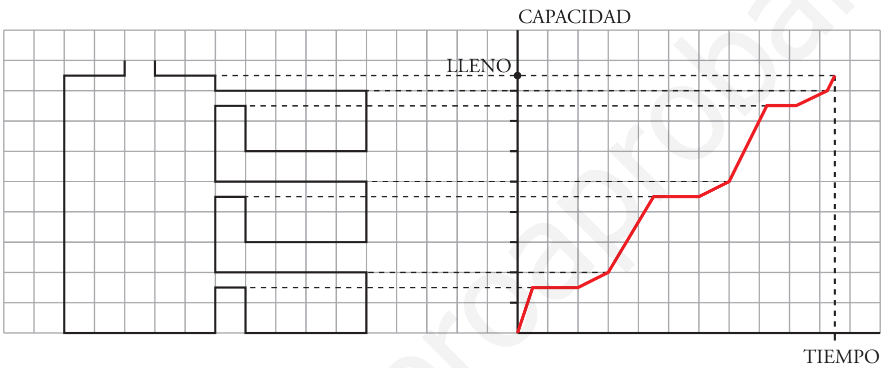
Soluciones a “Y para terminar…”

PÁGINA 147

▼ Representa

Dibuja la gráfica de la función que relaciona la altura que alcanza el agua en el recipiente con el tiempo transcurrido.

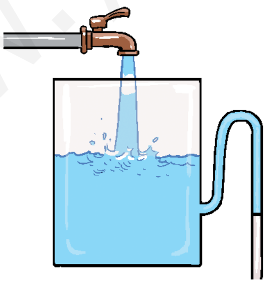


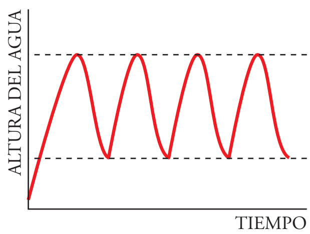


▼ Exprésate

¿Crees que la gráfica periódica corresponde a este recipiente?

Escribe detalladamente los argumentos en que se basa tu respuesta.





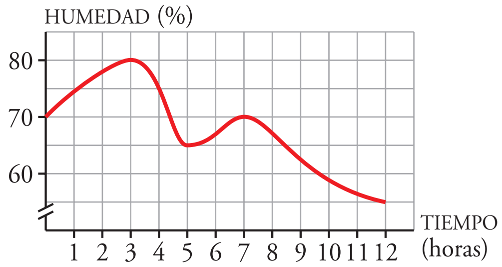
Sí que corresponde.

Puesto que cuando el tanque se llena hasta arriba el tubo también se llena y empieza a salir el agua del tanque. Esto ocurre hasta que el nivel del agua alcanza la entrada del tubo (efecto sifón). En ese momento deja de salirse agua y comienza a llenarse de nuevo el tanque.

PÁGINA 147

¿Sabes interpretar una gráfica y analizar la información que contiene?

1 Esta gráfica muestra la humedad relativa del aire en una ciudad.



a) ¿Cuáles son las variables dependiente e independiente? ¿Qué escalas se utilizan?

b) ¿Durante cuánto tiempo se midió la humedad?

c) Indica la humedad relativa a las 2 h, a las 5 h y a las 7 h. ¿Cuándo fue superior al 75%?

d) Indica cuándo crece y cuándo decrece, y los valores máximo y mínimo que alcanza.

a) Variable dependiente: tiempo (horas)

Variable independiente: humedad (%)

En el eje X, cada cuadrito es 1 h.

En el eje Y, cada cuadrito es 5%.

b) Desde las 0 h a las 12 h.

c) A las 2 h, 78%; a las 5 h, 65%; a las 7 h, 70%.

Entre la 1 y las 4 fue superior al 75%.

d) Crece de 0 h a 3 h y de 5 h a 7 h.

Decrece de 3 a 5 y de 7 a 12.

Máximo (3, 80) y mínimo (5, 65).

Soluciones a la Autoevaluación

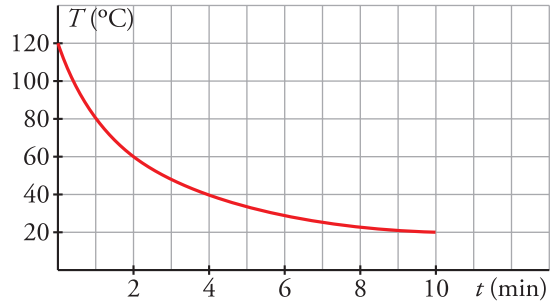
¿Sabes construir la gráfica de una función? ¿Reconoces la tendencia o la periodicidad de una función?

2 **Desconectamos una plancha que está a 120 °C y observamos que la temperatura desciende hasta 60 °C en los dos primeros minutos, y después lo hace más lentamente hasta alcanzar la temperatura ambiente, 20 °C, en 10 minutos.**

a) Representa la función *tiempo* → *temperatura*.

b) ¿Aprecias alguna tendencia en esa función?

a)



b) Cuando t toma valores grandes la temperatura tiende a 20 °C.

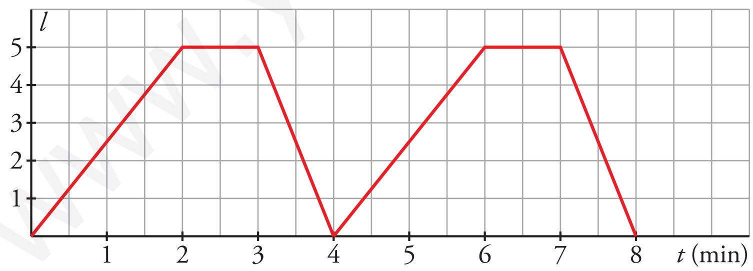
3 **Un depósito de 5 litros de agua se llena en 2 minutos, permanece lleno 1 minuto y se vacía en otro minuto. Sigue vacío durante 2 minutos y vuelve a repetirse el proceso de llenado y vaciado.**

a) Representa la función *tiempo* → *cantidad de agua*.

b) Explica si es una función periódica.

c) Durante el primer cuarto de hora, ¿en qué periodos de tiempo está lleno?

a)



b) Es una función periódica porque sus valores se repiten cada 4 minutos.

c) Está lleno entre los minutos 2 y 3, 6 y 7, 10 y 11, 14 y 15.

Soluciones a la Autoevaluación

¿Puedes obtener o identificar la expresión analítica de una función?

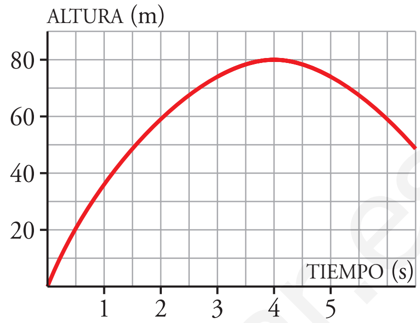
4 **Una de las siguientes ecuaciones, que se corresponde con la gráfica, expresa la relación entre la altura, h, alcanzada por un balón que se lanza hacia arriba, y el tiempo, t. ¿Cuál de ellas es?**

a) $h = t^2 + 80$

b) $h = 8t - t^2$

c) $h = 40t - 5t^2$

d) $h = -4t^2 + 80t$



Di cuál será la altura del balón a los 7 segundos.

La c).

Si $t = 7$, $h = 40 \cdot 7 - 5 \cdot 7^2 = 35$ m.

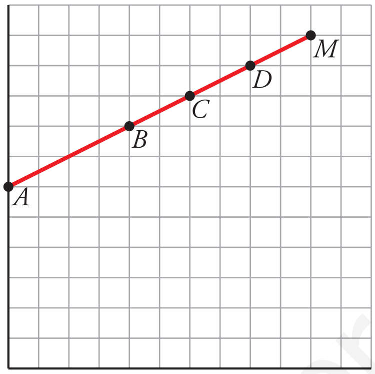
8 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 149

PARA EMPEZAR…

▼ La mosca y la araña

La mosca de Descartes ha acabado posándose en un cuadro. Una araña la ve y va a por ella.



■ **Describe mediante sus coordenadas las posiciones de la araña, *A*, y la mosca, *M*, así como los puntos de la trayectoria de la araña, *B*, *C* y *D*.**

$A(0, 6)$; $M(10, 11)$

$B(4, 8)$; $C(6, 9)$; $D(8, 10)$

■ **Comprueba que todos estos puntos responden a la ecuación $y = \frac{x}{2} + 6$.**

A: $y = \frac{0}{2} + 6 = 6$

M: $y = \frac{10}{2} + 6 = 5 + 6 = 11$

B: $y = \frac{4}{2} + 6 = 2 + 6 = 8$

C: $y = \frac{6}{2} + 6 = 3 + 6 = 9$

D: $y = \frac{8}{2} + 6 = 4 + 6 = 10$

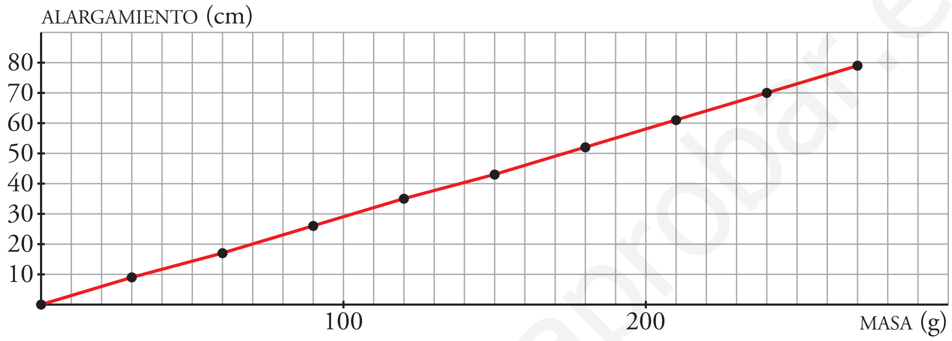
8 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

▼ Ley de Hooke

De un muelle colgamos pesas. Cuanto mayor sea la pesa, más se estira el muelle. La siguiente tabla nos da los pesos colgados y los correspondientes alargamientos del muelle:

M: MASA (g)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270
A: ALARGAMIENTO (cm)	0	9	17	26	35	43	52	61	70	79

■ **Representa los puntos y observa que están alineados.**



■ **Comprueba que responden, aproximadamente, a la fórmula $A = 0{,}29M$.**

(0, 0): $A = 0{,}29 \cdot 0 = 0$

(30, 9): $A = 0{,}29 \cdot 30 = 8{,}7 \approx 9$

(60, 17): $A = 0{,}29 \cdot 60 = 17{,}4 \approx 17$

(90, 26): $A = 0{,}29 \cdot 90 = 26{,}1 \approx 26$

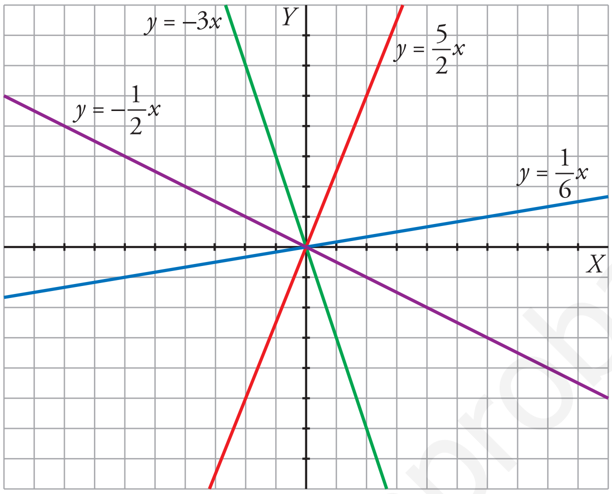
Se puede comprobar que los demás pares también cumplen, aproximadamente, la fórmula.

8 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 150

1 **Dibuja, sobre unos ejes cartesianos, en papel cuadriculado, dos rectas que pasen por el origen y que tengan pendientes positivas y otras dos con pendientes negativas.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



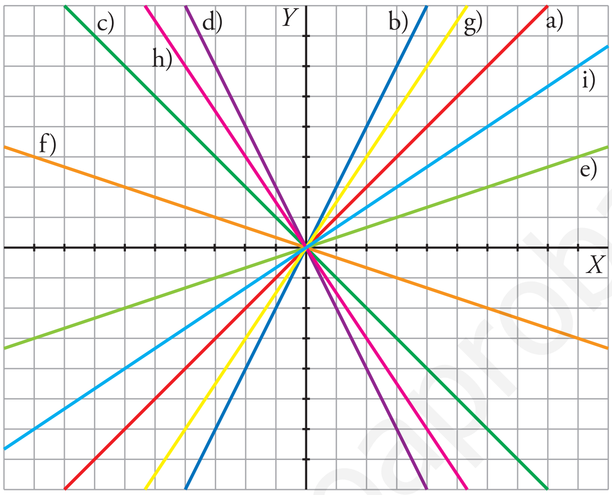
Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 151

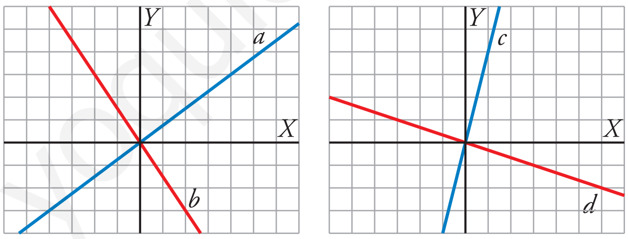
2 **Representa las funciones siguientes:**

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = -x$ d) $y = -2x$ e) $y = \frac{1}{3}x$

f) $y = -\frac{1}{3}x$ g) $y = \frac{3}{2}x$ h) $y = \frac{-3}{2}x$ i) $y = \frac{2}{3}x$



3 **Halla las ecuaciones de las rectas siguientes:**



a: $y = \frac{3}{4}x$

b: $y = -\frac{3}{2}x$

c: $y = 4x$

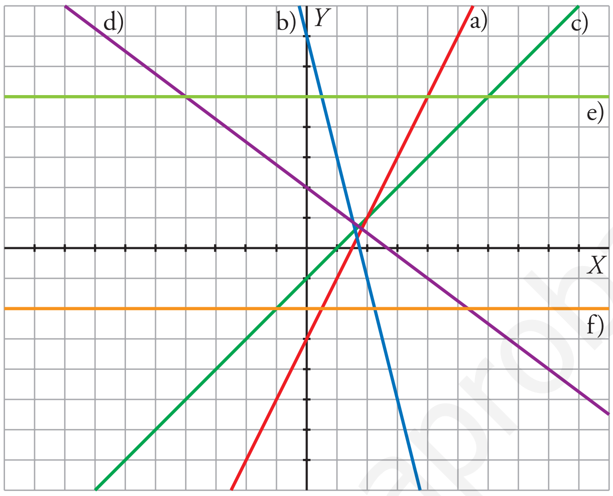
d: $y = -\frac{1}{3}x$

PÁGINA 152

1 **Representa las rectas de ecuaciones:**

a) $y = 2x - 3$ **b)** $y = 7 - 4x$ **c)** $y = x - 1$

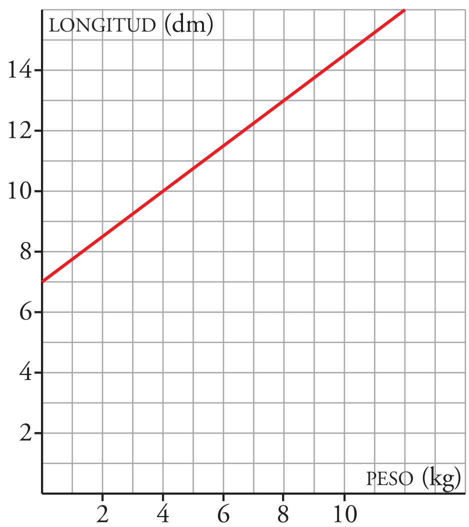
d) $y = -\frac{3}{4}x + 2$ **e)** $y = 5$ **f)** $y = -2$



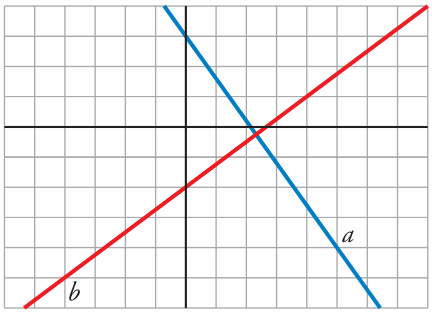
2 **Un muelle pende del techo y mide 7 dm. Si colgamos pesas de él, se estira proporcionalmente al peso de estas. Con 4 kg, se estira 3 dm. Escribe la ecuación de la función** ***peso colgado → longitud total*****, y represéntala.**

La ordenada en el origen es 7 (con 0 kg de peso, el muelle mide 7 dm). La pendiente es $\frac{3}{4}$ (al aumentar 4 kg el peso, la longitud varía 3 dm).

Por tanto: $y = 7 + \frac{3}{4}x$



3 **Escribe la ecuación de cada una de estas rectas:**



a: Ordenada en el origen 3. Pendiente = $-\frac{7}{5}$

$y = 3 - \frac{7}{5}x$

b: Ordenada en el origen = –2. Pendiente = $\frac{3}{4}$.

$y = -2 + \frac{3}{4}x$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 153

1 Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por *P* y tiene pendiente *m*:

a) $P(4, -3)$, $m = 4$

b) $P(0, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$

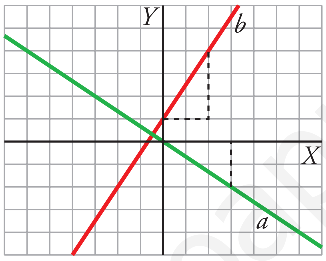
c) $P(-3, 1)$, $m = \frac{5}{4}$

d) $P(0, 0)$, $m = -1$

En los cuatro apartados utilizamos la ecuación punto-pendiente.

a) $y = -3 + 4(x - 4)$ b) $y = 2 - \frac{1}{2}x$ c) $y = 1 + \frac{5}{4}(x + 3)$ d) $y = -x$

2 Escribe la ecuación de las rectas *a* y *b* dadas mediante sus gráficas:



a) $\left.\begin{array}{l} P(3, -2) \\ m = \frac{-2}{3} \end{array}\right\} \rightarrow y = -2 - \frac{2}{3}(x - 3) = -2 - \frac{2}{3}x + 2 = -\frac{2}{3}x \rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

b) $\left.\begin{array}{l} P(2, 4) \\ m = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \rightarrow y = 4 + \frac{3}{2}(x - 2) = 4 + \frac{3}{2}x - 3 \rightarrow y = 1 + \frac{3}{2}x$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 154

1 Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos *P* y *Q*:

a) $P(2, 5)$, $Q(-3, 6)$

b) $P(3, -4)$, $Q(-2, -1)$

c) $P(-1, 0)$, $Q(5, 5)$

d) $P(-7, 1)$, $Q(3, 4)$

a) $m = \dfrac{6-5}{-3-2} = \dfrac{1}{-5} \rightarrow y = 5 - \dfrac{1}{5}(x-2)$

b) $m = \dfrac{-1-(-4)}{-2-3} = -\dfrac{3}{5} \rightarrow y = -4 - \dfrac{3}{5}(x-3)$

c) $m = \dfrac{5-0}{5-(-1)} = \dfrac{5}{6} \rightarrow y = \dfrac{5}{6}(x+1)$

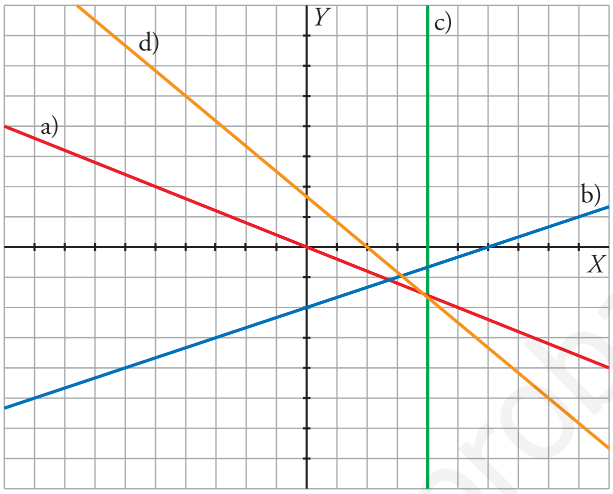
d) $m = \dfrac{4-1}{3-(-7)} = \dfrac{3}{10} \rightarrow y = 1 + \dfrac{3}{10}(x+7)$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 155

1 **Representa estas rectas:**

a) $2x + 5y = 0$ b) $x - 3y = 6$ c) $3x = 12$ d) $y = 5 - \frac{5}{6}(x + 4)$

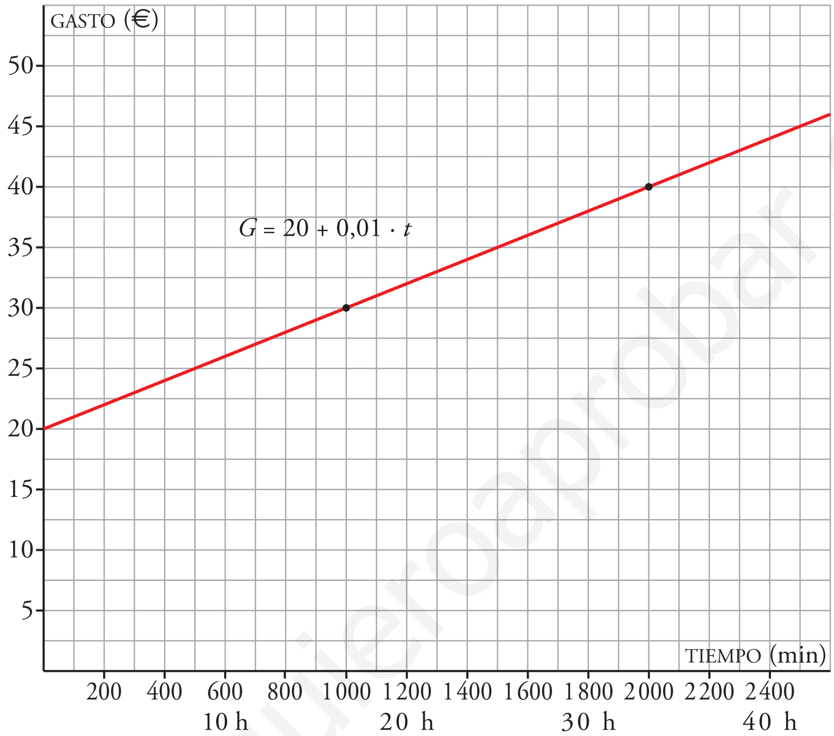


Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 156

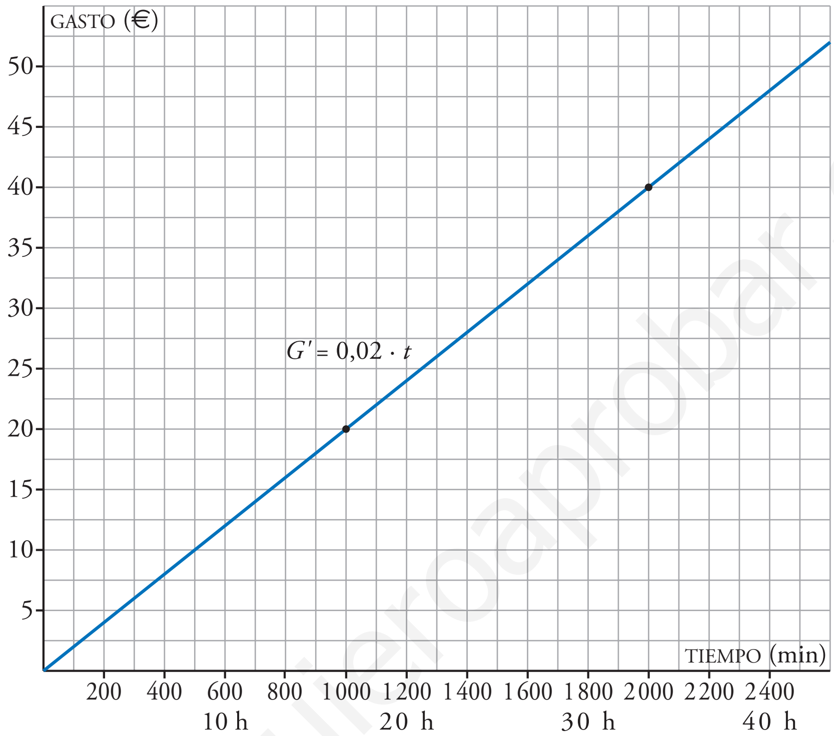
1 **El servidor de internet GUAYANDÚ tiene la tarifa GUAY, que consiste en una cuota fija mensual de 20 € y 0,01 € por cada minuto. Calcula el gasto, G, en función de los minutos, t, de utilización de internet, y representa la función *tiempo de uso → gasto*.**

$G = 20 + 0,01t$



2 **El servidor de internet JOMEIL tiene la tarifa CHUPY sin cuota fija. En esta modalidad, solo hay que pagar 0,02 € por minuto. Calcula el gasto, G', en función de los minutos, t, de utilización de internet y representa en una gráfica la función *tiempo de uso → gasto*.**

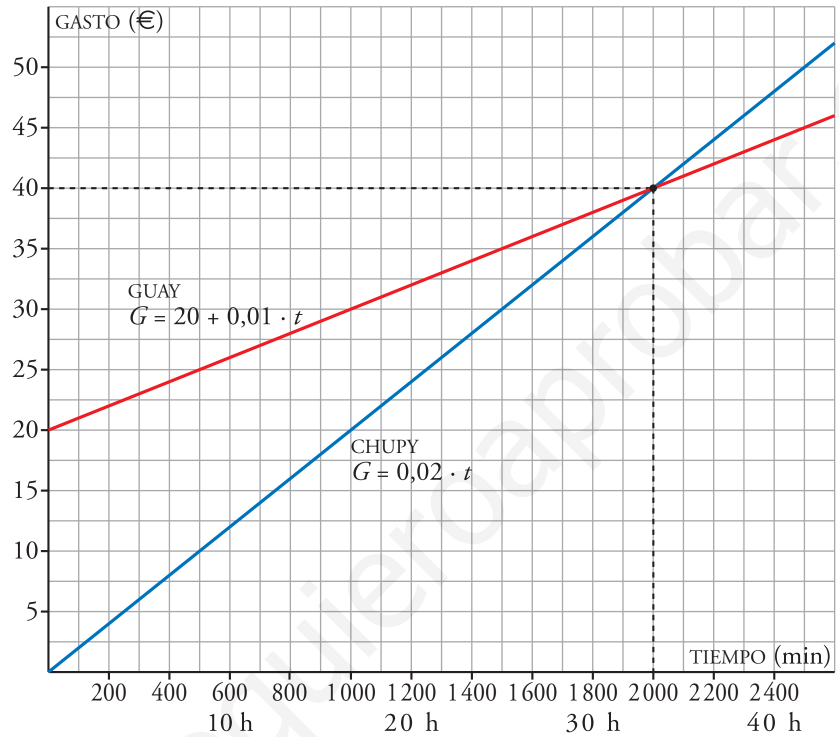
$G = 0{,}02 \cdot t$



PÁGINA 157

1 **En las actividades de la página anterior hemos obtenido las ecuaciones de dos funciones que nos daban el gasto producido por el uso de internet con dos tarifas de pago, GUAY y CHUPY.**

a) ¿Con cuántos minutos de uso pagaremos lo mismo con las dos tarifas?
b) ¿A partir de cuántos minutos mensuales es más rentable GUAY que CHUPY?



a) Para ver cuándo pagaremos lo mismo, podemos actuar de dos maneras:

— Gráficamente vemos que este punto es (2 000, 40). Es decir, las dos tarifas cobran 40 € si el uso de Internet ha sido de 2 000 min = 33 h 20 min.

— Sin representación gráfica, resolvemos el sistema de dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} G = 20 + 0,01 \cdot t \\ G = 0,02 \cdot t \end{array}\right\} \rightarrow 20 + 0,01t = 0,02t \rightarrow 20 = 0,01 \cdot t \rightarrow t = 2\,000 \text{ min}$$

Si $t = 2\,000$ min, $G(2\,000) = 0,02 \cdot (2\,000) = 40$ €.

b) A partir de los 2 000 minutos mensuales, es más rentable GUAY que CHUPY. Esto se ve claramente en la gráfica, pues a partir de $t = 2\,000$, la gráfica de GUAY está por debajo de la de CHUPY.

PÁGINA 158

Practica

Funciones lineales

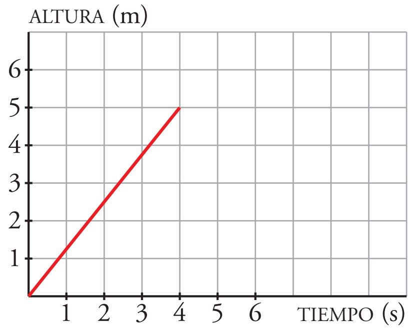
1 ▼▽▽ **La altura del agua de un depósito varía con el tiempo según la función $a = (5/4)t$ (a en metros, t en segundos).**

a) Represéntala. Si la altura del depósito es 5 m, ¿cuál es el dominio de definición de la función?

b) ¿Es una función de proporcionalidad?

c) Di cuál es la pendiente y explica su significado.

a)



Dominio [0, 4]

b) Sí, porque su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

c) Pendiente: $m = \dfrac{5}{4}$.

Cada segundo, la altura del agua aumenta $\dfrac{5}{4}$ m.

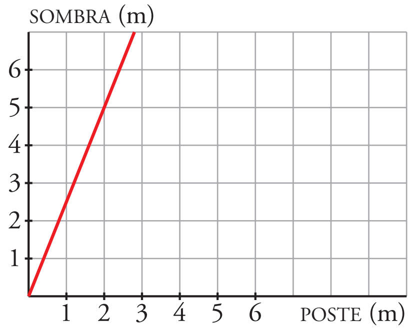
2 ▼▽▽ **Esta tabla muestra la longitud de la sombra de unos postes en un momento determinado:**

ALTURA DEL POSTE (m)	0,5	1	1,5	2	2,5
LONGITUD DE SU SOMBRA (m)	1,25	2,5	3,75	5	6,25

a) Representa la función *longitud del poste* → *longitud de la sombra*.

b) Escribe su ecuación y di cuál es la pendiente.

a)



b) Como la recta pasa por el origen, la ecuación es de la forma $y = mx$. Según la tabla, si $x = 1$, tenemos que $y = 2{,}5$. Por tanto, $y = 2{,}5x$.

Así, la pendiente es 2,5.

3 ▼▽▽ **Una milla equivale, aproximadamente, a 1,6 km.**

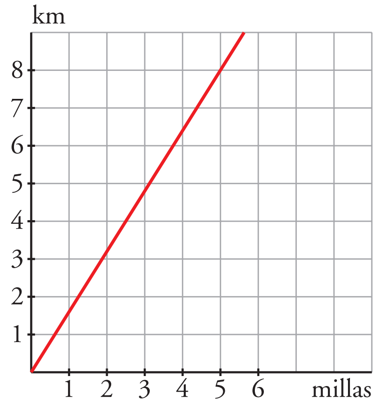
a) Haz una tabla para convertir millas en kilómetros.

b) Dibuja la gráfica y escribe su ecuación.

a)

MILLAS	1	2	3	4	5
KM	1,6	3,2	4,8	6,4	8

b)



Como pasa por el origen, la ecuación tiene la forma $y = mx$. Según la tabla, si $x = 1$, resulta que $y = 1{,}6$. Por tanto, $y = 1{,}6x$.

4 ▼▽▽ **Una receta para hacer helados recomienda poner 10 g de vainilla por cada 200 cm^3 de leche. Encuentra la relación entre la cantidad de leche y de vainilla, y representa la función.**

Tenemos una relación de proporcionalidad, donde la ecuación es de la forma $y = mx$.

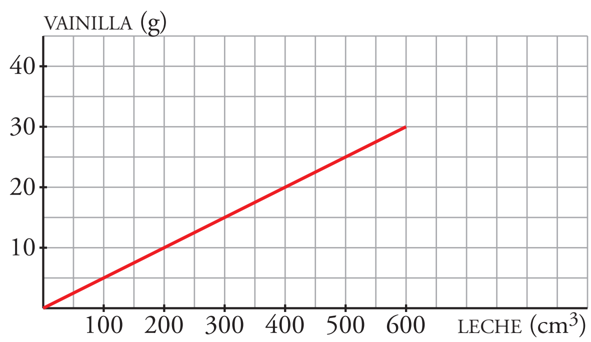
Como a 200 cm^3 de leche le corresponden 10 g de vainilla, tenemos:

$$10 = m \cdot 200 \rightarrow m = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

Por tanto, la ecuación es:

$y = 0{,}05x$

Y la gráfica es:

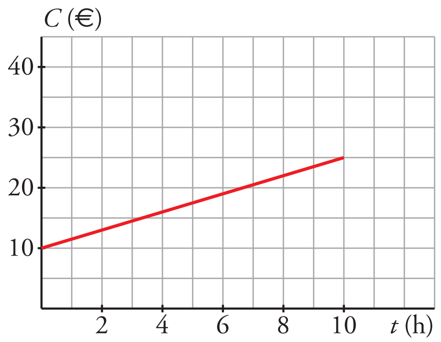


5 ▼▽▽ **El coste de una línea de telefonía móvil para internet es $C = 10 + 1{,}5t$ (C, en €; t, en horas).**

a) Representa la función.

b) Di cuál es la pendiente y explica su significado.

a)



b) Como $C = 10 + 1{,}5t$, resulta que $m = 1{,}5$.

Significa que cada hora el coste aumenta 1,5 €.

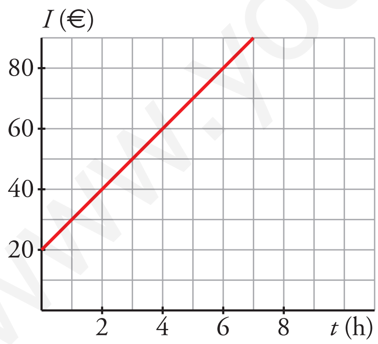
6 ▼▽▽ **La tarifa de un técnico en reparación de electrodomésticos es de 20 € por desplazamiento y 10 € por hora de trabajo.**

a) Representa la función *tiempo* (h) → *importe* (€).

b) Escribe su ecuación.

c) Di cuál es su pendiente y qué significa.

a)



b) y c) Es una función lineal de la forma $y = mx + n$.

Está claro que n es 20.

Además, como cada hora de trabajo aumenta 10 € el importe de la factura, resulta que $m = 10$.

Por tanto, $I = 20 + 10t$.

7 ▼▽▽ **La siguiente tabla muestra cómo varía la cantidad de agua que hay en un depósito cuando se abre un desagüe:**

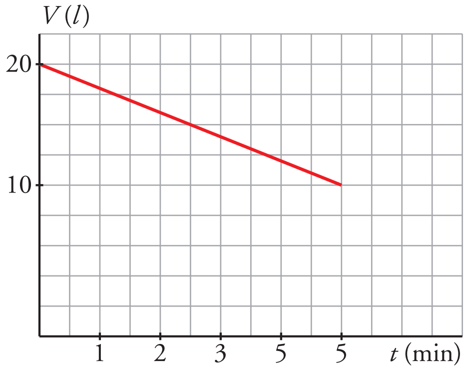
t (min)	0	1	2	3	5
V (*l*)	20	18	16	14	10

a) Representa la función *tiempo* → *volumen*.

b) Escribe su ecuación y su dominio de definición.

c) Di cuál es su pendiente y qué significa.

a)



b) y c) El dominio de definición es [0, 5].

La ecuación es de la forma $y = mx + n$. Es claro que $n = 20$, porque la función pasa por el punto (0, 20).

Además, por la tabla vemos que cuando pasa 1 minuto, la cantidad de agua desciende en 2 *l*. Por tanto, la pendiente, m, es -2.

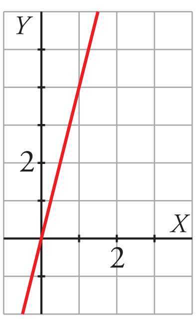
Así: $V = 20 - 2t$.

Rectas

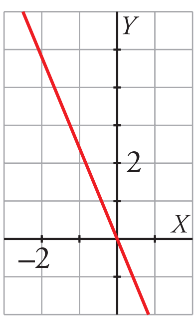
8 ▼▽▽ **Representa las rectas siguientes:**

a) $y = 4x$ **b)** $y = -2,4x$ **c)** $y = -\frac{x}{2}$ **d)** $y = -4$

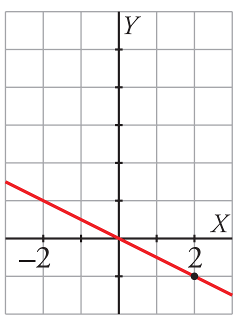
a)



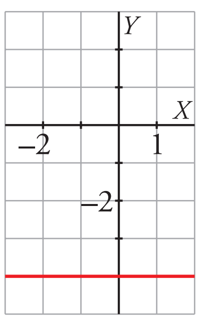
b)



c)



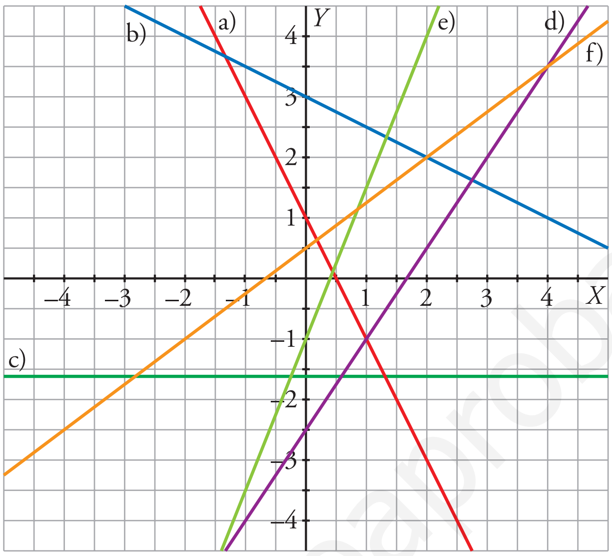
d)



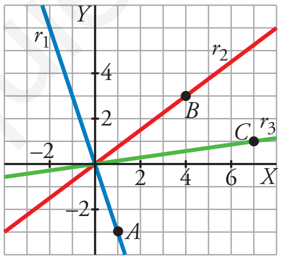
9 ▼▽▽ **Representa las rectas siguientes:**

a) $y = -2x + 1$ b) $y = -\frac{x}{2} + 3$ c) $y = -\frac{8}{5}$

d) $y = \frac{3x - 5}{2}$ e) $y = 2{,}5x - 1$ f) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$



10 ▼▽▽ **Hallar la pendiente y escribir la ecuación de las siguientes rectas:**



Observa que r_1, r_2 y r_3 corresponden a funciones de proporcionalidad, por ser rectas que pasan por el origen de coordenadas.

- Pendiente de r_1: las coordenadas del punto A son $(1, -3)$; por tanto, $m = \frac{-3}{1} = -3$.

La ecuación de una función de proporcionalidad adopta la forma $y = mx$:

- Ecuación de r_1: $y = -3x$
- Pendiente de r_2: las coordenadas de B son $(4, 3)$; por tanto, $m = \frac{3}{4}$.
- Ecuación de r_2: $y = \frac{3}{4}x$
- Pendiente de r_3: las coordenadas de C son $(7, 1)$; por tanto, $m = \frac{1}{7}$.
- Ecuación de r_3: $y = \frac{1}{7}x$

PÁGINA 159

11 ▼▽▽ Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y por *P* en cada caso:

a) $P(12, -3)$ **b)** $P(-7, -21)$

a) $m = \frac{-3}{12} = \frac{-1}{4}$; por tanto, $y = \frac{-1}{4}x$.

b) $m = \frac{-21}{-7} = 3$; por tanto, $y = 3x$

12 ▼▽▽ Halla la ecuación de la función de proporcionalidad que pasa por el punto (–5, 25).

Por ser la ecuación de una función de proporcionalidad sabemos que la recta pasa por el origen de coordenadas.

Además, por pasar por el punto (–5, 25) la pendiente de la resta es: $m = \frac{-25}{5} = -5$.

Por tanto, la ecuación de la recta es: $y = -5x$.

13 ▼▽▽ Escribe la ecuación de la recta de la que conocemos un punto y la pendiente, en cada caso:

a) $P(-2, 5)$, $m = 3$

b) $P(0, -5)$, $m = -2$

c) $P(0, 0)$, $m = \frac{3}{2}$

d) $P(-2, -4)$, $m = -\frac{2}{3}$

En todos los casos, utilizamos la ecuación punto-pendiente de la recta:

a) $y = 5 + 3(x + 2)$

b) $y = -5 - 2(x - 0) = -5 - 2x$

c) $y = \frac{3}{2}x$

d) $y = -4 - \frac{2}{3}(x + 2)$

14 ▼▽▽ Escribe las rectas del ejercicio anterior en forma general.

a) $y = 5 + 3(x + 2) = 5 + 3x + 6 = 11 + 3x \;\rightarrow\; 3x - y = -11$

b) $y = -5 - 2(x - 0) = -5 - 2x \;\rightarrow\; 2x + y = -5$

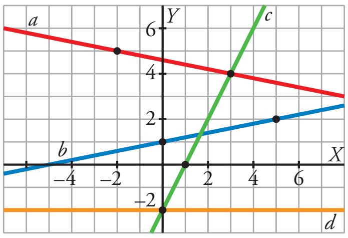
c) $y = \frac{3}{2}x \;\rightarrow\; 3x - 2y = 0$

d) $y = -4 - \frac{2}{3}(x + 2) \;\rightarrow\; 3y = -12 - 2(x + 2) = -12 - 2x - 4 = -16 - 2x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2x + 3y = -16$

15 ▼▽▽ Resuelto en el libro del alumno.

16 ▼▽▽ **a) Escribe la ecuación de cada recta:**



b) ¿Cuáles son funciones crecientes? ¿Y decrecientes? Comprueba el signo de la pendiente en cada caso.

a) *a*: Pasa por (–2, 5) y (3, 4): $m = \frac{4-5}{3-(-2)} = \frac{-1}{5}$

Ecuación: $y = 5 - \frac{1}{5}(x+2)$

b: Ordenada en el origen: 1.

Pendiente: cuando x aumenta 5, y aumenta 1 $\rightarrow$ $m = \frac{1}{5}$

Ecuación: $y = 1 + \frac{1}{5}x$

c: Ordenada en el origen: –2.

Pendiente: cuando x aumenta 1, y aumenta 2 $\rightarrow$ $m = \frac{2}{1} = 2$

Ecuación: $y = -2 + 2x$

d: Recta de pendiente 0 que pasa por (0, –2).

Ecuación: $y = -2$

b) *a*: $m = -\frac{1}{5}$, pendiente negativa. Función decreciente.

b: $m = \frac{1}{5}$, pendiente positiva. Función creciente.

c: $m = 2$, pendiente positiva. Función creciente.

d: $m = 0$. Función constante, ni crece ni decrece.

17 ▼▽▽ **Halla la pendiente de la recta que pasa por A y B, y escribe su ecuación en cada caso:**

a) $A(2, -1)$, $B(3, 4)$ **b)** $A(-5, 2)$, $B(-3, 1)$

c) $A\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$ **d)** $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $B\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

a) Pendiente: $m = \frac{4-(-1)}{3-2} = 5$

Ecuación: $y = -1 + 5(x-2)$

b) Pendiente: $m = \frac{1-2}{-3-(-5)} = \frac{-1}{2}$

Ecuación: $y = 2 - \frac{1}{2}(x+5)$

c) Pendiente: $m = \dfrac{\frac{2}{3} - 2}{1 - \frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{-4}{3}}{\frac{-1}{2}} = \dfrac{8}{3}$

Ecuación: $y = 2 + \dfrac{8}{3}\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$

d) Pendiente: $m = \dfrac{1 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}} = \dfrac{3}{10}$

Ecuación: $y = \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{10}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

18 ▼▽▽ **Asocia cada una de las rectas *r*, *s*, *t*, *p* y *q* a una de las ecuaciones:**

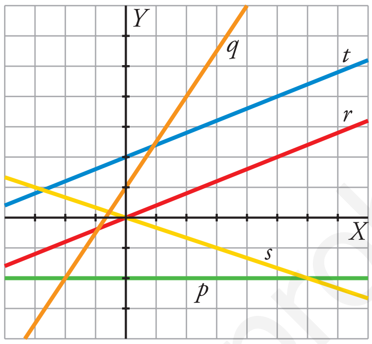
a) $y = -\dfrac{1}{3}x$

b) $y = \dfrac{3}{2}x + 1$

c) $y = \dfrac{2}{5}x$

d) $y = \dfrac{2}{5}x + 2$

e) $y = -2$



a) $y = \dfrac{-1}{3}x$ es la recta s.

b) $y = \dfrac{3}{2}x + 1$ es la recta q.

c) $y = \dfrac{2}{5}x$ es la recta r.

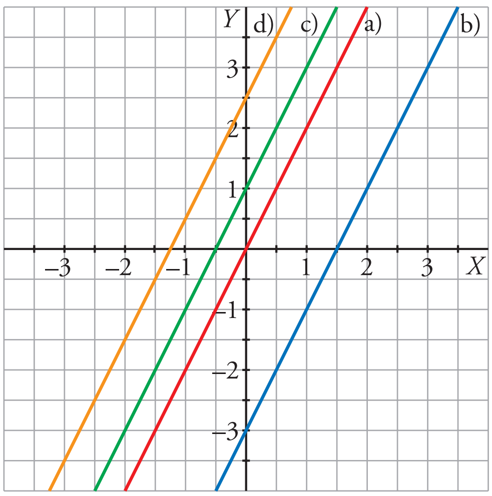
d) $y = \dfrac{2}{5}x + 2$ es la recta t.

e) $y = -2$ es la recta p.

19 ▼▽▽ **Di cuál es la pendiente de cada una de estas rectas. Representa todas ellas en los mismos ejes y observa sus gráficas. ¿Qué conclusión sacas?**

a) $y = 2x$ **b)** $y = 2x - 3$ **c)** $2x - y + 1 = 0$ **d)** $4x - 2y + 5 = 0$

a) $m = 2$
b) $m = 2$
c) $m = 2$
d) $m = 2$



Las cuatro rectas son paralelas.

Concluimos que las rectas que tienen la misma pendiente o son paralelas o son coincidentes.

20 ▼▼▽ **Escribe la ecuación de cada una de estas rectas y represéntalas:**

a) Pasa por (–3, 2) y (1, –4).

b) Pasa por (2/5, –1) y su pendiente es –1/2.

c) Pasa por (2, 1) y su ordenada en el origen es –3.

d) Pasa por (2, –4) y es paralela a $y = 3x$.

e) Es paralela al eje X y pasa por el punto (–2, –4).

f) Es paralela al eje Y y pasa por el punto (–2, –4).

☞ ***Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.***

a) $m = \dfrac{-4-2}{1-(-3)} = \dfrac{-6}{4} = \dfrac{-3}{2}$

Ecuación de la recta: $y = 2 - \dfrac{3}{2}(x+3)$

b) Ecuación de la recta: $y = -1 - \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{2}{5}\right)$

c) $m = \dfrac{1-(-3)}{2-0} = \dfrac{4}{2} = 2$

Ecuación de la recta: $y = -3 + 2x$

d) Como es paralela a $y = 3x$, tenemos que $m = 3$.

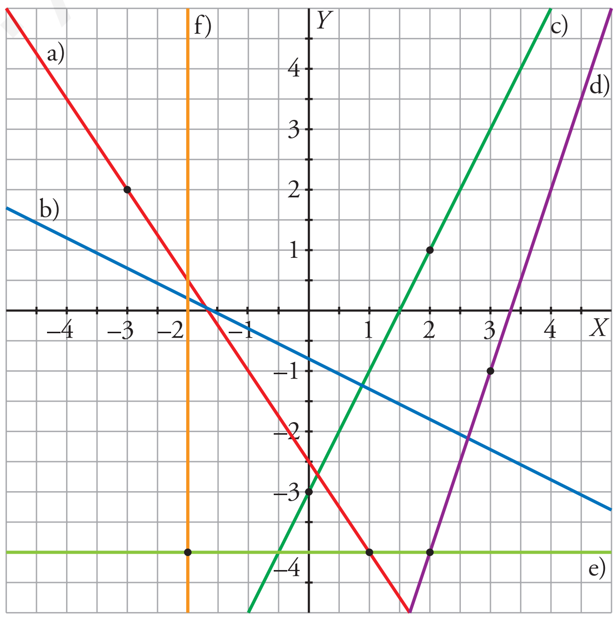
Ecuación de la recta: $y = -4 + 3(x-2)$

e) Como es paralela al eje X, para cualquier valor de x, y tiene el mismo valor.

Ecuación de la recta: $y = -4$

f) Como es paralela al eje Y, el valor de x permanece constante.

Ecuación de la recta: $x = -2$



PÁGINA 160

Puntos de una recta

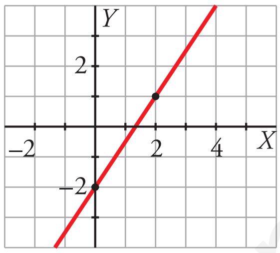
21 ▼▽▽ Resuelto en el libro del alumno.

22 ▼▽▽ **Comprueba que el punto (23, 74) pertenece a la recta $y = 4x - 18$.**

$x = 23 \;\rightarrow\; y = 4 \cdot 23 - 18 = 74$

El punto (23, 74) sí que pertenece a la recta $y = 4x - 18$.

23 ▼▼▽ **Averigua si la recta siguiente pasa por el punto (240, 358):**



Ecuación de la recta: $y = -2 + \frac{3}{2}x$

$x = 240 \;\rightarrow\; y = -2 + \frac{3}{2} \cdot 240 = 358$

El punto (240, 358) sí que pertenece a la recta.

24 ▼▽▽ **Considera estas rectas:**

$$r\text{: } 5x - 2y = -16 \qquad s\text{: } y = \frac{7}{3}x + 8 \qquad t\text{: } y = 7 + \frac{2}{3}(x - 4)$$

¿Cuál de ellas pasa por cada uno de estos puntos?

$$P(15, 43), \quad Q\left(-\frac{3}{2}, \frac{10}{3}\right), \quad R(-20, -42)$$

r: $P(15, 43) \;\rightarrow\; 5 \cdot 15 - 2 \cdot y = -16 \;\rightarrow\; y = \frac{91}{2} \neq 43$

$Q\left(-\frac{3}{2}, \frac{10}{3}\right) \;\rightarrow\; 5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 \cdot y = -16 \;\rightarrow\; y = \frac{17}{4} \neq \frac{10}{3}$

$R(-20, -42) \;\rightarrow\; 5 \cdot (-20) - 2y = -16 \;\rightarrow\; y = -42$

La recta r pasa por el punto $R(-20, -42)$.

s: $P(15, 43) \;\rightarrow\; y = \frac{7}{3} \cdot 15 + 8 \;\rightarrow\; y = 43$

$Q\left(-\frac{3}{2}, \frac{10}{3}\right) \;\rightarrow\; y = \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 8 \;\rightarrow\; y = \frac{9}{2} \neq \frac{10}{3}$

$R(-20, -42) \;\rightarrow\; y = \frac{7}{3} \cdot (-20) + 8 \;\rightarrow\; y = \frac{-116}{3} \neq -42$

La recta s pasa por el punto $P(15, 43)$.

t: $P(15, 43) \rightarrow y = 7 + \frac{2}{3}(15 - 4) \rightarrow y = \frac{43}{3} \neq 43$

$Q\left(-\frac{3}{2}, \frac{10}{3}\right) \rightarrow y = 7 + \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2} - 4\right) \rightarrow y = \frac{10}{3}$

$R(-20, -42) \rightarrow y = 7 + \frac{2}{3}(-20 - 4) \rightarrow y = -9 \neq -42$

La recta t pasa por el punto $Q\left(-\frac{3}{2}, \frac{10}{3}\right)$.

Pendiente y ordenada en el origen

25 ▼▽▽ Resuelto en el libro del alumno.

26 ▼▽▽ **Halla la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de las rectas siguientes:**

a) $-5x + 8y = 3$

b) $4x - 7y = -8$

c) $3y = 12$

d) $6x - 2y - 3 = 0$

a) $-5x + 8y = 3 \rightarrow 8y = 3 + 5x \rightarrow y = \frac{3}{8} + \frac{5}{8}x$

Pendiente: $m = \frac{5}{8}$

Ordenada en el origen: $n = \frac{3}{8}$

b) $4x - 7y = -8 \rightarrow 4x + 8 = 7y \rightarrow y = \frac{8}{7} + \frac{4}{7}x$

Pendiente: $m = \frac{4}{7}$

Ordenada en el origen: $n = \frac{8}{7}$

c) $3y = 12 \rightarrow y = 4$

Pendiente: $m = 0$

Ordenada en el origen: $n = 4$

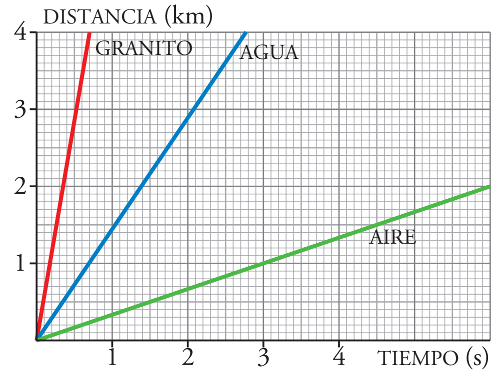
d) $6x - 2y - 3 = 0 \rightarrow 6x - 3 = 2y \rightarrow y = 3x - \frac{3}{2}$

Pendiente: $m = 3$

Ordenada en el origen: $n = -\frac{3}{2}$

Aplica lo aprendido

27 ▼▼▽ **Las gráficas siguientes muestran la distancia que recorre el sonido en función del tiempo, al propagarse a través de diferentes medios:**



a) Halla la pendiente de cada una y explica su significado.

b) Escribe sus ecuaciones.

a) Aire: Pendiente: $m = \frac{1}{3}$

La pendiente indica que cada 3 segundos, el sonido recorre 1 kilómetro. Es decir, la velocidad del sonido en el aire es de $0,\widehat{3}$ km/s.

Agua: Pendiente: $m = \frac{1,4}{1} = 1,4$

La pendiente indica que cada segundo, el sonido recorre 1,4 kilómetros. Es decir, la velocidad del sonido en el agua es de 1,4 km/s.

Granito: Pendiente: $m = \frac{1,7}{0,3} = \frac{17}{3} = 5,\widehat{6}$

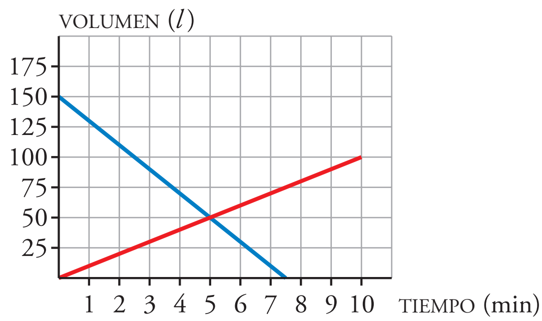
La pendiente indica que cada 3 segundos el sonido recorre 17 kilómetros. Es decir, la velocidad del sonido en el granito es de $5,\widehat{6}$ km/s.

b) Aire: $y = \frac{1}{3}x$

Agua: $y = 1,4x$

Granito: $y = \frac{17}{3}x$

28 ▼▼▽ **Dos depósitos de agua, *A* y *B*, funcionan de la forma siguiente: a medida que *A* se vacía, *B* se va llenando. Estas son las gráficas:**



a) Indica cuál es la gráfica de *A*, cuál la de *B* y escribe sus ecuaciones.

b) ¿Cuál es la velocidad de entrada y de salida del agua?

c) ¿En qué momento los dos depósitos tienen igual cantidad de agua?

a) Función creciente: B. Ecuación: $y = 10x$

Función decreciente: A. Ecuación: $y = 150 - \frac{100}{5}x = 150 - 20\,x$

b) La velocidad coincide con la pendiente.

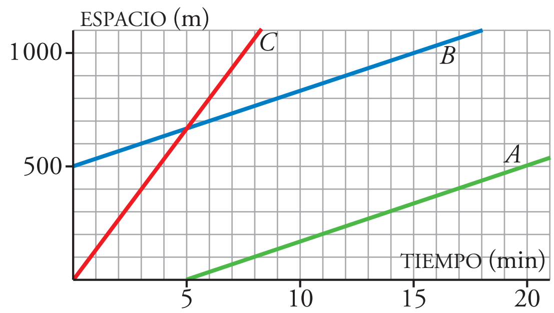
Velocidad de entrada: $v_e = \frac{50}{5} = 10$ *l*/min

Velocidad de salida: $v_s = \frac{100}{5} = 20$ *l*/min

c) A los 5 minutos los dos depósitos tienen 50 litros.

PÁGINA 161

29 ▼▼▽ **Esta es la gráfica del espacio que recorren tres montañeros que van a velocidad constante:**



a) ¿Qué velocidad lleva cada uno?

b) Escribe la expresión analítica de estas funciones.

a) Montañero A: $m = \dfrac{100}{3}$ Velocidad = $33,\widehat{3}$ m/min.

Montañero B: $m = \dfrac{100}{3}$ Velocidad = $33,\widehat{3}$ m/min.

Montañero C: $m = \dfrac{400}{3}$ Velocidad = $133,\widehat{3}$ m/min.

b) Montañero A: $y = \dfrac{100}{3}(x - 5)$

Montañero B: $y = 500 + \dfrac{100}{3}x$

Montañero C: $y = \dfrac{400}{3}x$

30 ▼▼▽ **Calcula c para que la recta $3x - 5y = c$ pase por el punto (–2, 4).**

El punto (–2, 4) tiene que verificar la ecuación de la recta. Por tanto:

$3 \cdot (-2) - 5 \cdot 4 = c \rightarrow c = -26$

31 ▼▼▽ **Calcula b para que la recta $2x + by = -11$ pase por el punto (2, –5).**

El punto (2, –5) tiene que verificar la ecuación de la recta. Por tanto:

$2 \cdot 2 + b \cdot (-5) = -11 \rightarrow b = 3$

Resuelve problemas

32 ▼▼▽ **Israel y Susana, para su próximo viaje a Estados Unidos, han ido a cambiar euros por dólares. A Susana le han cambiado 189 dólares por 150 euros y a Israel le han cambiado 151,2 dólares por 120 euros.**

a) Halla la ecuación de la función que nos permite obtener cuántos dólares recibimos según los euros que entreguemos.

b) ¿Cuántos dólares nos darían por 200 euros? ¿Y por 350 euros?

c) ¿Cuántos euros tendríamos si nos hubieran dado 220,5 dólares?

a) La función de cambio es una recta que pasa por los puntos (150; 189) y (120; 151,2). Por tanto:

$$m = \frac{189 - 151,2}{150 - 120} = \frac{37,8}{30} = \frac{378}{300} = \frac{63}{50}$$

Ecuación: $y = 189 + \frac{63}{50}(x - 150) \rightarrow y = \frac{63}{50}x$

b) Por $x = 200$ €: $y = \frac{63}{50} \cdot 200 \rightarrow y = 252$ dólares

Por $x = 350$ €: $y = \frac{63}{50} \cdot 350 \rightarrow y = 441$ dólares

c) Por $y = 220,5$ dólares: $220,5 = \frac{63}{50}x \rightarrow x = 175$ euros

33 ▼▼▽ **En una agencia de alquiler de coches cobran, para un modelo concreto, 50 € fijos más 0,20 € por cada kilómetro recorrido.**

En otra agencia, por alquilar el mismo modelo, cobran 20 € fijos más 0,30 € por cada kilómetro recorrido.

a) Obtén, en cada uno de los dos casos, la expresión analítica de la función que nos da el gasto total según los kilómetros recorridos.

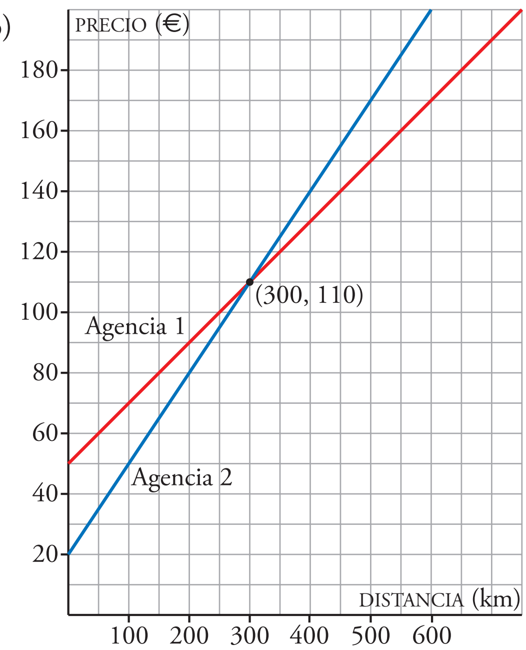
b) Representa, en los mismos ejes, las dos funciones anteriores. (Elige una escala adecuada, tomando los kilómetros de 100 en 100).

c) Analiza cuál de las dos opciones es más ventajosa, según los kilómetros que vayamos a recorrer.

a) Agencia 1: $y = 50 + 0,2 \cdot x$

Agencia 2: $y = 20 + 0,3x$

b)



c) Si vamos a recorrer menos de 300 km es mejor elegir la agencia 2.

Si vamos a recorrer más de 300 km es mejor elegir la agencia 1.

Si vamos a recorrer 300 km exactos, nos da igual qué agencia elegir.

34 ▼▽▽ **Comprueba si existe alguna recta que pase por los puntos siguientes:**

$$A(1, 1) \quad B(-1, -2) \quad C(65, 97)$$

Para ello, halla la ecuación de la recta que pasa por A y por B, y prueba después si el punto C pertenece o no a esa recta.

Ecuación de la recta que pasa por A y B:

$$m = \frac{-2-1}{-1-1} = \frac{3}{2}$$

Ecuación: $y = 1 + \frac{3}{2}(x-1)$

Vemos si el punto C pertenece a la recta, es decir, cumple la ecuación:

$y = 1 + \frac{3}{2}(65-1) \rightarrow y = 97 \rightarrow C$ sí que pertenece a la recta.

Por tanto, los puntos A, B y C están alineados.

35 ▼▼▽ **En el contrato de trabajo, a un vendedor de libros se le ofrecen dos alternativas:**

A: Sueldo fijo mensual de 1 000 €.

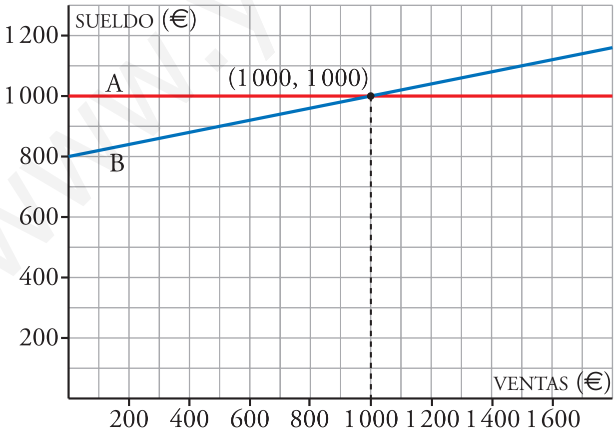
B: Sueldo fijo mensual de 800 € más el 20% de las ventas que haga.

a) Haz una gráfica que muestre lo que ganaría en un mes según la modalidad del contrato. Toma, como x, las ventas que haga, y como y, el sueldo.

b) Escribe la expresión analítica de cada función.

c) ¿A cuánto tienen que ascender sus ventas mensuales para ganar lo mismo con las dos modalidades del contrato? ¿Qué ganancias obtendrá?

a)



b) A: $y = 1\,000$

B: $y = 800 + 0{,}2 \cdot x$

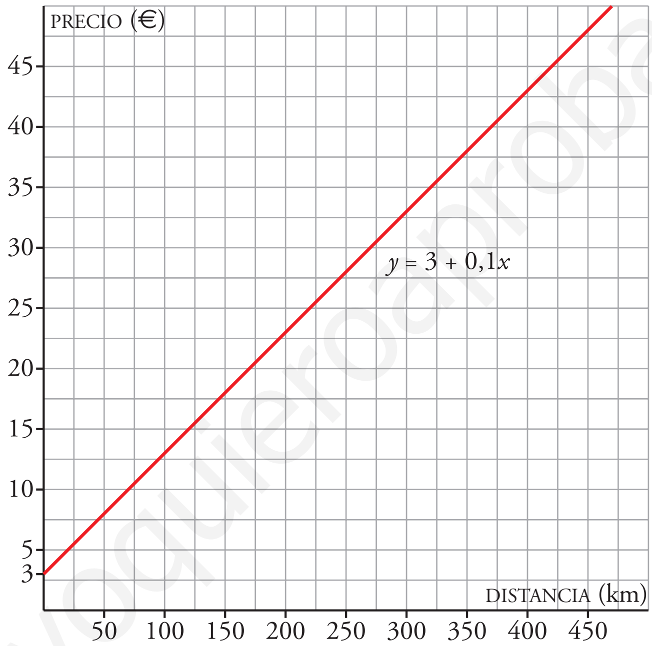
c) Sus ventas tienen que ascender a 1 000 €. En ese momento, con cualquier alternativa cobrará 1 000 €.

36 ▼▼▽ **El precio de un viaje en tren depende de los kilómetros recorridos. Por un trayecto de 140 km, pagamos 17 €, y si se recorren 360 km, cuesta 39 €. Escribe y representa la ecuación de la recta que relaciona los kilómetros recorridos, x, con el precio del billete, y.**

$$m = \frac{39 - 17}{360 - 140} = \frac{1}{10}$$

Ecuación de la recta: $y = 39 + \frac{1}{10}(x - 360)$

$$y = 3 + \frac{1}{10}x$$



37 ▼▼▼ **La temperatura de fusión del hielo en la escala centígrada es 0 °C, y en la Fahrenheit es 32 °F. La ebullición del agua es 100 °C, que equivale a 212 °F.**

a) Encuentra la función lineal que nos da la relación entre las dos escalas y represéntala.

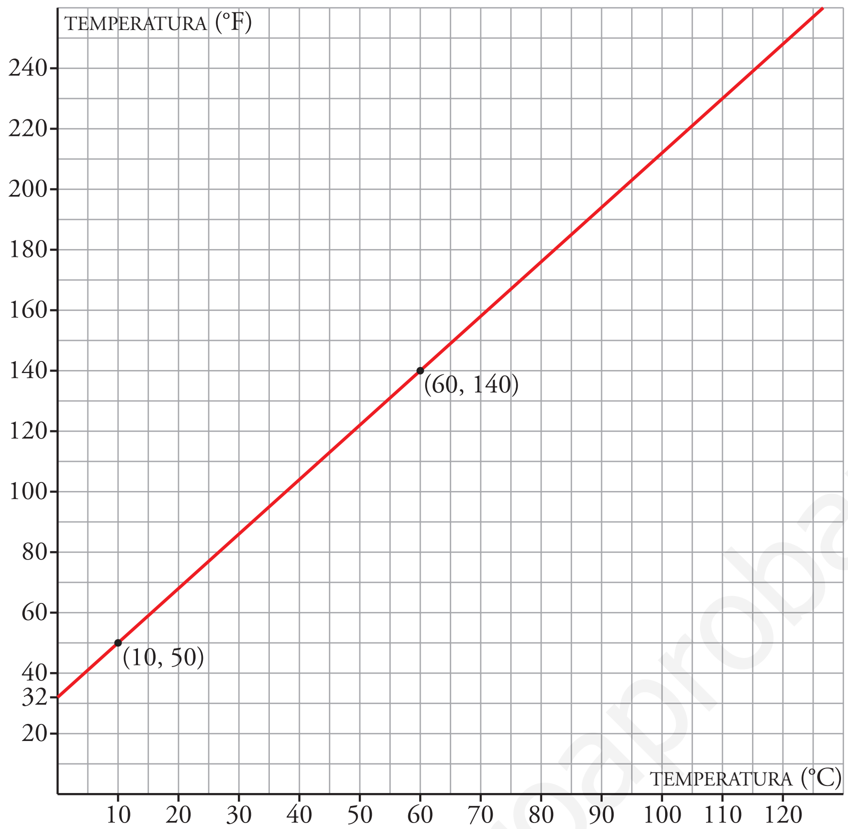
b) Expresa en grados Fahrenheit las temperaturas siguientes: 25 °C; 36,5 °C; 10 °C.

c) Pasa a grados centígrados 86 °F y 63,5 °F.

a) $\left.\begin{array}{l}\text{Grados Fahrenheit } (y)\\ \text{Grados Centígrados } (x)\end{array}\right\}$ La recta pasa por (0, 32) y (100, 212).

$$m = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{9}{5}$$

Ecuación de la función: $y = 32 + \frac{9}{5}x$



b) • $x = 25 \;\rightarrow\; y = 32 + \frac{9}{5} \cdot 25 \;\rightarrow\; y = 77 \;\rightarrow\;$ 25 °C = 77 °F

• $x = 36{,}5 \;\rightarrow\; y = 32 + \frac{9}{5} \cdot 36{,}5 \;\rightarrow\; y = 97{,}7 \;\rightarrow\;$ 36,5 °C = 97,7 °F

• $x = 10 \;\rightarrow\; y = 32 + \frac{9}{5} \cdot 10 \;\rightarrow\; y = 50 \;\rightarrow\;$ 10 °C = 50 °F

c) • $y = 86 \;\rightarrow\; 86 = 32 + \frac{9}{5}x \;\rightarrow\; x = 30 \;\rightarrow\;$ 86 °F = 30 °C

• $y = 63{,}5 \;\rightarrow\; 63{,}5 = 32 + \frac{9}{5}x \;\rightarrow\; x = 17{,}5 \;\rightarrow\;$ 63,5 °F = 17,5 °C

PÁGINA 162

38 ▼▼▽ **En el recibo de la luz aparece esta información:**

CONSUMO: 1 400 kWh PRECIO DEL kWh: 0,2 €

a) ¿Cuánto cobrarán por la energía consumida?

b) Haz una gráfica y escribe la ecuación de la relación *consumo-coste*. Utiliza estas escalas:

Eje horizontal → 1 cuadradito = 100 kWh

Eje vertical → 1 cuadradito = 20 €

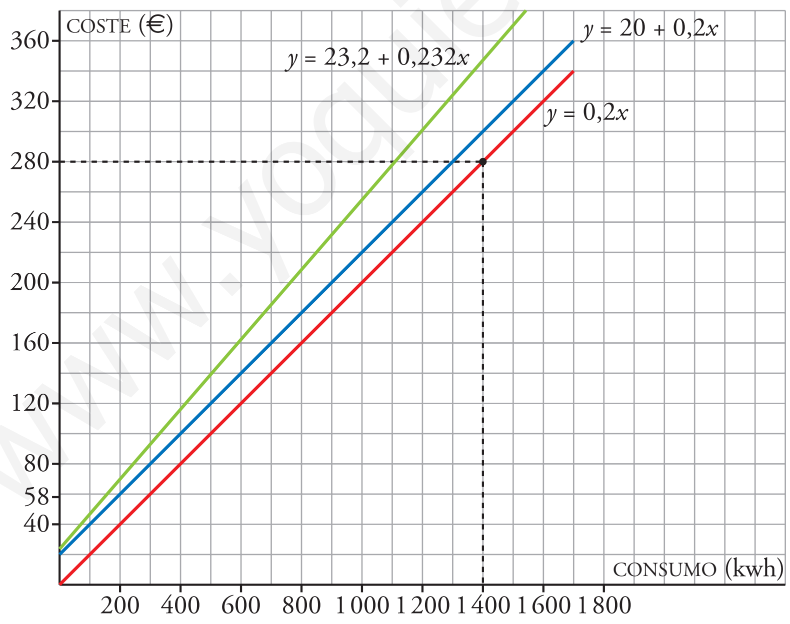
c) Si, además, nos cobran al mes 20 € por el alquiler del equipo, ¿cómo queda la relación *consumo-coste*? Represéntala junto a la anterior y escribe su ecuación.

d) ¿Qué transformación sufre el precio si añadimos el 18% de IVA? ¿Cómo se transforma el alquiler del equipo? Representa, junto a las otras, la gráfica de la función resultante y escribe su ecuación.

a) $1\,400 \cdot 0,2 = 280$ €

Por 1 400 kWh cobrarán 280 €.

b) $y = 0,2 \cdot x$



c) $y = 20 + 0,2x$

d) Coste de 1 kWh: $0,2 \cdot 1,16 = 0,232$ €

Coste del alquiler del equipo: $20 \cdot 1,16 = 23,2$ €

Ecuación: $y = 23,2 + 0,232 \cdot x$

Problemas "+"

39 ▼▼▼ **Un tornillo de 8 cm de longitud de rosca penetra 1,5 cm por cada tres vueltas que se le hace girar. Para colocar uno de estos tornillos en una viga de madera, se le ha dado, previamente, un martillazo, con el que ha penetrado 0,5 cm.**

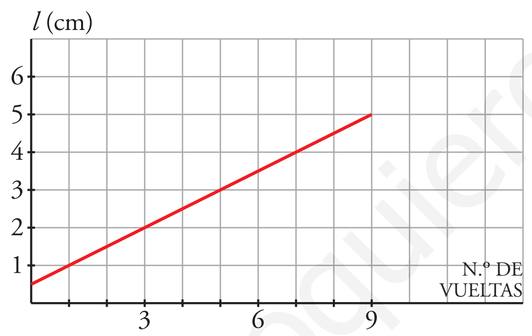
a) Haz una tabla que relacione el número de vueltas que se le da al tornillo, x, con la longitud que penetra, y. Construye la gráfica de dicha relación.

b) ¿Cuál es la expresión analítica? ¿Cuál es el paso de rosca del tornillo (longitud que penetra por cada vuelta? ¿Cuántas vueltas habrá que darle hasta que todo el tornillo esté hundido en la viga?

c) Supongamos que se ha seguido el mismo procedimiento para atravesar un listón de 5 cm de grosor. ¿Después de cuántas vueltas empezará el tornillo a asomar por el otro lado del listón?

a)

N.º DE VUELTAS (x)	0	3	6	9
LONGITUD QUE ENTRA (y)	0,5	2	3,5	5



b) $y = 0,5 + 05x \rightarrow$ En cada vuelta penetra 0,5 cm.

Estará totalmente hundido para un número de vueltas x tal que:

$7,5 = 0,5 + 0,5x \rightarrow x = 14$ vueltas

c) Después del martillazo quedan 4,5 cm de grosor por recorrer. Por tanto:

$4,5 = 0,5 + 0,5x \rightarrow x = 8$ vueltas

40 ▼▼▼ **Una empresa que fabrica detergente líquido debe decidir sobre dos tipos de grifos para llenar los envases con su producto. Los envases son de paredes rectas, de 40 cm de altura, y se llenan de forma uniforme.**

El grifo A comienza a verter líquido en el mismo instante en que se abre el mecanismo, y llena el envase en unos 20 segundos. Recibe el siguiente envase, se completa en 20 segundos, y así sucesivamente.

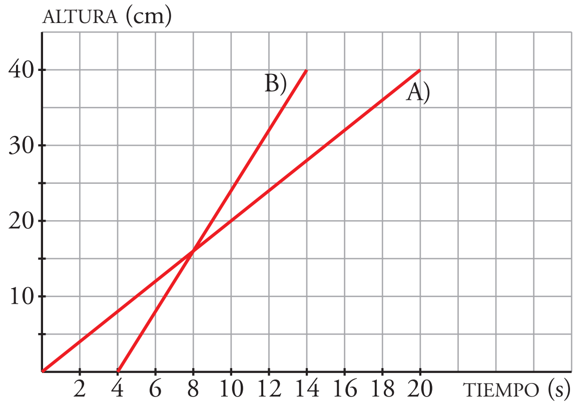
Cuando el grifo B recibe un envase, tarda 4 segundos en abrirse, y lo llena en unos 10 segundos. Llega otro envase, hay una pausa de 4 segundos y, de nuevo, 10 segundos hasta completarse.

a) Construye las gráficas que relacionan el tiempo de vertido, *t*, con la altura del líquido en el envase, *a*, para cada grifo, durante los 20 primeros segundos. ¿Cuáles son las expresiones analíticas para ambas relaciones?

b) ¿En qué momento los dos grifos consiguen la misma altura del líquido en los envases? ¿Qué altura es esa?

c) ¿Cuántos envases llena cada grifo por minuto? ¿Qué grifo es más rentable?

a)



Grifo A: $y = 2x$

Grifo B: Pasa por (4, 0) y (14, 40)

$m = \dfrac{40}{14-4} = 4 \rightarrow y = 0 + 4(x-4)$

$y = 4x - 16$

b) Tendrán la misma altura cuando $2t = 4t - 16$.

$t = 8$ (a los 8 segundos de abrirse el grifo A)

La altura será $y = 2 \cdot 8 = 16$ cm

c) El grifo A llena 3 envases por minuto $\left(\dfrac{60}{20} = 3\right)$

El grifo B llena 4 envases por minuto $\left(\dfrac{60}{14} = 4{,}28\right)$

Es más rentable el B.

41 ▼▼▼ **Juan quiere contratar una póliza a todo riesgo para su vivienda. Estudia dos ofertas.**

La compañía *A* le cobraría 400 € el primer año, con un descuento de 50 € por año durante los cinco siguientes y, a partir de ahí, la cuota sería fija.

La compañía *B* le cobraría 300 € el primer año, con un descuento de 25 € por año, hasta el cuarto y, a partir de este, no habría más reducciones.

Juan quiere investigar qué oferta le es más ventajosa para los próximos 10 años.

a) Construye las tablas que relacionan el tiempo transcurrido, *t*, con el coste de la póliza, *C*, para los próximos 10 años. Dibuja las gráficas para ambos casos, en los mismos ejes.

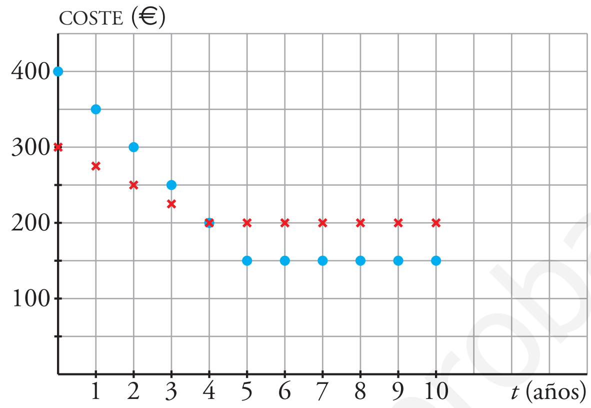
b) Encuentra la expresión analítica que relaciona *t* con *C* en ambos casos. ¿En qué momento se igualan ambas cuotas?

c) Calcula cuánto pagaría Juan durante los 10 primeros años en cada compañía. ¿Cuál debe elegir?

a)

t (años)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_A (€)	400	350	300	250	200	150	150	150	150	150	150

t (años)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_B (€)	300	275	250	225	200	200	200	200	200	200	200



b) $C_A = \begin{cases} 400 - 50t & \text{si} \quad 0 \le t \le 5 \\ 150 & \text{si} \quad t > 5 \end{cases}$

$C_B = \begin{cases} 300 - 25t & \text{si} \quad 0 \le t \le 4 \\ 200 & \text{si} \quad t > 4 \end{cases}$

La cuota es igual cuando $400 - 50t = 300 - 25t \rightarrow t = 4$ años.

A los 4 años.

c) En la compañía A pagará durante los 10 años 2 400 €.

En la compañía B pagará durante los 10 años 2 450 €.

Debe elegir la A.

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 163

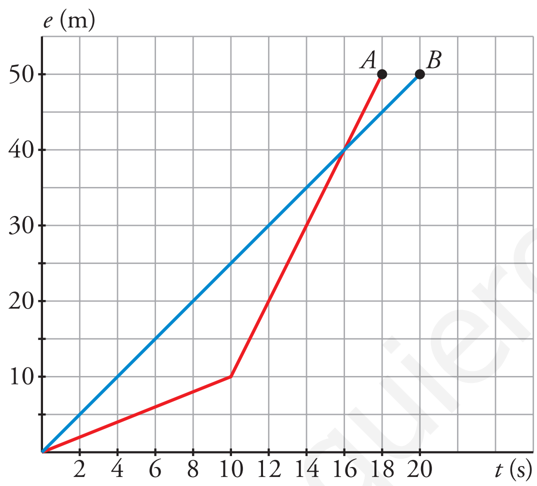
42 ▼▼▼ **En una prueba de natación, el campeón, *A*, ha cubierto los 50 metros en 18 segundos, mientras que el subcampeón, *B*, ha necesitado 20 segundos. Sin embargo, mientras *B* mantuvo siempre el mismo ritmo, para *A* la carrera tuvo dos fases. Salió muy mal, a un ritmo de un metro por segundo, y a partir de los 10 metros incrementó el ritmo de forma constante, llegando a alcanzar a *B* y ganando la carrera.**

a) Construye, en los mismos ejes, las gráficas que reflejan la relación entre el tiempo empleado, *t*, y la distancia recorrida, *d*, para ambos nadadores.

b) ¿Cuáles son las expresiones analíticas de estas relaciones? Ten en cuenta que para *A* tienes que distinguir entre si *t* está por encima o por debajo de 10 segundos.

c) ¿A qué distancia de la salida alcanzó *A* a *B*? ¿Cuántos segundos de carrera llevaban hasta ese momento?

a)



b) $B \to y = \frac{50}{20}t \to y = 2{,}5t$

$$A \to y = \begin{cases} 10t & \text{si} \quad 0 \le t \le 10 \\ 5t - 40 & \text{si} \quad 10 < t \le 18 \end{cases}$$

La recta *A* pasa por (10, 10) y (18, 50). Su pendiente es:

$$m = \frac{50-10}{18-10} = \frac{40}{8} = 5$$

c) Punto de alcance: $2{,}5t = 5t - 40 \to t = 16$ s

A alcanza a *B* a los 16 segundos; habrán recorrido 40 m.

43 ▼▽▽ **Al nivel del mar, el agua hierve a 100 °C (punto de ebullición, PE). A medida que se asciende, el PE disminuye a razón de una décima de grado por cada 100 metros de elevación.**

a) Escribe la expresión analítica de la función que relaciona *a* (altura, en metros) con *T* (temperatura de ebullición). Construye la gráfica.

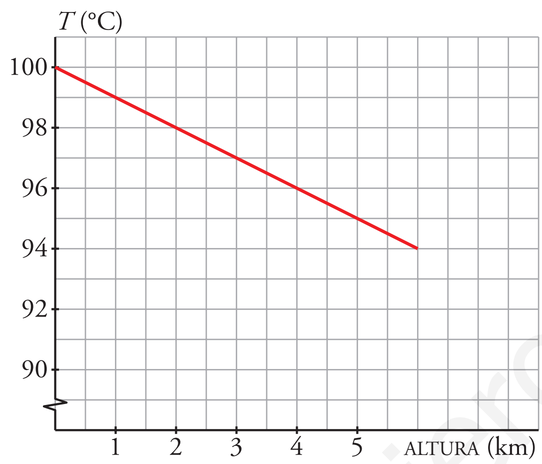
b) ¿A qué altura hervirá el agua en Ciudad de México (2 000 m de altura)? ¿A qué altitud estaremos si el agua hierve a 90 °C?

c) Juan es montañero, y sus padres viven en una ciudad costera. Ha coronado el Everest (8 850 m) y, en contacto por radio, quiere celebrar la hazaña con ellos, tomando todos una taza de té.

Se sabe que, a la misma temperatura ambiente (unos 20 ºC), y aplicando el mismo tipo e intensidad de calor, el agua para una taza de té va aumentando su temperatura, hasta llegar al PE, a un ritmo de 16 ºC por minuto.

¿Cuál será el PE del agua para la taza de té de Juan? ¿Cuánto tiempo les llevará prepararla en cada sitio?

a) $T = 100 - \frac{0{,}1}{100}a \;\rightarrow\; T = 100 - 0{,}001a$



b) Ciudad de México: $T = 100 - 0{,}001 \cdot 2\,000 = 98º$

Si el agua hierve a 90º, la altura será:

$$90 = 100 - 0{,}001 \cdot a \;\rightarrow\; a = 10\,000 \text{ m} = 10 \text{ km}$$

c) Punto de ebullición en el Everest: $T = 100 - 0{,}001 \cdot 8\,850 = 91{,}15º$

Tiempo de preparación en el Everest: $(91{,}15 - 20) : 16 = 4{,}45$ min $\rightarrow$ 4' 26''

Tiempo de preparación en la costa: $(100 - 20) : 16 = 5$ min

Reflexiona sobre la teoría

44 ▼▽▽ **Pon un ejemplo de una función de proporcionalidad, halla tres puntos de ella y comprueba que el cociente entre la ordenada y la abscisa es constante. ¿Cómo se llama esa constante?**

Respuesta abierta.

La constante se llama "constante de proporcionalidad".

45 ▼▽▽ **En la función $y = mx + n$, ¿cómo debe ser m para que la función sea decreciente?**

Para que sea decreciente m tiene que ser negativa.

46 ▼▽▽ **Representa cada una de estas rectas, e indica en cada caso si la gráfica corresponde a una función o no:**

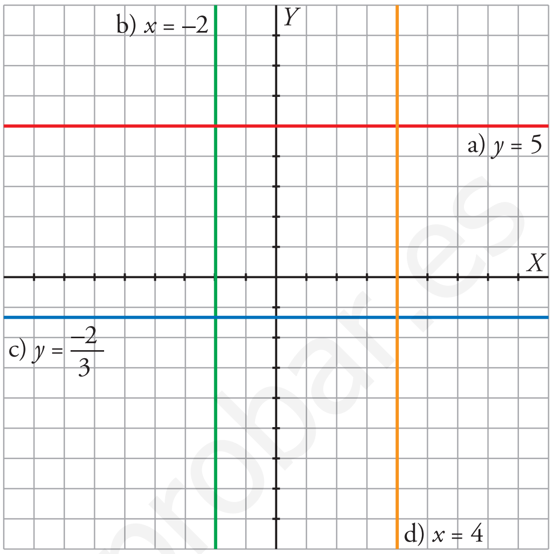
a) $y = 5$ **b)** $x = -2$ **c)** $3y + 2 = 0$ **d)** $x - 4 = 0$

a) Sí, es una función constante.

b) No es una función.

c) Sí, es una función constante.

d) No es una función.



47 ▼▼▽ **Escribe la ecuación de una recta paralela al eje vertical y que pase por el punto (3, 5).**

Paralela a $x = 0$, pasa por el punto (3, 5).

Ecuación de la recta: $x = 3$.

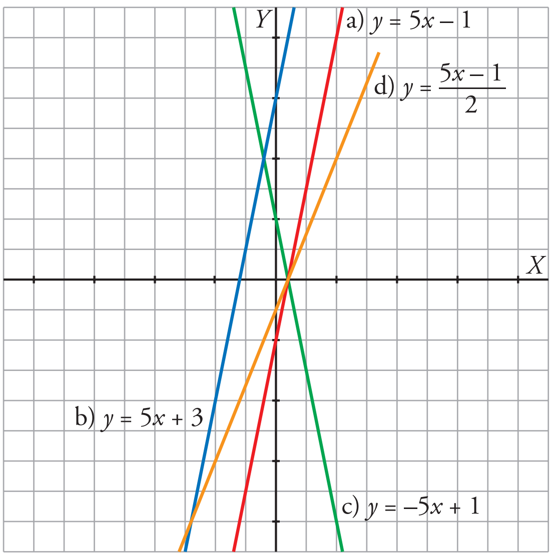
48 ▼▼▽ **Sean las rectas:**

a) $y = 5x - 1$ **b)** $5x - y + 3 = 0$ **c)** $y = -5x + 1$ **d)** $y = \frac{5x - 1}{2}$

Compara sus pendientes y di, sin dibujarlas, cuáles son paralelas.

Después, represéntalas gráficamente y comprueba tus respuestas.

Son paralelas las rectas a) y b).



49 ▼▼▽ **Justifica si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:**

a) La recta $x = 5$ es paralela al eje de abscisas.

b) La recta $x - 2 = 0$ es paralela al eje de ordenadas.

c) La recta $y = -4$ es paralela al eje de abscisas.

d) Las rectas $y = 3x - 2$ e $y = 2x - 3$ son paralelas.

a) Falsa. Porque $x = 5$ es paralela al eje de ordenadas.

b) Verdadera.

c) Verdadera.

d) Falsa. Porque la pendiente de la primera recta es 3 y la pendiente de la segunda recta es 2.

50 ▼▼▽ **Halla, sin representar las rectas, el punto de corte con el eje X y el punto de corte con el eje Y de cada una de estas rectas:**

a) $x - y = 4$ **b)** $3x - y = 6$ **c)** $y = \frac{x-2}{4}$ **d)** $y = -\frac{2}{3}x + 1$

a) • $x - 0 = 4 \rightarrow x = 4$

Punto de corte con el eje X: $(4, 0)$

• $0 - y = 4 \rightarrow y = -4$

Punto de corte con el eje Y: $(0, -4)$

b) • $3x - 0 = 6 \rightarrow x = 2$

Punto de corte con el eje X: $(2, 0)$

• $3 \cdot 0 - y = 6 \rightarrow y = -6$

Punto de corte con el eje Y: $(0, -6)$

c) • $0 = \frac{x-2}{4} \rightarrow x = 2$

Punto de corte con el eje X: $(2, 0)$

• $y = \frac{0-2}{4} \rightarrow y = \frac{-1}{2}$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, \frac{-1}{2}\right)$

d) • $0 = \frac{-2}{3}x + 1 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

Punto de corte con el eje X: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

• $y = \frac{-2}{3} \cdot 0 + 1 \rightarrow y = 1$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 1)$

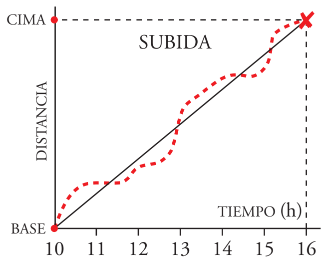
PÁGINA 164

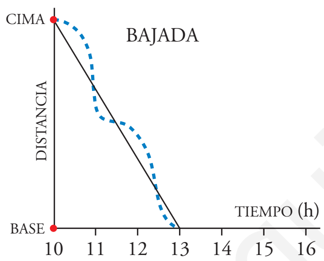
▼ Reflexiona

Subir y bajar

Un montañero inicia la ascensión a un pico a las 10 de la mañana y llega a la cima a las 4 de la tarde. Duerme en el refugio y, al día siguiente, también a las 10 h, inicia el descenso, llegando a la base a la una de la tarde.

¿Crees que hay algún punto del camino por el que ha pasado en la bajada a la misma hora que en la subida? ¿A qué hora ocurrió tal cosa, suponiendo que ha bajado y subido a velocidades constantes?



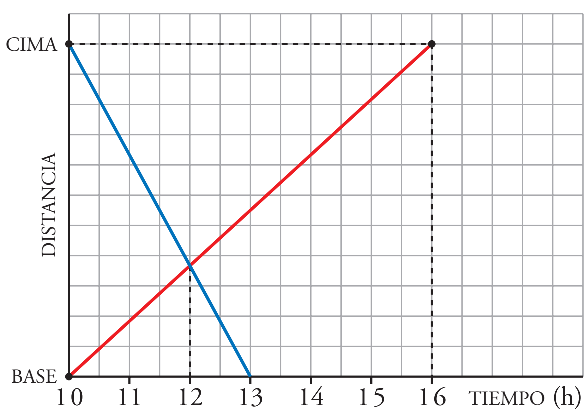


Observa las gráficas y, si aún no lo tienes claro, dibuja ambas sobre los mismos ejes, suponiendo que han sido dos montañeros haciendo caminos inversos en el mismo día.

Al subir, a las 12 h el montañero ha recorrido $\frac{1}{3}$ del camino.

Al bajar, a las 12 h ha recorrido $\frac{2}{3}$ del camino, y le falta $\frac{1}{3}$ del camino para llegar a la falda de la montaña.

Por tanto, pasa por el mismo lugar a la misma hora, a las 12 h.



Soluciones a “Y para terminar…”

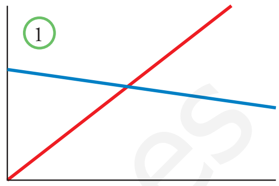
▼ Piensa y decide

¿Cuál es cuál?

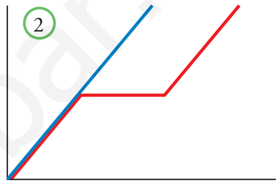
Cada gráfica representa dos vehículos que van a velocidad constante. Así, la función que relaciona la distancia y el tiempo, en cada vehículo, es una recta.

Asocia cada enunciado con una gráfica:

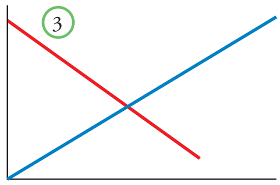
A. Un coche partió y una moto salió en su persecución.



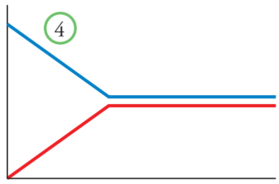
B. Un coche va, otro viene, y chocan.



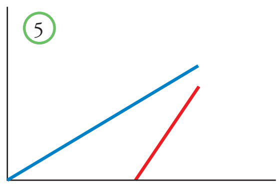
C. Un coche va, un camión viene, y se cruzan.



D. Un coche se acerca y otro se aleja.



E. Dos autobuses salen juntos y uno de ellos hace un descanso.

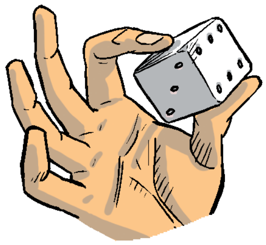


A ↔ 5 B ↔ 4 C ↔ 1 D ↔ 3 E ↔ 2

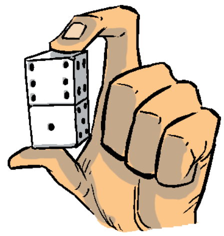
8 Soluciones a “Y para terminar…”

PÁGINA 165

Piensa y generaliza

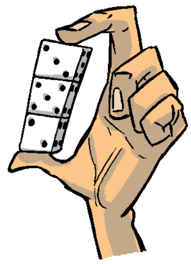


Este dado tiene dos caras ocultas y cuatro a la vista. ¿Cuántos puntos suman las caras ocultas?

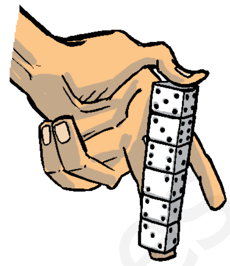


Aquí hay cuatro caras ocultas.

¿Cuántos puntos suman esas cuatro caras?



¿Y aquí?

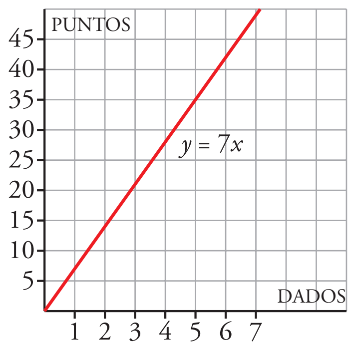


¿Y aquí?

¿Y si hubiera x dados?

El número de puntos de las caras ocultas está en función del número de dados. Escribe y representa una función que relacione el número de dados, x, con el de puntos en las caras ocultas, y.

- Las caras opuestas de un dado siempre suman 7 puntos.
- Según la respuesta anterior, $7 \cdot 2 = 14$ puntos.
- $7 \cdot 3 = 21$ puntos.
- $7 \cdot 6 = 42$ puntos.
- Según la serie anterior, si hubiera x dados las caras ocultas sumarían $7 \cdot x$ puntos.
- $y = 7x$



8 Soluciones a la Autoevaluación

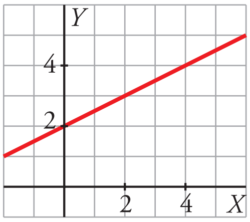
PÁGINA 165

¿Reconoces las funciones lineales y las distingues de las que no lo son?

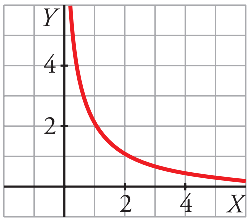
1 **Di cuáles de las siguientes fórmulas y gráficas corresponden a funciones lineales:**

a) $y = 3 - 2x$ **b)** $y = \frac{x}{5}$ **c)** $y = 7$ **d)** $y = x^2 - 1$

e)



f)



Son funciones lineales a), b), c) y e).

¿Conoces el significado de la pendiente de una recta y sabes hallarla en diferentes casos?

2 **Di cuál es la pendiente de las funciones lineales del ejercicio 1.**

a) $m = -2$ b) $m = \frac{1}{5}$ c) $m = 0$ e) $m = \frac{1}{2}$

3 **¿Cuál es la pendiente de la recta $3x - 2y + 5 = 0$?**

$m = \frac{3}{2}$

¿Sabes escribir la ecuación de una recta y representar una recta dada por su ecuación?

4 **Halla la ecuación de las siguientes rectas:**

***r*: pasa por $P(-3, 2)$ y su pendiente es 3/2.**

***s*: pasa por los puntos $A(5, 0)$ y $B(2, -3)$.**

***t*: La recta e) del ejercicio 1.**

r: $y = 2 + \frac{3}{2}(x + 3) \rightarrow 3x - 2y + 13 = 0$

s: $m = \frac{-3 - 0}{2 - 5} = \frac{-3}{-3} = 1 \rightarrow y = 0 + 1(x - 5) \rightarrow y = x - 5$

t: Pasa por (0, 2) y (4, 4) $\rightarrow m = \frac{4 - 2}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$y = 2 + \frac{1}{2}x \rightarrow 2y = 4 + x \rightarrow x - 2y + 4 = 0$

¿Sabes resolver problemas utilizando las funciones lineales?

5 **La tarifa de los taxis de una ciudad se calcula mediante la fórmula $C = 2 + 1{,}8x$ (C, en €; x, en km).**

a) ¿Cuánto pagaremos por un recorrido de 5 km?

b) ¿Cuál es la pendiente de esa función? Explica su significado.

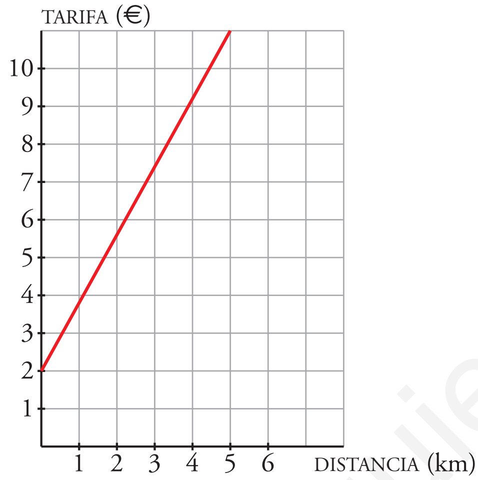
c) Represéntala gráficamente.

a) $C = 2 + 1{,}8 \cdot 5 = 11$ €

b) $m = 1{,}8$

Cada kilómetro recorrido aumenta el coste en 1,8 €.

c)



6 **La temperatura de hoy es de 20 ºC, y vamos a hacer una excursión en globo. Sabemos que la temperatura del aire desciende, aproximadamente, 6 ºC por cada kilómetro de ascensión.**

a) ¿Qué temperatura habrá si ascendemos 3 km?

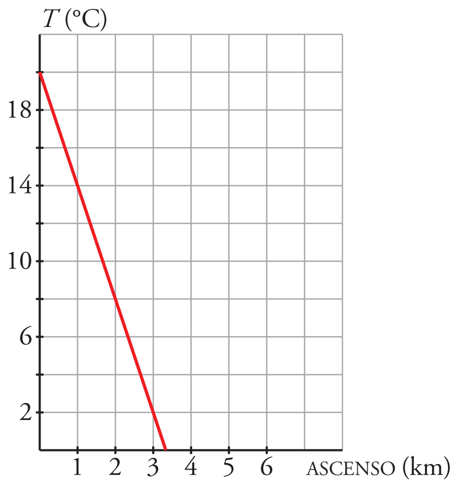
b) Representa la función *altura* → *temperatura* y escribe su expresión analítica.

a) $20 - 6 \cdot 3 = 2^{\circ}$

b) Pasa por (0, 20) y (3, 2).

$$m = \frac{2 - 20}{3 - 0} = -3$$

$y = 20 - 3x$



7 El recibo de la luz de un mes en el que consumimos 120 kWh fue de 34 €. Otro mes, el consumo fue 250 kWh, y el importe de 60 €.

a) Escribe la ecuación de la función que relaciona los kWh consumidos con el importe que habría que pagar.

b) ¿Cuánto pagaremos si consumimos 400 kWh?

a) Puntos (120, 34) y (250, 60).

Pendiente: $m = \frac{60 - 34}{250 - 120} = \frac{26}{130} = 0,2$

$y = 34 + 0,2(x - 120) \rightarrow y = 0,2x + 7$

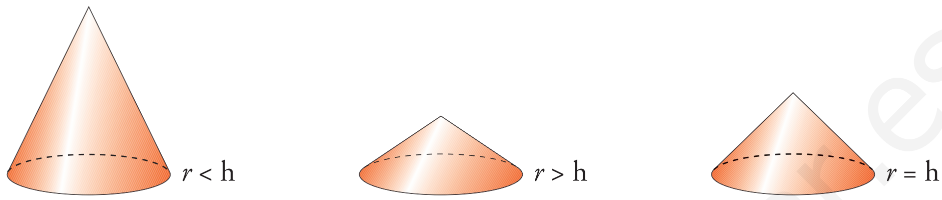
b) $y = 0,2 \cdot 400 + 7 = 87$ €

PÁGINA 169

PARA EMPEZAR…

▼ Cónicas anteriores a Apolonio

■ **Observa estos conos, similares a los de arriba, pero no ordenados de igual manera:**



¿Qué cónica obtendrías en cada caso si las cortases con un plano perpendicular a la generatriz? Puedes experimentarlo construyendo conos de plastilina y cortándolos con un cuchillo o un cúter.

Con el primer cono, $r < h$, se obtendría una elipse.

Con el segundo cono, $r > h$, se obtendría una hipérbola.

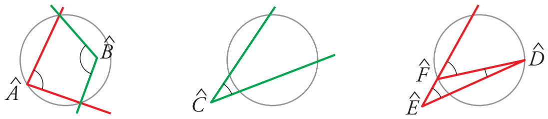
Con el tercer cono, $r = h$, se obtendría una parábola.

■ **Compara estas definiciones con las de la página 178.**

9 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

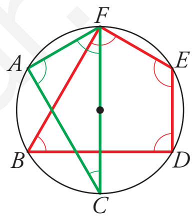
PÁGINA 170

1 **Di cuáles de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{E}$ y $\hat{F}$ están inscritos en la correspondiente circunferencia.**



Están inscritos en la circunferencia los ángulos $\hat{A}$, $\hat{F}$ y $\hat{D}$, ya que son los únicos que tienen el vértice sobre la circunferencia y sus lados la cortan.

2 **Di, razonadamente, el valor de estos ángulos:**



$$\widehat{FAC},\ \widehat{ACF},\ \widehat{AFC},\ \widehat{FBD},\ \widehat{BDE},\ \widehat{DEF},\ \widehat{BFE}$$

La circunferencia está dividida en 6 arcos iguales.

La medida de cada uno de ellos es $\dfrac{360°}{6} = 60°$.

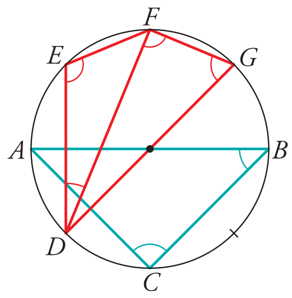
$\widehat{FAC} = \dfrac{3 \cdot 60°}{2} = 90°$ $\widehat{ACF} = \dfrac{60°}{2} = 30°$ $\widehat{AFC} = \dfrac{2 \cdot 60°}{2} = 60°$

$\widehat{FBD} = \dfrac{2 \cdot 60°}{2} = 60°$ $\widehat{BDE} = \dfrac{3 \cdot 60°}{2} = 90°$ $\widehat{DEF} = \dfrac{4 \cdot 60°}{2} = 120°$

$\widehat{BFE} = \dfrac{3 \cdot 60°}{2} = 90°$

9 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 171



3 **¿Cuál es la medida angular de cada uno de los ocho arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia? Di el valor de los ángulos $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{FDE}$, $\widehat{DEF}$, $\widehat{DFG}$, $\widehat{FGD}$.**

La medida angular de cada uno de los ocho arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia es $\frac{360°}{8} = 45°$.

$\widehat{ABC} = \frac{2 \cdot 45°}{2} = 45°$ $\quad \widehat{DFG} = \frac{4 \cdot 45°}{2} = 90°$ $\quad \widehat{ACB} = \frac{4 \cdot 45°}{2} = 90°$

$\widehat{FDE} = \frac{45°}{2} = 22°\ 30'$ $\quad \widehat{FGD} = \frac{3 \cdot 45°}{2} = 67°\ 30'$ $\quad \widehat{DEF} = \frac{5 \cdot 45°}{2} = 112°\ 30'$

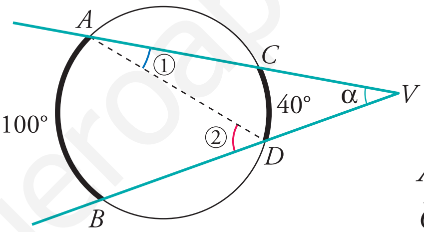
4 **Halla:**

a) $\widehat{CAD}$ **= ①**

b) $\widehat{ADB}$ **= ②**

c) $\widehat{ADV}$

d) $\widehat{AVD}$ **= α**



$\overset{\frown}{AB} = 100°$

$\overset{\frown}{CD} = 40°$

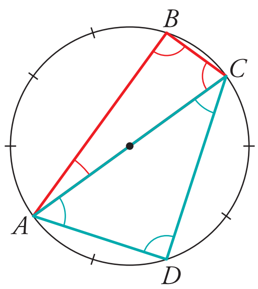
a) $\widehat{CAD} = ① = \frac{40°}{2} = 20°$

b) $\widehat{ADB} = ② = \frac{100°}{2} = 50°$

c) $\widehat{ADV} = 180° - ② = 180° - 50° = 130°$

d) $\widehat{AVD} = 180° - ① - 130° = 180° - 20° - 130° = 30°$

5 **¿Cuál es la medida angular de cada uno de los diez arcos iguales? Halla el valor de los ángulos $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAD}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{ACD}$.**



La medida angular de cada uno de los diez arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia es $\frac{360°}{10} = 36°$.

$\widehat{CAB} = \frac{36°}{2} = 18°$ $\quad \widehat{CAD} = \frac{3 \cdot 36°}{2} = 54°$ $\quad \widehat{ABC} = \frac{180°}{2} = 90°$

$\widehat{ADC} = \frac{180°}{2} = 90°$ $\quad \widehat{BCA} = \frac{4 \cdot 36°}{2} = 72°$ $\quad \widehat{ACD} = \frac{2 \cdot 36°}{2} = 36°$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

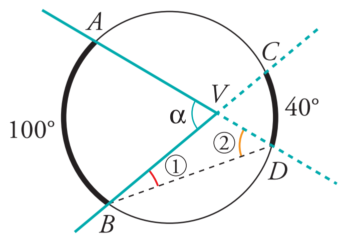
6 **Halla:**

a) $\widehat{CBD}$ = ①

b) $\widehat{ADB}$ = ②

c) $\widehat{BVD}$

d) $\widehat{AVB} = \alpha$



$\overset{\frown}{AB} = 100°$

$\overset{\frown}{CD} = 40°$

a) $\widehat{CBD}$ = ① $= \dfrac{40°}{2} = 20°$

b) $\widehat{ADB}$ = ② $= \dfrac{100°}{2} = 50°$

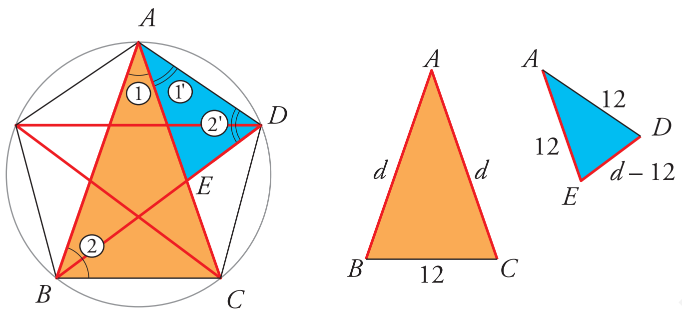
c) $\widehat{BVD}$ = 180° – ① – ② = 180° – 20° – 50° = 110°

d) $\widehat{AVB} = \alpha = 180° - 110° = 70°$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

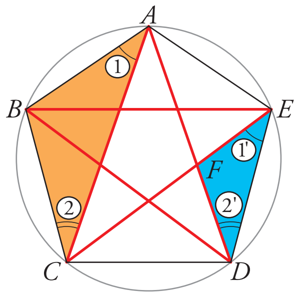
PÁGINA 173

1 **Repite el razonamiento del ejercicio resuelto, pero suponiendo ahora que el lado del pentágono mide 12 cm. ¿Cuánto mide su diagonal?**



$$\frac{d}{12} = \frac{12}{d-12} \rightarrow d^2 - 12d = 144 \rightarrow d = 6 + 6\sqrt{5} = 19{,}4 \text{ cm}$$

2 **Prueba que los triángulos *ABC* y *EFD* del pentágono de arriba son semejantes. A partir de esa semejanza, vuelve a obtener la relación entre *d* y *l*.**

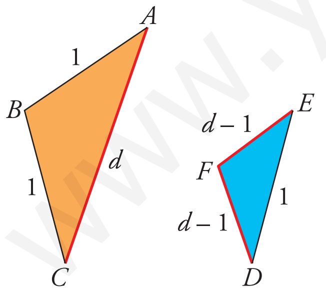


① = ①' porque están inscritos en la circunferencia y abarcan arcos iguales.

② = ②' por el mismo motivo.

Por tanto, los triángulos *ABC* y *EFD* son semejantes y sus lados son proporcionales.

Tomamos como unidad el lado del pentágono, $l = 1$. Además, $\overline{EF} = \overline{FD} = d - 1$.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} \rightarrow \frac{1}{d-1} = \frac{d}{1} \rightarrow d^2 - d = 1 \rightarrow d^2 - d - 1 = 0$$

$$d = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Tomamos la solución positiva.

La relación pedida es: $\frac{d}{l} = \frac{d}{1} = d = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 174

1 En los siguientes triángulos rectángulos, se dan dos catetos y se pide la hipotenusa (si su medida no es exacta, dala con una cifra decimal):

a) 37 cm y 45 cm

b) 16 cm y 30 cm

a = hipotenusa

a) $a = \sqrt{37^2 + 45^2} = \sqrt{3\,394} \approx 58{,}3$ cm

b) $a = \sqrt{16^2 + 30^2} = \sqrt{1\,156} = 34$ cm

2 En los siguientes triángulos rectángulos, se da la hipotenusa y un cateto, y se pide el otro cateto (exactamente o con una cifra decimal):

a) 45 cm y 37 cm

b) 39 cm y 15 cm

c = cateto que falta

a) $c = \sqrt{45^2 - 37^2} = \sqrt{656} \approx 25{,}6$ cm

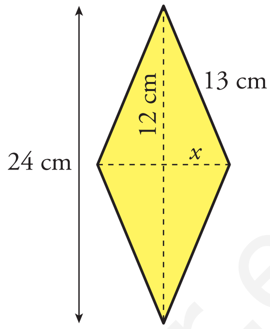
b) $c = \sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{1\,296} = 36$ cm

PÁGINA 175

3 **De un rombo conocemos una diagonal, 24 cm, y el lado, 13 cm. Halla la otra diagonal.**

$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ cm

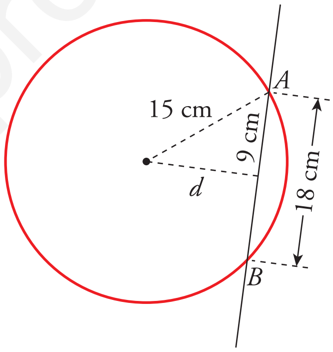
La otra diagonal mide $2 \cdot 5 = 10$ cm.



4 **Una circunferencia tiene un radio de 15 cm. Una recta, *r*, corta a la circunferencia en dos puntos, *A* y *B*. La distancia entre *A* y *B* es de 18 cm. ¿Cuál es la distancia del centro de la circunferencia a la recta?**

$d = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$ cm

La distancia del centro de la circunferencia a la recta es 12 cm.



5 **Averigua cómo son los triángulos de lados:**

a) 7 cm, 8 cm, 11 cm

b) 11 cm, 17 cm, 15 cm

c) 34 m, 16 m, 30 m

d) 65 m, 72 m, 97 m

a) $7^2 + 8^2 = 113$; $11^2 = 121$

Como $11^2 > 7^2 + 8^2$, entonces el triángulo es obtusángulo.

b) $11^2 + 15^2 = 346$; $17^2 = 289$

Como $17^2 < 11^2 + 15^2$, entonces el triángulo es acutángulo.

c) $16^2 + 30^2 = 1\,156$; $34^2 = 1\,156$

Como $34^2 = 16^2 + 30^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

d) $65^2 + 72^2 = 9\,409$; $97^2 = 9\,409$

Como $97^2 = 65^2 + 72^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

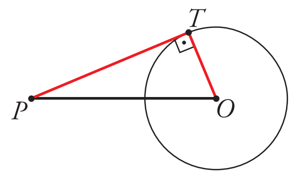
Soluciones a las actividades de cada epígrafe

6 **Halla el radio de la circunferencia sabiendo que:**

$\overline{OP} = 39$ cm

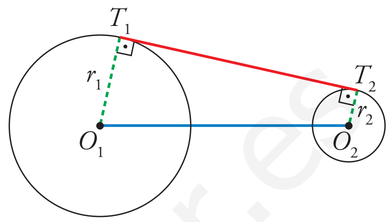
$\overline{PT} = 36$ cm

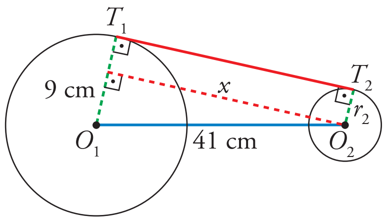
$r = \sqrt{39^2 - 36^2} = \sqrt{225} = 15$ cm



7 $r_1 = 15$ **cm,** $r_2 = 6$ **cm,** $\overline{O_1O_2} = 41$ **cm**

Halla la longitud del segmento T_1T_2**.**





La longitud del segmento T_1T_2 es igual que x:

$x = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1\,600} = 40$ cm

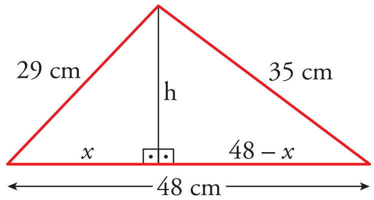
Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 176

1 **Averigua si el triángulo de lados 29 cm, 35 cm y 48 cm es rectángulo, acutángulo u obtusángulo. Halla la longitud de la altura sobre el lado mayor.**

$29^2 + 35^2 = 2\,066$; $48^2 = 2\,304$

Como $48^2 > 29^2 + 35^2$, el triángulo es obtusángulo.



Aplicamos el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + h^2 = 29^2 \\ (48 - x)^2 + h^2 = 35^2 \end{array}\right\} \text{Restando: } x^2 - (48 - x)^2 = 29^2 - 35^2$$

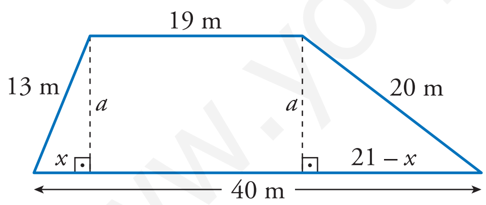
Se resuelve la ecuación y se obtiene $x = 20$ cm.

Calculamos h:

$20^2 + h^2 = 29^2 \rightarrow h = 21$ cm

La altura sobre el lado mayor mide 21 cm.

2 **Los lados de un trapecio miden 13 m, 20 m, 19 m y 40 m. Los dos últimos son paralelos. Halla la altura del trapecio.**



Aplicamos el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + x^2 = 13^2 \\ a^2 + (21 - x)^2 = 20^2 \end{array}\right\}$$

Restando: $x^2 - (21 - x)^2 = 13^2 - 20^2$

Se resuelve la ecuación y se obtiene $x = 5$ m.

Ahora se obtiene el valor de a: $a^2 + 5^2 = 13^2 \rightarrow a = 12$ m

La altura del trapecio mide 12 m.

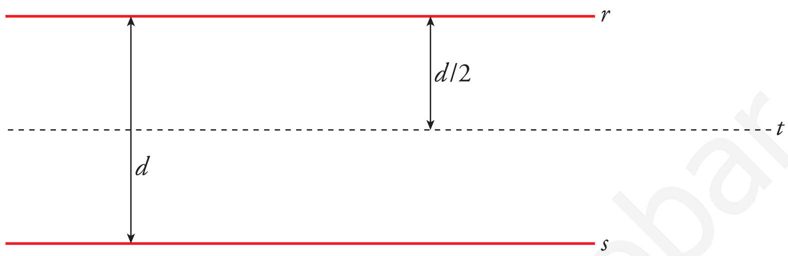
9 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 177

1 **Define como lugar geométrico una circunferencia de centro C y radio 8 cm.**

La circunferencia de centro C y radio 8 cm es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a C es 8 cm: $\overline{CP} = 8$ cm.

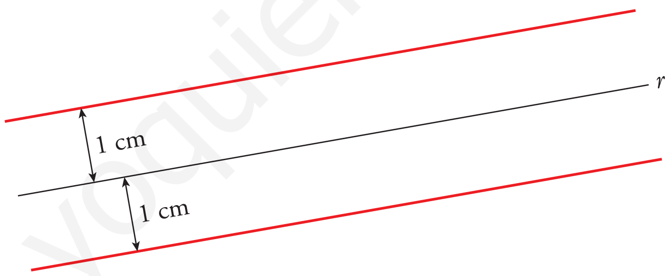
2 **Dadas dos rectas paralelas, r y s, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambas? Dibújalo.**



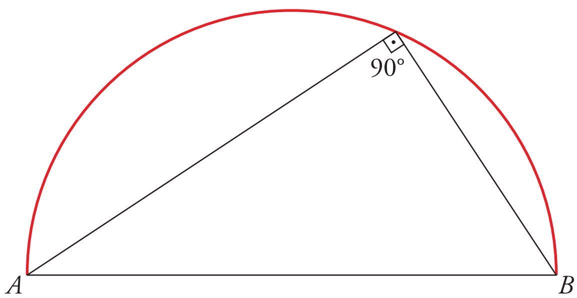
La recta t es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas r y s.

A la recta t se la llama **paralela media** a r y s.

3 **Dibuja en negro una recta r. Dibuja en rojo el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a r es 1 cm. (ATENCIÓN: son dos rectas).**



4 **Dibuja una circunferencia de diámetro AB. Defínela como lugar geométrico (arco capaz de 90°).**



La semicircunferencia de diámetro AB (el arco rojo) es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve el segmento AB bajo un ángulo de 90°. Se llama arco capaz de 90° para el segmento AB.

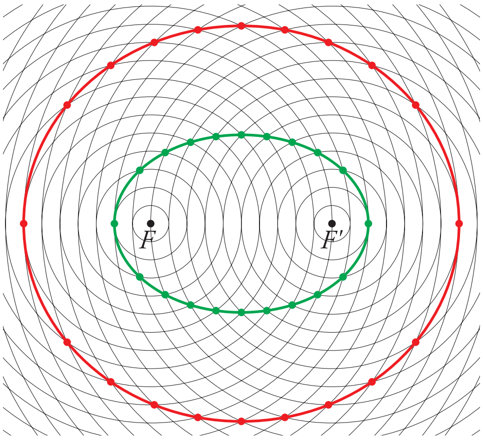
9 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

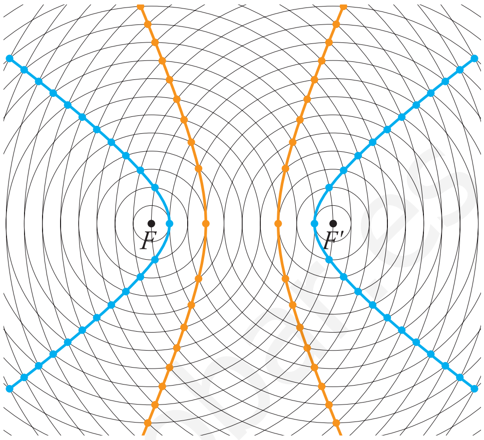
PÁGINA 179

1 **Toma una trama como la del ejercicio resuelto 1 y dibuja en ella:**

a) Dos elipses con $d = 14$ y $d = 24$.

b) Dos hipérbolas con $d = 8$ y $d = 4$.

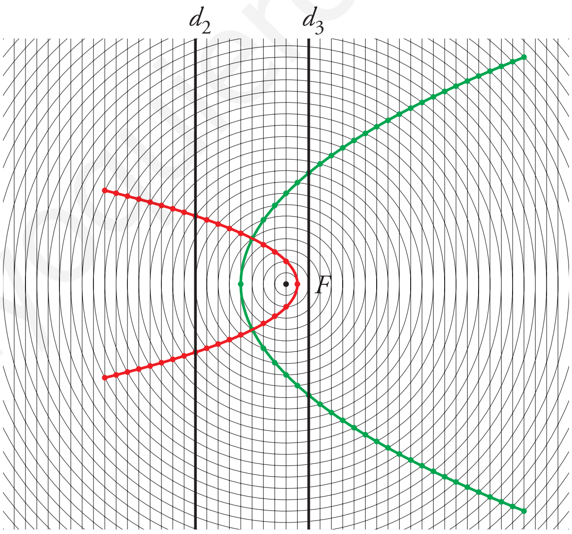




2 **Toma una trama como la del ejercicio resuelto 2 y dibuja en ella:**

a) Una parábola de foco F y directriz d_2.

b) Una parábola de foco F y direcctriz d_3.



Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 180

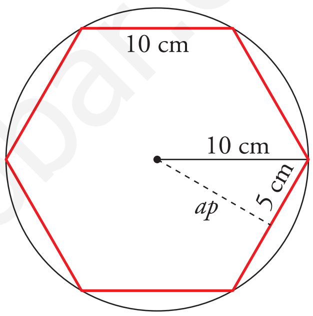
1 Halla el área de un triángulo cuyos lados miden 10 m, 17 m y 21 m.

Aplicamos la fórmula de Herón:

Perímetro $= p = 10 + 17 + 21 = 48$ m; $s = \frac{48}{2} = 24$ m

$A = \sqrt{24 \cdot (24 - 10) \cdot (24 - 17) \cdot (24 - 21)} = \sqrt{7\,056} = 84 \text{ m}^2$

2 Halla el área del hexágono regular en el que cada uno de sus lados mide 10 cm.

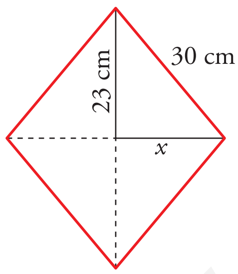


Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar la apotema.

$ap = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8{,}66$ cm

$A = \frac{10 \cdot 6 \cdot 8{,}66}{2} = 259{,}8 \text{ cm}^2$

3 Halla el área de un rombo de lado 3 dm, sabiendo que una diagonal mide 46 cm.



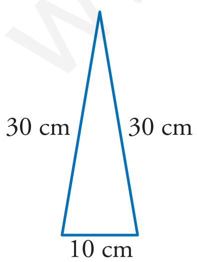
Lado = 3 dm = 30 cm

$x = \sqrt{30^2 - 23^2} = \sqrt{371} \approx 19{,}26$ cm

La otra diagonal mide $2 \cdot 19{,}26 = 38{,}52$ cm

$A = \frac{46 \cdot 38{,}52}{2} = 885{,}96 \text{ cm}^2$

4 Dos de los lados de un triángulo isósceles miden 30 cm y 13 cm. Halla su área.



Los lados iguales del triángulo isósceles miden 30 cm, y el otro lado, 10 cm.

No puede ser de otra forma, porque si los lados iguales miden 10 cm el otro no podría medir 30 cm.

$(10 + 10 = 20 < 30)$.

Aplicamos la fórmula de Herón:

$p = 30 \cdot 2 + 10 = 70$ cm

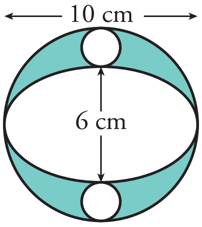
$s = 35$ cm

$A = \sqrt{35 \cdot (35 - 30)^2 \cdot (35 - 10)} \approx 147{,}9 \text{ cm}^2$

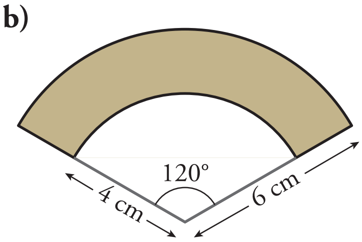
PÁGINA 181

1 Halla el área de la parte coloreada en las figuras siguientes:

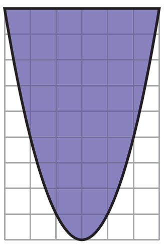
a)



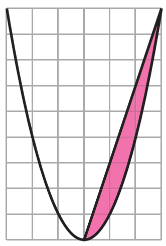
b)



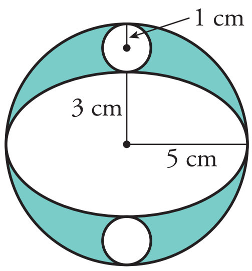
c)



d)



a)



$A_{\text{CÍRCULO GRANDE}} = \pi \cdot 5^2 \approx 78{,}54 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 1^2 \approx 3{,}14 \text{ cm}^2$

$A_{\text{ELIPSE}} = \pi \cdot 5 \cdot 3 \approx 47{,}12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 78{,}54 - 2 \cdot 3{,}14 - 47{,}12 = 25{,}14 \text{ cm}^2$

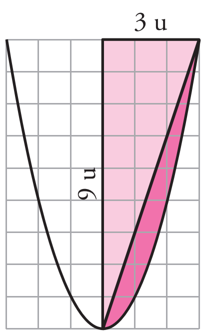
b) $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 120°}{360°} - \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 120°}{360°} \approx 20{,}94 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{2}{3} \cdot 6 \cdot 9 = 36 \text{ u}^2$

d) $A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{3 \cdot 9}{2} = 13{,}5 \text{ u}^2$

$A_{\text{SECTOR PARÁBOLA}} = 36 \text{ u}^2$ (según el ejercicio anterior)

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{A_{\text{SECTOR PARÁBOLA}}}{2} - A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{36}{2} - 13{,}5 = 4{,}5 \text{ u}^2$



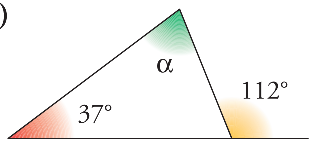
PÁGINA 182

Practica

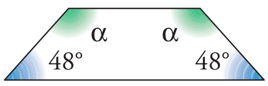
Ángulos

1 ▼▽▽ **Halla el valor del ángulo α en cada uno de estos casos:**

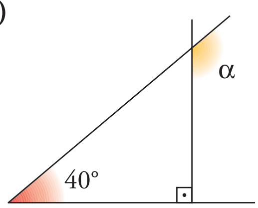
a)



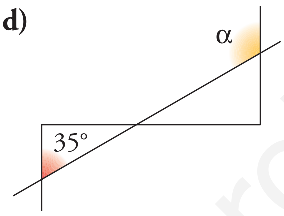
b)



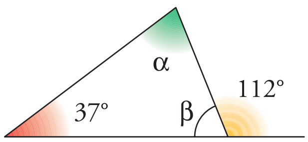
c)



d)



a)

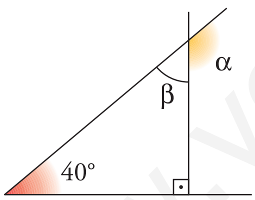


$\beta = 180° - 112° = 68°$

$\alpha = 180° - 37° - 68° = 75°$

b) $2\alpha = 360° - 48° \cdot 2 \;\rightarrow\; \alpha = 132°$

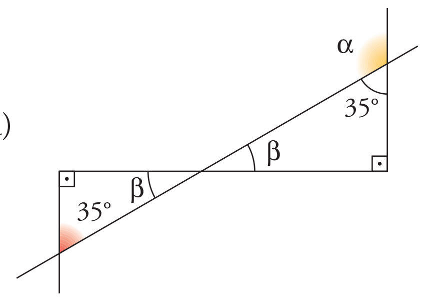
c)



$\beta = 180° - 90° - 40° = 50°$

$\alpha = 180° - 50° = 130°$

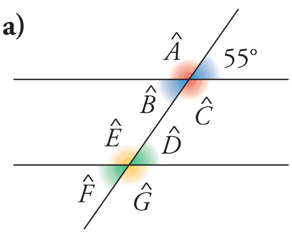
d)



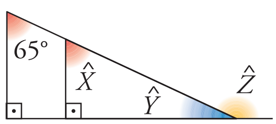
$\alpha = 180° - 35° = 145°$

2 ▼▽▽ **Calcula la medida de los ángulos desconocidos.**

a)



b)



a) $\hat{B} = \hat{D} = \hat{F} = 55°$

$\hat{C} = \hat{A} = \hat{G} = \hat{E} = 180° - 55° = 125°$

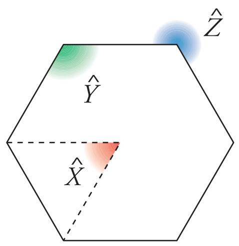
b) $\hat{X} = 65°$

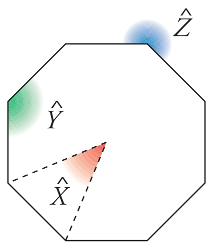
$\hat{Y} = 180° - 90° - 65° = 25°$

$\hat{Z} = 180° - 25° = 155°$

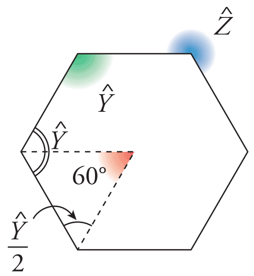
3 ▼▽▽ Resuelto en el libro del alumno.

4 ▼▽▽ **Calcula los ángulos $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ en los siguientes polígonos regulares:**

a) 

b) 

a) $\hat{X} = \dfrac{360°}{6} = 60°$



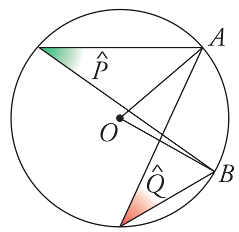
Como el lado y el radio de un hexágono son iguales, el triángulo es equilátero.

Por tanto, $\dfrac{\hat{Y}}{2} = 60° \rightarrow \hat{Y} = 120°$

$\hat{Z} = 360° - \hat{Y} = 240°$

b) $\hat{X} = \dfrac{360°}{8} = 45°$; $\hat{Y} = 180° - \hat{X} = 135°$; $\hat{Z} = 360° - 135° = 225°$

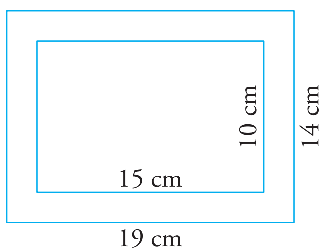
5 ▼▽▽ **Indica cuánto miden los ángulos $\hat{P}$ y $\hat{Q}$, sabiendo que $\overset{\frown}{AOB} = 70°$.**



$\hat{P} = \hat{Q} = \dfrac{70°}{2} = 35°$

Semejanza

6 ▼▽▽ **Una fotografía de 15 cm de ancho y 10 cm de alto tiene alrededor un marco de 2 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco? Responde razonadamente.**



$\dfrac{15}{19} \neq \dfrac{10}{14} \rightarrow$ No son semejantes. (Sus lados no son proporcionales).

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

7 ▼▽▽ **Dos triángulos *ABC* y *A'B'C'* son semejantes y su razón de semejanza es 1,2. Calcula los lados del triángulo *A'B'C'* sabiendo que:**

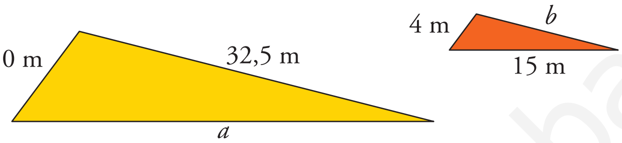
$$\overline{AB} = 16 \text{ cm} \qquad \overline{BC} = 25 \text{ cm} \qquad \overline{AC} = 39 \text{ cm}$$

$\overline{A'B'} = 1,2 \cdot 16 = 19,2$ cm

$\overline{B'C'} = 1,2 \cdot 25 = 30$ cm

$\overline{A'C'} = 1,2 \cdot 39 = 46,8$ cm

8 ▼▽▽ **Halla las longitudes de los lados *a* y *b* sabiendo que estos dos triángulos tienen sus lados paralelos:**



Como todos sus lados son paralelos, sus ángulos son iguales, por lo que los dos triángulos son semejantes. Así:

$$\frac{10}{4} = \frac{a}{15} = \frac{32,5}{b}$$

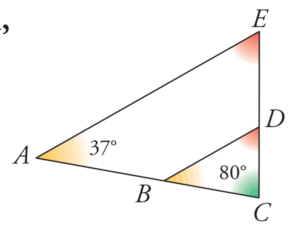
$$\frac{10}{4} = \frac{a}{15} \to 4a = 150 \to a = 37,5 \text{ m}$$

$$\frac{10}{4} = \frac{32,5}{b} \to 10b = 130 \to b = 13 \text{ m}$$

9 ▼▼▽ **Si *BD* es paralelo a *AE*, y $\overline{AC} = 15$ cm, $\overline{CE} = 11$ cm, $\overline{BD} = 6,4$ cm, $\overline{AE} = 18$ cm:**

a) Calcula $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$.

b) Si $\hat{A} = 37°$ y $\hat{C} = 80°$, calcula $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$.



Por semejanza de triángulos:

a) $\dfrac{18}{6,4} = \dfrac{11}{\overline{CD}} \to \overline{CD} = \dfrac{11 \cdot 6,4}{18} \approx 3,9$ cm

$\dfrac{18}{6,4} = \dfrac{15}{\overline{BC}} \to \overline{BC} = \dfrac{15 \cdot 6,4}{18} \approx 5,33$ cm

b) $\hat{E} = 180° - 37° - 80° = 63°$

$\hat{B} = \hat{A} = 37°$

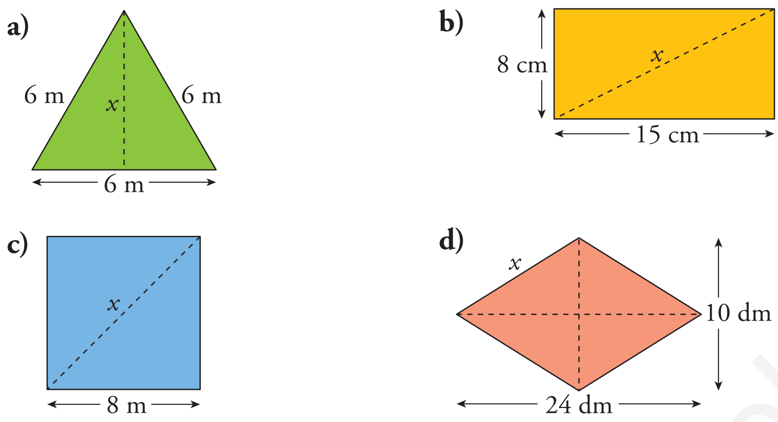
$\hat{D} = \hat{E} = 63°$

9 Soluciones a “Ejercicios y problemas”

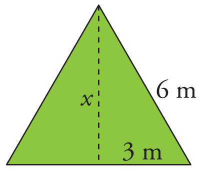
PÁGINA 183

Teorema de Pitágoras

10 ▼▽▽ **Calcula el valor de x en estos polígonos:**



a)

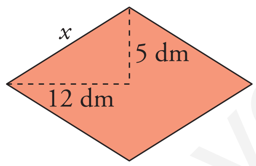


$x = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} \approx 5{,}2$ m

b) $x = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$ cm

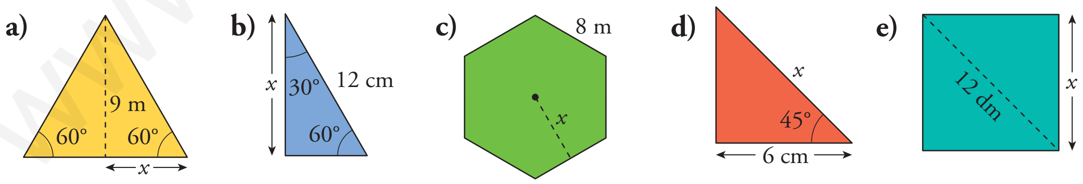
c) $x = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}3$ m

d)

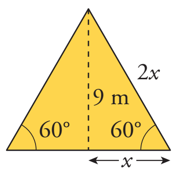


$x = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ dm

11 ▼▽▽ **Calcula x en cada caso:**



a)

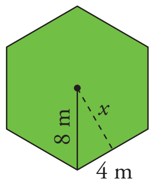


Como dos de sus ángulos miden 60°, el otro también medirá 60°. Como tiene los tres ángulos iguales, el triángulo es equilátero. Si medio lado mide x, el lado entero medirá $2x$.

$(2x)^2 = x^2 + 9^2 \;\rightarrow\; 3x^2 = 81 \;\rightarrow\; x = \sqrt{27} \approx 5{,}2$ m

b) El triángulo es la mitad de un triángulo equilátero. Por tanto, utilizando el mismo razonamiento que en el apartado a), el lado que no mide ni 12 cm ni x, es la mitad de 12 cm, es decir, 6 cm. Por tanto:

$x = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10{,}4$ cm

c) 

Como es un hexágono, el radio es igual que el lado. Por eso:

$x = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6{,}9$ m

d) Como es un triángulo rectángulo con un ángulo de 45°, el otro tendrá que medir 45° también, por lo que sabemos que el triángulo es isósceles. Así:

$x = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}5$ cm

e) $x^2 + x^2 = 12^2 \;\to\; 2x^2 = 144 \;\to\; x = \sqrt{72} \approx 8{,}5$ dm

12 ▼▼▽ **La diagonal de un rectángulo mide 37 cm, y uno de sus lados, 12 cm. Calcula su perímetro y su área.**

$l \;\to$ lado que falta

$l = \sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1\,225} = 35$ cm

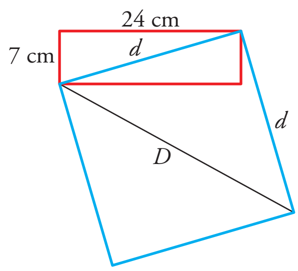
Perímetro = $2 \cdot 35 + 2 \cdot 12 = 94$ cm

Área = $35 \cdot 12 = 420$ cm^2

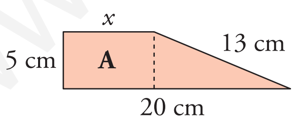
13 ▼▼▽ **La diagonal de un rectángulo de lados 7 cm y 24 cm mide igual que el lado de un cuadrado. Halla la diagonal de ese cuadrado.**

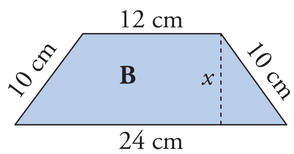
$d = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$

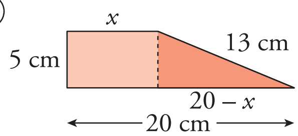
$D = \sqrt{25^2 + 25^2} = \sqrt{1\,250} \approx 35{,}36$ cm



14 ▼▼▽ **Calcula x en estos trapecios y halla su área:**





Ⓐ 

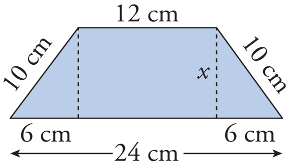
Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo:

$13^2 = 5^2 + (20 - x)^2 \;\to\; x^2 - 40x + 256 = 0 \;\to$

$\to\; x = 32$ cm, $x = 8$ cm

La solución $x = 32$ cm no tiene sentido, ya que $x < 20$. Por tanto, $x = 8$ cm. Así:

$$A = \frac{(20 + 8) \cdot 5}{2} = 70 \text{ cm}^2$$

Ⓑ 

$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ cm

Así: $A = \dfrac{(24 + 12) \cdot 8}{2} = 144 \text{ cm}^2$

15 ▼▽▽ **Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:**

a) 11 m, 13 m, 20 m.

b) 20 m, 21 m, 29 m.

c) 25 m, 29 m, 36 m.

d) 7 m, 24 m, 25 m.

a) $11^2 + 13^2 = 290$; $20^2 = 400$

Como $20^2 > 11^2 + 13^2$, el triángulo es obtusángulo.

b) $20^2 + 21^2 = 841$; $29^2 = 841$

Como $29^2 = 20^2 + 21^2$, el triángulo es rectángulo.

c) $25^2 + 29^2 = 1\,466$; $36^2 = 1\,296$

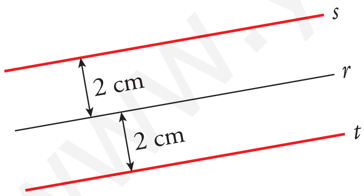
Como $36^2 < 25^2 + 29^2$, el triángulo es acutángulo.

d) $7^2 + 24^2 = 625$; $25^2 = 625$

Como $25^2 = 7^2 + 24^2$, el triángulo es rectángulo.

Lugares geométricos y cónicas

16 ▼▽▽ **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a una recta r es de 2 cm? Dibújalo.**

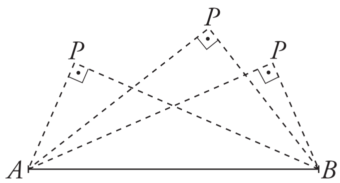


Las rectas s y t son el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta r es de 2 cm.

Las rectas s y t son paralelas a r, cada una a un lado de esta y a 2 cm de distancia de r.

17 ▼▼▽ **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el ángulo $\widehat{APB}$ es recto?**

La circunferencia de centro el punto medio de $\overline{AB}$ (exceptuando los puntos A y B) es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el ángulo $\widehat{APB}$ es recto.



18 ▼▽▽ **Define como lugar geométrico una circunferencia de centro O y radio 5 cm.**

La circunferencia de centro O y radio 5 cm es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a O es 5 cm: $\overline{OP} = 5$ cm

19 ▼▽▽ **¿Cómo se llama el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve un segmento *AB* bajo un ángulo de 60°?**

El lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve un segmento *AB* bajo un ángulo de 60° se llama arco capaz para *AB* de 60°.

20 ▼▽▽ **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es 26 cm? ¿Cómo se llaman los dos puntos fijos?**

El lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a otros dos puntos fijos es 26 cm es una elipse. Los dos puntos fijos se llaman focos.

21 ▼▽▽ **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos es 4 cm? ¿Cómo se llaman los dos puntos fijos?**

El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos es 4 cm es una hipérbola. Los dos puntos fijos se llaman focos.

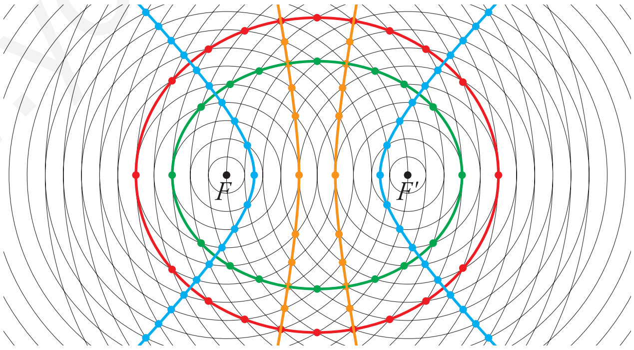
22 ▼▽▽ **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y de una recta dada? ¿Cómo se llaman el punto fijo y la recta?**

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y de una recta dada es la parábola. El punto fijo se llama foco, y la recta, directriz.

23 ▼▼▽ **Utiliza una trama como esta para dibujar:**

a) Dos elipses de focos *F* y *F'* y constantes $d = 16$ y $d = 20$, respectivamente (tomamos como unidad la distancia entre dos circunferencias consecutivas).

b) Dos hipérbolas de focos *F* y *F'* y constantes $d = 2$ y $d = 7$.

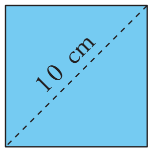


PÁGINA 184

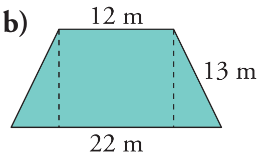
Áreas

24 ▼▼▽ **Halla el área de las figuras coloreadas.**

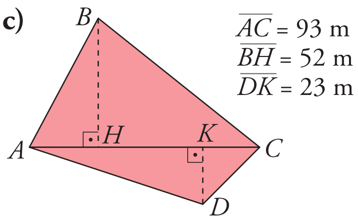
a)



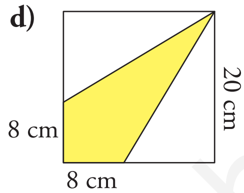
b)



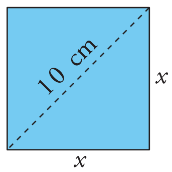
c)



d)



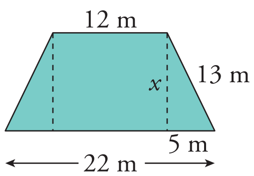
a)



$x^2 + x^2 = 10^2 \rightarrow 2x^2 = 100 \rightarrow x = \sqrt{50} \approx 7,1$ cm

$A = 7,1^2 = 50$ cm^2

b)



$x = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ m

$A = \dfrac{20 + 12}{2} \cdot 12 = 192$ m^2

c) $A_{\text{TRIÁNGULO } ABC} = \dfrac{93 \cdot 52}{2} = 2\,418$ m^2

$A_{\text{TRIÁNGULO } ACD} = \dfrac{93 \cdot 23}{2} = 1\,069,5$ m^2

$A_{\text{TOTAL}} = 2\,418 + 1\,069,5 = 3\,487,5$ m^2

d) $A_{\text{CUADRADO}} = 20 \cdot 20 = 400$ cm^2

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{12 \cdot 20}{2} = 120$ cm^2

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 400 - 2 \cdot 120 = 160$ cm^2

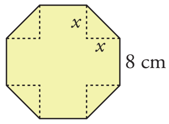
25 ▼▼▽ **Calcula la longitud de la apotema y el área de un pentágono regular de 10 cm de lado.**

Apotema = $0,688 \cdot 10 = 6,88$ cm

Área = $\dfrac{10 \cdot 5 \cdot 6,88}{2} = 172$ cm^2

9 Soluciones a “Ejercicios y problemas”

26 ▼▼▽ **Observa el octógono regular de la figura, que tiene 8 cm de lado, y calcula su área.**

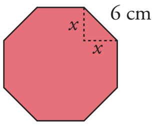


$$2x^2 = 8^2 \rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Apotema} = 4 + x = 4 + \frac{8}{\sqrt{2}} = 4 + 4\sqrt{2} = 4\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

$$\text{Área} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 4 \cdot (1 + \sqrt{2})}{2} \approx 309{,}02 \text{ cm}^2$$

27 ▼▼▽ **El lado de un octógono regular mide 6 cm. Calcula la longitud de su apotema y su área.**



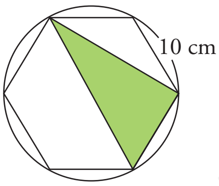
$$2x^2 = 6^2 \rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Apotema} = 3 + x = 3 + 3\sqrt{2} = 3\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

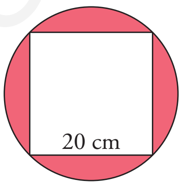
$$\text{Área} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 3 \cdot (1 + \sqrt{2})}{2} \approx 173{,}82 \text{ cm}^2$$

28 ▼▼▽ **Calcula el área de las figuras coloreadas:**

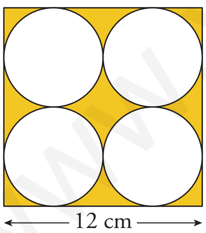
a)



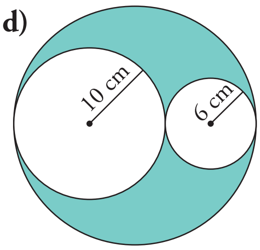
b)



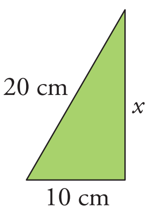
c)



d)



a) Como sabemos, el lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita a él. Por eso, del triángulo (que sabemos que es rectángulo) conocemos las siguientes medidas:



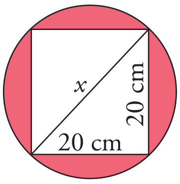
hipotenusa = $2 \cdot 10 = 20$ cm

un cateto = 10 cm

$$x = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} \approx 17{,}32 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{10 \cdot 17{,}32}{2} = 86{,}6 \text{ cm}^2$$

b)



$x = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} \approx 28{,}28$ cm

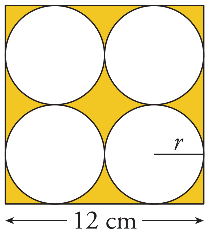
radio $= \dfrac{x}{2} = 14{,}14$ cm

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 14{,}14^2 \approx 628{,}13 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CUADRADO}} = 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 628{,}13 - 400 = 228{,}13 \text{ cm}^2$

c)



$r = \dfrac{12}{4} = 3$ cm

$A_{\text{CUADRADO}} = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 3^2 \approx 28{,}27 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 4 \cdot 28{,}27 = 30{,}92 \text{ cm}^2$

d) El diámetro del círculo grande mide $2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 32$ cm.

Su radio medirá $\dfrac{32}{2} = 16$ cm.

$A_{\text{CÍRCULO GRANDE}} = \pi \cdot 16^2 \approx 804{,}25 \text{ cm}^2$

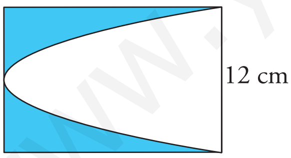
$A_{\text{CÍRCULO MEDIANO}} = \pi \cdot 10^2 \approx 314{,}16 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 6^2 \approx 113{,}1 \text{ cm}^2$

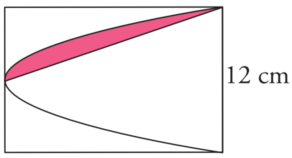
$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 804{,}25 - 314{,}16 - 113{,}1 \approx 377 \text{ cm}^2$

29 ▼▽▽ **Halla el área de la zona coloreada en cada figura:**

a)



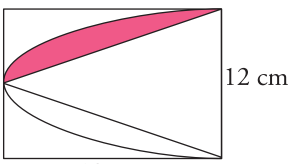
b)



a) Área del segmento de parábola: $A = \dfrac{2}{3} \cdot 18 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$

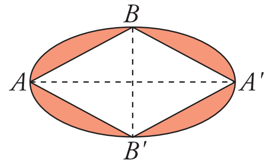
Área de la zona coloreada $= 18 \cdot 12 - 144 = 72 \text{ cm}^2$

b) Área de la zona coloreada $= \dfrac{A_{\text{SEGMENTO DE PARÁBOLA}} - A_{\text{TRIÁNGULO}}}{2} =$



$= \dfrac{144 - 12 \cdot 18/2}{2} = 18 \text{ cm}^2$

30 ▼▼▽ **Las diagonales del rombo inscrito en la elipse miden 16 cm y 30 cm. Halla el área de la parte coloreada.**



$A_{\text{ELIPSE}} = \pi \cdot \frac{16}{2} \approx 377 \text{ cm}^2$

$A_{\text{ROMBO}} = \frac{16 \cdot 30}{2} = 240 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 377 - 240 = 137 \text{ cm}^2$

31 ▼▼▽ **Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de un círculo de 15 cm de radio y cuya amplitud es:**

a) 90° **b) 120°** **c) 65°** **d) 140°**

a) $A = \frac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 90° \approx 176{,}71 \text{ cm}^2$

b) $A = \frac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 120° \approx 235{,}62 \text{ cm}^2$

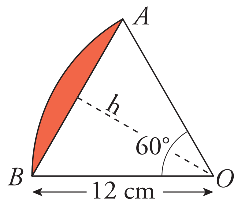
c) $A = \frac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 65° \approx 127{,}63 \text{ cm}^2$

d) $A = \frac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 140° \approx 274{,}89 \text{ cm}^2$

32 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

Calcular el área de un segmento circular de 60° de amplitud en un círculo de 12 cm de radio.

El área del segmento circular se halla restando, del área del sector, el área del triángulo.



- Área del sector: $\frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 60°}{360°} = 75{,}4 \text{ cm}^2$
- Área del triángulo. Observa que es equilátero, ya que $\overline{OA} = \overline{OB}$ y $\widehat{AOB} = 60°$.

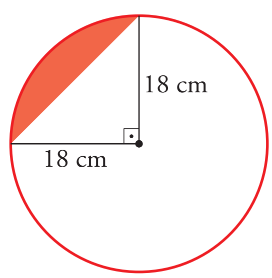
  Altura: $h = \sqrt{12^2 - 6^2} \approx 10{,}4$ cm

  Área: $\frac{12 \cdot 10{,}4}{2} = 62{,}4 \text{ cm}^2$
- **Calcula el área del segmento circular.**

  El área del segmento circular es:

$$A = A_{\text{SECTOR}} - A_{\text{TRIÁNGULO}} = 75{,}4 - 62{,}4 = 3 \text{ cm}^2$$

33 ▼▼▽ **Calcula el área de un segmento circular de 90° de amplitud en un círculo de 18 cm de radio.**



$A_{\text{SECTOR}} = \frac{\pi \cdot 18^2}{360°} \cdot 90° \approx 254{,}47 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{18 \cdot 18}{2} = 162 \text{ cm}^2$

$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 254{,}47 - 162 = 92{,}47 \text{ cm}^2$

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

34 ▼▽▽ **Comprueba que los siguientes triángulos son rectángulos y calcula sus áreas de dos formas: a partir de sus catetos y aplicando la fórmula de Herón.**

a) 51 cm, 68 cm y 85 cm.

b) 110 m, 264 m y 286 m.

c) 72 dam, 135 dam y 153 dam.

d) 48 m, 140 m y 148 m.

a) $51^2 + 68^2 = 7\,225 = 85^2$

$$A = \frac{51 \cdot 68}{2} = 1\,734 \text{ cm}^2$$

$$A = \sqrt{102 \cdot 51 \cdot 34 \cdot 17} = 1\,734 \text{ cm}^2$$

b) $110^2 + 264^2 = 81\,796 = 286^2$

$$A = \frac{110 \cdot 264}{2} = 14\,520 \text{ m}^2$$

$$A = \sqrt{330 \cdot 220 \cdot 66 \cdot 44} = 14\,520 \text{ m}^2$$

c) $72^2 + 135^2 = 23\,409 = 153^2$

$$A = \frac{72 \cdot 135}{2} = 4\,860 \text{ dam}^2$$

$$A = \sqrt{180 \cdot 108 \cdot 45 \cdot 27} = 4\,860 \text{ dam}^2$$

d) $48^2 + 140^2 = 21\,904 = 148^2$

$$A = \frac{48 \cdot 140}{2} = 3\,360 \text{ m}^2$$

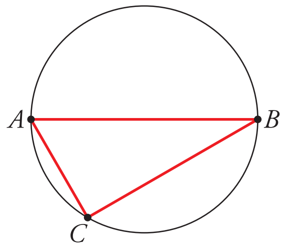
$$A = \sqrt{168 \cdot 120 \cdot 28 \cdot 20} = 3\,360 \text{ m}^2$$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 185

Piensa y resuelve

35 ▼▽▽ **Dibuja un triángulo ABC inscrito en una circunferencia, de modo que los vértices A y B sean extremos de un diámetro y el arco $\widehat{AC}$ sea la sexta parte de la circunferencia. ¿Cuánto miden sus ángulos?**



$\widehat{AC} = 60° \rightarrow \hat{B} = 30°$

$\widehat{AB} = 180° \rightarrow \hat{C} = 90°$

$\hat{A} = 180° - \hat{B} - \hat{C} = 60°$

36 ▼▽▽ **Se llama triángulo heroniano al que tiene lados enteros y área entera. Triángulos rectángulos con lados y área enteros ya se conocían mucho antes de la época de Herón, pero a él se atribuye el descubrimiento del triángulo de lados 13, 14, 15 y área 84 (no es rectángulo, pero tiene lados y área enteros). El nombre de triángulos heronianos es un homenaje a Herón por este descubrimiento.**

Aplica la fórmula de Herón para hallar el área de cada uno de estos triángulos de los que conocemos sus lados:

a) 13 cm, 14 cm, 15 cm (comprueba que es 84 cm²).

b) 5 m, 5 m, 6 m.

c) 13 dm, 20 dm, 21 dm.

d) 25 cm, 34 cm, 39 cm.

Fórmula de Herón:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde a, b y c son los lados del triángulo y s es la mitad de su perímetro.

a) $s = \dfrac{13 + 14 + 15}{2} = 21$ cm

$A = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{7\,056} = 84 \text{ cm}^2$

b) $s = \dfrac{5 + 5 + 6}{2} = 8$ m

$A = \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} = \sqrt{144} = 12 \text{ m}^2$

c) $s = \dfrac{13 + 20 + 21}{2} = 27$ dm

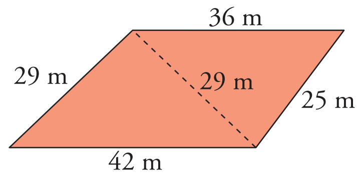
$A = \sqrt{27(27-13)(27-20)(27-21)} = \sqrt{15\,876} = 126 \text{ dm}^2$

d) $s = \dfrac{25 + 34 + 39}{2} = 49$ cm

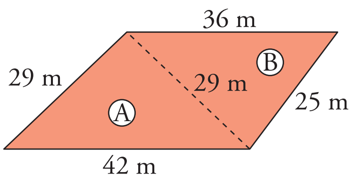
$A = \sqrt{49(49-25)(49-34)(49-39)} = \sqrt{176\,400} = 420 \text{ cm}^2$

9 Soluciones a "Ejercicios y problemas"

37 ▼▽▽ **Cierta finca tiene la forma y las dimensiones indicadas en la figura. Calcula su área.**



Aplicamos la fórmula de Herón:



$$s_{Ⓐ} = \frac{29 + 29 + 42}{2} = 50 \text{ m}$$

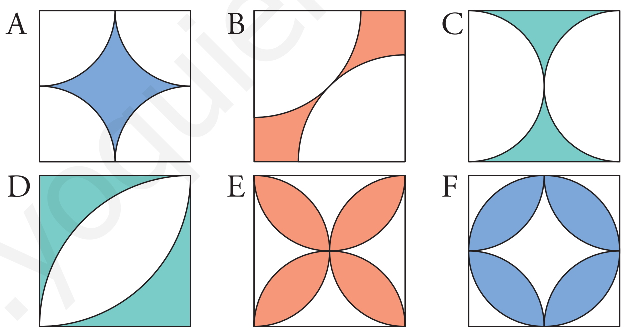
$$A_{Ⓐ} = \sqrt{50(50 - 29)^2(50 - 42)} = \sqrt{176\,400} = 420 \text{ m}^2$$

$$s_{Ⓑ} = \frac{29 + 36 + 25}{2} = 45 \text{ m}$$

$$A_{Ⓑ} = \sqrt{45(45 - 29)(45 - 36)(45 - 25)} = \sqrt{129\,600} = 360 \text{ m}^2$$

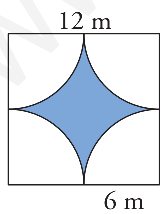
$$A_{\text{FINCA}} = A_{Ⓐ} + A_{Ⓑ} = 780 \text{ m}^2$$

38 ▼▼▽ **Calcula el área de la parte coloreada de cada uno de estos cuadrados de 12 m de lado:**



$$A_{\text{CUADRADO}} = 12^2 = 144 \text{ m}^2$$

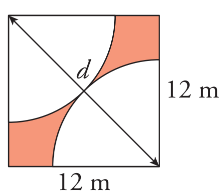
A



$$A_{1/4 \text{ CÍRCULO}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2 \approx \frac{113,1}{4} \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 4 \cdot \frac{113,1}{4} = 30,9 \text{ m}^2$$

B



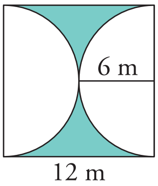
$$d = \sqrt{12^2 + 12^2} \approx 16,97 \text{ m}$$

$$\text{radio de circunferencias} = \frac{d}{2} \approx 8,49 \text{ m}$$

$$A_{1/4 \text{ CIRCUNFERENCIA}} = \frac{\pi \cdot 8,49^2}{4} = 56,61 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 2 \cdot 56,61 = 36,78 \text{ m}^2$$

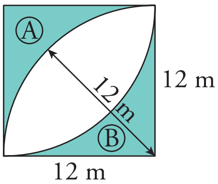
C



$$A_{1/2 \text{ CÍRCULO}} = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} \approx \frac{113,1}{2} \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 2A_{1/2 \text{ CÍRCULO}} =$$
$$= 144 - 113,1 = 30,9 \text{ m}^2$$

D

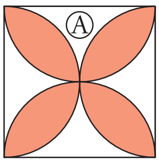


$$A_{1/4 \text{ CÍRCULO}} = \frac{\pi \cdot 12^2}{4} \approx 113,1 \text{ m}^2$$

$$A_{Ⓐ} = A_{Ⓑ} = 144 - 113,1 = 30,9 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 2 \cdot 30,9 = 61,8 \text{ m}^2$$

E

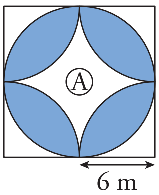


Área de parte coloreada en apartado c) = 30,9 m^2

$$A_{Ⓐ} = \frac{30,9}{2} = 15,45 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 4 \cdot 15,45 = 82,2 \text{ m}^2$$

f)



Área parte coloreada en apartado a) = 30,9 m^2

$$A_{Ⓑ} = 30,9 \text{ m}^2$$

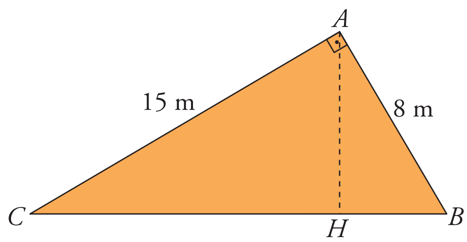
$$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 6^2 \approx 113,1 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 113,1 - 30,9 = 82,2 \text{ m}^2$$

39 ▼▼▽ **El triángulo *ABC* es un triángulo rectángulo, y *AH* es la altura sobre la hipotenusa.**

a) Demuestra que los triángulos *ABH* y *AHC* son semejantes.

b) Calcula las longitudes $\overline{BH}$ y $\overline{HC}$.



a) Los triángulos *ABC* y *ABH* son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{B}$ en común y son rectángulos.

Los triángulos *ABC* y *AHC* son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{C}$ en común y son rectángulos.

Por tanto, los triángulos *ABH* y *AHC* también son semejantes.

b) Aplicando el teorema de Pitágoras hallamos el lado $\overline{BC}$.

$$\overline{BC} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17 \text{ m}$$

Por ser $\widehat{AHB}$ semejante a $\widehat{CAB}$:

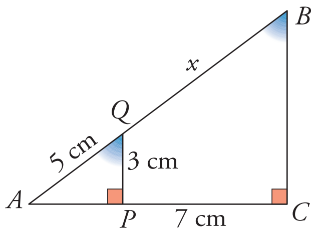
$$\frac{\overline{HB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \rightarrow \overline{HB} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CB}} = \frac{8^2}{17} = \frac{64}{17} \approx 3,76 \text{ cm}$$

Por ser $\widehat{AHC}$ semejante a $\widehat{BAC}$:

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{HC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}} = \frac{15^2}{17} = \frac{225}{17} \approx 13{,}24 \text{ cm}$$

40 ▼▽▽ **a) ¿Por qué son semejantes los triángulos *APQ* y *ACB*?**

b) Calcula $x = \overline{BQ}$.



a) Son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{A}$ en común y son los dos rectángulos. Como tienen dos ángulos iguales, el tercero también es igual.

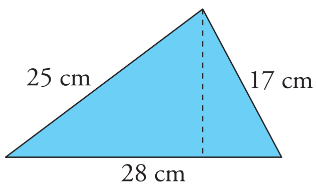
b) Calculamos $\overline{AP}$ por Pitágoras:

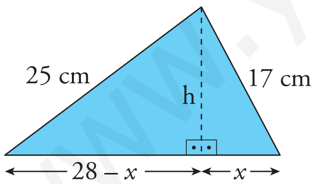
$$\overline{AP} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} \rightarrow \frac{7+4}{4} = \frac{5+x}{5} \rightarrow x = 8{,}75 \text{ cm}$$

41 ▼▼▽ **Calcula la altura de este triángulo, aplicando el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos que aparecen. Después, halla su área.**

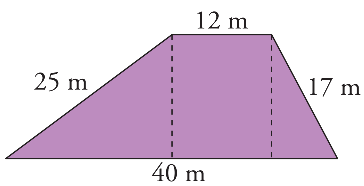


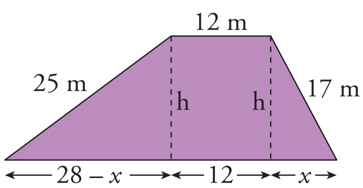


$$\left.\begin{array}{l} h^2 + x^2 = 17^2 \\ (28 - x)^2 + h^2 = 25^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \text{ cm} \\ h = 15 \text{ cm} \end{array}\right\}$$

$$A = \frac{28 \cdot 15}{2} = 210 \text{ cm}^2$$

42 ▼▼▽ **Halla la altura del trapecio siguiente. Después, calcula su área.**



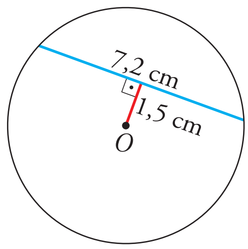


$$\left.\begin{array}{l} 17^2 = h^2 + x^2 \\ 25^2 = h^2 + (28 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \text{ cm} \\ h = 15 \text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{40 + 12}{2} \cdot 15 = 390 \text{ m}^2$$

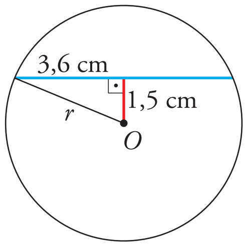
Soluciones a “Ejercicios y problemas”

43 ▼▽▽ **a) Calcula el radio de esta circunferencia.**

b) ¿Cuál será la longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm?

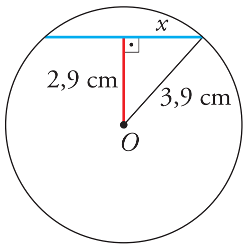


a)



$r = \sqrt{3{,}6^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9$ cm

b)



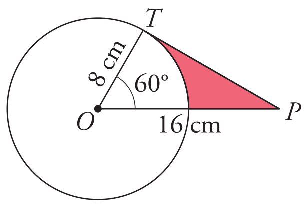
$x = \sqrt{3{,}9^2 - 2{,}9^2} = \sqrt{6{,}8} \approx 2{,}6$ cm

La longitud de la cuerda será $2 \cdot 2{,}6 = 5{,}2$ cm

44 ▼▼▽ **Calcula:**

a) La longitud de PT.

b) El área de la parte coloreada.



a) $\overline{PT} = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{192} \approx 13{,}86$ cm

b) $A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \dfrac{\pi \cdot 8^2}{360°} \cdot 60° \approx 33{,}51 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{8 \cdot 13{,}86}{2} = 54{,}24 \text{ cm}^2$

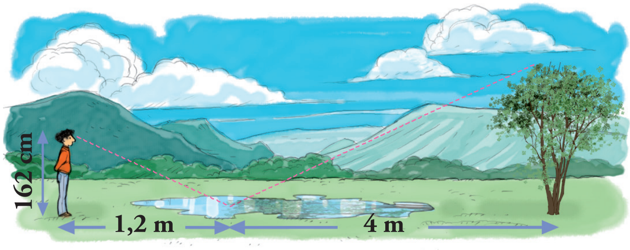
$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 54{,}24 - 33{,}51 = 20{,}73 \text{ cm}^2$

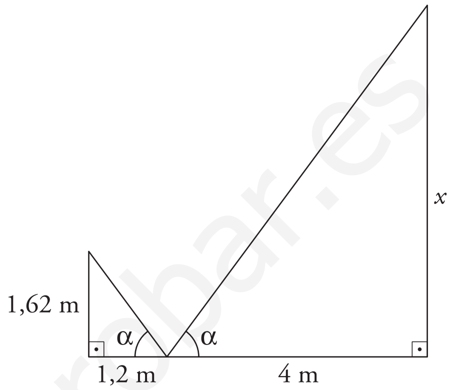
Soluciones a "Ejercicios y problemas"

PÁGINA 186

Resuelve problemas

45 ▼▽▽ **Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?**

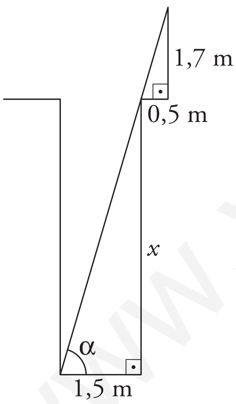


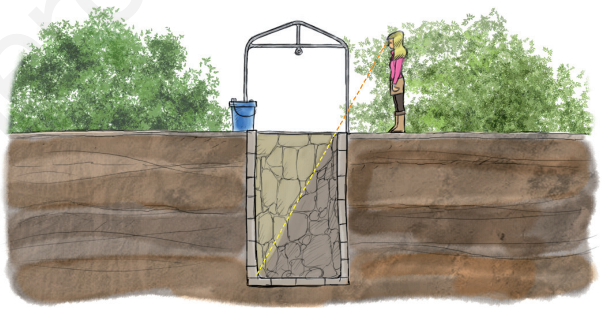


Por semejanza de triángulos:

$$\frac{4}{1,2} = \frac{x}{1,62} \rightarrow x = 5,4 \text{ m}$$

46 ▼▼▽ **¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,5 m y alejándote 0,5 m del borde, desde una altura de 1,7 m, observas que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?**

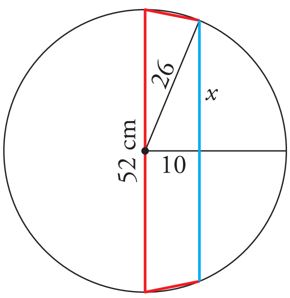




Por semejanza de triángulos:

$$\frac{1,5}{0,5} = \frac{x}{1,7} \rightarrow x = 5,1 \text{ m}$$

47 ▼▽▽ **En un círculo de 52 cm de diámetro se traza una cuerda a 10 cm del centro. Halla el área del cuadrilátero que se forma uniendo los extremos de la cuerda con los del diámetro paralelo a ella.**



$$x = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \text{ cm}$$

$$A_{\text{CUADRILÁTERO (TRAPECIO)}} = \frac{(48 + 52) \cdot 10}{2} = 500 \text{ cm}^2$$

48 ▼▽▽ **Ejercicio resuelto**

Hallar el radio de un arco de 100,48 m de longitud y 72° de apertura (π = 3,14).

- Calculamos la longitud de la circunferencia:

$$\frac{l}{360°} = \frac{100{,}48}{72°} \rightarrow l = 502{,}4 \text{ m}$$

- Hallamos el radio: $2\pi r = 502{,}4$ m
- **Despeja *r* y termina el problema.**

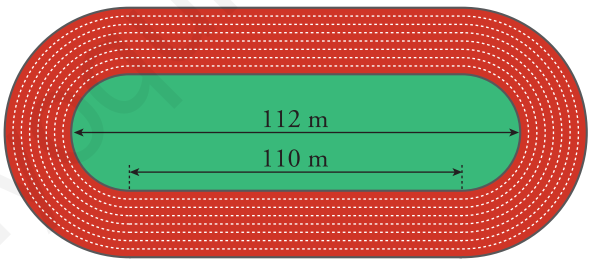
$$2\pi r = 502{,}4 \rightarrow r = \frac{502{,}4}{2\pi} \approx 79{,}96 \text{ m}$$

49 ▼▽▽ **Calcula la medida, en grados, de un arco que mide 31,4 cm correspondiente a una circunferencia de 471 cm de longitud (π = 3,14).**

$$l_{\text{CIRCUNFERENCIA}} = 2\pi \cdot r = 471 \rightarrow r = \frac{471}{2\pi} = 75 \text{ cm}$$

$$l_{\text{ARCO}} = \frac{2\pi \cdot 75}{360°} \cdot (\text{APERTURA}) = 31{,}4 \rightarrow \text{APERTURA} = 24°$$

50 ▼▼▽ **Se quiere renovar con material sintético, que cuesta 15 €/m², el piso de una pista de atletismo como la que ves en la figura, compuesta por 8 calles de 1 metro de anchura. ¿Cuál es el presupuesto para la compra del material?**



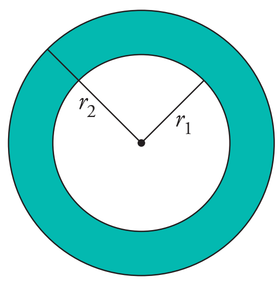
$$A_{\text{PISTA}} = \pi \cdot 9^2 - \pi \cdot 1^2 + 2 \cdot (110 \cdot 8) \approx 2\,011{,}33 \text{ m}^2$$

$$\text{PRESUPUESTO} = 2\,011{,}33 \cdot 15 \approx 30\,170 \text{ €}$$

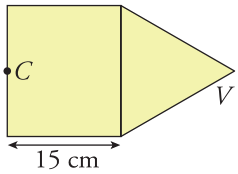
51 ▼▼▽ **El área de una corona circular es 20π cm², y la circunferencia interna mide 8π cm. Calcula el radio de la circunferencia externa.**

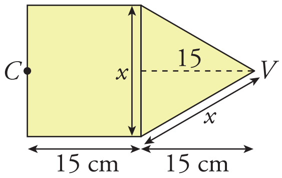
$$8\pi = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \rightarrow r_1 = \frac{8\pi}{2\pi} = 4 \text{ cm}$$

$$20\pi = \pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot 4^2 \rightarrow r_2 = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$



52 ▼▼▼ **Calcula la superficie que ocupa, cerrado, el sobre que ves en la figura, sabiendo que la solapa es un triángulo equilátero y que si lo cierras, el vértice *V* cae exactamente sobre el centro, *C*, del lado opuesto.**

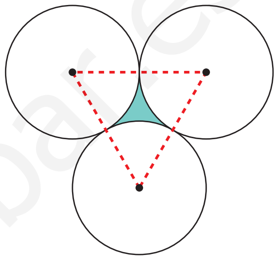




$$15^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \rightarrow 225 = \frac{3}{4}x^2 \rightarrow x = \sqrt{300} \approx 17{,}32$$

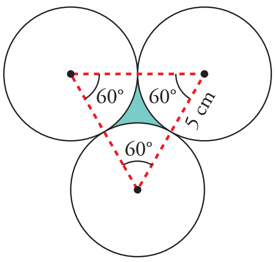
$$S_{\text{SOBRE CERRADO}} \approx 17{,}32 \cdot 15 = 259{,}8 \text{ cm}^2$$

53 ▼▼▽ **Calcula el área del triángulo curvilíneo comprendido entre tres circunferencias tangentes iguales de 5 cm de radio.**



Como es un triángulo equilátero, sus ángulos son de 60°.

$$A_{\text{SECTOR } 60°} = \frac{\pi \cdot 5^2}{360°} \cdot 60° \approx 13{,}09 \text{ cm}^2$$



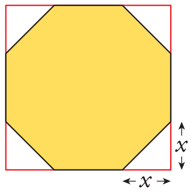
Aplicamos la fórmula de Herón para hallar el área del triángulo de lado 10 cm:

$$s = \frac{30}{2} = 15 \rightarrow A_{\text{TRIÁNGULO}} = \sqrt{15 \cdot (5)^3} \approx 43{,}3 \text{ cm}^2$$

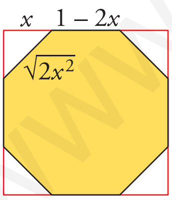
$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 43{,}3 - 3 \cdot 13{,}09 = 4{,}09 \text{ cm}^2$$

54 ▼▼▼ **a) A un cuadrado de 1 dm de lado le cortamos triangulitos isósceles en las cuatro esquinas. Calcula *x* para que el octógono resultante sea regular.**

b) Calcula el área de un octógono regular de 8 cm de lado.



a)



$$\sqrt{2x^2} = 1 - 2x \rightarrow \sqrt{2} \cdot x = 1 - 2x \rightarrow$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{2})x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = 0{,}35 \text{ dm}$$

b) $x^2 + x^2 = 8^2 \rightarrow x = \sqrt{32} \approx 5{,}66$ cm

Lado del cuadrado $= 5{,}66 \cdot 2 + 8 = 19{,}32$ cm

Área del octógono:

$$A_{\text{CUADRADO}} = (19{,}32)^2 \approx 373{,}26 \text{ cm}^2 \qquad A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{(5{,}66)^2}{2} = 16{,}02 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{OCTÓGONO}} = 373{,}26 - 4 \cdot 16{,}02 = 309{,}18 \text{ cm}^2$$

O bien:

$$A_{\text{OCTÓGONO}} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{8 \cdot 8 \cdot (19{,}32 : 2)}{2} = 309{,}12 \text{ cm}^2$$

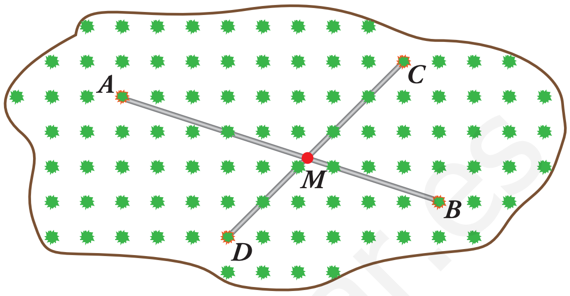
(La apotema del octógono es la mitad del lado del cuadrado).

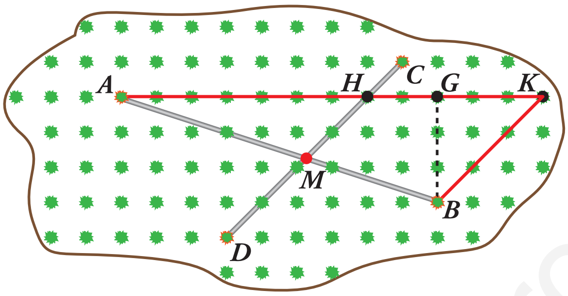
PÁGINA 187

Problemas “+”

55 ▼▼▼ **El dueño de un vivero tiene una plantación de arbolitos, colocados cada uno a un metro de distancia de los más próximos.**

En el punto M hay una arqueta de riego en la que se conectan dos tuberías enterradas y rectas, AB y CD. Averigua la longitud del tramo de tubería AM.





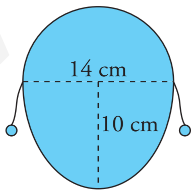
Los triángulos AHM y AKB son semejantes.

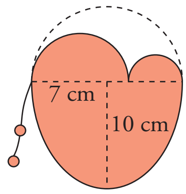
El triángulo AGB es rectángulo. Por tanto:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AG}^2 + \overline{GB}^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} \approx 9{,}49 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{7}{\overline{AM}} = \frac{12}{9{,}49} \rightarrow \overline{AM} \approx 5{,}54 \text{ m}$$

56 ▼▼▼ **Observa la primera figura en forma de huevo (compuesta por un semicírculo, una semielipse y dos circulitos de 1 cm de diámetro), y la segunda figura en forma de corazón (compuesta por dos semicírculos, una semielipse y dos circulitos de 1 cm de diámetro):**

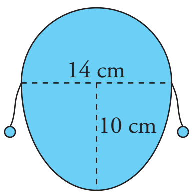




Halla los radios, x e y, de los dos semicírculos de la segunda figura para que la superficie del “corazón” sea el 80% de la superficie del “huevo” (con los dos circulitos incluidos en las dos figuras).

☞ ***Ten en cuenta que $2x + 2y = 14$ cm.***

$$A_{1.^a \text{ FIGURA}} = A_{1/2 \text{ ELIPSE}} + A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} + 2A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}}$$



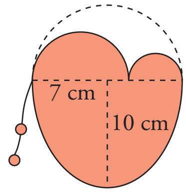
$$A_{1/2 \text{ ELIPSE}} = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 7}{2} \approx 109{,}96 \text{ cm}^2$$

$$A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} = \frac{\pi \cdot 7^2}{2} \approx 76{,}97 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}79 \text{ cm}^2$$

$A_{1.^a \text{ FIGURA}} = 109{,}96 + 76{,}97 + 2 \cdot 0{,}79 = 188{,}51 \text{ cm}^2$

$A_{2.^a \text{ FIGURA}} = A_{1/2 \text{ ELIPSE}} + A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} + A_{1/2 \text{ CÍRCULO MEDIANO}} + 2A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}}$



$A_{1/2 \text{ ELIPSE}} \approx 109{,}96 \text{ cm}^2$ $\quad A_{1/2 \text{ CÍRCULO MEDIANO}} = \dfrac{\pi \cdot y^2}{2}$

$A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} = \dfrac{\pi \cdot x^2}{2}$ $\quad A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = 0{,}79 \text{ cm}^2$

$A_{2.^a \text{ FIGURA}} = 0{,}8 \cdot 188{,}51 \approx 150{,}81 \text{ cm}^2$

Por tanto, sabemos que:

$$150{,}81 = 109{,}96 + \frac{\pi \cdot x^2}{2} + \frac{\pi \cdot y^2}{2} + 2 \cdot 0{,}79$$

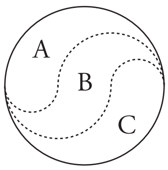
y además sabemos que:

$$2x + 2y = 14$$

Resolvemos el sistema y nos queda $x = 3$, $y = 4$ o $x = 4$, $y = 3$.

Solución: los radios de los dos semicírculos miden 3 cm y 4 cm.

57 ▼▼▼ **Tres amigos deciden compartir una pizza. Uno de ellos, experto geómetra, la parte siguiendo el procedimiento de la figura, después de haber dividido el diámetro en tres partes iguales. ¿Es equitativo el reparto? Justifícalo.**



Veamos si las superficies A, B y C son o no iguales.

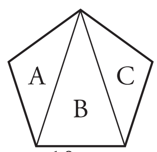
Tomamos $3R$ como radio de la pizza.

$S_A = S_C = \dfrac{1}{2}[\pi(3R)^2 - \pi(2R)^2 + \pi R^2] = \dfrac{1}{2}\pi(9R^2 - 4R^2 + R^2) = 3\pi R^2$

$S_B = \dfrac{1}{2}[\pi(2R)^2 - \pi R^2] \cdot 2 = \pi(4R^2 - R^2) = 3\pi R^2$

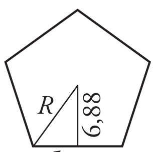
Los tres reciben la misma cantidad de pizza.

58 ▼▼▼ **Calcula el área de cada uno de los tres triángulos en que se ha dividido un pentágono regular de 10 cm de lado.**



La apotema del pentágono es $0{,}688 \cdot 10 = 6{,}88$ cm.

Radio del pentágono, $R = \sqrt{5^2 + 6{,}88^2} \approx 8{,}5$ cm

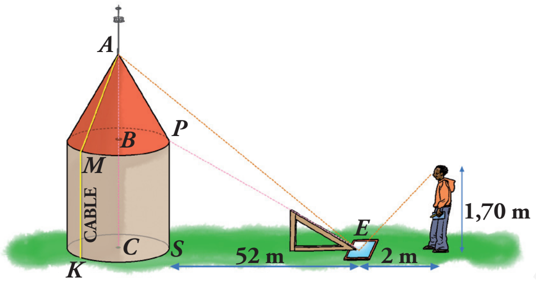


$S_{\text{PENTÁGONO}} = \dfrac{10 \cdot 5 \cdot 6{,}88}{2} = 172 \text{ cm}^2$

$S_B \approx \dfrac{10 \cdot (6{,}88 + 8{,}5)}{2} = 76{,}9 \text{ cm}^2$

$S_A = S_C \approx \dfrac{172 - 76{,}9}{2} = 47{,}55 \text{ cm}^2$

59 ▼▼▼ **El profesor de Matemáticas ha encargado a sus alumnos, como trabajo para el fin de semana, el cálculo de la longitud del cable que baja desde el pararrayos que está colocado en el viejo torreón medieval. La única medida accesible es el diámetro del torreón: 10 m. En la figura adjunta puedes observar cómo han enfocado el trabajo dos alumnos, que se han provisto de un espejo (E), un triángulo rectángulo de catetos 30 cm y 40 cm, construido con listones de madera, y una cinta métrica.**

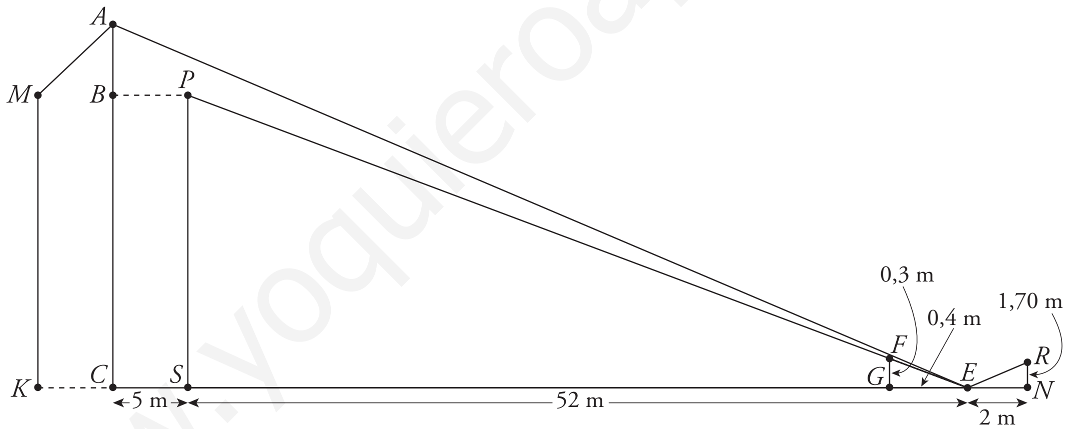


Teniendo en cuenta todo lo anterior, calcula:

a) La altura, PS, de la pared vertical.

b) La altura, AC, a la que está la base del pararrayos.

c) La longitud del cable, AMK.



a) Los triángulos EPS y EFG son semejantes. Por tanto:

$$\frac{\overline{GE}}{\overline{SE}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{PS}} \rightarrow \frac{0,4}{52} = \frac{0,3}{\overline{PS}} \rightarrow \overline{PS} = 39 \text{ m}$$

b) Los triángulos ERN y EAC son semejantes. Por tanto:

$$\frac{\overline{EN}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{RN}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{2}{57} = \frac{1,70}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{AC} = 48,45 \text{ m}$$

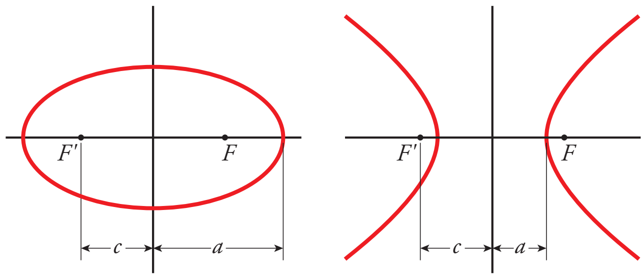
c) $\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{PS} = 48,45 - 39 = 9,45$ m

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AB}^2 + 5^2} = \sqrt{9,45^2 + 5^2} \approx 10,69$$

Longitud del cable $AMK = \overline{AM} + \overline{MK} = \overline{AM} + \overline{PS} = 10,69 + 39 = 49,69$ m

Profundiza

60 ▼▼▽ **Se llama excentricidad de una elipse o de una hipérbola al resultado de dividir la distancia focal (distancia entre sus focos) entre el eje mayor:**



$$\textbf{excentricidad} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

En la circunferencia, los focos coinciden con el centro; por tanto, su excentricidad es 0. La excentricidad de la parábola es 1. Razona, mirando los dibujos anteriores, que la excentricidad de una elipse es un número comprendido entre 0 y 1; y que la de una hipérbola es mayor que 1.

En una elipse, $c < a$. Por tanto, la excentricidad, $\frac{c}{a}$, siempre va a ser un número menor que 1 y mayor que 0 porque tanto c como a son números positivos.

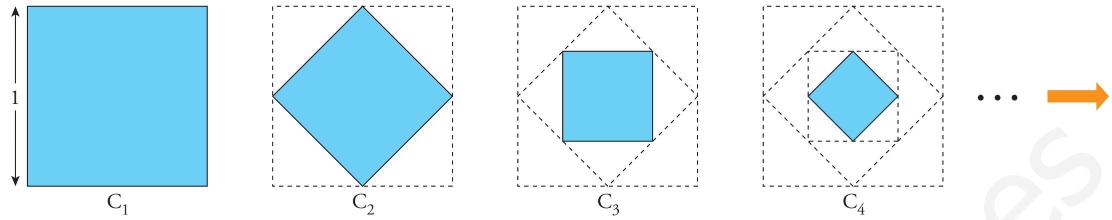
En la hipérbola, $a < c$ siempre. Por tanto, la excentricidad, $\frac{c}{a}$, siempre va a ser un número mayor que 1.

Soluciones a “Y para terminar…”

PÁGINA 188

Generaliza

Observa la siguiente serie de cuadrados:



TAREA

Busca la manera de obtener el lado y el área de cualquier término c_n de la serie.

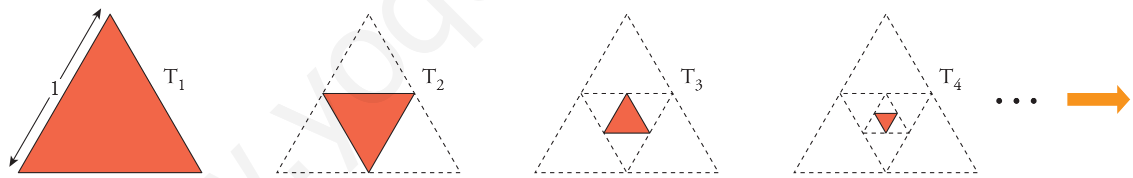
PROCEDIMIENTO

Resuelve los primeros casos particulares y, después, generaliza:

	c_1	c_2	c_3	c_4	…	c_{10}	…	c_n
LADO → l	1							
ÁREA → A	1							

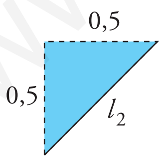
- **¿Cuál es la razón de semejanza entre dos cuadrados consecutivos? ¿Y la razón de sus áreas?**

AHORA, TÚ: **Realiza el mismo trabajo con esta serie:**



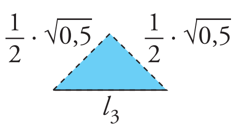
c_1: $l_1 = 1$ cm $\rightarrow$ $A_1 = 1$ cm^2

c_2:



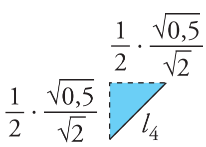
$l_2 = \sqrt{0,5}$ cm $\rightarrow$ $A_2 = 0,5$ cm^2

c_3:



$l_3 = \dfrac{\sqrt{0,5}}{\sqrt{2}}$ cm $\rightarrow$ $A_3 = \dfrac{0,5}{2}$ cm^2

c_4:



$l_4 = \dfrac{\sqrt{0,5}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$ $\rightarrow$ $A_4 = \dfrac{0,5}{2 \cdot 2}$ cm^2

Soluciones a "Y para terminar…"

Se puede encontrar la siguiente fórmula para el lado y el área del cuadrado n-ésimo de la sucesión:

$$l_n = 0{,}5^{1/2} \cdot 2^{(2-n)/2} \text{ cm} \qquad A_n = 0{,}5 \cdot 2^{2-n} \text{ cm}^2$$

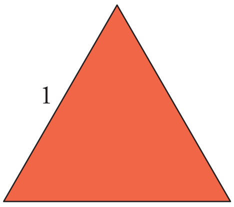
La razón de los lados es $\frac{1}{\sqrt{2}}$, y la de las áreas, $\frac{1}{2}$.

Para estudiar la sucesión de triángulos, usaremos la fórmula de Herón para calcular el área:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde s es el semiperímetro y a, b, c los lados del triángulo. Así:

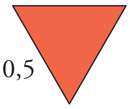
T_1:



$l_1 = 1$ cm

$$A_1 = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3} \text{ cm}^2$$

T_2:



$l_2 = 0{,}5$

$$A_2 = \sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-0{,}5\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^3} \text{ cm}^2$$

T_3:

$l_3 = 0{,}25$ cm

$$A_3 = \sqrt{\frac{3}{8}\left(\frac{3}{8}-0{,}25\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^3} \text{ cm}^2$$

T_4:

$l_4 = 0{,}125$ cm

$$A_4 = \sqrt{\frac{3}{16}\left(\frac{3}{16}-0{,}125\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{16}\left(\frac{1}{16}\right)^3} \text{ cm}^2$$

Generalizando, tenemos que:

$$l_n = 2^{1-n} \text{ cm} \;\text{ y }\; A_n = \sqrt{3} \cdot 2^{-2n} \text{ cm}^2$$

9 Soluciones a "Y para terminar…"

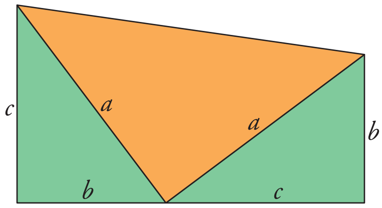
PÁGINA 189

▼ Lee y comprende

Una curiosa demostración del teorema de Pitágoras

James Abram Garfield (1831-1881), vigésimo presidente de los Estados Unidos, fue profesor de Lenguas Clásicas, militar y político y, además, aficionado a las matemáticas, como puedes comprobar con esta demostración que publicó en el *New England Journal of Education:*

Se toma un triángulo rectángulo cualquiera apoyado sobre un cateto (b). Se repite el mismo triángulo apoyado sobre el otro cateto (c) y se construye un trapecio, como indica la figura.



Área del trapecio $\to$ $A = \dfrac{b+c}{2} \cdot (b+c)$

Área del trapecio $\to$ $A = \dfrac{c \cdot b}{2} + \dfrac{c \cdot b}{2} + \dfrac{a \cdot a}{2}$

- **Igualando ambas expresiones del área del trapecio se obtiene, simplificando, la expresión del teorema de Pitágoras. Intenta hacerlo tú.**

$$\frac{b+c}{2} \cdot (b+c) = \frac{c \cdot b}{2} + \frac{c \cdot b}{2} + \frac{a \cdot a}{2} \to \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{2cb + a^2}{2} \to$$

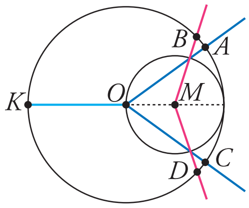
$$\to b^2 + c^2 + 2cb = 2cb + a^2 \to$$

$$\to a^2 = b^2 + c^2$$

PÁGINA 189

En la circunferencia, ¿recuerdas qué son ángulo central e inscrito y sus relaciones?

1 **Sabiendo que $\widehat{AOK} = 144°$, calcula $\widehat{AOC}$ y $\widehat{BMD}$.**

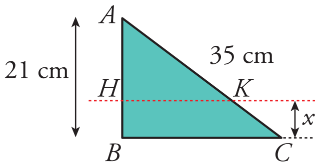


$\widehat{AOC} = 2 \cdot (180° - \widehat{AOK}) = 2 \cdot (180° - 144°) = 72°$

$\widehat{BMD} = 2 \cdot \widehat{AOC} = 144°$

¿Aplicas la semejanza en la resolución de problemas?

2 **¿A qué altura hay que cortar el triángulo ABC para que la base se reduzca en ocho centímetros?**



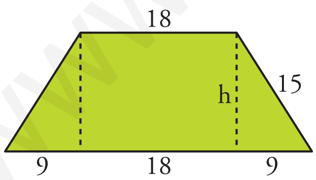
$\overline{BC} = \sqrt{35^2 - 21^2} = 28$ cm

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{HK}} \rightarrow \dfrac{21}{28} = \dfrac{21 - x}{28 - 8} \rightarrow x = 6$ cm

¿Conoces el teorema de Pitágoras y sus aplicaciones?

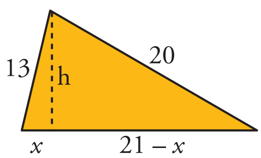
3 **Halla la altura de estas figuras:**

Ⓐ



$h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ m

Ⓑ



$$\left.\begin{array}{l} h = \sqrt{13^2 - x^2} \\ h = \sqrt{20^2 - (21 - x)^2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 13^2 - x^2 = 20^2 - (21 - x)^2 \rightarrow \\ \rightarrow 42x = 210 \rightarrow x = 5 \text{ cm} \end{array}$$

$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm

Soluciones a la Autoevaluación

¿Conoces y manejas el concepto de lugar geométrico?

4 Completa:

a) El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento es…

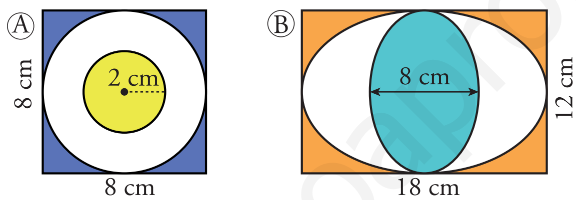
b) Una elipse es el lugar geométrico de los puntos tales que…

a) El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento es la mediatriz del mismo.

b) Una elipse es el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

¿Dominas los procedimientos para el cálculo de áreas de figuras planas?

5 Calcula el área de la zona coloreada en cada caso:



Ⓐ $A = 8^2 - \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 2^2 = 64 - 12\pi \approx 26,30 \text{ cm}^2$

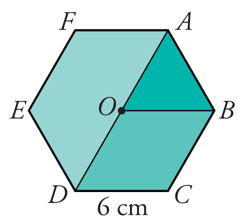
Ⓑ $A = 12 \cdot 18 - \pi \cdot 9 \cdot 6 + \pi \cdot 4 \cdot 6 = 216 - 30\pi \approx 121,75 \text{ cm}^2$

6 En el hexágono regular de lado 6 cm, calcula:

a) El área del triángulo *OAB*.

b) El área del trapecio *ADEF*.

c) El área del rombo *OBCD*.



Apotema = $\sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5,2$ cm

$A_{\text{HEXÁGONO}} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5,2}{2} \approx 93,6 \text{ cm}^2$

a) $A_{AOB} = \dfrac{1}{6} A_{\text{HEXÁGONO}} \approx 15,6 \text{ cm}^2$

b) $A_{ADEF} = \dfrac{1}{2} A_{\text{HEXÁGONO}} \approx 46,8 \text{ cm}^2$

c) $A_{OBCD} = \dfrac{1}{3} A_{\text{HEXÁGONO}} \approx 31,2 \text{ cm}^2$

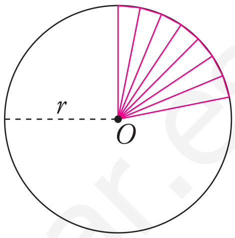
Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 191

PARA EMPEZAR...

▼ Calcula al estilo de Arquímedes

ÁREA DEL CÍRCULO



■ **¿Cuál es la suma de sus bases?**

¿Cuál es la altura de todos ellos?

Sustituye y obtendrás la superficie del círculo.

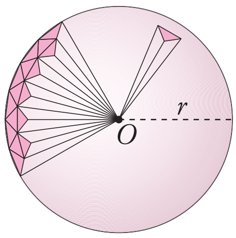
$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}}$ **(Suma de todas sus bases) · Altura**

La suma de todas sus bases es la longitud de la circunferencia, $2\pi r$.

La altura de cada triángulo, para una base muy pequeña, es próxima al radio del círculo, r.

$A = \frac{1}{2}$ (Suma de todas sus bases) · altura $= \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$

VOLUMEN DE LA ESFERA



■ **Aplica la fórmula:**

$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}}$ **(Suma de las superficies de las bases) · Altura**

para obtener el volumen de la esfera.

La suma de la superficie de las bases coincide con la superficie esférica, $4\pi r^2$.

La altura de cada pirámide es muy próxima al radio de la esfera, r.

$V = \frac{1}{3}$(Suma de las superficies de las bases) · Altura $= \frac{1}{3}(4\pi r^2) \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$

PÁGINA 193

1 **Haz una tabla, en tu cuaderno, con el número de caras, vértices y aristas de los cinco poliedros regulares.**

a) Comprueba que los cinco cumplen la fórmula de Euler.

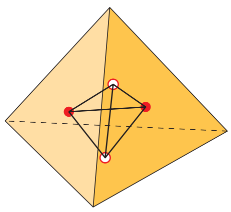
b) Comprueba que el dodecaedro y el icosaedro cumplen las condiciones necesarias para ser duales.

c) Comprueba que el tetraedro cumple las condiciones para ser dual de sí mismo.

	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
CARAS	4	6	8	12	20
VÉRTICES	4	8	6	20	12
ARISTAS	6	12	12	30	30

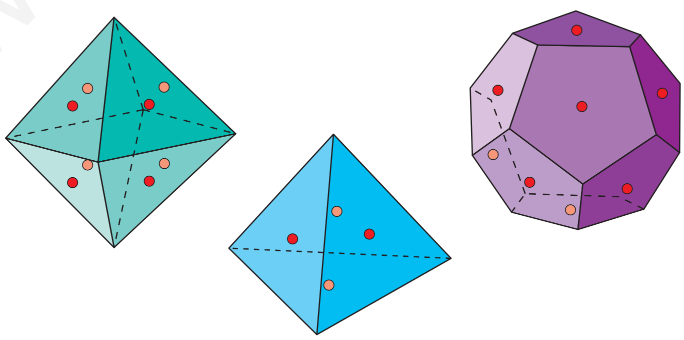
a) Tetraedro $\rightarrow$ $4 + 4 - 6 = 2$
Cubo $\rightarrow$ $6 + 8 - 12 = 2$
Octaedro $\rightarrow$ $8 + 6 - 12 = 2$
Dodecaedro $\rightarrow$ $12 + 20 - 30 = 2$
Icosaedro $\rightarrow$ $20 + 12 - 30 = 2$

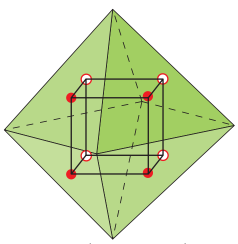
b) Al unir mediante segmentos los centros de cada dos caras contiguas de un dodecaedro, se forma un icosaedro. Si hiciéramos lo mismo con un icosaedro, obtendríamos un dodecaedro. Además, el número de caras del dodecaedro coincide con el número de vértices del icosaedro, y viceversa. Ambos tienen el mismo número de aristas. Por tanto, son poliedros duales.

c) 

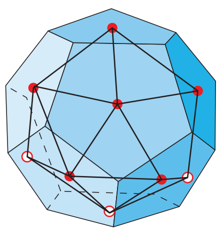
Al unir mediante segmentos los centros de cada dos caras contiguas de un tetraedro, se forma otro tetraedro. Además, el número de caras y de vértices en un tetraedro son iguales. El tetraedro es dual de sí mismo.

2 **Hemos señalado en rojo los centros de las caras “frontales” de estos poliedros, y más claro, los centros de algunas caras “ocultas”. Uniéndolos convenientemente se obtienen los poliedros duales. Hazlo en tu cuaderno.**

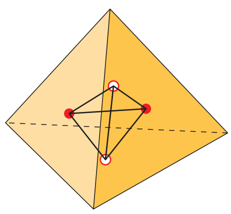




octaedro – cubo



dodecaedro – icosaedro



tetraedro – tetraedro

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 194

1 **Vamos a truncar, dando cortes que pasen por los puntos medios de las aristas, los restantes poliedros regulares.**

a) Al truncar de este modo un tetraedro, se obtiene una figura conocida. ¿Cuál?

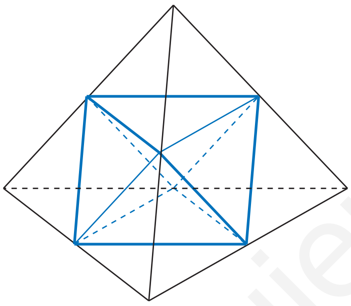
b) El resultado de truncar el octaedro también es conocido. ¿Comprendes, ahora, por qué a esta figura se la llama cuboctaedro?

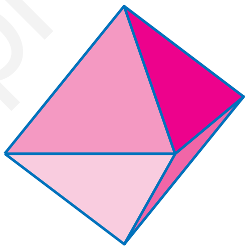
c) Describe la figura que resulta de truncar (puntos medios de las aristas) un dodecaedro y explica por qué es un poliedro semirregular (se llama icosidodecaedro).

d) Describe la figura que resulta de truncar (puntos medios de las aristas) un icosaedro.

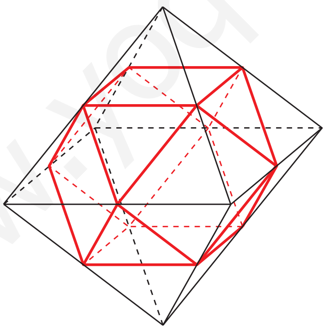
e) Relaciona los resultados anteriores con la dualidad de poliedros estudiada en la página anterior.

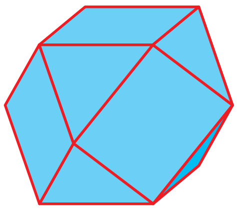
a) La figura que queda es un octaedro.



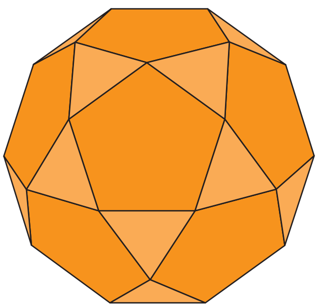


b) La figura que queda es un cuboctaedro.

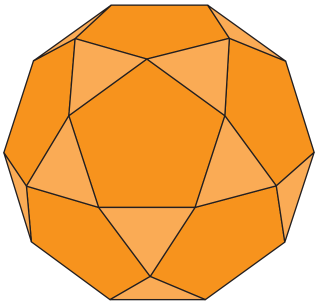




c) El icosidodecaedro se compone de pentágonos regulares y de triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen dos pentágonos y dos triángulos.

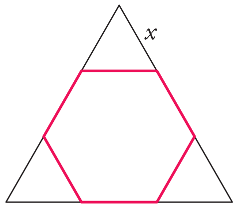


d) También sale un icosidodecaedro.



e) La figura que resulta al truncar dos poliedros duales es la misma.

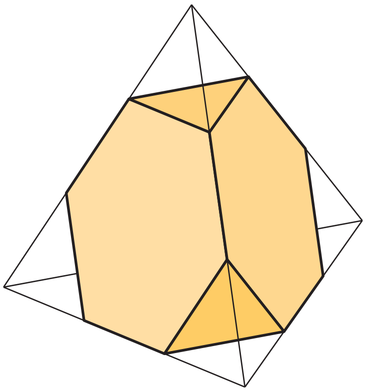
PÁGINA 195



2 **¿A qué distancia del vértice hemos de cortar los triángulos pequeños para que el hexágono resultante sea regular?**

$x = \frac{1}{3}l$, donde l es el lado del triángulo.

3



Describe el tetraedro truncado.

¿Cuántas caras tiene?

¿Cuántas son de cada tipo?

¿Cuántos vértices? ¿Cuántas aristas?

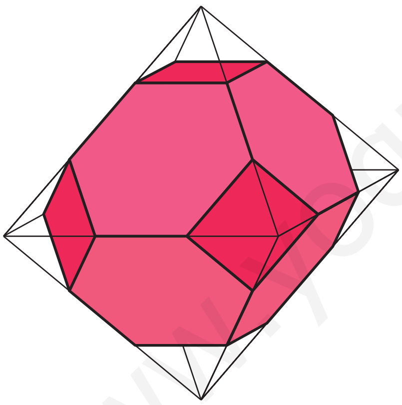
¿Cuánto mide la arista del tetraedro truncado con relación a la del tetraedro original?

Tiene 8 caras, 4 hexágonos regulares y 4 triángulos equiláteros.

Tiene 12 vértices donde concurren dos hexágonos y un triángulo.

Tiene 18 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del tetraedro original.

4 **Describe el octaedro truncado.**



Caras, tipos.

Vértices.

Aristas.

Tiene 14 caras, 8 hexágonos y 6 cuadrados.

Tiene 24 vértices donde concurren dos hexágonos y un cuadrado.

Tiene 36 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del octaedro original.

5 **Conociendo las características de un dodecaedro (caras, vértices), describe cómo será el dodecaedro truncado.**

Tiene 32 caras, 12 decágonos regulares y 20 triángulos equiláteros.

Tiene 60 vértices donde concurren dos decágonos y un triángulo.

Tiene 90 aristas.

6 **Conocidas las características de un icosaedro, describe cómo será el icosaedro truncado.**

Tiene 32 caras, 20 hexágonos y 12 pentágonos.

Tiene 60 vértices donde concurren dos hexágonos y un pentágono.

Tiene 90 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida del icosaedro original.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

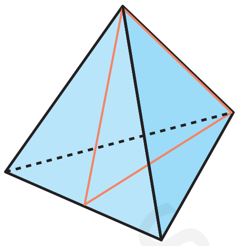
PÁGINA 196

1 ¿Qué condiciones debe cumplir un plano para ser plano de simetría del tetraedro?

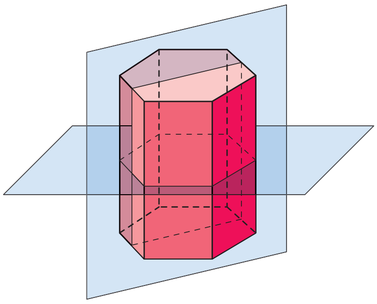
¿Cuántos planos de simetría tiene el tetraedro?

Para que un plano sea plano de simetría del tetraedro tiene que contener una arista y ser perpendicular a dos caras.

El tetraedro tiene 6 planos de simetría, uno por cada arista.

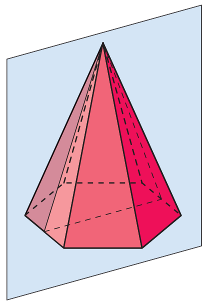


2 Dibuja un prisma hexagonal regular. ¿Cuántos planos de simetría tiene? ¿Y cuántos tiene una pirámide hexagonal regular?



El prisma hexagonal regular tiene seis planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases, y otro plano de simetría paralelo a las dos bases.

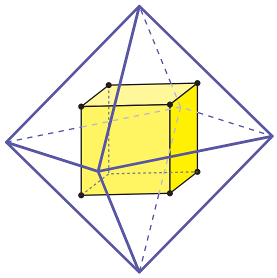
La pirámide hexagonal regular tiene seis planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases.



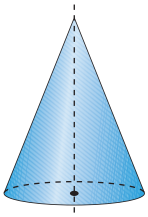
3 Recuerda la relación de dualidad entre el cubo y el octaedro (caras-vértices).

Basándote en los planos de simetría del cubo, describe todos los planos de simetría del octaedro.

Todos los planos de simetría del cubo inscrito en el octaedro son también planos de simetría del octaedro. Por tanto, el octaedro y el cubo tienen el mismo número de planos de simetría.

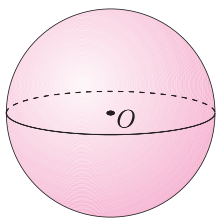


4 ¿Qué planos de simetría tiene un cono? ¿Y una esfera?



Cualquier plano que contiene al eje del cono es plano de simetría de este. Hay, pues, infinitos.

Cualquier plano que contenga al centro de la esfera es un plano de simetría de esta. Hay, pues, infinitos.



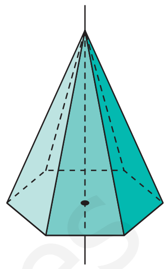
PÁGINA 197

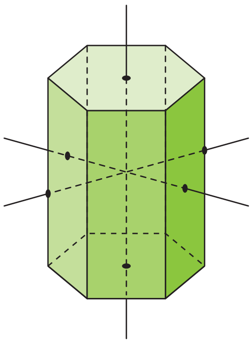
1 **¿Qué ejes de giro tiene una pirámide hexagonal regular? ¿De qué órdenes son? ¿Y un prisma hexagonal regular? (No pases por alto algunos de orden 2).**

PIRÁMIDE HEXAGONAL

Hay solo un eje de giro de orden 6.

Pasa por el centro de la base y el vértice de la pirámide.

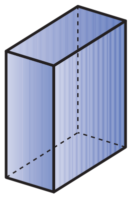




PRISMA HEXAGONAL

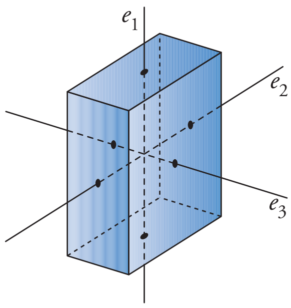
Hay un eje de giro de orden 6, el que pasa por el centro de las dos bases.

Hay 6 ejes de giro de orden 2: todos ellos son paralelos a las bases. 3 de ellos pasan por el punto medio de dos caras laterales opuestas, y los otros 3, por las aristas opuestas.

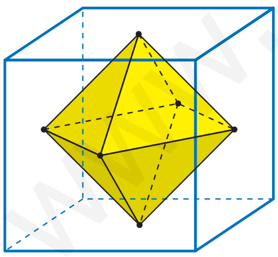
2 

¿Qué ejes de giro tiene un ortoedro con las tres dimensiones distintas? ¿De qué órdenes son?

Hay tres ejes de giro de orden 2, e_1, e_2 y e_3.



3 **Estudia los ejes de giro del octaedro. Puedes basarte en los del cubo.**



Todos los ejes de giro del cubo son también ejes de giro del octaedro inscrito en él. Por tanto, el octaedro y el cubo tienen el mismo número de ejes de giro y de los mismos órdenes. Es decir:

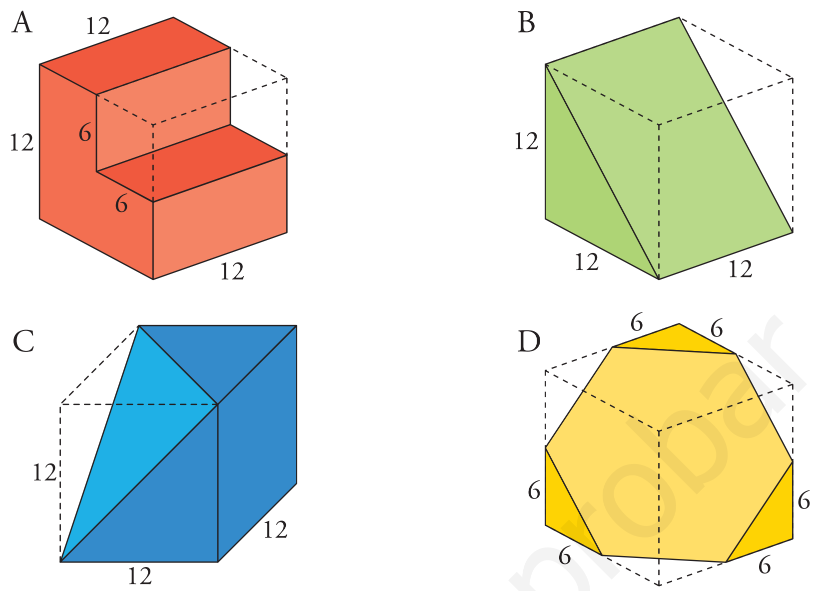
- Tres ejes de giro de orden cuatro, que pasan por dos vértices opuestos.
- Seis ejes de giro de orden dos, que pasan por los puntos medios de dos aristas opuestas.
- Cuatro ejes de giro de orden tres, que pasan por los centros de dos caras opuestas.

Al comparar estos ejes de giro con los del cubo, se puede observar la dualidad (caras ↔ vértices, aristas ↔ aristas):

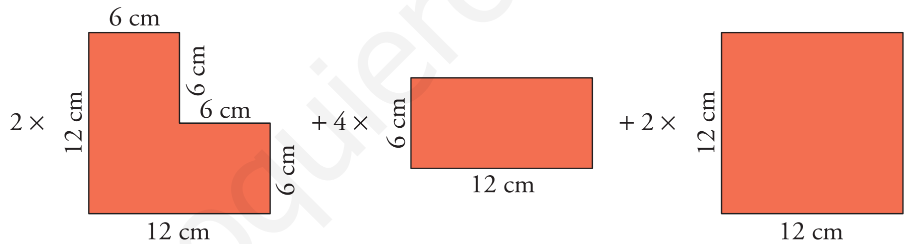
- Los ejes que en el cubo pasan por los centros de caras opuestas, en el octaedro pasan por vértices opuestos.
- Los ejes que en el cubo pasan por aristas opuestas, en el octaedro pasan por aristas opuestas.
- Los ejes que en el cubo pasan por dos vértices opuestos del cubo, en el octaedro pasan por los centros de caras opuestas.

PÁGINA 201

1 **Calcula el área de estos poliedros obtenidos a partir de un cubo de 12 cm de arista:**



Ⓐ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



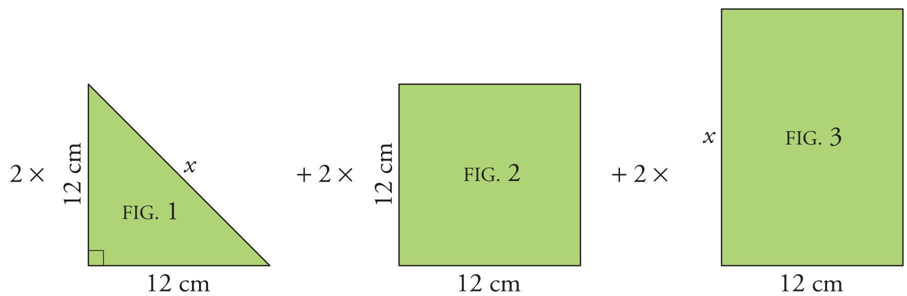
$A_{\text{FIG. 1}} = 12 \cdot 6 + 6 \cdot 6 = 108 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 2}} = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 108 + 4 \cdot 72 + 2 \cdot 144 = 792 \text{ cm}^2$

Ⓑ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



$x = \sqrt{12^2 + 12^2} \approx 16{,}97 \text{ cm}$

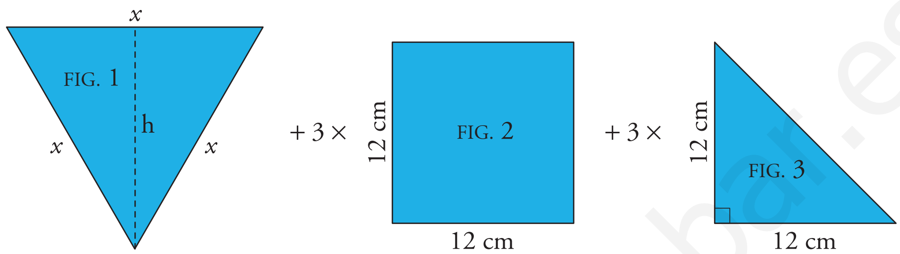
$$A_{\text{FIG. 1}} = \frac{12^2}{2} = 72 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{FIG. 2}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{FIG. 3}} = 12 \cdot 16{,}97 = 203{,}64 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 72 + 2 \cdot 144 + 203{,}64 = 635{,}64 \text{ cm}^2$$

Ⓒ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



$x \approx 16{,}97$ cm (ver Ⓑ); $h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \approx 14{,}70$ cm

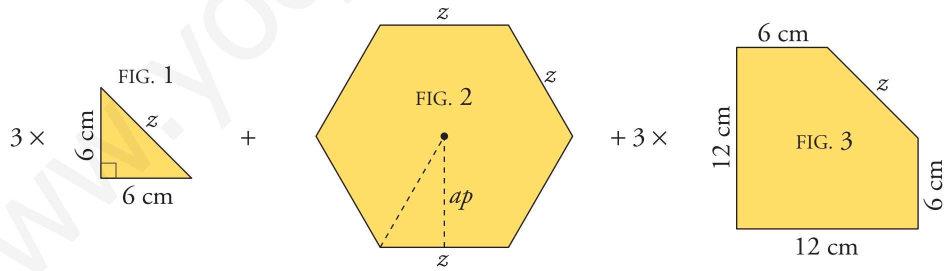
$$A_{\text{FIG. 1}} = \frac{16{,}97 \cdot 14{,}70}{2} \approx 124{,}73 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{FIG. 2}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{FIG. 3}} = 72 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 124{,}73 + 3 \cdot 144 + 3 \cdot 72 = 772{,}73 \text{ cm}^2$$

Ⓓ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



$z = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}49$ cm

Apotema del hexágono regular: $ap = \sqrt{z^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \frac{z\sqrt{3}}{2} \approx 7{,}35$ cm

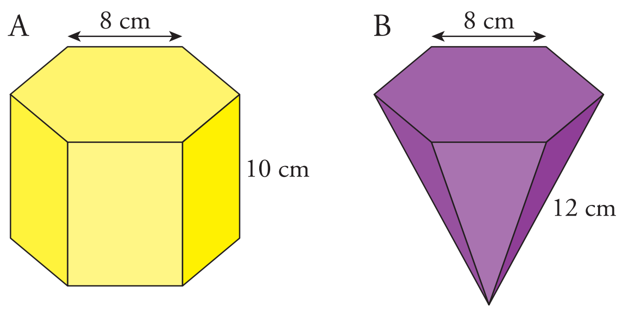
$$A_{\text{FIG. 1}} = 18 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{FIG. 2}} = \frac{6 \cdot 8{,}49 \cdot 7{,}35}{2} = 187{,}20 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{FIG. 3}} = 12 \cdot 12 - A_{\text{FIG. 1}} = 144 - 7{,}35 = 136{,}65 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 3 \cdot 7{,}35 + 187{,}20 + 3 \cdot 136{,}65 = 619{,}2 \text{ cm}^2$$

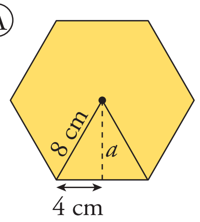
2 **Obtén la medida de la superficie del prisma y de la pirámide. La base de ambos es un hexágono regular.**



ARISTA BASE $\longrightarrow$ **8 cm** ARISTA BASE $\longrightarrow$ **8 cm**

ALTURA PRISMA $\longrightarrow$ **10 cm** ARISTA LATERAL $\longrightarrow$ **12 cm**

Ⓐ



$a = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93$ cm

$A_{BASE} = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6 = 166{,}32$ cm^2

$A_{LATERAL} = 6 \cdot 8 \cdot 10 = 480$ cm^2

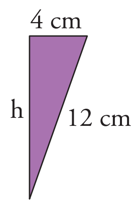
$A_{TOTAL} = 2 \cdot 166{,}32 + 480 = 812{,}64$ cm^2

Ⓑ $A_{BASE} = 166{,}32$ cm^2

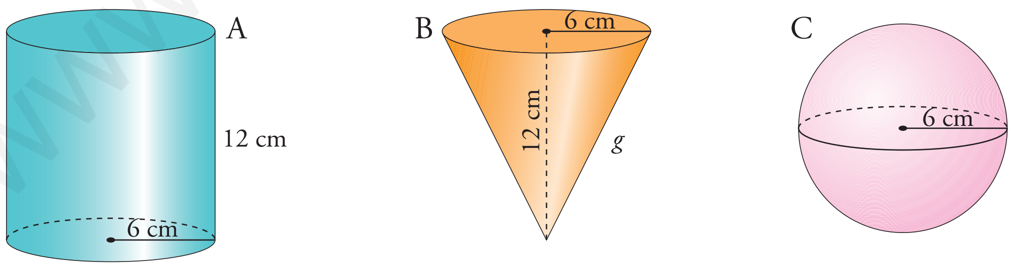
Apotema de la pirámide = h = $\sqrt{12^2 - 4^2} \approx 11{,}31$ cm

$A_{LATERAL} = \dfrac{8 \cdot 11{,}31 \cdot 6}{2} = 271{,}44$ cm^2

$A_{TOTAL} = 166{,}32 + 271{,}44 = 437{,}76$ cm^2



3 **Calcula el área de estos cuerpos:**



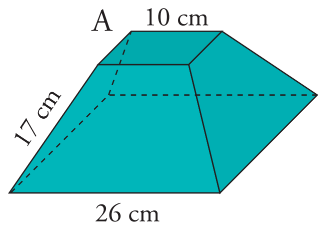
Ⓐ $A_{TOTAL} = 2\pi \cdot 6 \cdot 12 + 2\pi \cdot 6^2 \approx 678{,}58$ cm^2

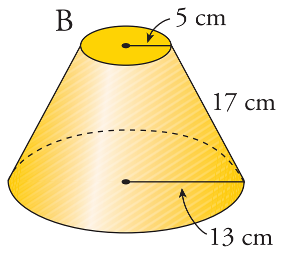
Ⓑ $g = \sqrt{12^2 + 6^2} \approx 13{,}42$ cm

$A_{TOTAL} = \pi \cdot 6 \cdot 13{,}42 + \pi \cdot 6^2 \approx 366{,}06$ cm^2

Ⓒ $A_{TOTAL} = 4\pi \cdot 6^2 \approx 452{,}39$ cm^2

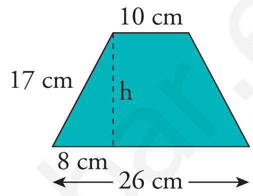
4 **Calcula el área de los siguientes cuerpos:**





Ⓐ $A_{\text{BASE GRANDE}} = 26^2 = 676 \text{ cm}^2$ $\quad A_{\text{BASE PEQUEÑA}} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$

$h = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15 \text{ cm}$

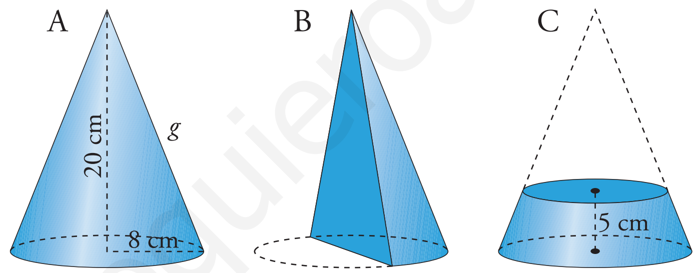


$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot \dfrac{26 + 10}{2} \cdot 15 = 1\,080 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 676 + 100 + 1\,080 = 1\,856 \text{ cm}^2$

Ⓑ $A = \pi \cdot 13^2 + \pi \cdot 5^2 + \pi(13 + 5) \cdot 17 = 530,93 + 78,54 + 961,33 = 1\,570,8 \text{ cm}^2$

5 **Calcula el área total del cono, del cuerpo que resulta de partirlo por la mitad y del tronco de cono obtenido al cortar por una sección paralela a la base, a 5 cm de la misma.**



Ⓐ $g = \sqrt{20^2 + 8^2} \approx 21,54 \text{ cm}$

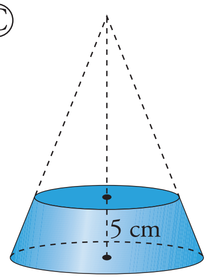
$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 8 \cdot 21,54 + \pi \cdot 8^2 = 742,42 \text{ cm}^2$

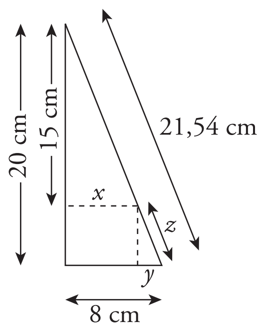
Ⓑ $A_{\text{BASE}} = \dfrac{\pi \cdot 8^2}{2} \approx 100,53 \text{ cm}^2$; $\quad A_{1/2 \text{ LATERAL}} = \dfrac{\pi \cdot 8 \cdot 21,54}{2} \approx 270,68 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{16 \cdot 20}{2} = 160 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 100,53 + 270,68 + 160 = 531,21 \text{ cm}^2$

Ⓒ





$\dfrac{20}{8} = \dfrac{15}{x} \rightarrow x = 6 \text{ cm}$

$y = 8 - 6 = 2 \text{ cm}$

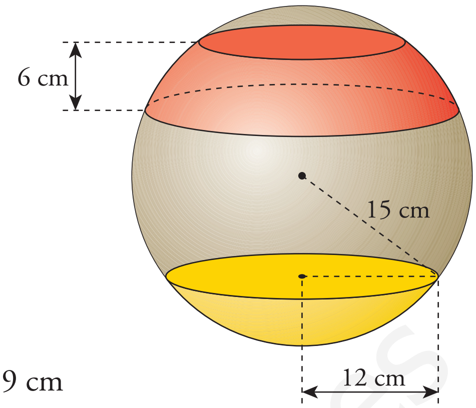
$z = \sqrt{5^2 + 2^2} \approx 5,39 \text{ cm}$

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot (8 + 6) \cdot 5,39 + \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 6^2 \approx 551,22 \text{ cm}^2$

6 **En una esfera de 30 cm de diámetro, calcula:**

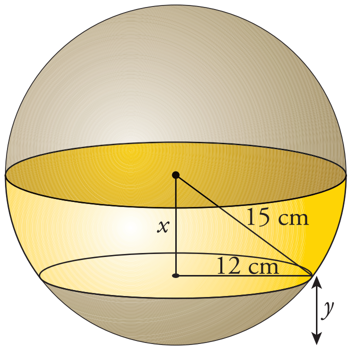
a) El área de una zona esférica de 6 cm de altura.

b) El área de un casquete esférico cuya base tiene un radio de 12 cm.



a) $A_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 \approx 565{,}49 \text{ cm}^2$

b)



$x = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm

$y = 15 - 9 = 6$ cm

$A_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 \approx 565{,}49 \text{ cm}^2$

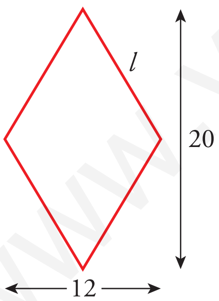
7 **Halla el área de:**

a) Un prisma recto cuya base es un rombo de diagonales 12 cm y 20 cm, sabiendo que su arista lateral mide 24 cm.

b) Una pirámide recta con la misma base y la misma arista lateral que el prisma anterior.

c) Un cuboctaedro de 10 cm de arista.

d) Un dodecaedro truncado de 10 cm de arista.



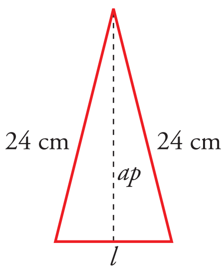
$l = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 11{,}66$ cm

$A_{\text{ROMBO}} = \dfrac{20 \cdot 12}{2} = 120 \text{ cm}^2$

$P_{\text{ROMBO}} = 46{,}65$ cm

a) $A_{\text{PRISMA}} = 2 \cdot A_{\text{ROMBO}} + P_{\text{ROMBO}} \cdot 24 = 1\,359{,}6 \text{ cm}^2$

b)



Cara lateral de la pirámide:

Apotema de la pirámide: $ap = \sqrt{24^2 + 34} = 4{,}97$

$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot l \cdot ap/2 = 115{,}90 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = 120 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PIRÁMIDE}} = 235{,}9 \text{ cm}^2$

c) 6 cuadrados $\rightarrow$ $A_1 = 6 \cdot 10^2 = 600$ cm^2

8 triángulos $\rightarrow$ $A_2 = 8 \cdot (10 \cdot 10\sqrt{3}/2) : 2 = 346{,}41$ cm^2

$A_{\text{TOTAL}} = 946{,}41$ cm^2

d) 12 pentágonos y 20 hexágonos.

Área de un pentágono de lado 10 cm:

$$A_1 = \frac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}88}{2} = 172 \text{ cm}^2$$

Área de un hexágono de lado 10 cm:

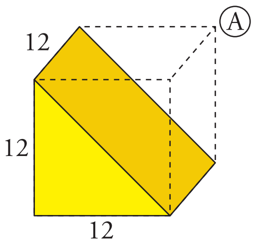
$$A_2 = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8{,}66}{2} = 259{,}80 \text{ cm}^2$$

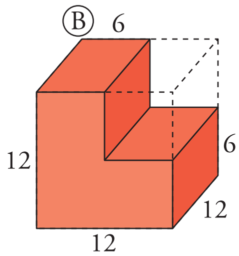
$A_{\text{TOTAL}} = 12 \cdot A_1 + 20 \cdot A_2 = 7\,260$ cm^2

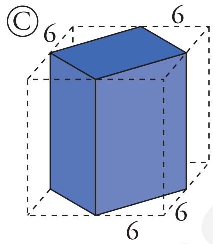
10 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 203

1 **Calcula el volumen de estos prismas, obtenidos cortando un cubo de 12 cm de arista:**

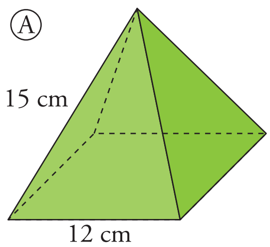


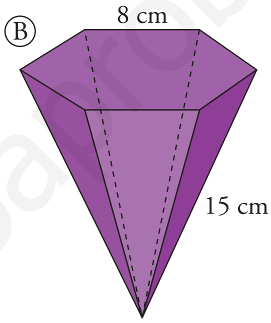


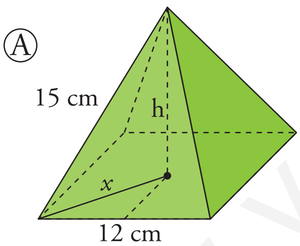


Ⓐ $V = \frac{12^3}{2} = 864 \text{ cm}^3$ Ⓑ $V = \frac{3}{4} \cdot 12^3 = 1\,296 \text{ cm}^3$ Ⓒ $V = \frac{12^3}{2} = 864 \text{ cm}^3$

2 **Calcula el volumen de estas pirámides cuyas bases son polígonos regulares:**



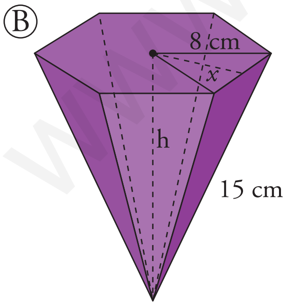




$$x = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}49 \text{ cm}$$

$$h = \sqrt{15^2 - 8{,}46^2} \approx 12{,}37 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 12{,}37 \approx 593{,}76 \text{ cm}^3$$

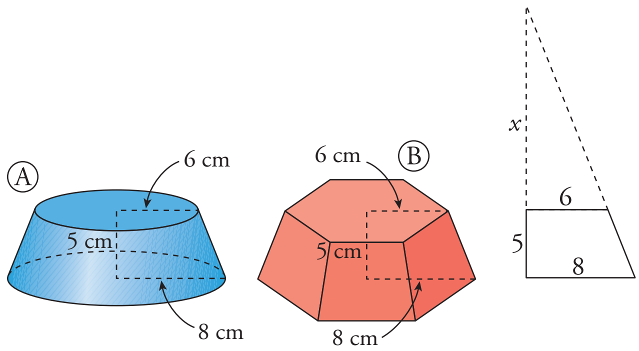


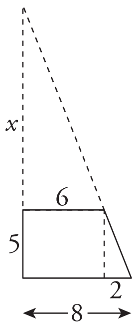
$$h = \sqrt{15^2 - 8^2} \approx 12{,}69 \text{ cm}$$

$$x = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6 \cdot 12{,}69 \approx 703{,}53 \text{ cm}^3$$

3 **Calcula el volumen del tronco de cono y el del tronco de pirámide.**



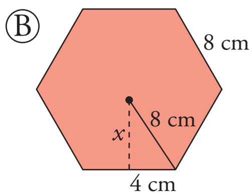


$$\frac{5}{2} = \frac{5+x}{8} \;\rightarrow\; x = 15 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO MAYOR}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 20 = 1\,340{,}41 \text{ cm}^3$$

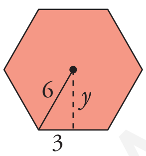
$$V_{\text{CONO MENOR}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 = 565{,}49 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 1\,340{,}41 - 565{,}49 = 774{,}92 \text{ cm}^3$$



$$x = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93 \text{ cm}$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6 \cdot 20 = 1\,108{,}8 \text{ cm}^3$$



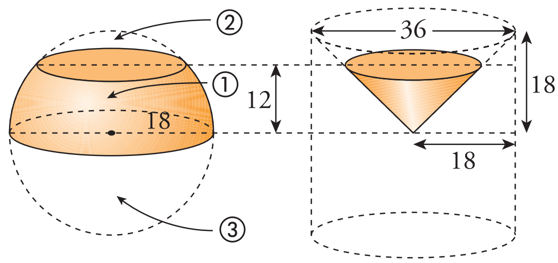
$$y = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}2 \text{ cm}$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} \cdot 6 \cdot 15 = 468 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = 1\,108{,}8 - 468 = 640{,}8 \text{ cm}^3$$

4 **Se corta una esfera de 36 cm de diámetro por dos planos paralelos: uno pasa por el centro y el otro dista 12 cm del centro.**

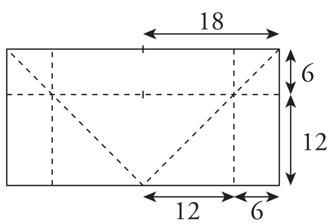
Calcula el volumen de cada una de las tres porciones en las que ha quedado dividida la esfera.



1) $V_{\text{PORCIÓN (1) CILINDRO}} = \pi \cdot 18^2 \cdot 12 = 3\,888\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO (1) CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12 = 576\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (1) ESFERA}} = 3\,888\pi - 576\pi \approx 10\,404{,}95 \text{ cm}^3$



Soluciones a las actividades de cada epígrafe

2) $V_{\text{PORCIÓN (2) CILINDRO}} = \pi \cdot 18^2 \cdot 6 = 1\,944\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (2) CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 18^2 \cdot 18 - \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12 = 1\,368\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (2) ESFERA}} = 1\,944\pi - 1\,368\pi \approx 1\,809{,}56 \text{ cm}^3$

3) $V_{\text{PORCIÓN (3) ESFERA}} = \dfrac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 18^3}{2} = 12\,214{,}51 \text{ cm}^3$

PÁGINA 205

1 El metro, unidad de medida de longitud, se definía antiguamente como *la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre*. Es decir, un meridiano terrestre tiene 40 000 000 de metros. Según esto:

a) Calcula el radio de la Tierra en kilómetros.

b) Su superficie en kilómetros cuadrados.

c) Su volumen en kilómetros cúbicos.

d) Calcula el área de un huso horario.

a) Meridiano = Perímetro = $2\pi \cdot R = 40\,000\,000$ m = 40 000 km

$R \approx 6\,366{,}2$ km

b) Superficie = $4\pi \cdot (6\,366{,}2)^2 = 509\,296\,182{,}1$ km^2

c) Volumen = $\frac{4}{3}\pi \cdot (6\,366{,}2)^3 = 1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3

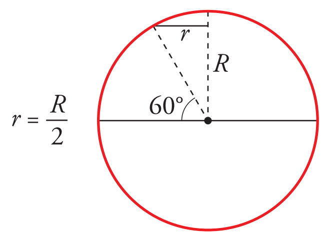
d) Área huso horario = $\frac{509\,296\,182{,}1}{24} = 21\,220\,674{,}25$ km^2

2 Los paralelos son circunferencias menores. Calcula lo que mide el perímetro de los siguientes paralelos:

a) 60°

b) 30°

c) 45°



a) R = radio de la tierra = 6 366,2 km

r = radio del paralelo 60° = $\frac{R}{2} = 3\,183{,}1$ km

Perímetro = $2\pi \cdot 3\,183{,}1 \approx 20\,000$ km

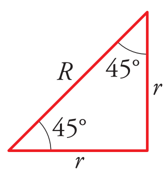
b) r = radio del paralelo 30° = $\sqrt{(6\,366{,}2)^2 - (3\,183{,}1)^2} \approx 5\,513{,}3$ km

Perímetro = $2\pi \cdot 5\,513{,}3 \approx 34\,641{,}1$ km

c) r = radio del paralelo 45°

$r^2 + r^2 = R^2 \ \rightarrow\ 2r^2 = 6\,366{,}2^2 \ \rightarrow\ r = 4\,501{,}58$ km

Perímetro = $2\pi \cdot 4\,501{,}58 = 28\,284{,}26$ km



3 Un barco va de un punto A, situado en las costas de África de 30° latitud norte y 10° longitud oeste, a otro B, en las costas de América de 30° latitud norte y 80° longitud oeste, siguiendo el paralelo común.

a) ¿Qué distancia ha recorrido?

b) ¿Qué distancia recorrería si la diferencia de longitudes de los dos puntos fuera de 180°?

c) ¿Qué distancia recorrería en este último caso si pudiera navegar de un punto a otro siguiendo un arco de círculo máximo?

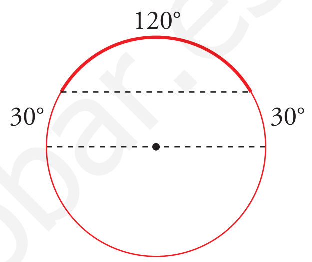
a) Entre A y B hay un arco de 80° – 10° = 70°.

Como hemos visto en el ejercicio anterior (ejercicio 2), el perímetro del paralelo 30° es 34 641,1 km.

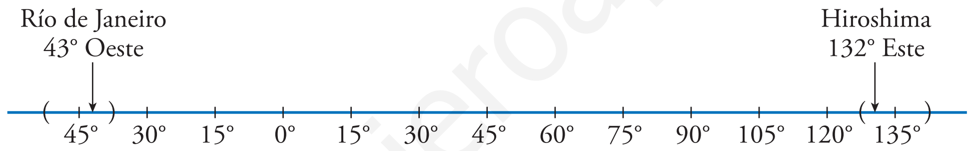
Por tanto, la distancia de A a B es $\frac{34\,641{,}1}{360°} \cdot 70° \approx 6\,735{,}77$ km.

b) $\frac{34\,641{,}1}{2} = 17\,320{,}55$ km

c) $40\,000 \cdot \frac{120°}{360°} = 13\,333{,}33$ km



4 En Río de Janeiro (43° O) son las 7 de la mañana. ¿Qué hora es en Hiroshima (132° E)?



Hay 12 horas de diferencia. Por tanto, en Hiroshima son las 7 de la tarde.

Otra forma de hacerlo es:

132° = 15° · 8 + 12

Hiroshima está en el huso horario número 9 al este.

43° = 15° · 2 + 13

Río de Janeiro está en el huso horario número 3 al oeste.

Están, pues, a 12 husos horarios de diferencia.

Por tanto, en Hiroshima son las 7 de la tarde (19 h).

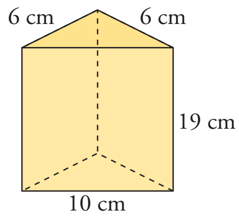
PÁGINA 209

Practica

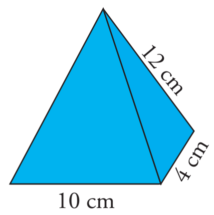
Desarrollos y áreas

1 ▼▽▽ **Dibuja el desarrollo plano y calcula el área total de los siguientes cuerpos geométricos:**

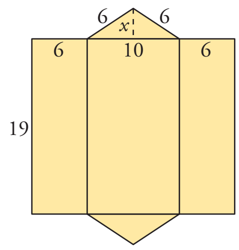
a)



b)



a)



Hallamos la altura de la base:

$6^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow 36 = x^2 + 25 \rightarrow x^2 = 36 - 25 = 11 \rightarrow$

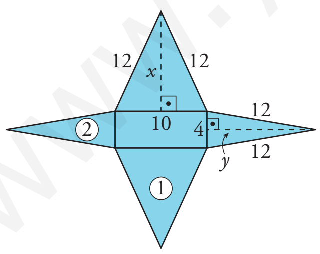
$\rightarrow x = \sqrt{11} \approx 3,3$ cm

Área base $= \dfrac{10 \cdot 3,3}{2} = 16,5$ cm^2

Área lateral = (Perímetro base) · altura = $22 \cdot 19 = 418$ cm^2

Área total = $418 + 2 \cdot 16,5 = 451$ cm^2

b) Hallamos x e y (alturas de las caras laterales):



$12^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow 144 = x^2 + 25 \rightarrow x^2 = 119 \rightarrow$

$\rightarrow x \approx 10,9$ cm

$12^2 = y^2 + 2^2 \rightarrow y^2 = 140 \rightarrow y \approx 11,8$ cm

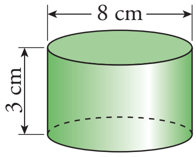
Área de las caras laterales:

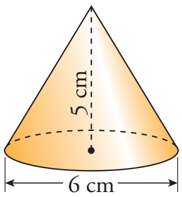
$A_{①} = \dfrac{10 \cdot 10,9}{2} = 54,5$ cm^2; $A_{②} = \dfrac{4 \cdot 11,8}{2} = 23,6$ cm^2

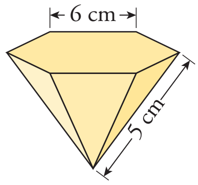
Área de la base = $10 \cdot 4 = 40$ cm^2

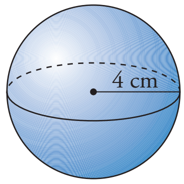
Área total = $40 + 2 \cdot 54,5 + 2 \cdot 23,6 = 196,2$ cm^2

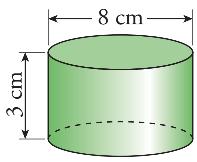
2 ▼▽▽ **Calcula la superficie total de cada cuerpo:**

a) 

b) 

c) 

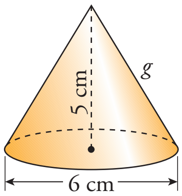
d) 

a) 

Área base = $\pi \cdot 4^2 \approx 50{,}27$ cm^2

Área lateral = $2\pi \cdot 4 \cdot 3 \approx 75{,}4$ cm^2

Área total = $2 \cdot 50{,}27 + 75{,}4 = 175{,}94$ cm^2

b) 

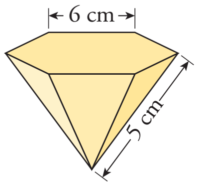
Área base = $\pi \cdot 3^2 \approx 28{,}27$ cm^2

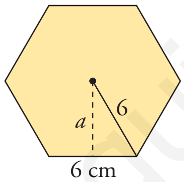
Hallamos la generatriz:

$g^2 = 5^2 + 3^2 \;\rightarrow\; g \approx 5{,}83$ cm

Área lateral = $\pi \cdot 3 \cdot 5{,}83 \approx 54{,}95$ cm^2

Área total = $28{,}27 + 54{,}95 = 83{,}22$ cm^2

c) 



Apotema del hexágono:

$a^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \;\rightarrow\; a = \sqrt{27} \approx 5{,}2$ cm

Área del hexágono:

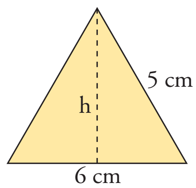
$\dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6$ cm^2

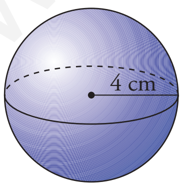
Altura del triángulo:

$h^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \;\rightarrow\; h = 4$ cm

Área de un triángulo = $\dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12$ cm^2

Área total = $93{,}6 + 6 \cdot 12 = 165{,}6$ cm^2



d) 

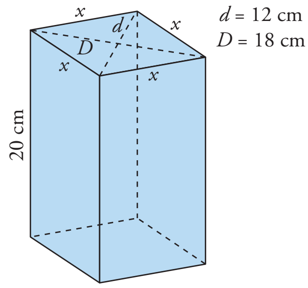
Área de la superficie esférica = $4\pi \cdot 4^2 = 201{,}1$ cm^2

3 ▼▽▽ **Dibuja los siguientes cuerpos geométricos y calcula su área:**

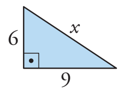
a) Prisma de altura 20 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 cm y 12 cm.

b) Pirámide hexagonal regular de arista lateral 18 cm y arista básica 6 cm.

a)



Hallamos el lado del rombo:



$x^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117$

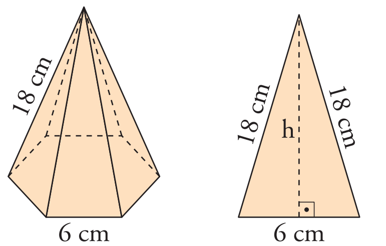
$x = \sqrt{117} \approx 10,82$ cm

Área lateral $= 4(20 \cdot 10,82) = 865,6$ cm^2

Área base $= \dfrac{18 \cdot 12}{2} = 108$ cm^2

Área total $= 865,6 + 108 \cdot 2 = 1\,081,6$ cm^2

b)



Área de una cara lateral:

$h^2 = 18^2 - 3^2 \rightarrow$

$\rightarrow h^2 = 315 \rightarrow h = \sqrt{315} \approx 17,75$ cm

Área $= \dfrac{6 \cdot 17,75}{2} = 53,25$ cm^2

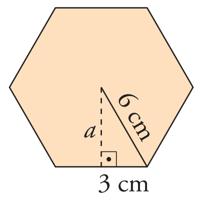
Área lateral $= 6 \cdot 53,25 = 319,5$ cm^2

Área de la base:

$a^2 = 6^2 - 3^2 \rightarrow a^2 = 27 \rightarrow a = \sqrt{27} \approx 5,2$ cm

Área $= \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5,2}{2} = 93,6$ cm^2

Área total $= 319,5 + 93,6 = 413,1$ cm^2

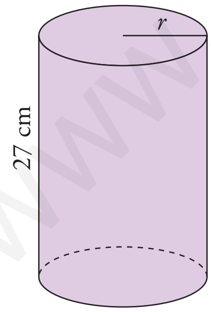


4 ▼▽▽ **Dibuja los siguientes cuerpos geométricos y calcula su área:**

a) Cilindro de altura 27 cm y cuya circunferencia básica mide 44 cm.

b) Tronco de cono generado al girar, alrededor de su altura, un trapecio rectángulo de bases 10 cm y 12 cm y altura 5 cm.

a)



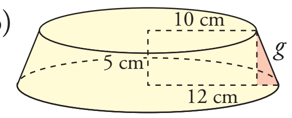
Radio de la base: $2\pi r = 44 \rightarrow r = \dfrac{44}{2\pi} = \dfrac{22}{\pi}$

Área base $= r^2 = \pi \cdot \left(\dfrac{22}{\pi}\right)^2 = 154,1$ cm^2

Área lateral $= (2\pi r) \cdot h = 2\pi \cdot \dfrac{22}{\pi} \cdot 27 = 1\,188$ cm^2

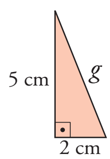
Área total $= 2 \cdot 154,1 + 1\,188 = 1\,496,2$ cm^2

b)



Área base menor $= \pi \cdot 10^2 = 100\pi \approx 314$ cm^2

Área base mayor $= \pi \cdot 12^2 = 144\pi \approx 452,16$ cm^2



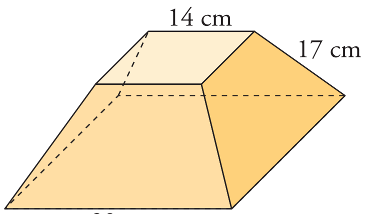
Área lateral $= \pi(r + r') \cdot g$

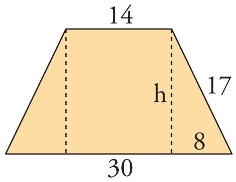
$g^2 = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29 \rightarrow g = \sqrt{29} \approx 5,39$ cm

Área lateral $= \pi(10 + 12) \cdot 5,39 \approx 372,34$ cm^2

Área total $= 372,34 + 314 + 452,16 = 1\,138,50$ cm^2

5 ▼▽▽ **Halla el área total de un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas bases tienen de lado 30 cm y 14 cm y cuya arista lateral mide 17 cm.**





- Área base menor $= 14^2 = 196 \text{ cm}^2$
- Área base mayor $= 30^2 = 900 \text{ cm}^2$
- Área lateral:

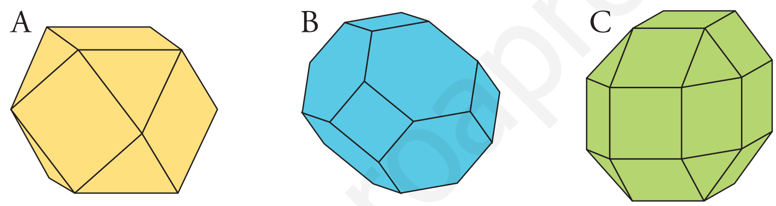
  $30 - 14 = 16 \quad 8 \quad 16 : 2 = 8$

  $h^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \;\rightarrow\; h = 15 \text{ cm}$

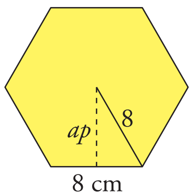
  $\text{Área trapecio} = \dfrac{(14 + 30) \cdot 15}{2} = 330 \text{ cm}^2$

  $\text{Área lateral} = 4 \cdot 330 = 1\,320 \text{ cm}^2$
- Área total $= 196 + 900 + 1\,320 = 2\,416 \text{ cm}^2$

6 ▼▽▽ **Calcula el área total de los siguientes poliedros semirregulares de arista 8 cm:**



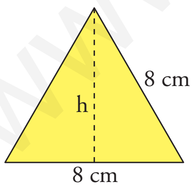
- Área de un hexágono regular de 8 cm de lado:



$ap^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \;\rightarrow\; ap = \sqrt{48} \approx 6{,}93 \text{ cm}$

$\text{Área} = \dfrac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}93}{2} = 166{,}32 \text{ cm}^2$

- Área de un triángulo equilátero de 8 cm de lado:

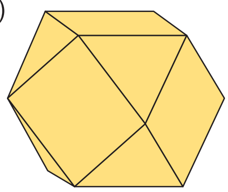


$h^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \;\rightarrow\; h = \sqrt{48} \approx 6{,}93 \text{ cm}$

$\text{Área} = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ cm}^2$

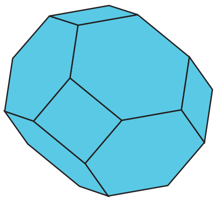
ÁREAS DE LOS POLIEDROS

A)



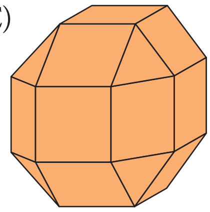
Seis cuadrados y ocho triángulos.

$A = 6 \cdot 8^2 + 8 \cdot 27{,}72 = 605{,}76 \text{ cm}^2$

B) 

Seis cuadrados y ocho hexágonos.

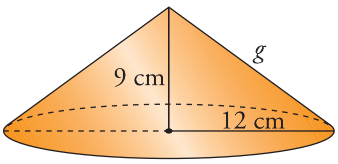
$A = 6 \cdot 8^2 + 8 \cdot 166{,}32 = 1\,714{,}56 \text{ cm}^2$

C) 

Tiene 18 cuadrados y 8 triángulos.

$A = 18 \cdot 8^2 + 8 \cdot 27{,}72 = 1\,373{,}76 \text{ cm}^2$

7 ▼▽▽ **Haciendo girar un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 9 cm y 12 cm alrededor de cada uno de ellos, se obtienen dos conos. Dibújalos y halla el área total de cada uno de ellos.**

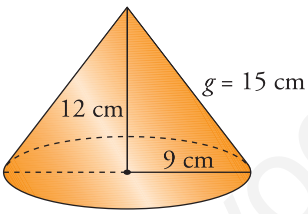
a) 

- Área base $= \pi \cdot 12^2 = 144\pi \text{ cm}^2$
- Área lateral:

  $g^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \rightarrow g = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$

  $A = \pi \cdot 12 \cdot 15 = 180\pi \text{ cm}^2$

- Área total $= 144 \cdot \pi + 180\pi = 324\pi \approx 1\,017{,}88 \text{ cm}^2$

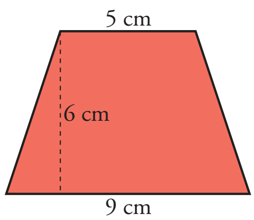
b) 

Área base $= \pi \cdot 9^2 = 81\pi \text{ cm}^2$

Área lateral $= \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi \text{ cm}^2$

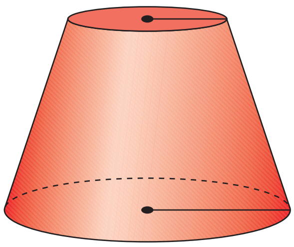
Área total $= 81\pi + 135\pi = 216\pi \approx 678{,}58 \text{ cm}^2$

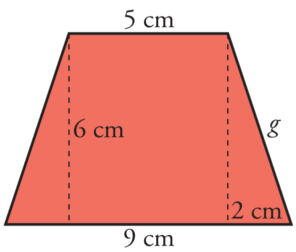
8 ▼▽▽ **Calcula el área total del tronco de cono generado al girar este trapecio isósceles alrededor de una recta perpendicular a sus bases en su punto medio:**



Calculamos la generatriz:

$g^2 = 6^2 + 2^2 \rightarrow g = \sqrt{40} \approx 6{,}32 \text{ cm}$





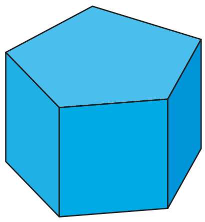
- Área lateral $= \pi(r + r')g = \pi(4{,}5 + 2{,}5) \cdot 6{,}32 = 138{,}98 \text{ cm}^2$
- Área de las bases $= \pi \cdot 4{,}5^2 + \pi \cdot 2{,}5^2 = 83{,}25 \text{ cm}^2$
- Área total $= 138{,}98 + 83{,}25 = 222{,}23 \text{ cm}^2$

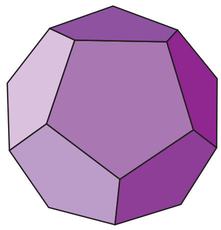
10 Soluciones a "Ejercicios y problemas"

9 ▼▽▽ **Calcula la superficie de:**

a) Un prisma recto pentagonal regular cuyas aristas miden, todas, 10 cm.

b) Un dodecaedro regular de arista 10 cm.





a) Apotema del pentágono = 6,88 cm

$S_{BASE} = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}88}{2} = 172 \text{ cm}^2$ $\qquad S_{LATERAL} = 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500 \text{ cm}^2$

$S_{TOTAL} = 172 \cdot 2 + 500 = 844 \text{ cm}^2$

b) $S_{TOTAL} = S_{PENTÁGONO} \cdot 12 = 172 \cdot 12 = 2\,064 \text{ cm}^2$

Volúmenes

10 ▼▽▽ **Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:**

a) Octaedro regular de arista 10 cm.

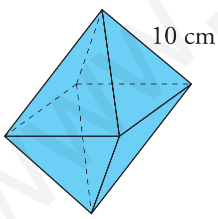
b) Pirámide hexagonal regular cuya arista lateral mide 15 cm y la arista de la base 8 cm.

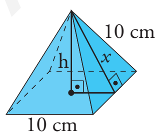
c) Cono de radio 9 cm y generatriz 15 cm.

d) Semiesfera de radio 10 cm.

e) Cilindro inscrito en un prisma recto de base cuadrada de lado 6 cm y altura 18 cm.

a) Podemos descomponerlo en dos pirámides cuadrangulares de arista 10 cm.





$x^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \;\rightarrow\; x = \sqrt{75}$ cm

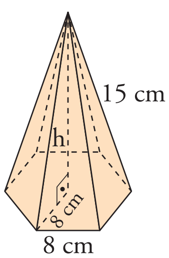
$h^2 = x^2 - 5^2 = 75 - 25 = 50 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; h = \sqrt{50} \approx 7{,}07$ cm

Volumen de la pirámide: $V = \dfrac{1}{3}(\text{Área base}) \cdot \text{altura} = \dfrac{1}{3}10^2 \cdot 7{,}07 \approx 235{,}67 \text{ cm}^3$

Volumen del octaedro $= 2 \cdot 235{,}67 \approx 471{,}34 \text{ cm}^3$

b)



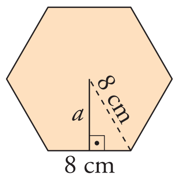
- Calculamos la altura de la pirámide:

  $h^2 = 15^2 - 8^2 = 161 \;\rightarrow\; h = \sqrt{161} \approx 12{,}69$ cm

- Hallamos el área de la base:

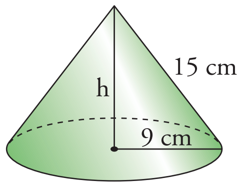
  $a^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \;\rightarrow\; a = \sqrt{48} \approx 6{,}93$ cm

- Área $= \dfrac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}93}{2} = 166{,}32 \text{ cm}^2$



- Volumen $= \frac{1}{3}(\text{Área base}) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 166{,}32 \cdot 12{,}69 \approx 703{,}53 \text{ cm}^3$

c)

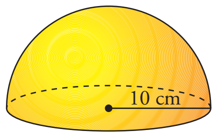


- Hallamos la altura:

$h^2 = 15^2 - 9^2 = 144 \;\rightarrow\; h = \sqrt{144} = 12$ cm

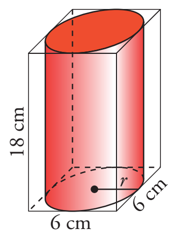
- Área de la base $= \pi R^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$
- Volumen $= \frac{1}{3}(\text{Área base}) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 12 = 36\pi \approx 113{,}1 \text{ cm}^3$

d)



$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4\,000\pi}{6} \approx 2\,094{,}4 \text{ cm}^3$$

e)



Radio del cilindro = 3 cm

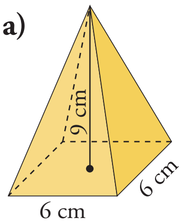
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 18 = 162\pi \approx 508{,}94 \text{ cm}^3$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

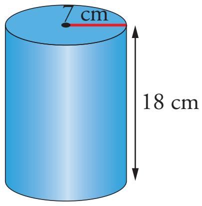
PÁGINA 210

11 ▼▽▽ **Calcula el volumen de estos cuerpos:**

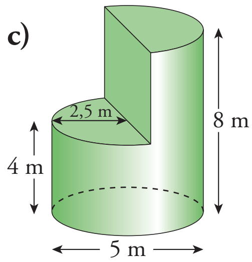
a)



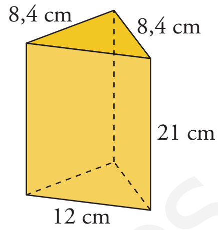
b)



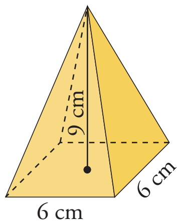
c)



d)



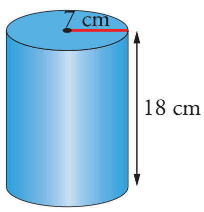
a)



$$V = \frac{1}{3} 6^2 \cdot 9 \text{ cm}^3$$

$$V = 108 \text{ cm}^3$$

b)

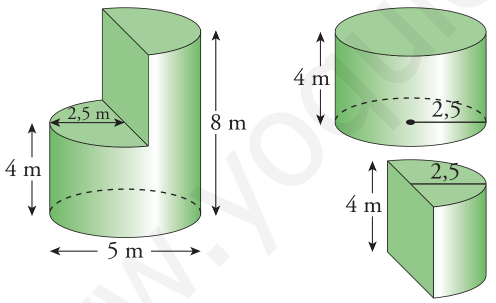


$$V = \pi R^2 \text{h}$$

$$V = \pi \cdot 7^2 \cdot 18 = 882\pi \text{ cm}^3$$

$$V = 2\,770{,}88 \text{ cm}^3$$

c)



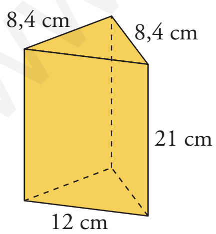
$$V_1 = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 4 = 25\pi \text{ m}^3$$

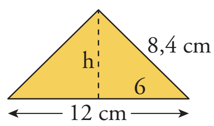
$$V_2 = \frac{\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 4}{2} = 12{,}5\pi \text{ m}^3$$

Volumen total:

$25\pi + 12{,}5\pi \approx 117{,}81 \text{ m}^3$

d)



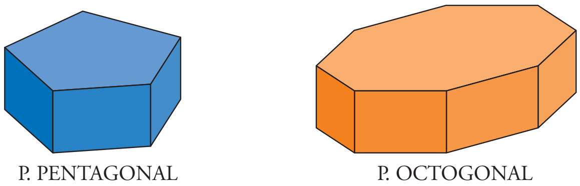


$\text{h}^2 = 8{,}4^2 - 6^2 = 34{,}56 \;\rightarrow\; \text{h} \approx 5{,}88 \text{ cm}$

Área de la base $= \dfrac{12 \cdot 5{,}88}{2} = 35{,}28 \text{ cm}^2$

Volumen = Área base · altura $= 35{,}28 \cdot 25 = 740{,}88 \text{ cm}^3$

12 ▼▽▽ **Calcula el volumen de estos dos prismas regulares. En ambos, la arista de la base mide 10 cm y la altura, 8 cm.**



Apotema del pentágono = 6,88 cm

Apotema del octógono = 12,07 cm

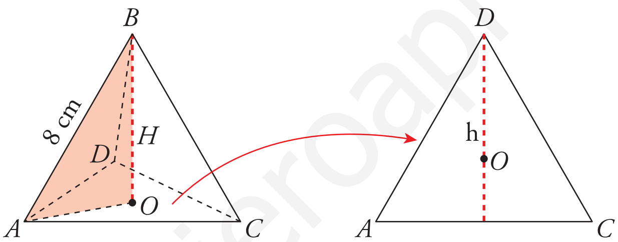
Superficie de la base del prisma pentagonal = $\dfrac{10 \cdot 5 \cdot 6{,}88}{2} \approx 172 \text{ cm}^2$

Superficie de la base del prisma octogonal = $\dfrac{10 \cdot 8 \cdot 12{,}07}{2} \approx 482{,}8 \text{ cm}^2$

$V_{\text{PRISMA PENTAGONAL}} = 172 \cdot 8 = 1\,376 \text{ cm}^3$

$V_{\text{PRISMA OCTOGONAL}} = 482{,}8 \cdot 8 = 3\,862{,}4 \text{ cm}^3$

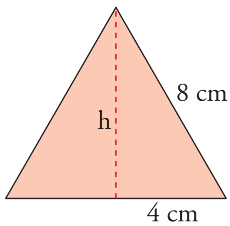
13 ▼▼▽ **Calcula el volumen de este tetraedro regular:**



☞ ***Para hallar la altura H, recuerda que $\overline{AO} = \frac{2}{3}$h, donde h es la altura de una cara.***

$h^2 = 8^2 - 4^2 = 48$

$$\left.\begin{array}{l} h = \sqrt{48} \approx 6{,}93 \\ \overline{AO} = \dfrac{2}{3} \cdot 6{,}93 = 4{,}62 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Área de la base:} \\ A = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ cm}^2 \end{array}$$

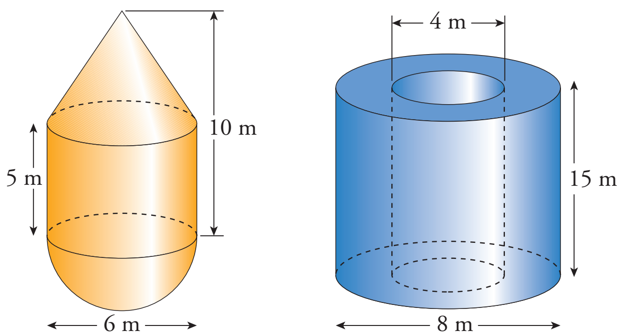


Calculamos la altura del tetraedro:

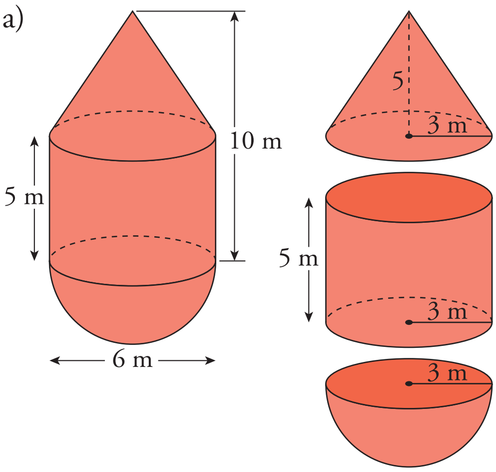
$H^2 = 8^2 - 4{,}62^2 \ \rightarrow \ H \approx 6{,}53 \text{ cm}$

Volumen = $\dfrac{1}{3} \cdot 27{,}72 \cdot 6{,}53 = 60{,}34 \text{ cm}^3$

14 ▼▽▽ **Calcula el volumen de estos cuerpos:**



a)



$$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 15\pi \text{ m}^3$$

$$V_{\text{CILINDRO}} = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 45\pi \text{ m}^3$$

$$V_{\text{SEMIESFERA}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi \text{ m}^3$$

$$V_{\text{TOTAL}} = 15\pi + 45\pi + 18\pi = 78\pi \approx 245{,}04 \text{ m}^3$$

b) $V_{\text{CILINDRO GRANDE}} = \pi \cdot R^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 15 = 240\pi \text{ m}^3$

$V_{\text{CILINDRO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 2^2 \cdot 15 = 60\pi \text{ m}^3$

$V_{\text{TOTAL}} = 240\pi - 60\pi = 180\pi \approx 565{,}49 \text{ m}^3$

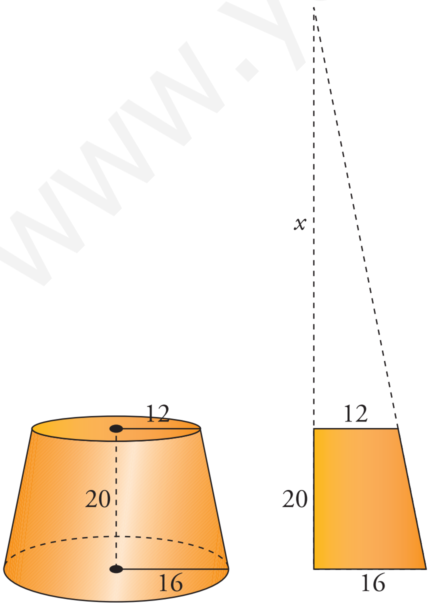
15 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno

16 ▼▼▽ **Calcula el volumen de un tronco de cono de radios 12 cm y 16 cm y altura 20 cm.**

Calculamos las alturas de los conos que forman el tronco:

$$\frac{x}{12} = \frac{x+20}{16} \to 16x = 12x + 240 \to 4x = 240 \to x = 60 \text{ cm} \to$$

$$\to h = 20 + 60 = 80 \text{ cm}$$



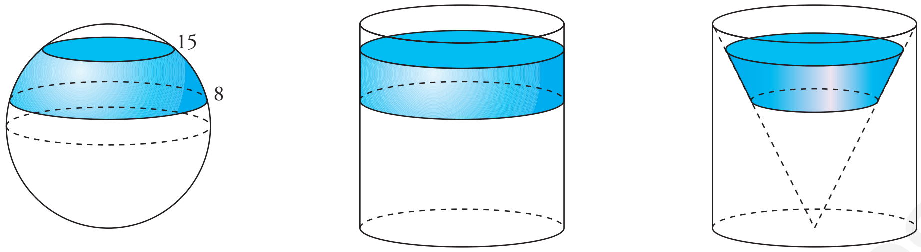
$$V_{\text{TRONCO}} = V_{\text{CONO MAYOR}} - V_{\text{CONO MENOR}} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 80 - \frac{1}{3}\pi \cdot 12 \cdot 60 =$$

$$= \frac{560}{3}\pi \approx 586{,}43 \text{ cm}^3$$

17 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno

18 ▼▼▼ **Se corta una esfera de 50 cm de diámetro por dos planos paralelos a 8 cm y 15 cm del centro, respectivamente. Halla el volumen de la porción de esfera comprendida entre ambos planos.**



$V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} = \pi \cdot 50^2(15 - 8) = 17\,500\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 50^2 \cdot 15 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 50^2 \cdot 8 = 5\,833{,}33\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN ESFERA}} = V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO CONO}} =$

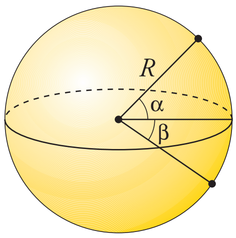
$= 17\,500\pi - 5\,833{,}33\pi = 11\,666{,}67\pi \text{ cm}^3 \approx 36\,651{,}9 \text{ cm}^3$

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

PÁGINA 211

Coordenadas geográficas

19 ▼▽▽ **Dos ciudades tienen la misma longitud, 15° E, y sus latitudes son 37° 25' N y 22° 35' S. ¿Cuál es la distancia entre ellas?**



$\alpha = 37° \ 25'$

$\beta = 22° \ 35'$

Tenemos que hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de $\alpha + \beta = 37° \ 25' + 22° \ 35' = 60°$

$$\text{Distancia} = \frac{2\pi R \cdot 60°}{360°} = \frac{2\pi \cdot 6\,370 \cdot 60}{360} \approx 6\,670{,}65 \text{ km}$$

20 ▼▽▽ **Cuando en el huso 0 son las 8 a.m., ¿qué hora es en el tercer huso al E? ¿Y en el quinto al O?**

En el huso 3° E son tres horas más, es decir, las 11 a.m.

En el huso 5° O son cinco horas menos, es decir, las 3 a.m.

21 ▼▽▽ **La "milla marina" es la distancia entre dos puntos del ecuador cuya diferencia de longitudes es 1'. Calcula la longitud de una "milla marina".**

$1' = \frac{1}{60}$ grados; radio de la Tierra: $R \approx 6\,370$ km

$$\text{Milla marina} \ \rightarrow \ \frac{2\pi R \cdot \frac{1}{60}}{360} = \frac{2\pi R}{21\,600} \approx \frac{2\pi \cdot 6\,370}{21\,600} \approx 1{,}85 \text{ km}$$

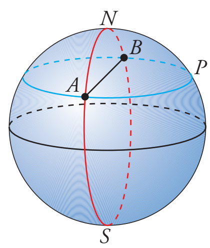
22 ▼▼▽ **Roma está en el primer huso al E y Nueva York, en el quinto al O. Si un avión sale de Roma a las 11 p.m. y el vuelo dura 8 h, ¿cuál será la hora local de llegada a Nueva York?**

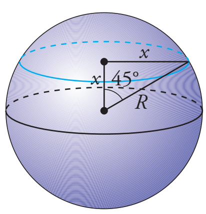
5 + 1 = 6 horas menos en Nueva York que en Roma.

11 p.m. + 8 = 19 $\rightarrow$ 7 a.m. hora de Roma.

19 – 6 = 13 p.m. = 1 a.m. es la hora de llegada a Nueva York.

23 ▼▼▽ **Un avión tiene que ir de *A* a *B*, dos lugares diametralmente opuestos en el paralelo 45°. Puede hacerlo siguiendo el paralelo (*APB*) o siguiendo la ruta polar (*ANB*). ¿Cuál es la más corta?**





- Hallamos el radio del paralelo 45°:

$$R^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \ \rightarrow \ x^2 = \frac{R^2}{2} \ \rightarrow \ x = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{6\,370}{\sqrt{2}} \approx 4\,504{,}27 \text{ km}$$

Por tanto, la longitud del arco *APB*, es:

$$L_{APB} = \frac{2\pi \cdot 4\,504{,}27}{2} \approx \pi \cdot 4\,504{,}27 \approx 14\,143{,}41 \text{ km}$$

- El radio de la Tierra es $R \approx 6\,370$ km.

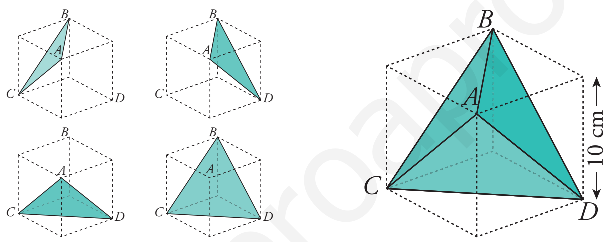
  Para ir de *A* a *B* por la ruta *ANB*, se abarca un ángulo de 45° + 45° = 90° sobre el meridiano. Por tanto, la longitud del arco *ANB* es:

$$L_{ANB} = \frac{2\pi R \cdot 90°}{360°} = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2} \approx \frac{\pi \cdot 6\,370}{2} \approx 10\,000{,}9 \text{ km}$$

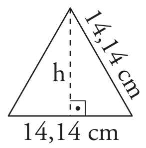
- La ruta más corta es la polar.

Piensa y resuelve

24 ▼▽▽ **¿Cuál es la superficie del mayor tetraedro que cabe dentro de un cubo de 10 cm de arista?**



El lado, *x*, de los triángulos equiláteros que forman el tetraedro es la diagonal de una de las caras del cubo.



$$x = \sqrt{10^2 + 10^2} \approx 14{,}14 \text{ cm}$$

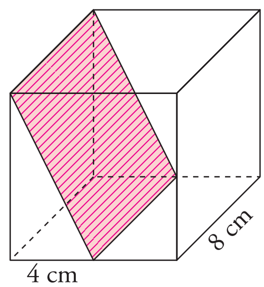
$$h = \sqrt{14{,}14^2 - 7{,}07^2} \approx 12{,}25 \text{ cm}$$

El área del triángulo es: $A = \dfrac{14{,}14 \cdot 12{,}25}{2} \approx 86{,}61 \text{ cm}^2$

El área del tetraedro es: $A_T = 4 \cdot 86{,}61 = 346{,}44 \text{ cm}^2$

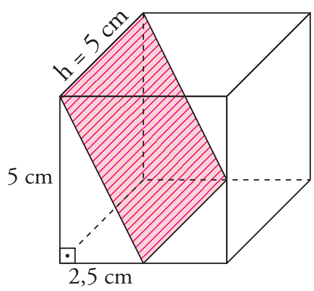
25 ▼▽▽ **Seccionamos un cubo como indica la figura.**

¿Cuál es el volumen de las partes seccionadas?



- Tomamos como base el triángulo rectángulo:

  Área base $= \dfrac{5 \cdot 2{,}5}{2} = 6{,}25 \text{ cm}^2$



- El volumen de la menor parte seccionada será:

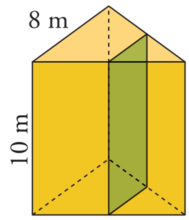
  $V = (\text{Área base}) \cdot h = 6{,}25 \cdot 5 = 31{,}25 \text{ cm}^3$

- Volumen de la parte mayor seccionada:

  $V = 5^3 - 31{,}25 = 93{,}75 \text{ cm}^3$

10 Soluciones a "Ejercicios y problemas"

26 ▼▼▽ **Cortamos un prisma triangular regular por un plano perpendicular a las bases y que pasa por el punto medio de dos aristas. Calcula el volumen de los dos prismas que se obtienen.**



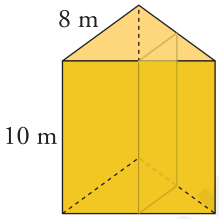
- Área del triángulo equilátero de lado 8 m:

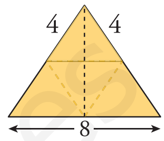
  $h^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \rightarrow h \approx 6{,}93$ m

  $A = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} \approx 27{,}71 \text{ m}^2$

- Área del triángulo equilátero de lado 4 cm:

  $A' = \dfrac{A}{4} = 6{,}93 \text{ m}^2$





- Volumen del prisma pequeño:

  $V_1 = (A_{\text{BASE}}) \cdot h = 6{,}93 \cdot 10 = 69{,}3 \text{ m}^3$

- Para obtener el volumen del prisma grande, restamos V_1 al volumen del prisma triangular inicial:

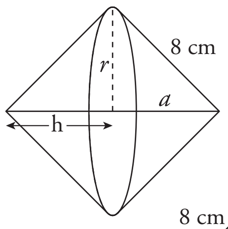
  $V = 27{,}71 \cdot 10 - 6{,}93 \cdot 10 = 207{,}8 \text{ m}^3$

27 ▼▼▽ **Un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 8 cm, se hace girar alrededor de la hipotenusa. Halla el volumen del cuerpo que se forma.**

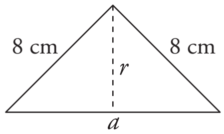
Se forman dos conos iguales cuya altura es la mitad de la hipotenusa.

$a^2 = 8^2 + 8^2 = 128 \rightarrow a = 11{,}31$ cm

$r^2 = 8^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = 64 - 32 = 32 \rightarrow r \approx 5{,}66$ cm

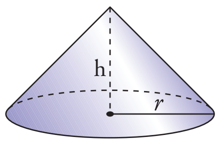


Radio de la base: $r = 5{,}66$ cm



Altura $= h = \dfrac{a}{2} = \dfrac{11{,}31}{2} = 5{,}56$ cm

$V_{\text{CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5{,}66 \cdot 5{,}66 = 189{,}67 \text{ cm}^3$

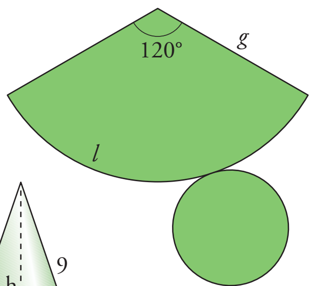


$V_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 189{,}67 = 379{,}34 \text{ cm}^3$

28 ▼▼▽ **El desarrollo de la superficie lateral de un cono es un sector circular de 120° de amplitud y cuya área es 84,78 cm². Halla el área total y el volumen del cono.**

- Generatriz del cono:

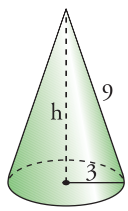
  $\dfrac{\pi g^2}{84{,}78} = \dfrac{360}{120} \rightarrow g^2 = \dfrac{3 \cdot 84{,}78}{\pi} \rightarrow g \approx 9$ cm



- Radio de la base: $2\pi r = l$

  $\dfrac{2 \cdot \pi \cdot 9}{l} = \dfrac{360}{120} \rightarrow 18\pi = 3l \rightarrow l = 6\pi$ cm

  $2\pi r = 6\pi \rightarrow r = 3$ cm

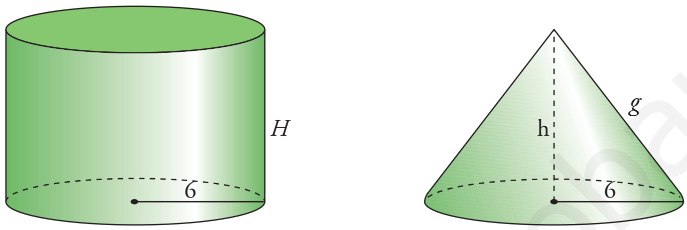


- Área base = $\pi \cdot 3^2 = 9\pi \approx 28{,}27$
- Área lateral = $84{,}78$

$\left.\right\}$ Área total = $28{,}27 + 84{,}78 = 113{,}05$ cm²

- Altura del cono: $h^2 = 9^2 - 3^2 = 72 \rightarrow h \approx 8{,}49$ cm
- Volumen cono = $\frac{1}{3}$(Área base) $\cdot h = \frac{1}{3} 28{,}27 \cdot 8{,}49 \approx 80$ cm³

29 ▼▼▽ **Un cilindro y un cono tienen la misma superficie total, 96π cm², y el mismo radio, 6 cm. ¿Cuál de los dos tendrá mayor volumen?**



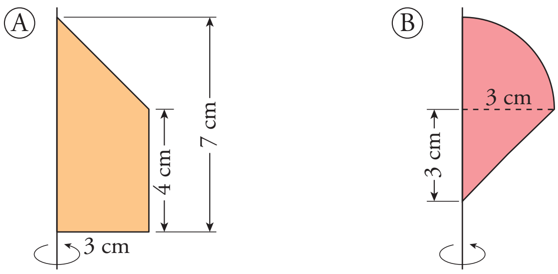
- Área total del cilindro = $2\pi \cdot 6h + 2\pi \cdot 6^2$

  $84\pi H = 96\pi \rightarrow H = 1{,}14$ cm
- Volumen del cilindro = $\pi \cdot 6^2 \cdot 1{,}14 = 128{,}93$ cm³
- Área total del cono = $\pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6g \rightarrow 36\pi + 6\pi g = 96\pi \rightarrow$

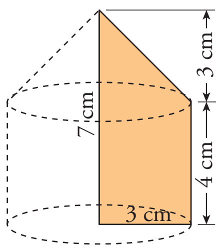
  $\rightarrow 6\pi g = 60\pi \rightarrow g = 10$ cm
- Altura del cono: $h^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \rightarrow h = 8$ cm
- Volumen del cono = $\frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 \approx 301{,}59$ cm³

Tiene mayor volumen el cono.

30 ▼▽▽ **Calcula el volumen de los cuerpos de revolución que genera cada una de estas figuras planas al girar alrededor del eje indicado:**



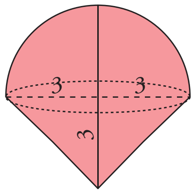
Ⓐ



Ⓐ

- $V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi$ cm³
- $V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi$ cm³
- $V_{\text{TOTAL}} = 36\pi + 9\pi = 45\pi = 141{,}37$ cm³

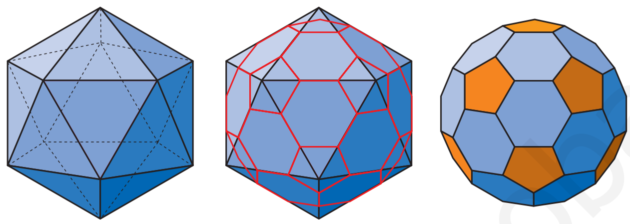
B



B

- $V_{\text{SEMIESFERA}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi \text{ cm}^3$
- $V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi \text{ cm}^3$
- $V_{\text{TOTAL}} = 18\pi + 9\pi = 27\pi = 84{,}82 \text{ cm}^3$

31 ▼▼▽ **Truncando un icosaedro regular de 30 cm de arista hemos obtenido este poliedro semirregular (troncoicosaedro).**



a) ¿Cuántos vértices y caras tiene el icosaedro?

b) ¿Cuántos pentágonos y cuántos hexágonos forman la superficie del poliedro obtenido tras el truncamiento?

c) Calcula la superficie de este último.

a) El icosaedro tiene 12 vértices y 20 caras.

b) 20 hexágonos y 12 pentágonos.

c) Las aristas del poliedro truncado miden 10 cm.

Apotema de una cara hexagonal = 8,66 cm

Apotema de una cara pentagonal = 6,88 cm

Superficie de una cara hexagonal = $\frac{10 \cdot 6 \cdot 8{,}66}{2} \approx 259{,}8 \text{ cm}^2$

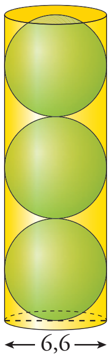
Superficie de una cara pentagonal = $\frac{10 \cdot 5 \cdot 6{,}88}{2} \approx 172 \text{ cm}^2$

Superficie del poliedro = $20 \cdot 259{,}8 + 12 \cdot 172 = 7\,260 \text{ cm}^2$

PÁGINA 212

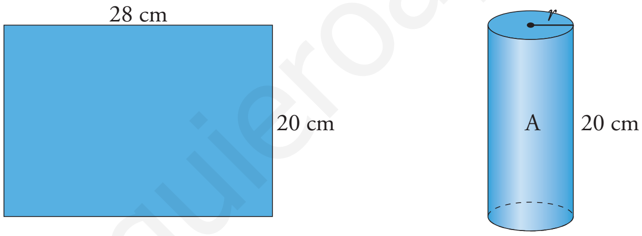
Resuelve problemas

32 ▼▼▽ **Tres pelotas de tenis se introducen en una caja cilíndrica de 6,6 cm de diámetro en la que encajan hasta el borde. Halla el volumen de la parte vacía.**



- Altura del cilindro = 6,6 · 3 = 19,8 cm
- $V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot 3{,}3^2 \cdot 19{,}8 \approx 677{,}4 \text{ cm}^3$
- $V_{\text{ESFERAS}} = 3\left(\dfrac{4}{3}\pi \cdot 3{,}3^3\right) = 451{,}6 \text{ cm}^3$
- $V_{\text{PARTE VACÍA}} = 677{,}4 - 451{,}6 = 225{,}8 \text{ cm}^3$

33 ▼▼▽ **Queremos construir un tubo cilíndrico soldando por los lados un rectángulo de 28 cm de largo y 20 cm de ancho. ¿Cómo se consigue mayor volumen, soldando por los lados de 28 cm o por los de 20 cm?**

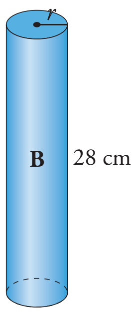


A • Radio: $2\pi r = 28 \rightarrow r = \dfrac{14}{\pi}$ cm

• Volumen: $\pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{14}{\pi}\right)^2 \cdot 20 = 1\,247{,}77 \text{ cm}^3$

B • Radio: $2\pi r = 20 \rightarrow r = \dfrac{10}{\pi}$ cm

• Volumen: $\pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 28 = 891{,}27 \text{ cm}^3$



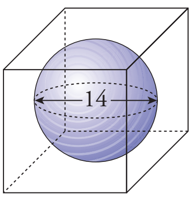
Se consigue mayor volumen soldando por los lados de 20 cm.

34 ▼▼▽ **Se introduce una bola de piedra de 14 cm de diámetro en un recipiente cúbico de 14 cm de arista lleno de agua y después se retira. Calcula:**

a) La cantidad de agua que se ha derramado.

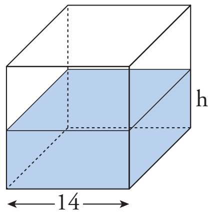
b) La altura que alcanza el agua en el recipiente después de sacar la bola.

a)



$V_{\text{CUBO}} = 14^3 = 2\,744 \text{ cm}^3$

$V_{\text{AGUA DERRAMADA}} = V_{\text{ESFERA}} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 7^3 \approx 1\,436{,}76 \text{ cm}^3$

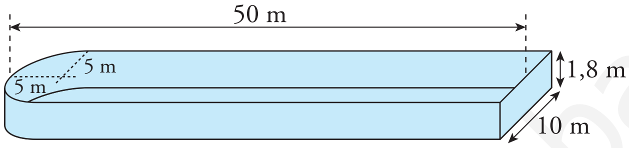
b) 

$V_{\text{AGUA NO DERRAMADA}} = 2\,744 - 1\,436{,}76 = 1\,307{,}24 \text{ cm}^3$

Altura que alcanza el agua:

$1\,307{,}24 = 14^2 \cdot h \rightarrow h = 6{,}67 \text{ cm}$

35 ▼▼▽ **Una finca se abastece de agua desde el pilón que ves en la figura, y que ahora está lleno. Para regar, se abre un desagüe que desaloja un caudal de 25 litros por segundo. ¿Se podrá mantener el riego durante diez horas sin reponer sus existencias?**

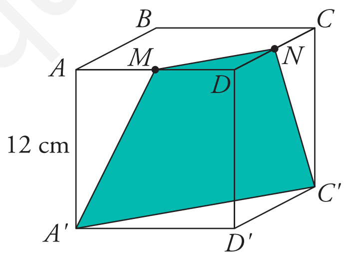


Capacidad del pilón $= 10 \cdot 1{,}8 \cdot 45 + \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 1{,}8}{2} \approx 880{,}69 \text{ m}^3 = 880\,690$ litros

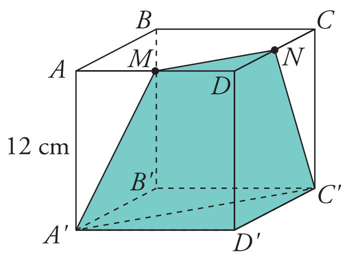
Gasto en diez horas $= 25 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10 = 900\,000$ litros

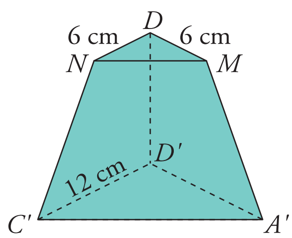
El gasto en diez horas es superior a la capacidad del pilón. Por tanto, no se puede regar durante diez horas sin reponer las existencias de agua.

36 ▼▼▼ **Cortamos un cubo por un plano que pasa por los puntos** ***MNC'A'*** **(*M* y *N* son los puntos medios de las aristas *AD* y *DC*, respectivamente).**



Calcula el área total y el volumen del menor de los poliedros que se forman.

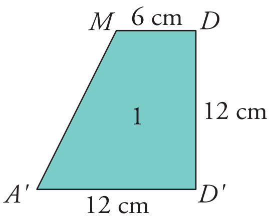




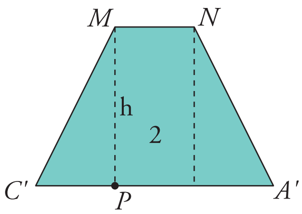
- Triángulo MDN: $A = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$

- Triángulo $A'D'C'$: $A = \dfrac{12 \cdot 12}{2} = 72 \text{ cm}^2$

Caras laterales: trapecios.



$$A_1 = \frac{(12 + 6) \cdot 12}{2} = 108 \text{ cm}^2$$



$$\overline{MN}^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \ \rightarrow \ \overline{MN} = \sqrt{72} \approx 8{,}49 \text{ cm}$$

$$\overline{A'C'}^2 = 12^2 + 12^2 = 288 \ \rightarrow \ \overline{A'C'} = \sqrt{288} = 16{,}97 \text{ cm}$$

$$\overline{A'P} = \frac{16{,}97 - 8{,}49}{2} = 4{,}24 \text{ cm}$$

$$\overline{MA'}^2 = 12^2 + 6^2 = 180 \ \rightarrow \ \overline{MA'} = 13{,}42 \text{ cm}$$

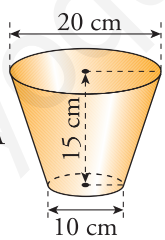
$$\text{h}^2 = 13{,}42^2 - 4{,}24^2 \ \rightarrow \ \text{h} \approx 12{,}73 \text{ cm}$$

$$\text{Área}_2 = \frac{(8{,}49 + 16{,}97) \cdot 12{,}73}{2} \approx 162{,}05 \text{ cm}^2$$

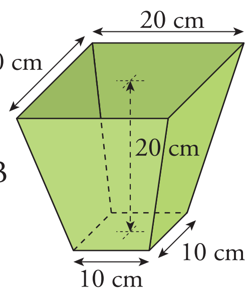
Área total del poliedro = $18 + 72 + 2 \cdot 108 + 162{,}1 = 468{,}1 \text{ cm}^2$

37 ▼▼▼ **En un cine, las palomitas se vendían hasta ahora en recipientes del tipo A, por 1,50 €. El gerente está pensando en ofertar también otro formato, B, más grande. ¿Cuál crees que debería ser el precio del formato B? Redondea a las décimas de euro.**

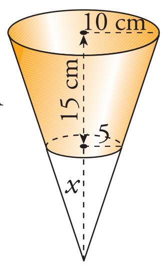
A



B



A

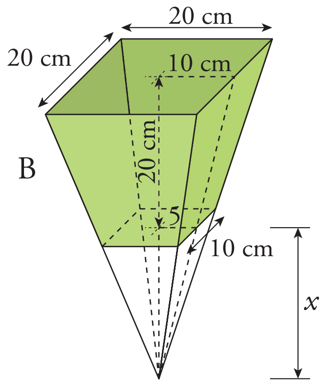


$$\frac{10}{5} = \frac{15 + x}{x} \ \rightarrow \ 10x = 75 + 5x \ \rightarrow \ x = 15 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 30 \approx 3\,141{,}6 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 15 \approx 392{,}7 \text{ cm}^3$$

$$V_A = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} \approx 2\,748{,}9 \text{ cm}^3$$



$$\frac{10}{5} = \frac{20 + x}{x} \rightarrow 10x = 100 + 5x \rightarrow x = 20 \text{ cm}$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \frac{1}{3} 20^2 \cdot 40 \approx 5\,333{,}33 \text{ cm}^3$$

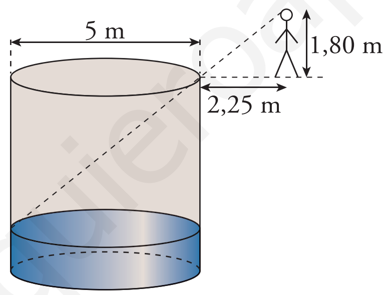
$$V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \frac{1}{3} 10^2 \cdot 20 \approx 666{,}67 \text{ cm}^3$$

$$V_B = V_{\text{P. GRANDE}} - V_{\text{P. PEQUEÑA}} \approx 4\,666{,}67 \text{ cm}^3$$

Precio del recipiente B $= \dfrac{4\,666{,}67 \cdot 1{,}5}{2\,748{,}9} \approx 2{,}546$

El recipiente B se venderá a 2,50 euros.

38 ▼▼▼ **Un agricultor tiene un pozo cilíndrico de 5 metros de diámetro y una capacidad de 100 metros cúbicos. Pero no está lleno; de hecho, si se aleja más de 2,25 metros del borde, ya no ve el agua. Calcula la profundidad del agua, sabiendo que el agricultor mide 1,80 m de estatura.**



Si h es la profundidad del pozo:

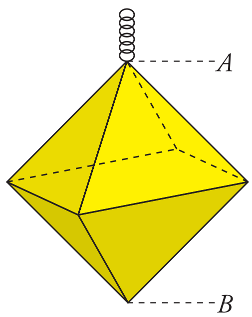
$$V_{\text{POZO}} = 100 = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot \text{h} \rightarrow \text{h} = 5{,}10 \text{ m}$$

Si x es la profundidad del agua:

$$\frac{1{,}80}{2{,}25} = \frac{5{,}10 - x}{5} \rightarrow x = 1{,}10 \text{ m}$$

Problemas “+”

39 ▼▼▼ **Cortando y soldando una varilla de 3 m de longitud, se ha construido la estructura de un farol con forma de octaedro regular. ¿Cuál es la altura *AB* del farol?**



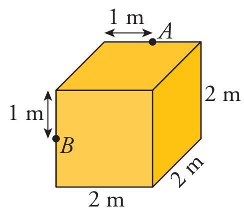
El octaedro tiene 12 aristas iguales. Cada una de ellas mide 300 : 12 = 25 cm.

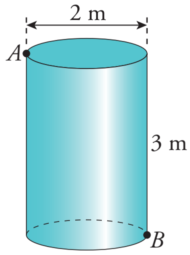
La altura del octaedro coincide con la diagonal de un cuadrado de 25 cm de lado:

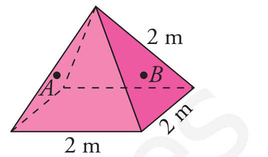
$$\overline{AB} = \sqrt{25^2 + 25^2} \approx 35{,}36 \text{ cm}$$

PÁGINA 213

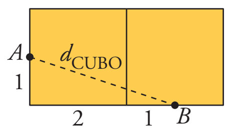
40 ▼▼▼ **Describe y calcula la longitud del trayecto más corto que debe recorrer la lagartija para ir de *A* a *B* en cada caso.**

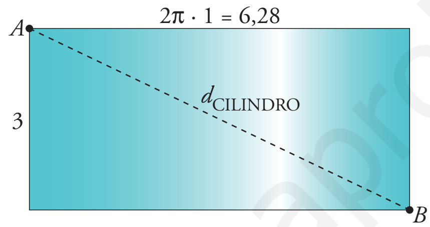


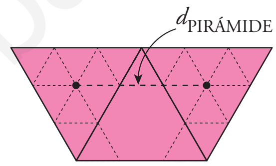




☞ *En el tercer caso,* A *y* B *son centros de dos caras en una pirámide recta cuadrangular cuyas aristas miden, todas, 2 metros.*







$d_{CUBO} = \sqrt{3^2 + 1^2} \approx 3{,}16$ m $\quad d_{CILINDRO} = \sqrt{6{,}28^2 + 3^2} \approx 7$ m $\quad d_{PIRÁMIDE} = 2$ m

41 ▼▼▼ **Averigua si cabe:**

a) Un tetraedro regular de arista 4 u, dentro de un cubo de arista 4 u.

b) Un cubo de arista 12 u, dentro de una esfera de diámetro 20 u.

c) Un cubo de arista 10 u, dentro de un cono de 15 u de altura y radio de la base $15\sqrt{2}$ u.

d) Una esfera de radio 4 u, dentro de un octaedro regular de arista 10 u.

a) Sí cabe. El mayor tetraedro que cabe dentro de un cubo tiene como arista la diagonal del cubo, que mide 5,65 u.

$\text{Arista}_{TETRAEDRO} = \text{diagonal}_{CUBO} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$ u

b) La diagonal del lcubo mide $12\sqrt{3} = 20{,}78$ u. Por tanto, el cubo no cabe dentro de la esfera.

c) Sí cabe, porque la sección del cono, a 10 u de altura, tiene de radio $5\sqrt{2}$ u, que es igual a la mitad de la diagonal de la cara superior del cubo.

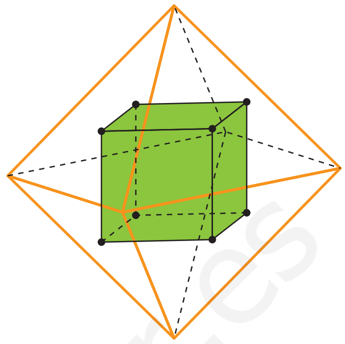
d) La distancia del centro del octaedro a cada cara es de 4,08 u, mayor que el radio de la esfera. Por tanto, sí cabe.

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

Reflexiona sobre la teoría

42 ▼▽▽ **a) ¿Qué poliedro obtienes si tomas como vértices los centros de las caras de un octaedro regular?**

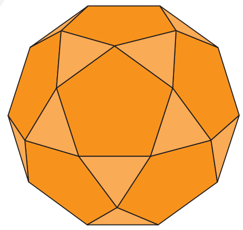
b) ¿Qué relación hay entre dos poliedros duales?



a) Se obtiene un cubo.

b) El número de caras de un poliedro coincide con el número de vértices de su dual, y ambos tienen el mismo número de aristas.

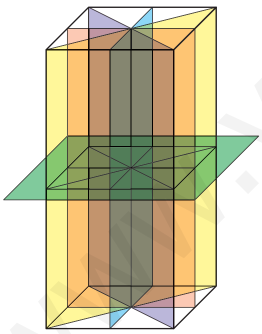
43 ▼▼▽ **Explica cómo hemos de truncar el dodecaedro para obtener el icosidodecaedro. ¿Es un poliedro semirregular?**



Por planos que pasan por los puntos medios de las aristas.

Es un poliedro semirregular, porque está formado por triángulos y pentágonos regulares y concurren 4 caras en cada vértice.

44 ▼▼▽ **¿Cuáles son los planos de simetría de un ortoedro de base cuadrada? ¿Y los ejes de giro? ¿De qué orden es cada uno de ellos?**



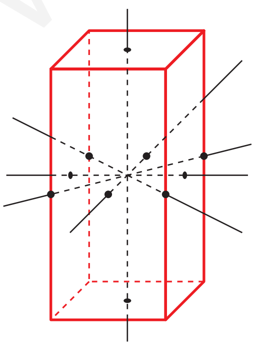
- Son 5 planos de simetría:

  Dos pasan por los puntos medios de las aristas de la base.

  Dos pasan por los vértices opuestos de las bases.

  (Estos cuatro planos corresponden a los ejes de simetría del cuadrado).

  Uno pasa por los puntos medios de las aristas laterales.



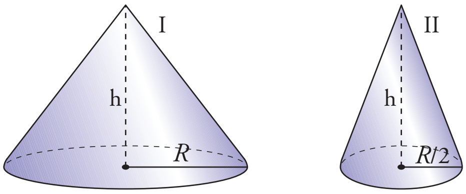
- Tiene 5 ejes de giro:

  Un eje de giro de orden cuatro: la recta perpendicular a las bases por su punto medio.

  Dos ejes de giro de orden dos: las rectas paralelas a las bases que pasan por el centro de cada dos caras paralelas.

  Dos ejes de giro de orden dos: las rectas que pasan por los puntos medios de dos aristas laterales opuestas.

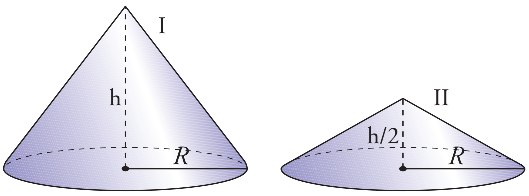
45 ▼▼▽ **Si en un cono reducimos a la mitad el radio de la base y mantenemos la misma altura, ¿el volumen se reduce a la mitad? ¿Y si mantenemos la misma base y reducimos la altura a la mitad?**



$$V_{\text{CONO I}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$V_{\text{CONO II}} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{3}\,\frac{\pi R^2 h}{4}$$

El volumen se reduce a la cuarta parte.



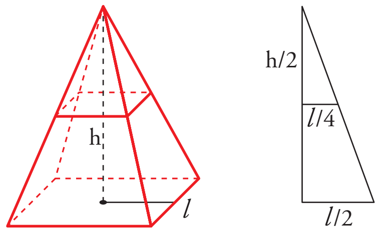
$$V_{\text{CONO I}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$V_{\text{CONO II}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{h}{2} = \frac{1}{3}\,\frac{\pi R^2 h}{2}$$

Sí, el volumen se reduce a la mitad.

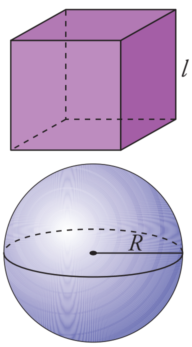
46 ▼▼▽ **Una pirámide de base cuadrada se corta por un plano paralelo a la base y que pasa por el punto medio de la altura. ¿Cuál será la relación entre los volúmenes de la pirámide grande y la pequeña?**

El lado de la nueva base es la mitad de la arista básica de la pirámide.



$$\left.\begin{aligned} V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} &= \frac{1}{3} l^2 h \\ V' = V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} &= \frac{1}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3}\,\frac{l^2 \cdot h}{8} \end{aligned}\right\} \quad \frac{V}{V'} = \frac{1}{8}$$

47 ▼▼▽ **Un cubo y una esfera tienen la misma área. ¿Cuál tiene mayor volumen? Comprueba tu respuesta dando un valor cualquiera al radio de la esfera.**



Radio de la esfera: 10 cm

$4\pi R^2 = 6l^2 \ \rightarrow\ 4\pi \cdot 10^2 = 6l^2$

$l^2 = \dfrac{400\pi}{6} \ \rightarrow\ l = 14{,}47$ cm

Volumen cubo = $14{,}47^3 = 3\,031{,}01$ cm^3

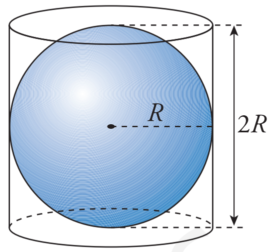
Volumen esfera = $\dfrac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = 4\,188{,}79$ cm^3

Tiene mayor volumen la esfera.

48 ▼▼▽ **Piensa en una esfera y en el cilindro que la envuelve.**

a) Calcula la relación:

$$\frac{\text{Superficie total del cilindro}}{\text{Superficie de la esfera}}$$



b) Calcula también la relación:

$$\frac{\text{Volumen del cilindro}}{\text{Volumen de la esfera}}$$

c) ¿Qué observas?

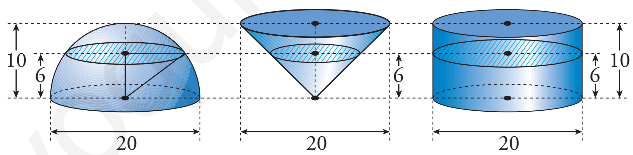
Has de saber que dichas relaciones ya las descubrió Arquímedes hace más de dos mil años.

a) $\dfrac{S_c}{S_e} = \dfrac{2\pi R \cdot 2R \cdot 2 \cdot \pi R^2}{4\pi R^2} = \dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{V_c}{V_e} = \dfrac{\pi R^2 \cdot 2R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{S_c}{S_e} = \dfrac{V_c}{V_e}$

49 ▼▼▽ **Observa en la figura la semiesfera, el cono invertido y el cilindro, todos del mismo diámetro (20 cm) y altura (10 cm), que se han cortado por un plano horizontal a 6 cm de altura.**



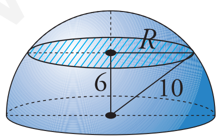
a) Calcula la superficie de las secciones obtenidas.

b) Comprueba que la sección obtenida en el cilindro equivale a la suma de las otras dos.

c) Comprueba que esa misma relación se cumple para cualquier altura del plano, h.

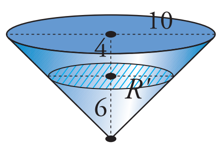
d) Comprueba que esa relación se cumple para cualquier radio, *r*, y cualquiera que sea la altura, h, a la que se corta el plano.

a)



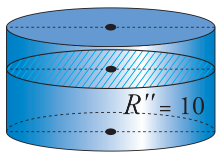
$R = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

$S_{\text{S. SEMIESFERA}} = \pi \cdot 8^2 \approx 201{,}06 \text{ cm}^2$



$\dfrac{10}{10} = \dfrac{R'}{6} \rightarrow R' = 6$ cm

$S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot 6^2 \approx 113{,}10 \text{ cm}^2$



$S_{\text{S. CILINDRO}} = \pi \cdot 10^2 \approx 314{,}16 \text{ cm}^2$

b) $S_{\text{S. SEMIESFERA}} + S_{\text{S. CONO}} = 64\pi + 36\pi = 100\pi = S_{\text{S. CILINDRO}}$

c) Para un h cualquiera: $R = \sqrt{10^2 - h^2}$; $R' = h$; $R'' = 10$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\text{S. SEMIESFERA}} = \pi(10^2 - h^2) \\ S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot h^2 \\ S_{\text{S. CILINDRO}} = \pi \cdot 10^2 \end{array}\right\} S_{\text{S. SEMIESFERA}} + S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot 10^2 = S_{\text{S. CILINDRO}}$$

d) Para r y h cualesquiera:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\text{S. SEMIESFERA}} = \pi(r^2 - h^2) \\ S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot h^2 \\ S_{\text{S. CILINDRO}} = \pi r^2 \end{array}\right\} S_{\text{S. SEMIESFERA}} + S_{\text{S. CONO}} = \pi r^2 = S_{\text{S. CILINDRO}}$$

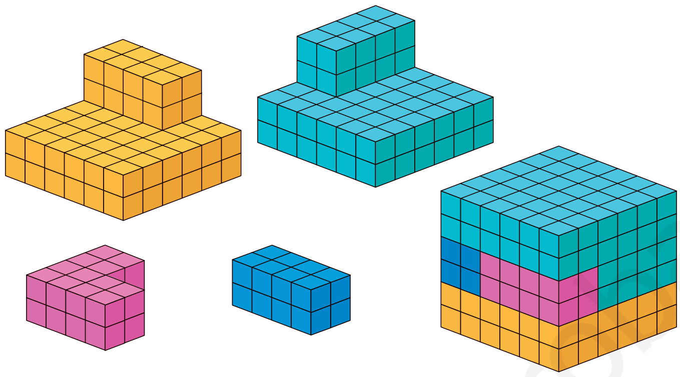
Soluciones a “Y para terminar…”

PÁGINA 215

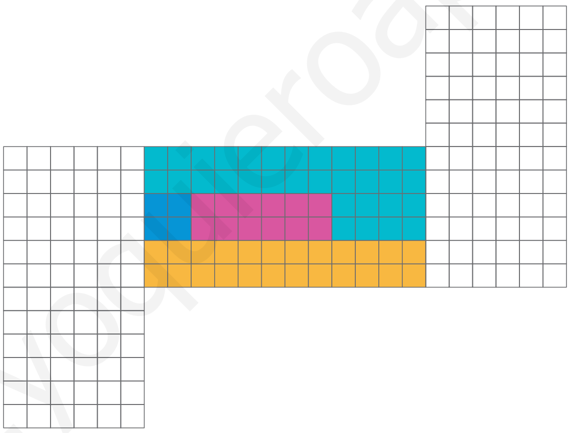
▼ Imagina en el espacio

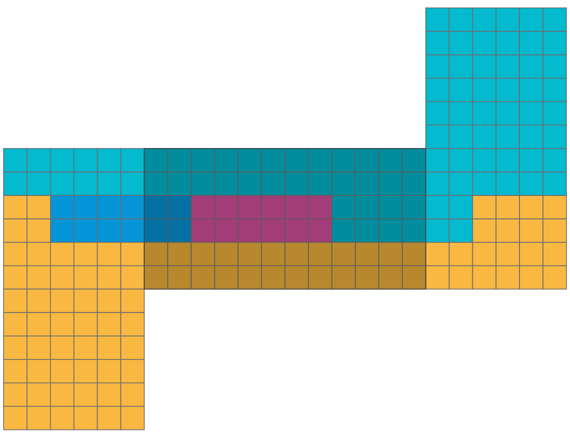
Cubo a trozos

Con estas cuatro piezas se construye el cubo que ves.



Copia este desarrollo del cubo en papel cuadriculado y completa las caras con su color correspondiente.





PÁGINA 215

¿Has reforzado tu conocimiento de los poliedros regulares y lo has ampliado a los semirregulares?

1 **Describe el poliedro que se obtiene truncando un octaedro regular mediante planos que cortan las aristas a un tercio del vértice. ¿Se trata de un poliedro semirregular? Explica por qué.**

Se obtiene un cuerpo geométrico formado por 6 cuadrados, uno por cada vértice del octaedro y 8 hexágonos regulares, uno por cada cara del octaedro. En cada uno de sus vértices concurren un cuadrado y dos hexágonos.

El octaedro así truncado es un poliedro semirregular porque está compuesto por caras que son polígonos regulares de dos tipos, cuadrados y hexágonos, y en cada vértice concurren los mismos tipos de polígonos.

¿Has aprendido a identificar los planos de simetría y los ejes de giro de una figura de tres dimensiones?

2 **Describe los planos de simetría del octaedro regular. Di también cuáles son los ejes de giro y de qué orden es cada uno.**

Planos de simetría. Tiene, en total, 9.

- De las 12 aristas del octaedro, cada cuatro están contenidas en un mismo plano.

  Cada uno de estos planos es un plano de simetría. De estos, hay 3.
- Cada par de aristas paralelas forman un plano. El plano perpendicular a cada uno de estos es un plano de simetría. De estos, hay 6.

Ejes de giro. Tiene, en total, 13.

- Tres ejes de giro de orden cuatro, las rectas que unen vértices opuestos.
- Seis ejes de giro de orden dos, las rectas que unen los centros de aristas opuestas.
- Cuatro ejes de giro de orden tres, las rectas que unen los baricentros de caras opuestas.

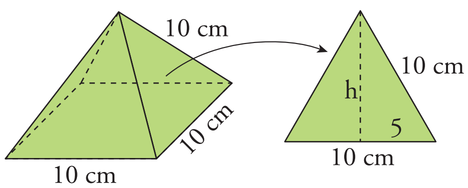
¿Dibujas el desarrollo y calculas la superficie de las figuras espaciales básicas?

3 **Calcula la superficie total de:**

a) Una pirámide de base cuadrada en la que la arista lateral y la arista de la base son iguales y miden 10 cm.

b) Un tronco de cono cuyas bases tienen radios de 9 m y 6 m, y la generatriz, 5 m.

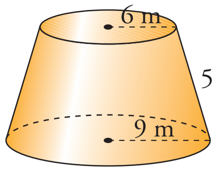
a)



$h = \sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8,66$ cm

$S_{\text{PIRÁMIDE}} = 10^2 + 4\left(\dfrac{10 \cdot 8,66}{2}\right) \approx 273,21 \text{ cm}^2$

b)



$$S_{\text{TRONCO DE CONO}} = \pi(6 + 9) \cdot 5 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 9^2 =$$
$$= 192\pi \approx 603{,}19 \text{ m}^2$$

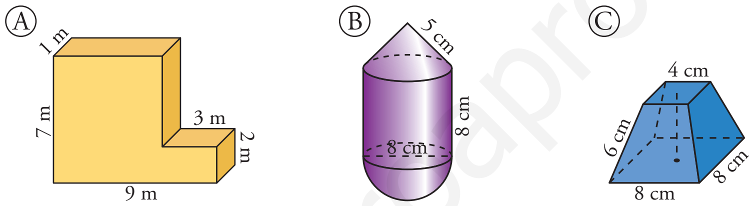
4 **En una esfera de 8 cm de radio se dan dos cortes paralelos a distinto lado del centro, alejados de él 2 cm y 3 cm respectivamente. Calcula la superficie de la zona esférica comprendida entre ambos cortes.**

La altura de la zona esférica es h = 5 cm.

$S_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi \cdot 8 \cdot 5 = 80\pi \approx 251{,}33 \text{ cm}^2$

¿Calculas el volumen de los cuerpos geométricos más usuales?

5 **Calcula el volumen de estos cuerpos:**

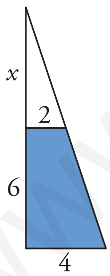


(A) $V = 7 \cdot 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48 \text{ m}^3$

(B) Altura del cono: $h = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 + \pi \cdot 4^2 \cdot 8 + \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 \approx 50{,}27 + 402{,}12 + 134{,}04 = 586{,}43 \text{ cm}^3$$

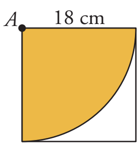
(C)



$$\frac{4}{6 + x} = \frac{2}{x} \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}8^2 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 6 = 224 \text{ cm}^3$$

6 **De una lámina cuadrada se corta un sector circular haciendo centro en uno de sus vértices, *A*, y tomando como radio el lado del cuadrado, que es de 18 cm. Con ese sector se construye un cono. Halla el radio de su base, su altura y su volumen.**

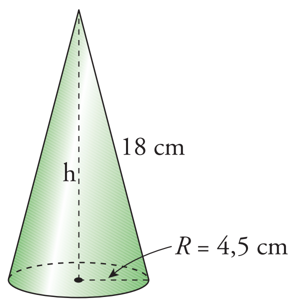


Longitud del arco $= \frac{1}{4}(2\pi \cdot 18) = 9\pi$

Radio de la base del cono: $9\pi = 2\pi R \rightarrow R = 4{,}5$ cm

Altura del cono: $h = \sqrt{18^2 - 4{,}5^2} \approx 17{,}43$ cm

Volumen del cono: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 17{,}43 \approx 396{,}62 \text{ cm}^3$



¿Sabes interpretar las coordenadas geográficas y los husos horarios?

7 **Dos ciudades están en el ecuador y sus longitudes se diferencian en 10°. ¿Cuál es la distancia entre ellas?**

$$\frac{360}{40\,000} = \frac{10}{x} \rightarrow x \approx 1\,111$$

La distancia entre las ciudades es, aproximadamente, de 1 111 km.

8 **Las coordenadas geográficas de Melilla son 35° 17' N 2° 56' O, y las de Tokio, 35° 42' N 139° 46' E.**

a) ¿Cuál es el uso horario de cada una?

b) ¿Qué hora es en Tokio cuando en Melilla son las 8 de la mañana?

a) El huso horario de Melilla es el "cero", y el de Tokio, el 9.

b) Cuando en Melilla son las 8 de la mañana, en Tokio son las 5 de la tarde.

PÁGINA 217

PARA EMPEZAR...

▼ Vamos a mover un mosaico de la Alhambra

■ **Imagina que pones encima un papel transparente y lo calcas (si en vez de imaginarlo, lo haces, mejor).**

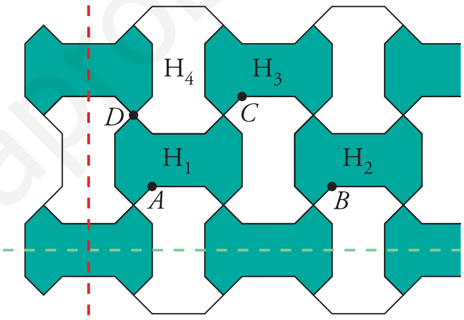
a) ¿Cómo has de mover el papel transparente para que el "hueso" H_1 se desplace exactamente sobre el "hueso" H_2? ¿Y para que quede sobre el "hueso" H_3? ¿Y para que se desplace hasta el H_4?

b) ¿En qué punto deberíamos clavar un alfiler para que, girando la transparencia, se puedan intercambiar las posiciones de los "huesos" blancos y azules?

c) ¿Dónde colocarías un espejo para que el mosaico se continúe en la imagen?

a) H_1 coincide con H_2 desplazándolo a la derecha la distancia AB.

- H_1 coincide con H_3 desplazándolo en la dirección, el sentido y la distancia AC.
- H_1 coincide con H_4 girándolo 90°, en sentido contrario a las agujas del reloj, alrededor de D.



b) Por ejemplo, el punto D.

c) Por ejemplo, sobre la línea discontinua roja o sobre la línea discontinua verde.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 220

1 En el mosaico de la segunda página estudiamos las transformaciones que llevaban H_1 a H_2, H_3 y H_4.

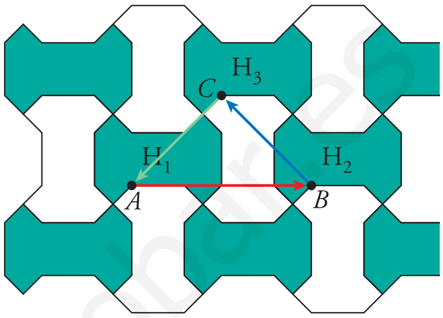
a) ¿Cuál o cuáles de ellas son traslaciones?

b) ¿Cuál es el vector que caracteriza la traslación que transforma H_1 en H_2? ¿Y el que transforma H_2 en H_3? ¿Y el que transforma H_3 en H_1?

a) De H_1 a H_2, y de H_1 a H_3 son traslaciones.

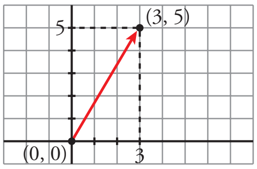
b) El vector que caracteriza la traslación que transforma H_1 en H_2 es el vector $\overrightarrow{AB}$.

El que transforma H_2 en H_3 es el vector $\overrightarrow{BC}$, y el que transforma H_3 en H_1, $\overrightarrow{CA}$.



PÁGINA 221

2 En unos ejes coordenados considera el vector $\vec{t}$ de origen (0, 0) y extremo (3, 5).

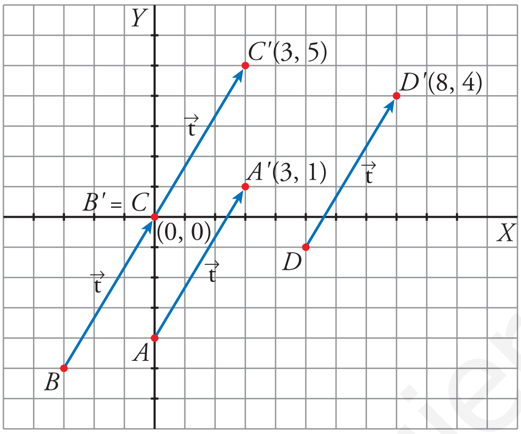


Lo designaremos, simplemente, $\vec{t}(3, 5)$.

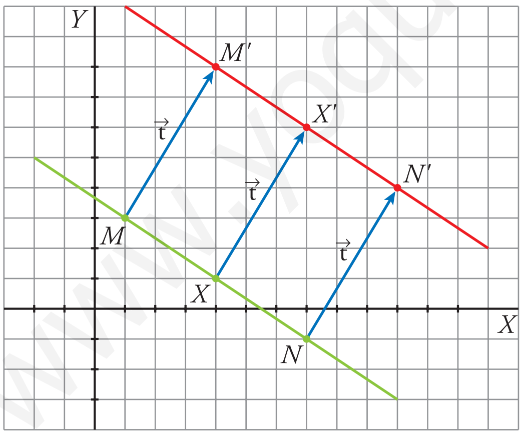
a) Traslada los puntos $A(0, -4)$, $B(-3, -5)$, $C(0, 0)$ y $D(5, -1)$ mediante este vector.

b) Comprueba que los puntos $M(1, 3)$, $N(7, -1)$ y $X(4, 1)$ están alineados. Trasládalos mediante el vector $\vec{t}$ y comprueba que sus correspondientes también están alineados.

a)



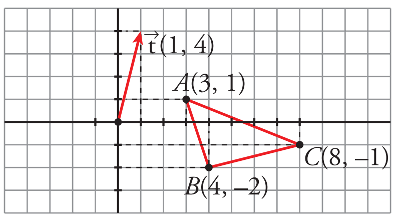
b)



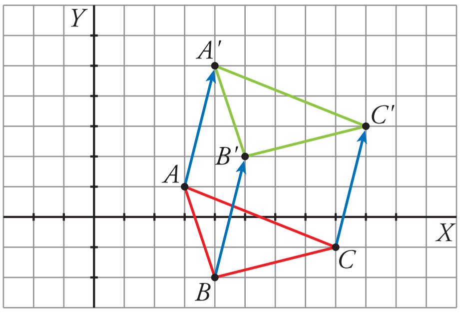
3 a) Traslada el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, -2)$ y $C(8, -1)$ según el vector $\vec{t}(1, 4)$. Comprueba que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.

b) Comprueba que la recta $r: y = -3 + 4x$ se transforma en sí misma (es doble) según la traslación descrita en el apartado a).

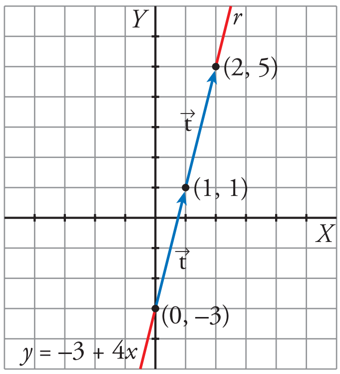
Para ello, toma varios puntos de r [por ejemplo, (0, –3), (1, 1), (2, 5)] y comprueba que sus transformados están también en r.



a)



b)

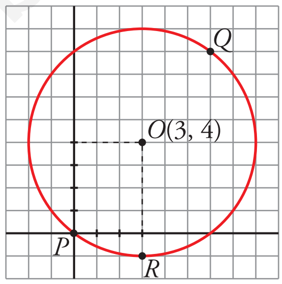


$\mathbf{T}[(0, -3)] = (1, 1) \in r$

$\mathbf{T}[(1, 1)] = (2, 5) \in r$

$\mathbf{T}[(2, 5)] = (3, 9) \in r$

4 **Dibuja unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado. Traza con compás la circunferencia de centro *O*(3, 4) y radio 5.**



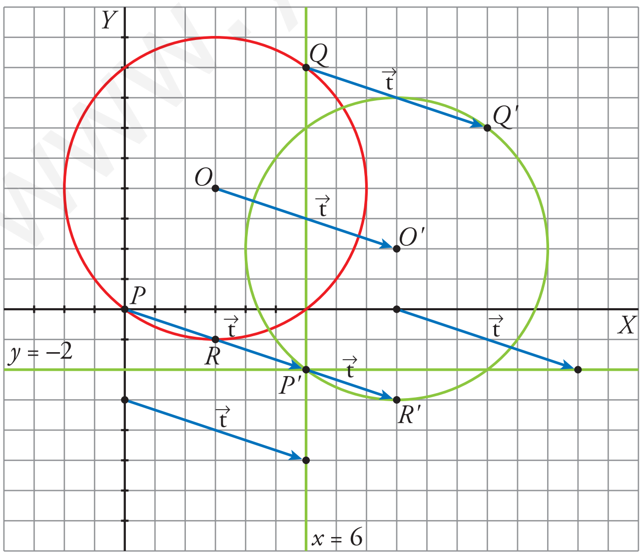
a) Comprueba que la circunferencia pasa por *P*(0, 0), *Q*(6, 8) y *R*(3, –1).

b) Traslada los puntos *O*, *P*, *Q* y *R* mediante la traslación T de vector $\vec{t}(6, -2)$.

c) Comprueba que la circunferencia cuyo centro es *O'* = T(*O*) y radio 5 pasa por *P'*, *Q'* y *R'*.

d) Trasladando algunos de sus puntos, averigua en qué rectas se transforman el eje *X* y el eje *Y*.

a), b), c)



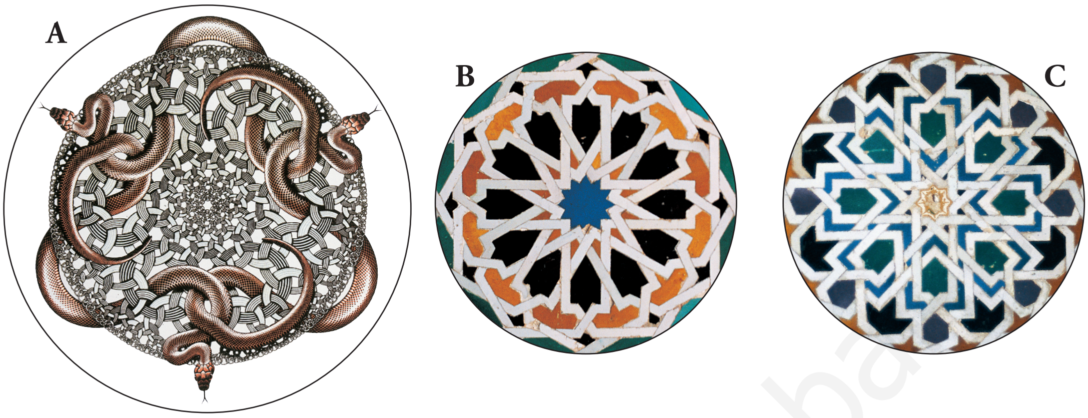
d) El eje *X* se transforma en $y = -2$.

El eje *Y* se transforma en $x = 6$.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 223

1 **Las figuras siguientes tienen centro de giro. Explica por qué, halla el orden de cada uno y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.**



a) Centro de giro de orden 3, porque al girarla alrdedor del centro coincide 3 veces consimo misma, contando con la posición inicial.

Ángulo mínimo $\rightarrow \dfrac{360°}{3} = 120°$

b) Centro de giro de orden 12.

Ángulo mínimo $\rightarrow \dfrac{360°}{12} = 30°$

c) Centro de giro de orden 8.

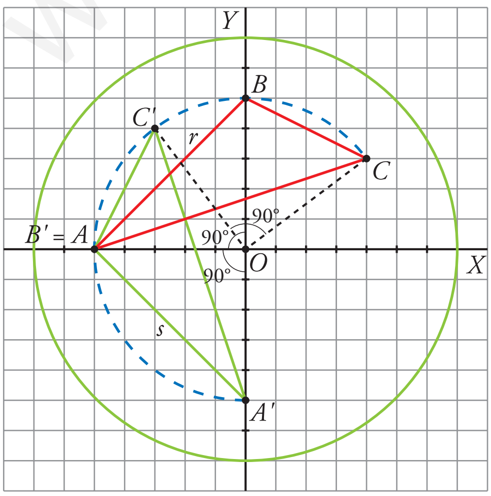
Ángulo mínimo $\rightarrow \dfrac{360°}{8} = 45°$

2 **Dibuja unos ejes coordenados en una hoja de papel cuadriculado. Considera el giro G de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 90°$.**

a) Transforma mediante G los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 5)$, $C(4, 3)$ y señala el triángulo $A'B'C'$ transformado del triángulo ABC.

b) ¿En qué se transforma la recta r que pasa por A y por B?

c) ¿En qué se transforma la circunferencia de centro O y radio 7?



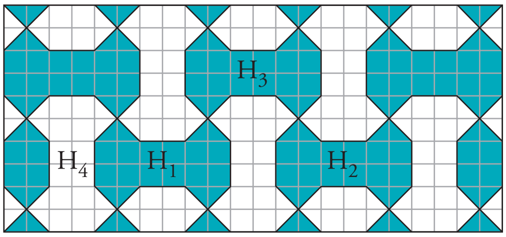
a) $A'(0, -5)$; $B'(-5, 0)$; $C'(-3, 4)$

b) Se transforma en otra recta, s, perpendicular a r en A.

c) En sí misma, es una figura doble.

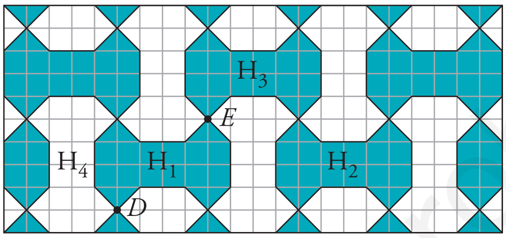
Soluciones a las actividades de cada epígrafe

3 **Recuerda el mosaico "multihueso" que vimos en la segunda página.**



a) Describe un giro que transforme H_1 en H_4.

b) Describe un giro que transforme H_1 en H_3.

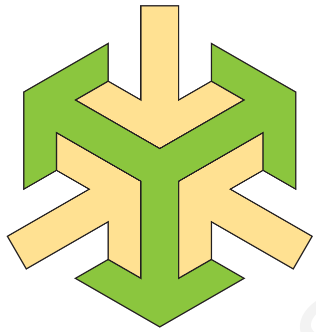


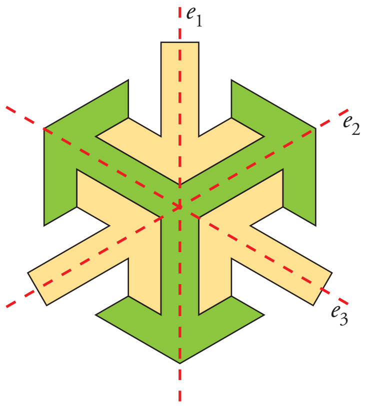
a) Es un giro de centro D y ángulo 90°.

b) Es un giro de centro E y ángulo 180°.

PÁGINA 224

1 **Señala los ejes de simetría de esta figura.**





2 **Consideramos la simetría S de eje la recta $y = x$. Dibuja los transformados mediante S de:**

a) Los puntos $A(3, 1)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $D(5, 5)$.

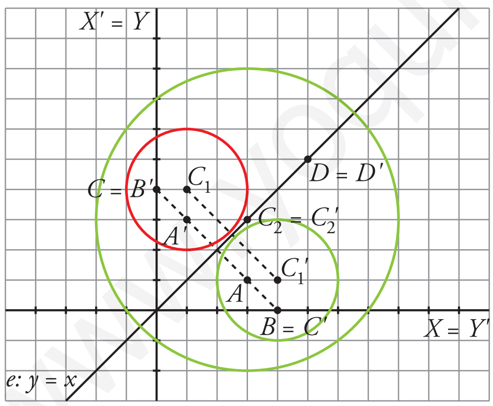
b) El eje X.

c) El eje Y.

d) La circunferencia C_1 de centro (1, 4) y radio 2.

e) La circunferencia C_2 de centro (3, 3) y radio 5.

a)



$A'(1, 3)$

$B'(0, 4)$

$C'(4, 0)$

$D'(5, 5)$

El punto D es doble: $D = D'$.

b) El eje X se transforma en el eje Y.

c) El eje Y se transforma en el eje X.

d) Se transforma en la circunferencia de centro $C_1'(4, 1)$ y radio 2.

e) Se transforma en sí misma, es una figura doble.

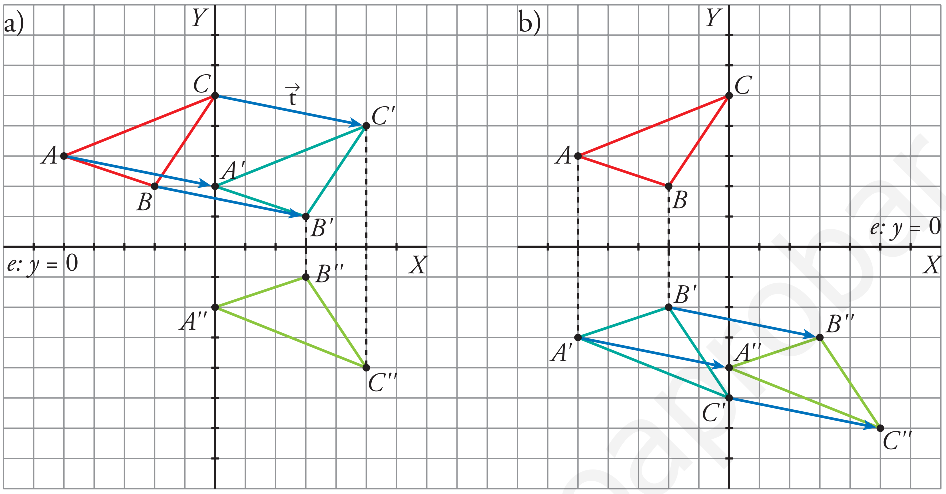
Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 225

1 **Dibuja, en papel cuadriculado, el triángulo Δ de vértices $A(-5, 3)$, $B(-2, 2)$, $C(0, 5)$. Considera la traslación T de vector $\vec{t}(5, -1)$ y la simetría S de eje el eje X $(y = 0)$.**

a) Transforma Δ mediante T compuesto con S.

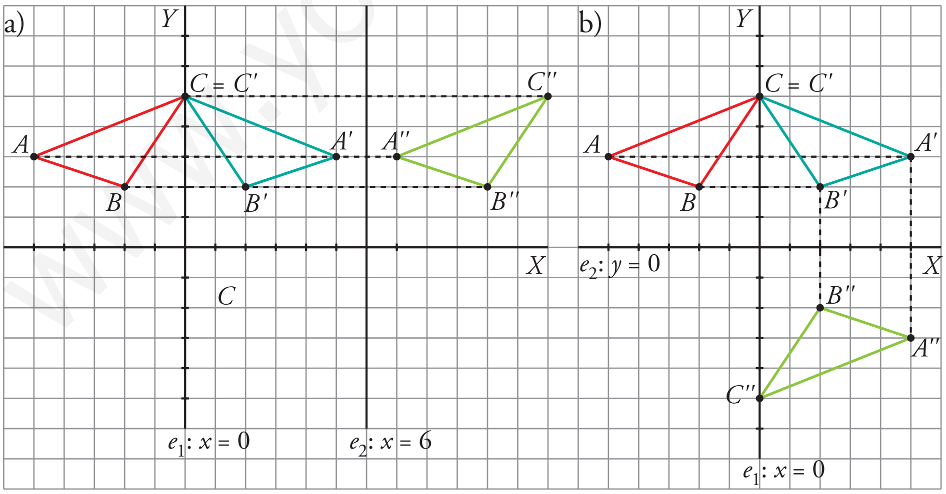
b) Transforma Δ mediante S compuesto con T.



2 **Considera las simetrías S_1 y S_2 de ejes $x = 0$ (el eje Y) y $x = 6$, respectivamente.**

a) Transforma el triángulo Δ del ejercicio anterior mediante S_1 compuesta con S_2.

b) Transforma el triángulo Δ mediante S_1 compuesta con S, siendo S la del ejercicio anterior.

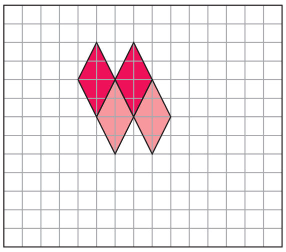


Soluciones a las actividades de cada epígrafe

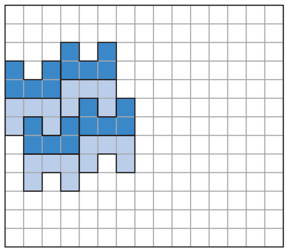
PÁGINA 226

1 **Completa, en tu cuaderno, los siguientes mosaicos:**

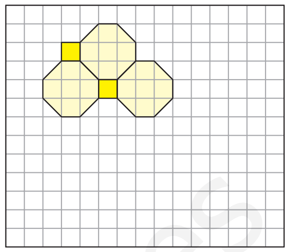
a)



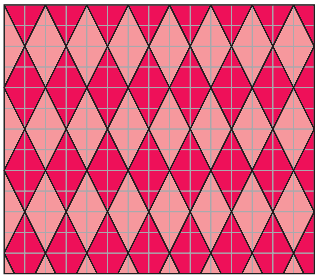
b)



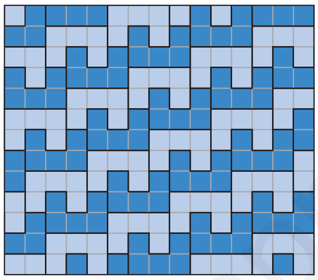
c)



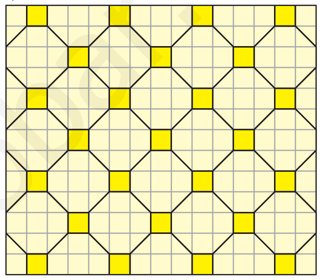
a)



b)



c)

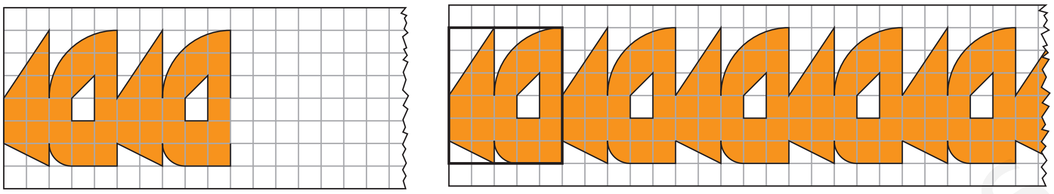


11 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

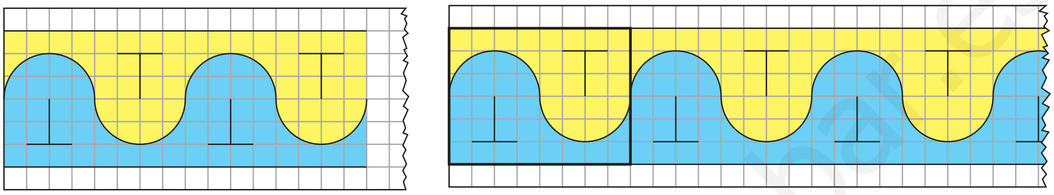
PÁGINA 227

2 **Completa, en tu cuaderno, los siguientes frisos. ¿Cuál es el menor trozo que se repite en cada uno?**

A



B

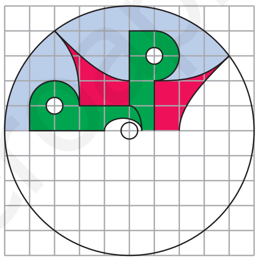


3 **Completa en tu cuaderno los siguientes rosetones. Después, contesta a las preguntas que te proponemos.**

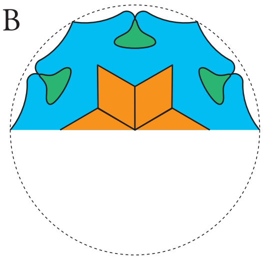
a) ¿De qué orden de giro es cada uno de ellos?

b) ¿Cuál es el menor trozo que se repite en cada uno?

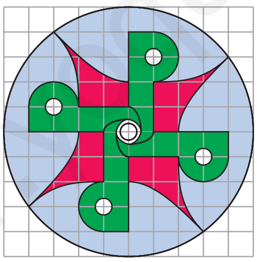
A



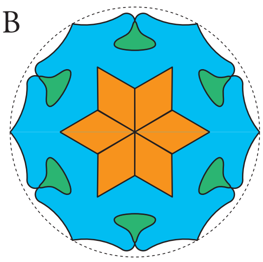
B



A

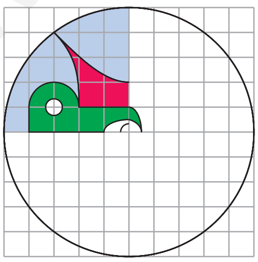


B

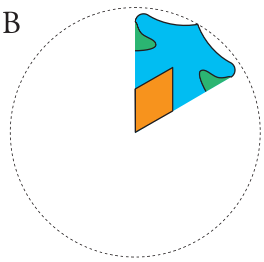


a) A: Centro de giro de orden 4. B: Centro de giro de orden 6.

b) A



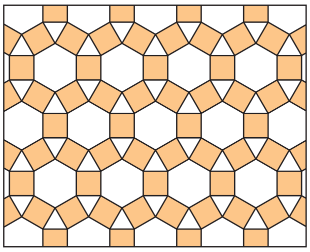
B



Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 228

4 Encuentra algunos movimientos que dejen invariable este mosaico.



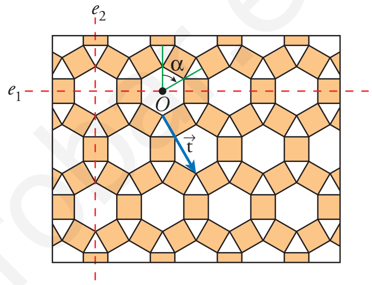
¿Es regular este mosaico?

¿Es semirregular?

Hay muchos. Por ejemplo:

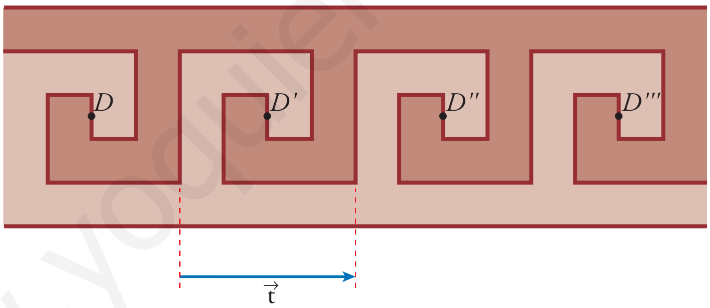
- La traslación del vector $\vec{t}$.
- El giro de centro O y ángulo $\alpha = 60°$.
- La simetría de eje e_1.
- La simetría de eje e_2.

No es regular, es semirregular.



5 ¿Qué movimientos dejan invariable la cenefa XI de la página anterior?

a) Con color. **b) Sin color.**



a) Las traslaciones del vector $\vec{t}$, $2\vec{t}$, $3\vec{t}$, $\vec{t}$, $-2\vec{t}$, …

b) Las mismas traslaciones que antes, y un giro de 180° sobre el punto D o cualquier punto similar a D.

6 ¿Qué movimientos dejan invariable el rosetón XIII de la página anterior?

Giros de 90°, 180° y 270° alrededor del centro del rosetón.

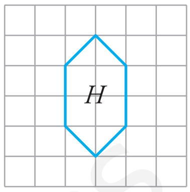
11 Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 229

Practica

Traslaciones

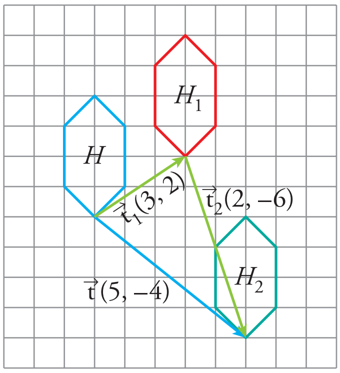
1 ▼▽▽ **a) Representa en papel cuadriculado la figura H_1 obtenida a partir de H mediante la traslación del vector $\vec{t}_1(3, 2)$.**



b) Dibuja la figura H_2 transformada de H_1 mediante la traslación $\vec{t}_2(2, -6)$.

c) Di cuál es el vector de la traslación que permite obtener H_2 a partir de H.

d) ¿Qué traslación habría que aplicar a H_2 para que se transformase en H?

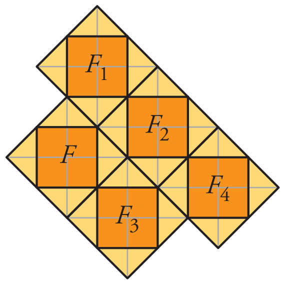


a) y b) en la figura.

c) Es el vector $\vec{t}(5, -4)$ que es la suma de $\vec{t}_1$ y $\vec{t}_2$.

d) Habría que aplicar una traslación de vector $-\vec{t}(-5, 4)$.

2 ▼▽▽ **Hemos aplicado a la figura F cuatro traslaciones para obtener F_1, F_2, F_3 y F_4. Determina los vectores $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$ y $\vec{t}_4$ que nos permiten transformar F en cada una de las otras figuras.**



De F a F_1: $\vec{t}_1(1, 3)$

De F a F_2: $\vec{t}_2(3, 1)$

De F a F_3: $\vec{t}_3(2, -2)$

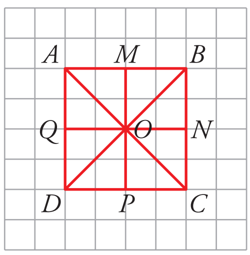
De F a F_4: $\vec{t}_4(5, -1)$

Giros

3 ▼▽▽ **Hacemos un giro de centro O que transforma M en N.**

a) Indica en qué puntos se transforman los puntos O, A, B, N y P.

b) ¿En qué se transforma la recta que pasa por A y C? ¿Y el triángulo OPD?



Es un giro de centro O y $\alpha = -90°$.

a) $O \rightarrow O$ es el único punto doble.

$A \rightarrow B$

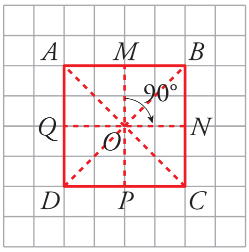
$B \rightarrow C$

$N \rightarrow P$

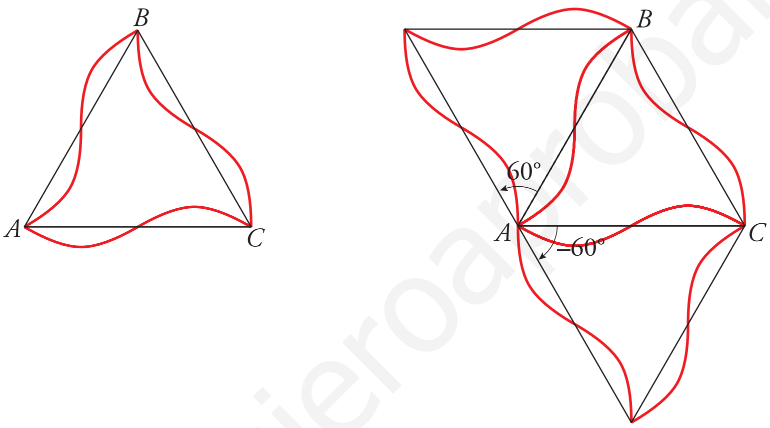
$P \rightarrow Q$

b) Recta $AC \rightarrow$ Recta BD

$\widehat{OPD} \rightarrow \widehat{OQA}$



4 ▼▽▽ **Dibuja las transformadas de esta figura mediante un giro de centro A y ángulo $\alpha = 60°$, y otro del mismo centro y ángulo $\beta = -60°$.**



Simetrías

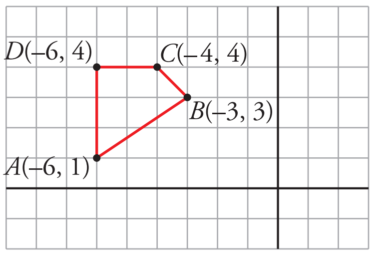
5 ▼▼▽ **Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $ABCD$, transformado mediante:**

a) La simetría de eje X.

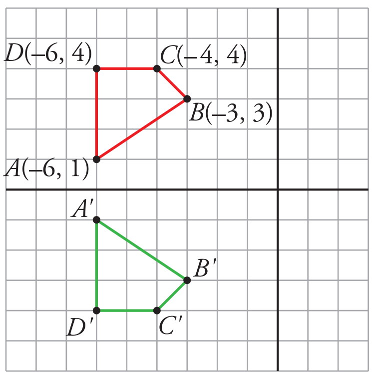
b) La simetría de eje Y.

c) La simetría que tiene por eje la recta que pasa por $B(-3, 3)$ y $P(-5, 0)$.

d) Un punto del cuadrilátero es doble respecto de alguna de las simetrías anteriores. ¿Cuál es?



a)



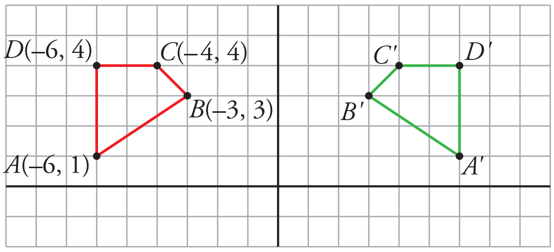
$A'(-6, -1)$

$B'(-3, -3)$

$C'(-4, -4)$

$D'(-6, -4)$

b)



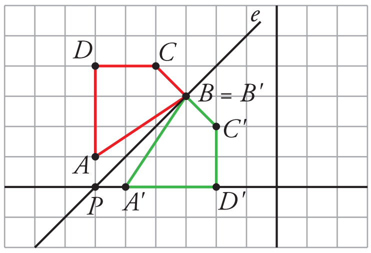
$A'(6, 1)$

$B'(3, 3)$

$C'(4, 4)$

$D'(6, 4)$

c)



$A'(-5, 0)$

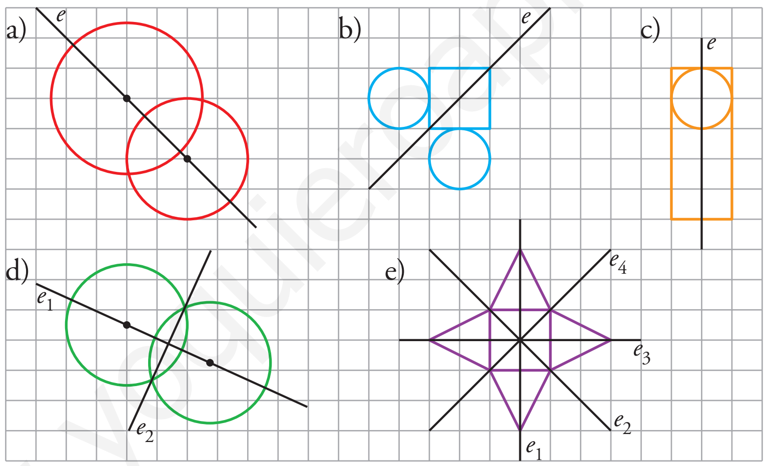
$B' = B$

$C'(-2, 2)$

$D'(-2, 0)$

d) El vértice B es el único punto doble en la simetría de eje BP.

6 ▼▼▽ **¿Cuáles son los ejes de simetría de las siguientes figuras?**



a) Solo tiene un eje de simetría, que es la recta que une los centros.

b) Una de las diagonales del cuadrado.

c) Un eje de simetría.

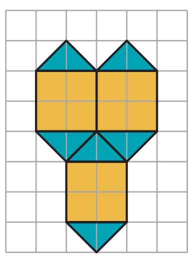
d) Dos ejes de simetría: la recta que une los centros y la recta que pasa por los puntos de corte de las circunferencias.

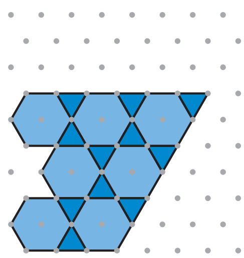
e) Cuatro ejes de simetría.

Mosaicos

7 ▼▽▽ **a) Completa en tu cuaderno estos mosaicos.**

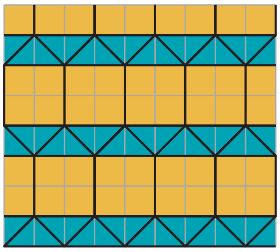
b) Identifica, en cada uno de ellos, algunos movimientos que lo transformen en sí mismo.



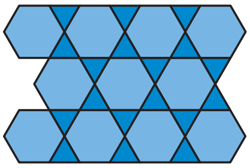


Soluciones a “Ejercicios y problemas”

a) A

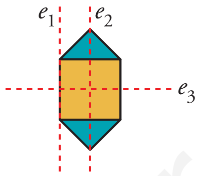


B



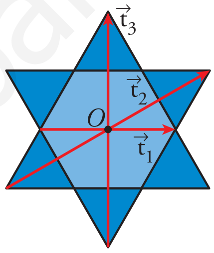
b) A • Traslaciones de vector $\vec{t}(1, 3)$ o $\vec{t}(2, 0)$.

• Simetrías de ejes e_1, e_2, e_3.



B • Giros de centro O y ángulos $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 120°$…

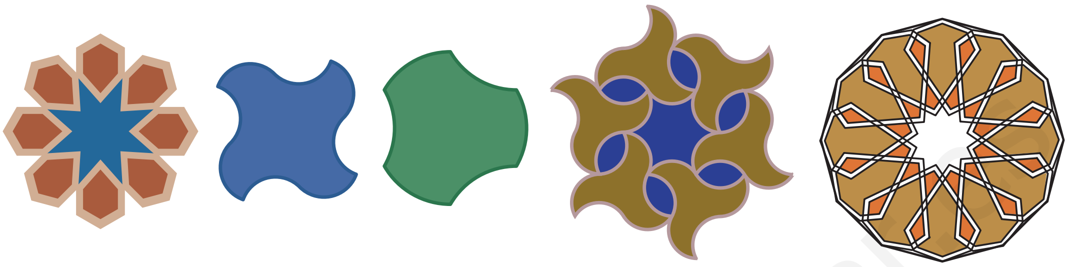
• Traslación de vector $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$.



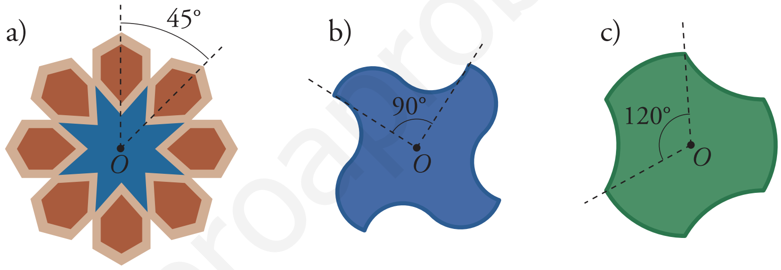
PÁGINA 230

Aplica lo aprendido

8 ▼▼▽ **Explica por qué las figuras siguientes tienen centro de giro. Halla el orden de cada uno y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro:**



Estas figuras tienen centro de giro en O porque al girarlas alrededor de O coinciden consigo mismas varias veces.



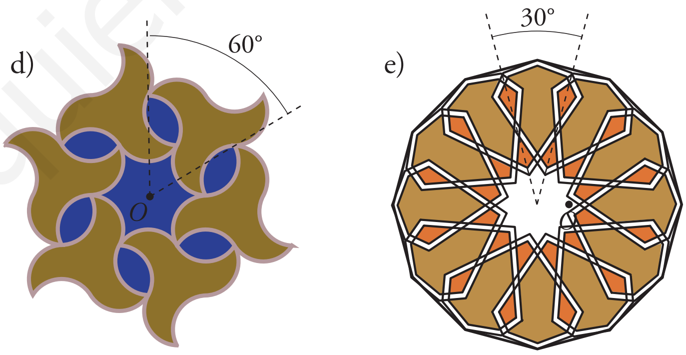
a) $n = 8$ $\alpha = 45°$

b) $n = 4$ $\alpha = 90°$

c) $n = 3$ $\alpha = 120°$

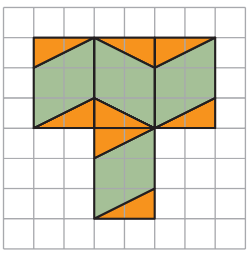
d) $n = 6$ $\alpha = 60°$

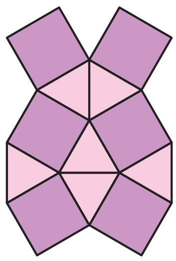
e) $n = 12$ $\alpha = 30°$



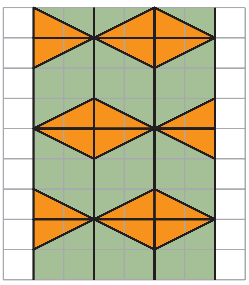
9 ▼▼▽ **a) Amplía en tu cuaderno estos mosaicos.**

b) Identifica, en cada uno de ellos, algunos movimientos que lo transformen en sí mismo.

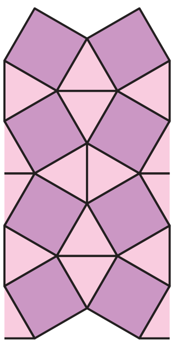




a) A

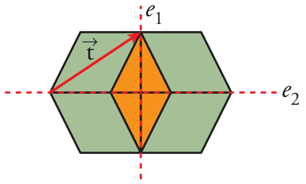


B



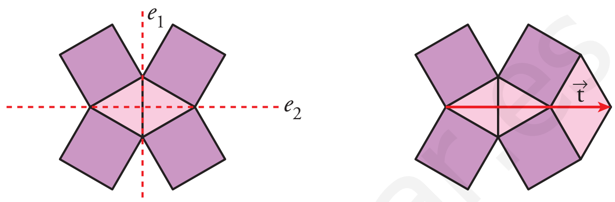
b) A • Simetrías de ejes e_1 y e_2.

• Traslación de vector $\vec{t}(3, 2)$.

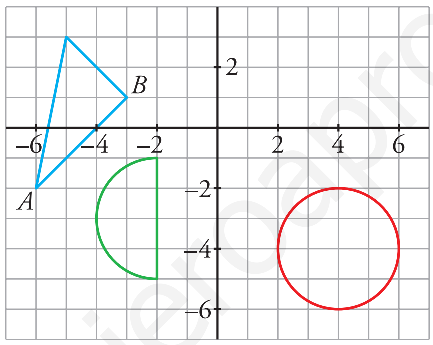


B • Simetrías de ejes e_1 y e_2.

• Traslación de vector $\vec{t}$.



10 ▼▼▽

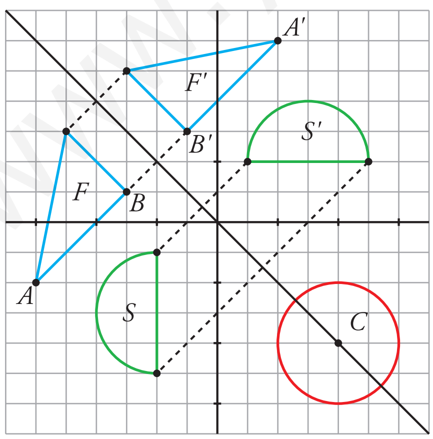


a) Representa las transformadas de estas figuras mediante la simetría cuyo eje es la recta $y = -x$.

b) ¿Cuál es la ecuación de la transformada de la recta que pasa por A y B?

c) ¿Alguna de las figuras es invariante?

a)

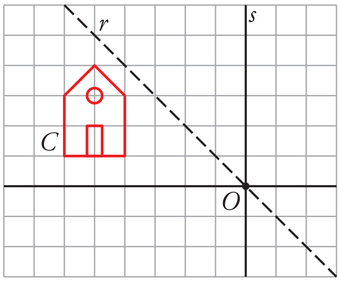


b) La transformada de la recta que pasa por A y B es la misma recta, por ser perpendicular al eje de simetría. Es decir, es la recta de ecuación $y = 4 + x$.

c) Es invariante la circunferencia C cuyo centro $(4, -4)$ está en el eje de simetría.

Resuelve problemas

11 ▼▼▽

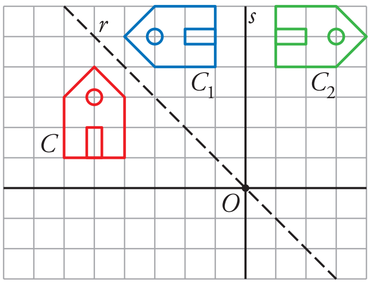


a) Dibuja la imagen C_1 transformada de C mediante la simetría de eje r.

b) Dibuja C_2, transformada de C_1 mediante la simetría de eje s.

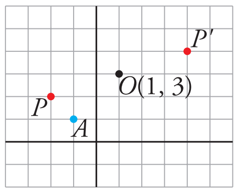
c) Define el giro equivalente a la composición de las dos simetrías que transforman C en C_2.

a) y b)



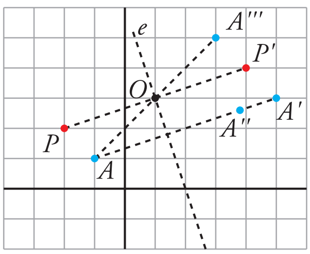
c) La composición de las dos simetrías es un giro de centro O y $\alpha = -90°$.

12 ▼▼▽ **Hemos transformado el punto P en P' mediante un giro de centro O y ángulo 180°.**



a) Identifica otros tres movimientos que transformen P en P'.

b) ¿Cuál es el transformado del punto A en cada uno de ellos?



a) I) $P \to P'$ mediante una traslación de vector $\vec{t}(6, 2)$.

II) $P \to P'$ mediante una simetría cuyo eje es la recta que pasa por O y es perpendicular a la recta que une P y P'. Su ecuación es $3x + y - 6 = 0$.

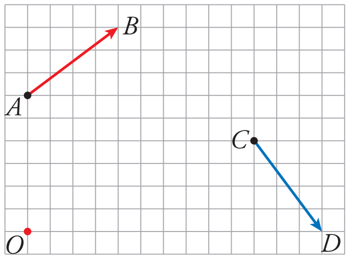
III) Mediante un giro de centro O y ángulo $\alpha = -180°$.

b) $A'(5, 3)$ es el transformado de A mediante la traslación $\vec{t}(6, 2)$.

A'' es el transformado de A mediante la simetría de eje e: $3x + y - 6 = 0$.

$A'''(3, 5)$ es el transformado de A mediante el giro de centro O y $\alpha = -180°$.

13 ▼▼▼



Las figuras AB y CD son iguales (compruébalo). Vamos a hacerlas coincidir mediante movimientos:

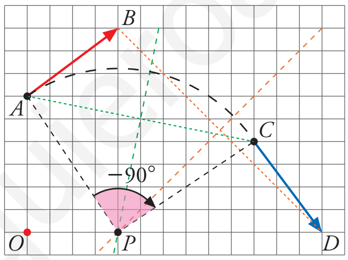
a) Lleva AB hasta CD mediante una traslación seguida de un giro.

b) ¿Cómo encontrarías el centro de un único giro mediante el cual se transforma, directamente, AB en CD?

Describe las transformaciones utilizando unos ejes de coordenadas con centro en O.

a) Se traslada AB mediante el vector $\vec{t} = (10, -2)$ y luego se gira –90° con centro en $C(10, 4)$.

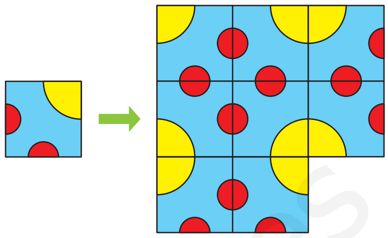
b) Se construyen dos mediatrices: la del segmento AC y la del segmento BD. El punto donde se cortan, $P(4, 0)$, es el centro de giro que transforma AB en CD.



PÁGINA 231

Problemas “+”

14 ▼▼▽ **Queremos alicatar una pared de 4,6 m × 3 m con azulejos cuadrados de 20 cm de lado como este:**

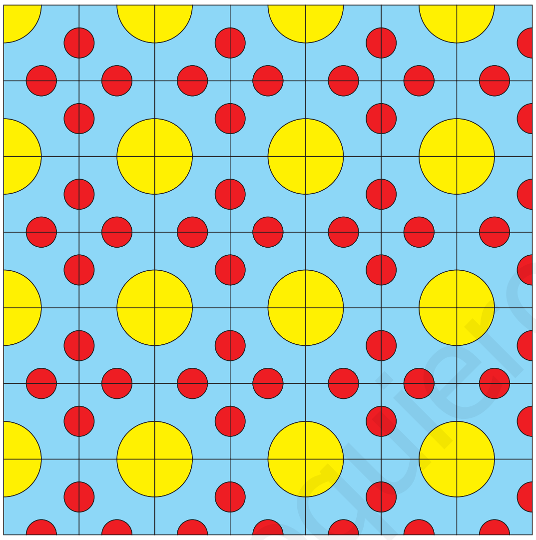


a) Completa, en tu cuaderno, un mosaico de 7 × 7 azulejos.

b) Averigua cuántos círculos grandes y cuántos pequeños (completos) habrá en la pared alicatada.

c) ¿Qué proporción de cada color (superficie) habrá en la pared? Radio círculo grande: 10 cm; radio círculo pequeño: 4 cm.

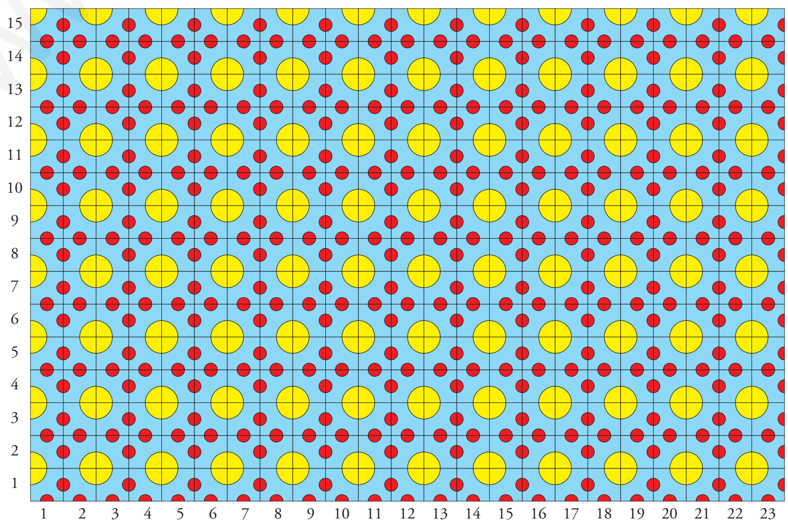
a)



b) La pared es de 460 cm × 300 cm; por tanto, caben 23 columnas × 15 filas de azulejos.

Como cada 2 × 2 azulejos hacen un círculo grande completo, y no debemos contar los que se quedan “medios”, es como si tuviéramos 22 columnas × 14 filas de azulejos.

Habrá entonces 11 columnas × 7 filas de círculos; es decir, 11 · 7 = 77 círculos grandes. Observa la figura:



Contamos los círculos pequeños por columnas: comenzamos con la primera y vamos añadiendo columnas.

El número de círculos pequeños (completos) depende de que la columna sea par o impar. Veámoslo:

1.ª columna: 7 círculos pequeños completos.

2.ª columna: se suman $3 \cdot 7 + 1 = 22$ círculos pequeños completos.

3.ª columna: se suman 7 círculos pequeños completos.

4.ª columna: se suman $3 \cdot 7 + 1 = 22$ círculos copletos.

…

Así, en las columnas pares se añaden 22 círculos completos y en las impares, solo 7. Del 1 al 23 hay 11 columnas pares y 12 impares.

Por tanto, habrá $11 \cdot 22 + 12 \cdot 7 = 242 + 84 = 326$ círculos pequeños completos.

c) La proporción de cada color en la pared es igual a la proporción de cada color en un solo azulejo, ya que todos son iguales.

El cuadrado tiene $20 \cdot 20 = 400$ cm^2 de superficie.

El color rojo está en las dos mitades del círculo pequeño; es decir, un círculo pequeño completo (con $\frac{20}{6}$ cm de radio).

Por tanto, el color rojo ocupa una superficie de $\pi \cdot \frac{20}{6} \approx 34{,}91$ cm^2.

El color amarillo ocupa un cuarto de círculo grande (con 10 cm de radio):

$\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 10^2 \approx 78{,}54$ cm^2

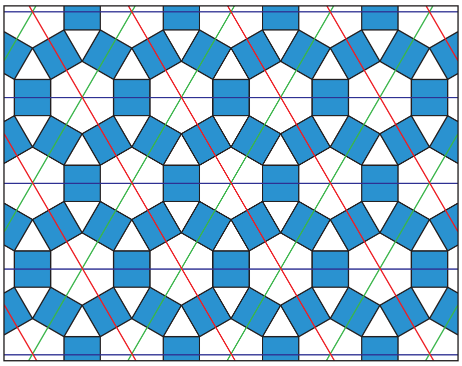
Con estos datos, ya podemos hallar las proporciones de los colores que hay en cada azulejo y, por tanto, en toda la pared:

ROJO: $\frac{34{,}91}{400} \approx 0{,}0872 = 8{,}72$ % AMARILLO: $\frac{78{,}54}{400} \approx 0{,}1963 = 19{,}63$ %

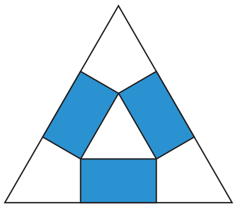
AZUL: $100 - (8{,}72 + 19{,}63) = 71{,}65$ %

15 ▼▼▼ **Se llama motivo mínimo de un mosaico a una pieza teórica, lo más pequeña posible, repitiendo la cual se puede reproducir todo el mosaico. Los bordes de esta pieza “no se notan” salvo que los hayamos pintado expresamente.**

Por ejemplo, si en el siguiente mosaico trazamos ejes de simetría con ángulos de 60°:



descubrimos la pieza de aquí abajo como candidata a "motivo mínimo".

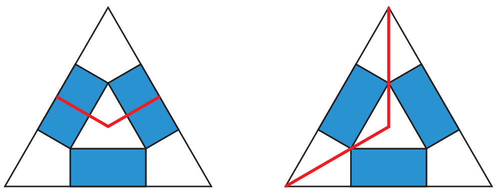


a) Redúcela a la tercera parte de dos formas distintas.

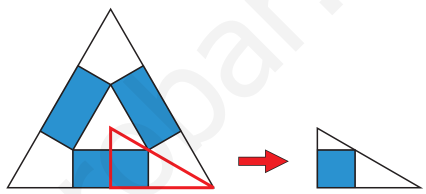
b) ¿Puedes hacerla aún más pequeña?

c) Descubre otro "motivo mínimo" trazando ejes de simetría perpendiculares.

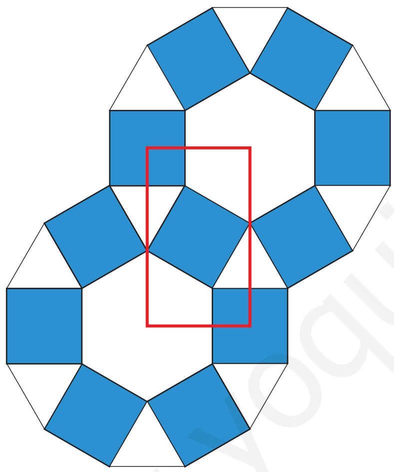
a)



b)



c)



Reflexiona sobre la teoría

16 ▼▽▽ **Se dice que una transformación $\mathcal{T}'$ es inversa de otra $\mathcal{T}$ cuando compuesta con ella da lugar a la identidad (es decir, si aplicamos $\mathcal{T}$ y después $\mathcal{T}'$, todo queda como estaba).**

Encuentra la transformación inversa en cada uno de los siguientes casos:

a) Una traslación de vector $\vec{t}(-5, 2)$.

b) Un giro de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = -45°$.

c) Una simetría de eje la recta $y = x$.

a) Una traslación de vector $\vec{t}(5, -2)$.

b) Un giro de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 45°$.

c) Es inversa de sí misma: una simetría de eje la recta $y = x$.

17 ▼▼▽ La composición de transformaciones no cumple la propiedad conmutativa (es decir, $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$, en general, es distinto que $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$). Sin embargo, si las transformaciones son de ciertos tipos, sí se cumple la propiedad conmutativa.

Justifica en cuáles de los siguientes casos es así y en cuáles no:

a) Composición de dos traslaciones.

b) Composición de dos giros del mismo centro.

c) Composición de dos simetrías axiales.

d) Composición de una traslación y un giro.

a) Sí es conmutativa. El resultado es otra traslación de vector igual al vector suma de los correspondientes a las dos traslaciones.

b) Sí es conmutativa. El resultado es otro giro del mismo centro y ángulo igual a la suma de los ángulos correspondientes a los dos giros.

c) No es conmutativa.

d) No es conmutativa.

18 ▼▽▽ Si consideramos una transformación que *deja todo como estaba y donde estaba*, a dicha transformación la llamaremos identidad (I).

Define una traslación y un giro que sean equivalentes a la identidad.

La única translación que es equivalente a la identidad es la de vector $\vec{0}$. Un giro equivalente a la identidad es aquel con cualquier centro y un ángulo de 360°, 720°, 1 080°…

19 ▼▼▽ Se dice que una transformación es idempotente (o involutiva) si compuesta consigo misma da lugar a la identidad (es decir, si la aplicamos dos veces, todo queda como estaba: $\mathcal{T} \circ \mathcal{T} = I$).

Encuentra dos movimientos que sean idempotentes.

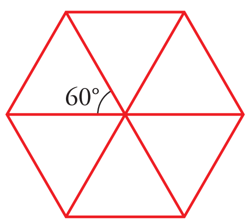
Por ejemplo:

Un giro de centro cualquiera y ángulo 180°, ya que al componerlo dos veces es equivalente a la identidad.

Una simetría de eje cualquiera.

20 ▼▼▽ Justifica que solo se puede hacer un mosaico regular con triángulos, cuadrados o hexágonos. Para ello ten en cuenta cuánto deben sumar los ángulos de los polígonos que concurren en un vértice de un mosaico. Y cuánto vale el ángulo de cada uno de los polígonos regulares.

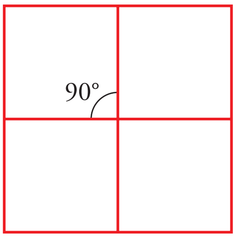
- Seis triángulos equiláteros encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:



$60° \cdot 6 = 360°$

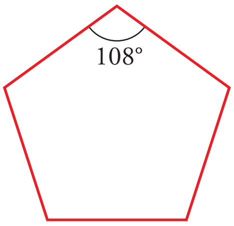
Soluciones a “Ejercicios y problemas”

- Cuatro cuadrados encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:



$90° \cdot 4 = 360°$

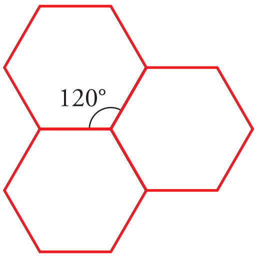
- No podemos encajar los pentágonos regulares:



$180° \cdot 3 = 324°$ → Con tres pentágonos no llega a 360°.

$180° \cdot 4 = 432°$ → Con cuatro pentágonos pasamos de 360°

- Tres hexágonos regulares encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:



$120° \cdot 3 = 360°$

- Al considerar tres polígonos de más de 6 lados, la suma de los tres ángulos correspondientes es mayo de 360°; luego no se pueden encajar en el plano.

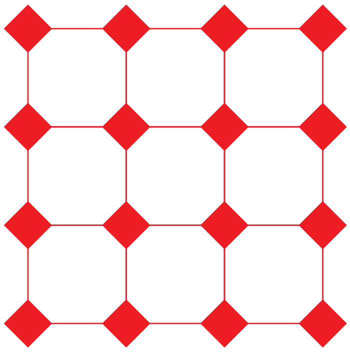
Soluciones a "Y para terminar…"

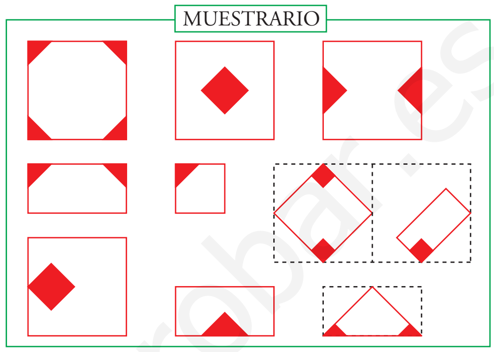
PÁGINA 233

▼ Investiga

Diferentes baldosas

Entre los modelos de baldosas del muestrario de la derecha, ¿cuáles sirven para construir el suelo que ves a la izquierda?



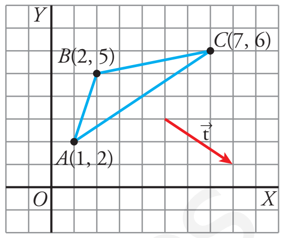


Todas las baldosas del muestrario son válidas para construir el suelo pedido. (No se tienen en cuenta las líneas de unión entre baldosas).

PÁGINA 233

¿Sabes definir, aplicar, reconocer y distinguir los distintos movimientos en el plano?

1 **Averigua las coordenadas de los vértices del triángulo transformado del ABC mediante cada uno de los siguientes movimientos:**



a) La traslación de vector $\vec{t}$.

b) La simetría de eje X.

c) La simetría de eje Y.

d) El giro de centro O y ángulo –90° (90° en el sentido de las agujas del reloj).

e) ¿En alguno de los movimientos anteriores el punto $P(0, 4)$ es doble?

f) ¿En alguno de los movimientos anteriores es el eje Y una recta doble?

a) $A'(4, 0)$; $B'(5, 3)$; $C'(10, 4)$

b) $A'(1, -2)$; $B'(2, -5)$; $C'(7, -6)$

c) $A'(-1, 2)$; $B'(-2, 5)$; $C'(-7, 6)$

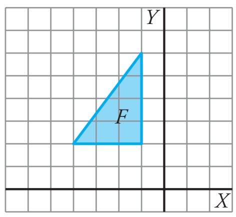
d) $A'(2, -1)$; $B'(5, -2)$; $C'(6, -7)$

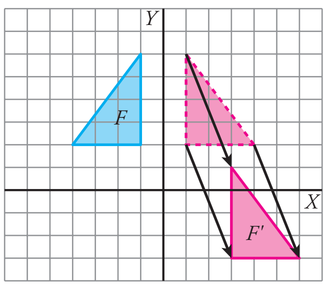
e) En la simetría de eje Y el punto $P(0, 4)$ es doble.

f) En las simetrías de eje X y de eje Y, el eje Y es doble.

2 **Llamamos S a la simetría de Y, y T, a la traslación de vector $\vec{t}(2, -5)$.**

Obtén la transformada de la figura F mediante la composición de S con T.

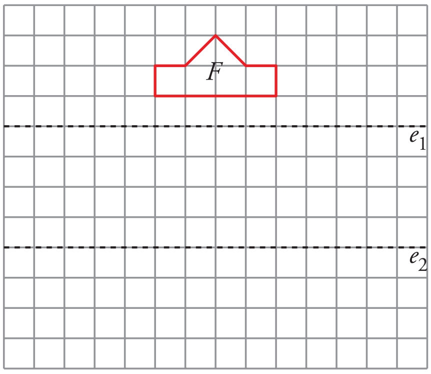


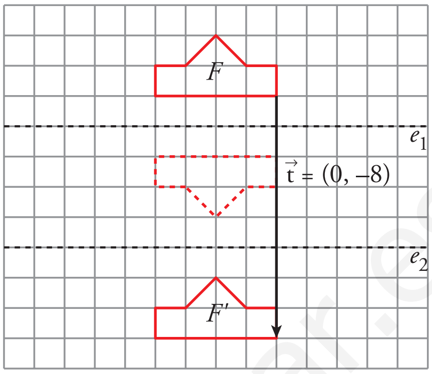


Soluciones a la Autoevaluación

3 **Considera las simetrías S_1 y S_2 de ejes e_1 y e_2, respectivamente. Dibuja la fugura F' transformada de F mediante S_1 compuesta con S_2.**

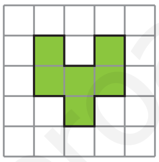
¿Qué otro movimiento nos permite obtener F' a partir de F?



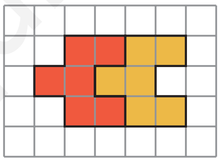


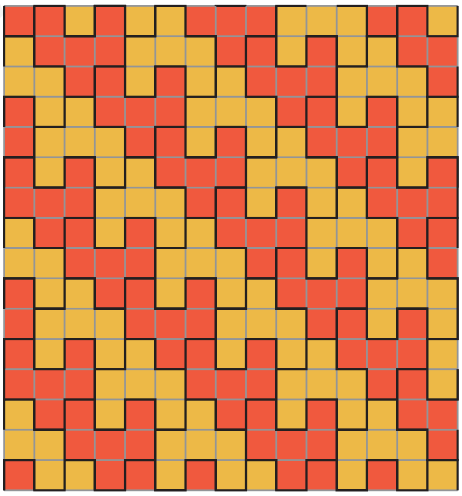
Con una translación de vector $\vec{t}(0, -8)$ se obtiene F' a partir de F.

4 **Dibuja en papel cuadriculado un mosaico a partir de esta pieza:**



Busca una forma de engranarlas distinta de esta:





12 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 237

PARA EMPEZAR...

▼ Información estadística en tablas y gráficas

■ **En la tabla, ¿qué significa el 44 que está a la derecha del 3?**

Sin hacer el cálculo, ¿cuánto suman los nueve números de la columna derecha de la tabla?

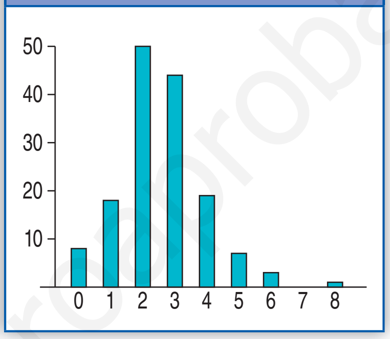
¿Por qué las barras del diagrama están separadas unas de otras?

NÚMERO DE HIJOS EN 150 FAMILIAS

TABLA DE FRECUENCIAS

N.º DE HIJOS	CANTIDAD DE FAMILIAS
0	8
1	18
2	50
3	44
4	19
5	7
6	3
7	0
8	1

DIAGRAMA DE BARRAS



- El 44 significa que hay 44 familias que tienen 3 hijos.
- Deben sumar 150, ya que el estudio se hace sobre 150 familias.
- Las barras están separadas unas de otras porque el *número de hijos* es una variable discreta.

■ **Si una chica mide 168 cm, ¿en cuál de los intervalos se encuentra?**

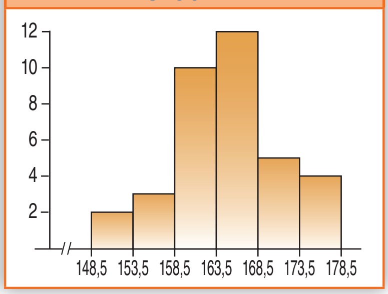
¿Por qué las barras son anchas, de modo que se juntan unas a otras?

ESTATURA DE LOS 36 ALUMNOS Y ALUMNAS DE UNA CLASE

TABLA DE FRECUENCIAS

ESTATURA (cm)	N.º DE CHICOS Y CHICAS
148,5 a 153,5	2
153,5 a 158,5	3
158,5 a 163,5	10
163,5 a 168,5	12
168,5 a 173,5	5
173,5 a 178,5	4

HISTOGRAMA



- Una chica que mide 168 cm estará en el intervalo 163,5 - 168,5.
- Porque la *estatura* es una variable continua.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

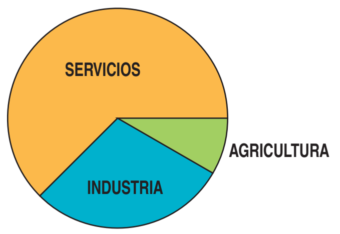
■ **Observa la tabla de frecuencias. Calcula el porcentaje de trabajadores que corresponde a cada sector y comprueba que Jlos sectores están razonablemente construidos.**

REPARTO, SEGÚN EL TIPO DE TRABAJO, DE 600 000 TRABAJADORES

TABLA DE FRECUENCIAS

SECTOR DE PRODUCCIÓN	N.º DE TRABAJADORES
Agricultura	**50 000**
Industria	**175 000**
Servicios	**375 000**

DIAGRAMA DE SECTORES



Agricultura: $\dfrac{50\,000}{600\,000} \cdot 100 \approx 8{,}33\% \;\rightarrow\; \dfrac{50\,000}{600\,000} \cdot 360° = 30°$

Industria: $\dfrac{175\,000}{600\,000} \cdot 100 \approx 29{,}17\% \;\rightarrow\; \dfrac{175\,000}{600\,000} \cdot 360° = 105°$

Servicios: $\dfrac{375\,000}{600\,000} \cdot 100 \approx 62{,}5\% \;\rightarrow\; \dfrac{375\,000}{600\,000} \cdot 360° = 225°$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 238

1 Un fabricante de tornillos desea hacer un control de calidad. Para ello, recoge 1 de cada 100 tornillos producidos y lo analiza.

a) ¿Cuál es la población?

b) ¿Cuál es la muestra?

c) ¿Cuáles son los individuos?

a) La totalidad de los tornillos que fabrica.

b) El conjunto formado por los tornillos analizados (1% de la población).

c) Cada uno de los tornillos.

12 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 239

1 El fabricante de tornillos descrito en la página anterior estudia en cada tornillo si es *correcto* o *defectuoso*, su *longitud* y el *número de pasos de rosca*. Di de qué tipo es cada una de estas variables.

- *Correcto* o *defectuoso*: variable cualitativa.
- *Longitud*: variable cuantitativa continua.
- *Número de pasos de rosca*: variable cuantitativa discreta.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 240

1 **Se quiere hacer una encuesta para estudiar las aficiones de los jóvenes a la lectura. Di, justificadamente, cuáles de las preguntas siguientes te parecen razonables y cuáles no:**

a) Di cuáles son tus lecturas preferidas.

b) De los géneros literarios siguientes, señala aquellos que has leído más de una hora en el último mes:

❑ NOVELA	❑ HISTORIA	❑ BIOGRAFÍA
❑ POESÍA	❑ TEATRO	❑ FILOSOFÍA

c) ¿Lees periódicos? Si es así, ¿de qué tipo?

d) A cuál o cuáles de las siguientes publicaciones periódicas dedicas más de dos horas semanales:

❑ Diarios de actualidad y política.

❑ Diarios deportivos.

❑ Revistas científicas o de divulgación.

❑ Revistas de sociedad (del corazón).

❑ Otros. Indica cuáles ………………

a) No es razonable, porque podemos obtener una cantidad enorme de posibles respuestas imposibles de organizar. No es evidente la variable ni sus posibles valores.

b) Sí es razonable, porque quedan determinadas todas las opciones de respuesta sin ambigüedades.

c) No es razonable, porque no se especifican las posibles respuestas. No es evidente la variable ni sus posibles valores.

d) Sí es razonable, porque queda claro qué variable se estudia y sus posibles valores.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 241

1 **Lanzamos dos dados, sumamos las puntuaciones y anotamos los resultados. Repetimos la experiencia 30 veces:**

11, 8, 9, 9, 3 4, 11, 7, 7, 8 7, 5, 6, 4, 4

7, 10, 2, 6, 10 7, 7, 6, 2, 8 7, 5, 8, 6, 9

Confecciona una tabla de frecuencias.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	2	1	3	2	4	7	4	3	2	2	0

2 **Con los datos del ejemplo anterior (altura de 30 alumnas y alumnos), efectúa una tabla de frecuencias con los datos agrupados en los intervalos siguientes:**

147,5 - 151,5 - 155,5 - 159,5 - 163,5 - 167,5 - 171,5 - 175,5 - 179,5

INTERVALOS	FRECUENCIA
147,5 a 151,5	1
151,5 a 155,5	1
155,5 a 159,5	3
159,5 a 163,5	9
163,5 a 167,5	5
167,5 a 171,5	7
171,5 a 175,5	3
175,5 a 179,5	1

PÁGINA 243

1 **Representa, mediante el gráfico adecuado, las tablas estadísticas siguientes:**

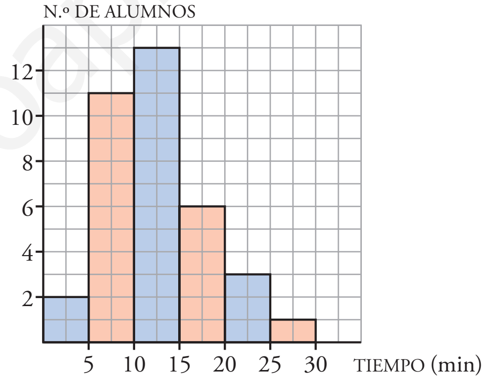
a) Tiempo que emplean los alumnos y las alumnas de un curso en ir desde su casa al colegio.

TIEMPO (min)	N.º DE ALUMNOS
0 – 5	2
5 – 10	11
10 – 15	13
15 – 20	6
20 – 25	3
25 – 30	1

b) Número de alumnos y alumnas en el curso 2009/10 en una cierta comunidad autónoma, según la etapa de estudios en la que estaban.

INFANTIL	55 000
PRIMARIA	125 000
SECUNDARIA OBLIGATORIA	100 000
BACHILLERATO Y FORMACIÓN PROFESIONAL	60 000
UNIVERSIDAD	80 000
TOTAL	420 000

a) El gráfico adecuado es el histograma.



b) El gráfico adecuado es el diagrama de sectores.

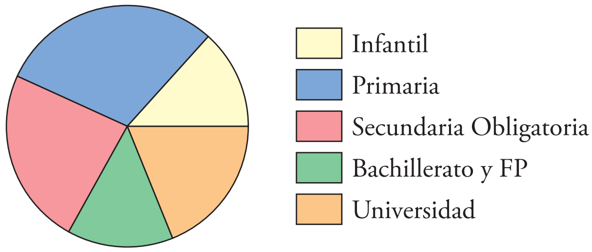
Calculamos el ángulo que corresponde a cada etapa (redondeando a grados):

Infantil: $\frac{55\,000}{420\,000} \cdot 360° \approx 47°$ Primaria: $\frac{125\,000}{420\,000} \cdot 360° \approx 107°$

Secundaria obligatoria: $\frac{100\,000}{420\,000} \cdot 360° \approx 86°$

Bachillerato y FP: $\frac{60\,000}{420\,000} \cdot 360° \approx 51°$

Universidad: $\frac{80\,000}{420\,000} \cdot 360° \approx 69°$



Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 244

1 Nos dan la distribución de notas siguiente:

2, 4, 4, 4, 5, 7, 9, 9, 10

a) Comprueba, calculándola, que la nota media es $\bar{x} = 6$.

b) Comprueba que la mediana es $Me = 5$.

c) ¿Cuál es la mediana si suprimimos el 10?

d) ¿Cuál es la moda?

a) $\bar{x} = \dfrac{2 + 4 + 4 + 4 + 5 + 7 + 9 + 9 + 10}{9} = \dfrac{54}{9} = 6$

b) $2, 4, 4, 4, \underset{\displaystyle Me}{\underset{\downarrow}{5}}, 7, 9, 9, 10$

El 5 deja 4 valores por debajo y 4 por encima.

c) $Me = \dfrac{4 + 5}{2} = 4{,}5.$

d) $Mo = 4$. (Es el más repetido).

PÁGINA 245

2 Halla las medidas de dispersión de esta distribución de pesos:

83, 65, 75, 72, 70, 80, 75, 90, 68, 72

Ordenamos la distribución: 65, 68, 70, 72, 72, 75, 75, 80, 83, 90

- Recorrido: 90 – 65 = 25

$$\bar{x} = \frac{65 + 68 + 70 + 72 + 72 + 75 + 75 + 80 + 83 + 90}{10} = \frac{750}{10} = 75$$

- $DM = \dfrac{|65 - 75| + |68 - 75| + |70 - 75| + |72 - 75| + \ldots + |83 - 75| + |90 - 75|}{10} = \dfrac{56}{10} = 5{,}6$

- $Var = \dfrac{(63 - 75)^2 + (68 - 75)^2 + \ldots + (90 - 75)^2}{10} = \dfrac{506}{10} = 50{,}6$

- $\sigma = \sqrt{50{,}6} = 7{,}11$

3 Halla la varianza de la distribución siguiente:

8, 7, 11, 15, 9, 7, 13, 15

Calcúlala utilizando las dos fórmulas de la varianza. Comprueba que es mucho más cómoda la segunda.

$$\bar{x} = \frac{85}{8} = 10{,}625$$

$$Var = \frac{(8 - 10{,}625)^2 + (7 - 10{,}625)^2 + (11 - 10{,}625)^2 + (15 - 10{,}625)^2 + \ldots}{8}$$

$$\ldots \frac{+ (9 - 10{,}625)^2 + (7 - 10{,}625)^2 + (13 - 10{,}625)^2 + (15 - 10{,}625)^2}{8} = 9{,}98$$

$$Var = \frac{8^2 + 7^2 + 11^2 + 15^2 + 9^2 + 7^2 + 13^2 + 15^2}{8} - (10{,}625)^2 =$$

$$= 122{,}875 - 112{,}890625 = 9{,}98$$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 246

1 **Halla $\bar{x}$ en las distribuciones siguientes:**

a) NOTAS **(corresponde a la gráfica de 3.º B, página 244):**

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	0	5	4	2	2	1	1	2	3	4	8

b) ESTATURAS **(en cm):**

x_i	151	156	161	166	171	176
f_i	2	5	11	14	5	3

a)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
f_i	0	5	4	2	2	1	1	2	3	4	8	32
$f_i \cdot x_i$	0	5	8	6	8	5	6	14	24	36	80	192

$$\bar{x} = \frac{192}{32} = 6$$

b)

x_i	151	156	161	166	171	176	
f_i	2	5	11	14	5	3	40
$f_i \cdot x_i$	302	780	1 771	2 324	855	528	6 560

$$\bar{x} = \frac{6\,560}{40} = 164$$

PÁGINA 247

2 Halla σ en las distribuciones de la actividad 1 de la página anterior.

a)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
f_i	0	5	4	2	2	1	1	2	3	4	8	32
$f_i \cdot x_i$	0	5	8	6	8	5	6	14	24	36	80	192
$f_i \cdot x_i^2$	0	5	16	18	32	25	36	98	192	324	800	1 546

$$\sigma = \sqrt{\frac{1\,546}{32} - 6^2} = 3{,}51$$

b)

x_i	151	156	161	166	171	176	
f_i	2	5	11	14	5	3	40
$f_i \cdot x_i$	302	780	1 771	2 324	855	528	6 560
$f_i \cdot x_i^2$	45 602	121 680	285 131	385 784	146 205	92 28	1 077 330

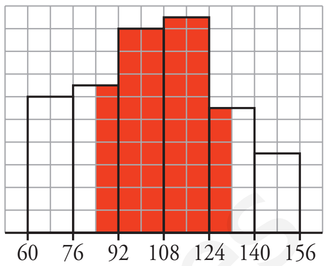
$$\sigma = \sqrt{\frac{1\,077\,330}{40} - 164^2} = 6{,}1$$

PÁGINA 251

2 Las puntuaciones obtenidas por 80 alumnos en un test vienen recogidas en el gráfico adjunto.

a) Estima la media.

b) ¿Te parece que en la zona roja están, aproximadamente, los 2/3 de los datos? Si es así, estima la desviación típica tomando como $(\bar{x} - \sigma,\ \bar{x} + \sigma)$ el intervalo (84, 132).



a) Podemos estimar que la media es algo menos de 108. Por redondear, dejémosla en 108.

b) Los extremos de la parte coloreada están en 84 y 132. Esto nos lleva a estimar que la desviación típica es 24.

Si ahora comparamos estos valores con los reales, $\bar{x} = 105$, $\sigma = 24$, observamos que la estimación que hemos hecho es bastante buena.

PÁGINA 252

3 **En distintas tiendas de instrumentos musicales preguntamos el precio de ciertos modelos concretos de piano, flauta travesera y armónica. Los resultados obtenidos tienen las siguientes medias y desviaciones típicas:**

	PIANOS	FLAUTAS	ARMÓNICAS
MEDIA	943 €	132 €	37 €
DESV. TÍPICA	148 €	22 €	12 €

Compara la dispersión relativa de los precios de estos tres productos.

Calculamos el coeficiente de variación de los tres instrumentos.

PIANOS: $CV = \dfrac{148}{943} \approx 0{,}157 \ \ (15{,}7\%)$

FLAUTAS: $CV = \dfrac{22}{132} \approx 0{,}167 \ \ (16{,}7\%)$

ARMÓNICAS: $CV = \dfrac{12}{37} \approx 0{,}324 \ \ (32{,}4\%)$

La armónica es el instrumento que presenta mayor variación de precios, y el piano, el que menos.

12 Soluciones a "Ejercicios y problemas"

PÁGINA 253

Practica

Población y muestra. Variables

1 ▼▽▽ **Indica, para cada caso propuesto:**

- **Cuál es la población.**
- **Cuál es la variable.**
- **Tipo de variable: cualitativa, cuantitativa discreta o cuantitativa continua.**

a) Peso de los recién nacidos en Murcia a lo largo del año pasado.

b) Profesiones que quieren tener los estudiantes de un centro escolar.

c) Número de animales de compañía que hay en los hogares españoles.

d) Partido al que los electores pueden votar en las próximas elecciones generales.

e) Tiempo semanal que dedican a la lectura los estudiantes de la ESO en España.

f) Número de tarjetas amarillas mostradas en los partidos de fútbol de 1.ª división en la temporada pasada.

	POBLACIÓN	VARIABLE	TIPO DE VARIABLE
a)	Bebés nacidos en Murcia el año pasado.	Peso.	Cuantitativa continua
b)	Estudiantes de un centro escolar.	Profesiones.	Cualitativa
c)	Hogares españoles.	N.º de mascotas por hogar.	Cuantitativa discreta
d)	Población en edad de votar.	Partido político al que votan los electores.	Cualitativa
e)	Estudiantes de ESO en España.	Tiempo de lectura semanal.	Cuantitativa continua
f)	Partidos de fútbol oficiales (1.ª División).	N.º de tarjetas amarillas.	Cuantitativa discreta

2 ▼▽▽ **Se ha hecho una encuesta para saber con qué regularidad se lee el periódico en una ciudad. Las respuestas fueron:**

a) Completa la tabla calculando el porcentaje de personas que respondieron "nunca".

b) Si hubo 145 personas que respondieron "nunca", ¿a cuántas personas se encuestó?

c) Di cuántas personas dieron cada una de las respuestas.

d) Las personas encuestadas, ¿son población o muestra?

RESPUESTA	%
TODOS LOS DÍAS	37,3
UNA VEZ A LA SEMANA	29
UNA VEZ AL MES	10,4
ALGUNA VEZ AL AÑO	11,3
NUNCA	…
NO CONTESTA	0,4

a) NUNCA → 100 – (37,2 + 29,2 + 10,4 + 11,2 + 0,4) = 11,6%

b) Se encuestó a 145 : 0,116 = 1 250 personas.

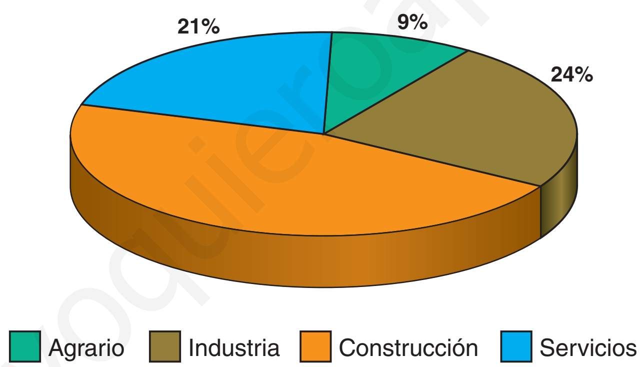
c)

RESPUESTA	N.º DE PERSONAS
TODOS LOS DÍAS	1 250 · 0,372 = 465
UNA VEZ A LA SEMANA	1 250 · 0,292 = 365
UNA VEZ AL MES	1 250 · 0,104 = 130
ALGUNA VEZ AL AÑO	1 250 · 0,112 = 140
NUNCA	145
NO CONTESTA	1 250 · 0,004 = 5

d) Son muestra, porque, claramente, no hay 1 250 personas en una ciudad (sería una pequeña población).

Interpretación gráfica

3 ▼▽▽ **En una determinada región se ha hecho un estudio sobre los accidentes mortales producidos en el trabajo, según el sector de actividad. Aquí se muestran los resultados:**



a) ¿Cuál es el porcentaje de accidentes mortales producidos en el sector de la construcción?

b) Si hubo 135 accidentes mortales en el sector agrario, ¿cuál fue el número total de accidentes mortales en la región?

c) ¿Cuántos accidentes mortales hubo en cada uno de los sectores?

a) Construcción: 100% – (21% + 9% + 24%) = 46%

b) El 9% se corresponde con 135 accidentes mortales, luego el 100% será:

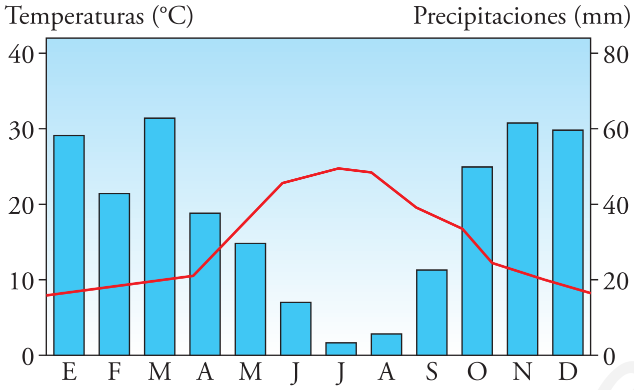
$\frac{100 \cdot 135}{9}$ = 1 500 accidentes mortales

c) Sector industria: $\frac{24 \cdot 1\,500}{100}$ = 360 accidentes mortales

Sector construcción: $\frac{46 \cdot 1\,500}{100}$ = 690 accidentes mortales

Sector servicios: $\frac{21 \cdot 1\,500}{100}$ = 315 accidentes mortales

4 ▼▼▽ **Es frecuente que en un mismo gráfico se representen dos series de datos relativos a una misma variable. En este se muestran datos sobre la climatología de Badajoz, durante un año.**



a) ¿Qué representan las barras?

b) ¿Qué representa la línea continua?

c) ¿Cuáles son las variables? ¿De qué tipo son?

d) Describe la relación entre las dos variables y razona por qué ocurre así.

a) Las barras representan las precipitaciones.

b) La línea continua representa las temperaturas.

c) Las variables son *temperatura* y *precipitaciones*. Las dos son variables cuantitativas continuas.

d) En Badajoz, la temperatura más baja se obtiene en enero (unos 8 °C), se eleva muy lentamente a lo largo del invierno, y en primavera aumenta mucho más rápidamente, hasta la mitad del verano, donde alcanza su máximo, unos 25 °C. A partir de este momento disminuye a lo largo del otoño y del inicio del invierno hasta alcanzar, nuevamente, su cota mínima.

Las precipitaciones, sin embargo, son abundantes en invierno y primavera, reduciéndose al final de esta y cayendo drásticamente en las semanas centrales del verano. Vuelven a aumentar algo en septiembre, siendo abundantes, nuevamente, a lo largo del otoño e inicios del invierno.

PÁGINA 254

Elaboración de tablas y gráficas

5 ▼▽▽ **Al preguntar a los estudiantes de un grupo de tercero de ESO por el número de libros que han leído en el último mes, hemos obtenido los datos siguientes:**

2	**1**	**3**	**1**	**1**	**5**	**1**	**2**	**4**	**3**
1	**0**	**2**	**4**	**1**	**0**	**2**	**1**	**2**	**1**
3	**2**	**2**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**0**	**2**

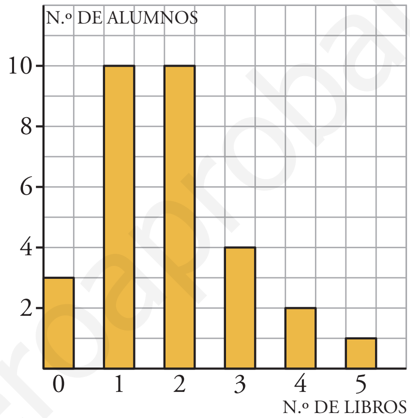
a) Haz la tabla de frecuencias absolutas.

b) Realiza el diagrama de barras que corresponde a estos datos.

a)

NÚMERO DE LIBROS LEÍDOS	NÚMERO DE ALUMNOS
0	3
1	10
2	10
3	4
4	2
5	1

b)



6 ▼▽▽ **Al preguntar a un grupo de alumnos por el número de horas que suele estudiar cada semana, sus respuestas fueron:**

14	**9**	**9**	**20**	**18**	**12**	**14**	**6**	**14**	**8**
15	**10**	**18**	**20**	**2**	**7**	**18**	**8**	**12**	**10**
20	**16**	**18**	**15**	**24**	**10**	**12**	**25**	**24**	**17**
10	**4**	**8**	**20**	**10**	**12**	**16**	**5**	**4**	**13**

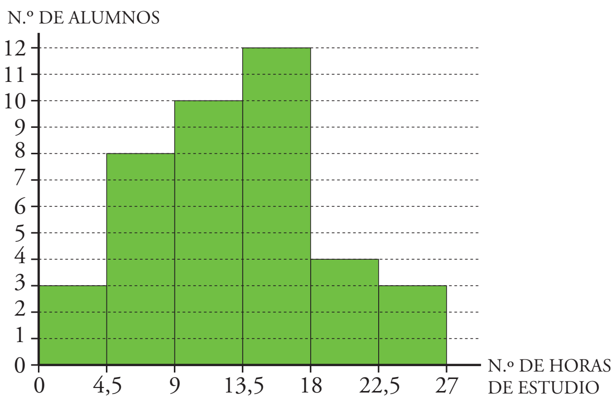
a) Reparte estos datos en los intervalos cuyos extremos son:

0 - 4,5 - 9 - 13,5 - 18 - 22,5 - 27

b) Haz la tabla de frecuencias y el histograma correspondiente.

a) y b)

INTERVALO	f_i
0 a 4,5	3
4,5 a 9	8
9 a 13,5	10
13,5 a 18	12
18 a 22,5	4
22,5 a 27	3
TOTAL	40



7 ▼▽▽ **El color elegido al comprar un coche viene dado en la tabla siguiente:**

Elabora un diagrama de sectores que refleje la situación mostrada.

COLOR ELEGIDO	PORCENTAJE
Plata/gris	**36%**
Negro	**22%**
Azul	**18%**
Rojo	**10%**
Blanco	**8%**
Verde	**4%**
Resto	**2%**

Calculamos los grados que corresponden a cada color:

Plata/Gris: $\dfrac{36 \cdot 360}{100} = 129{,}6 \;\rightarrow\; 129°\ 36'$

Negro: $\dfrac{22 \cdot 360}{100} = 79{,}2 \;\rightarrow\; 79°\ 12'$

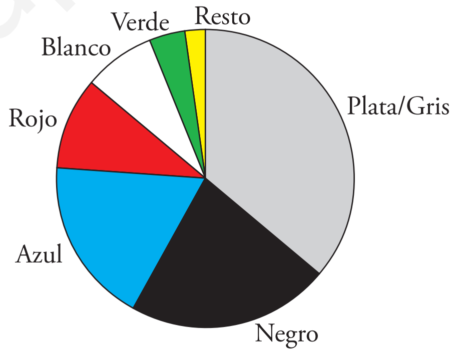
Azul: $\dfrac{18 \cdot 360}{100} = 64{,}8 \;\rightarrow\; 64°\ 48'$

Rojo: $\dfrac{10 \cdot 360}{100} = 36 \;\rightarrow\; 36°$

Blanco: $\dfrac{8 \cdot 360}{100} = 28{,}8 \;\rightarrow\; 28°\ 48'$

Verde: $\dfrac{4 \cdot 360}{100} = 14{,}4 \;\rightarrow\; 14°\ 24'$

Resto: $\dfrac{2 \cdot 360}{100} = 7{,}2 \;\rightarrow\; 7°\ 12'$



Parámetros estadísticos. Cálculo

8 ▼▽▽ **Calcula los parámetros media, mediana, moda, recorrido, desviación media, varianza y desviación típica de cada una de las distribuciones siguientes:**

a) 3, 5, 5, 5, 6, 8, 10, 10, 11

b) 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 8, 10, 10, 11, 14

c) 183, 172, 168, 190, 175, 180, 170, 172, 175, 165

a) MEDIA, $\bar{x} = \dfrac{3 + 5 \cdot 3 + 6 + 8 + 10 \cdot 2 + 11}{9} = 7$

MEDIANA = 6

MODA = 5

RCORRIDO $= 11 - 3 = 8$

DESVIACIÓN MEDIA, $DM = \dfrac{|3-7| + |5-7| \cdot 3 + |6-7| + \ldots}{9} = \dfrac{22}{9} \approx 2{,}4$

VARIANZA $= \dfrac{3^2 + 5^2 \cdot 3 + 6^2 + 8^2 + 10^2 \cdot 2 + 11^2}{9} - 7^2 = \dfrac{505}{9} - 49 \approx 7{,}11$

DESVIACIÓN TÍPICA, $\sigma = \sqrt{7{,}11} \approx 2{,}67$

b) $\bar{x} = \dfrac{3 \cdot 2 + 4 + 5 \cdot 3 + 6 + 8 + 10 \cdot 2 + 11 + 14}{12} = \dfrac{84}{12} = 7$

$Me = (5 + 6) : 2 = 5{,}5$

$Mo = 5$

RECORRIDO $= 14 - 3 = 11$

$DM = \dfrac{|3-7| \cdot 2 + |4-7| + |5-7| \cdot 3 + \ldots}{12} = \dfrac{36}{12} = 3$

VARIANZA $= \dfrac{3^2 \cdot 2 + 4^2 + 5^2 \cdot 3 + 6^2 + \ldots}{12} - 7^2 = \dfrac{726}{12} - 49 = 11{,}5$

$\sigma = \sqrt{11{,}5} \approx 3{,}39$

c) $\bar{x} = \dfrac{165 + 168 + 170 + 172 \cdot 2 + 175 \cdot 2 + 180 + 183 + 190}{10} = \dfrac{1\,750}{10} = 175$

$Me = \dfrac{172 + 175}{2} = 173{,}5$

La distribución es bimodal; es decir, tiene dos modas: 172 y 175.

RECORRIDO $= 190 - 165 = 25$

$DM = \dfrac{|165-175| + |168-175| + |170-175| + |172-175| \cdot 2 + \ldots}{10} = \dfrac{56}{10} = 5{,}6$

VARIANZA $= \dfrac{165^2 + 168^2 + 170^2 + 172^2 \cdot 2 + \ldots}{10} - 175^2 = \dfrac{306\,756}{10} - 30\,625 = 50{,}6$

$\sigma = \sqrt{50{,}6} \approx 7{,}11$

9 ▼▼▽ **Contando el número de erratas por página en un libro concreto, David ha obtenido los datos siguientes:**

N.° DE ERRATAS (x_i)	0	1	2	3	4	5
N.° DE PÁGINAS (f_i)	50	40	16	9	3	2

a) Halla la media y la desviación típica.

b) ¿Cuál es la moda?

a)

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	50	0	0
1	40	40	40
2	16	32	64
3	9	27	81
4	3	12	48
5	2	10	50
	120	121	283

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{121}{120} = 1{,}008$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{283}{120} - (1{,}008)^2} \approx 1{,}159$$

b) $Mo = 0$ erratas (Es el valor con mayor frecuencia)

10 ▼▼▽ **En un control de velocidad en carretera se obtuvieron los siguientes datos:**

VELOCIDAD (km/h)	N.º DE COCHES
60 - 70	**5**
70 - 80	**15**
80 - 90	**27**
90 - 100	**38**
100 - 110	**23**
110 - 120	**17**

a) Haz una tabla reflejando las marcas de clase y las frecuencias.

b) Calcula la media y la desviación típica.

c) ¿Qué porcentaje circula a más de 90 km/h?

a)

VELOCIDAD (km/h)	MARCAS DE CLASE (x_i)	f_i
60 - 70	65	5
70 - 80	75	15
80 - 90	85	27
90 - 100	95	38
100 - 110	105	23
110 - 120	115	17

b)

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
65	5	325	21 125
75	15	1 125	84 375
85	27	2 295	195 075
90	38	3 610	342 950
105	23	2 415	253 575
115	17	1 955	224 825
	125	11 725	1 121 925

$$\bar{x} = \frac{11\,725}{125} = 93{,}8 \text{ km/h}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1\,121\,725}{125} - (93{,}8)^2} = \sqrt{176{,}96} \approx 13{,}303 \text{ km/h}$$

c) El número de coches que circula a más velocidad de 90 km/h es 38 + 23 + 17 = 78.

Por tanto: $\frac{78 \cdot 100}{125} = 62{,}4\%$

11 ▼▼▽ **Los puntos conseguidos por Teresa y por Rosa en una semana de entrenamiento, jugando al baloncesto, han sido los siguientes:**

TERESA	16	25	20	24	22	29	18
ROSA	23	24	22	25	21	20	19

a) Halla la media de cada una de las dos.

b) Calcula la desviación típica y el coeficiente de variación. ¿Cuál de las dos es más regular?

a) Teresa: $\bar{x}_T = \dfrac{16 + 25 + 20 + 24 + 22 + 29 + 18}{7} = \dfrac{154}{7} = 22$

Rosa: $\bar{x}_R = \dfrac{23 + 24 + 22 + 25 + 21 + 20 + 19}{7} = \dfrac{154}{7} = 22$

b) Teresa: $\sigma_T = \sqrt{\dfrac{16^2 + 25^2 + 20^2 + 24^2 + 22^2 + 29^2 + 18^2}{7} - 22^2} =$

$$= \sqrt{\frac{3\,506}{7} - 484} \approx 4{,}106$$

Rosa: $\sigma_R = \sqrt{\dfrac{23^2 + 24^2 + 22^2 + 25^2 + 21^2 + 20^2 + 19^2}{7} - 22^2} =$

$$= \sqrt{\frac{3\,416}{7} - 484} = 2$$

$$CV_T = \frac{\sigma_T}{\bar{x}_T} = \frac{4{,}106}{22} = 0{,}19 \ (19\%)$$

$$CV_R = \frac{\sigma_R}{\bar{x}_R} = \frac{2}{22} = 0{,}09 \ (9\%)$$

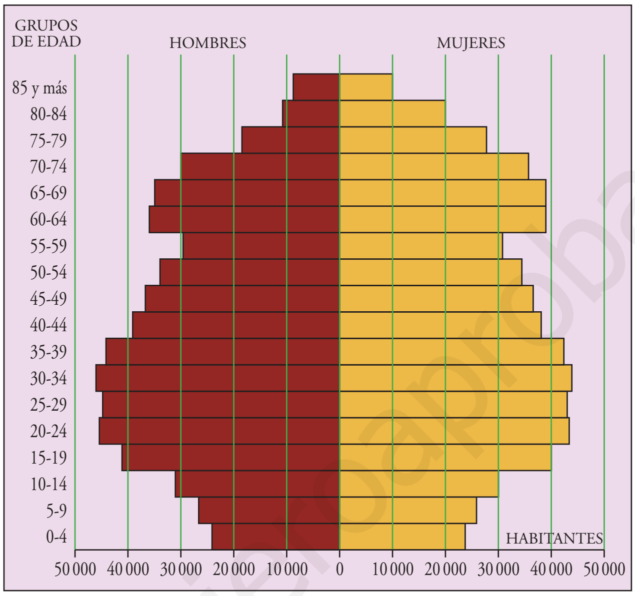
Es más regular Rosa.

12 Soluciones a "Ejercicios y problemas"

PÁGINA 255

Razona, interpreta y exprésate

12 ▼▼▽ **Una pirámide de población consiste en dos histogramas, uno para hombres, otro para mujeres, repartidos por edades. Resultan utilísimos para estudiar la situación demográfica y buscar explicación a acontecimientos presentes y pasados. Observa esta, correspondiente a la población de una región española en el año 2000:**



a) ¿Se aprecia que la tasa de natalidad ha ido disminuyendo en las últimas décadas?

b) Las mujeres son más longevas que los hombres. ¿Cómo se aprecia esto?

c) Después de la Guerra Civil, que terminó en 1939, hubo un fuerte descenso en la natalidad. ¿Se nota en la gráfica?

Explica todas tus respuestas.

a) Claro que se aprecia. Solo hay que ver cómo se estrecha la base de la pirámide.

b) Las barras de la derecha son más largas que las de la izquierda en la parte de arriba de la pirámide (80, 84 y 85 y más).

c) Se nota en el grupo de edad de 50 - 54 y, sobre todo, en 55 - 59.

13 ▼▼▽ **Se ha hecho un mismo examen a dos clases. Los resultados fueron estos:**

Nos dicen que hay una clase con 6 sobresalientes y 8 suspensos y otra con 2 suspensos y 3 sobresalientes. ¿Cuál crees que es cada una de ellas? Contesta razonadamente.

	$\bar{x}$	σ
3.° A	5,8	2,9
3.° B	6,3	1,2

$CV_A = \dfrac{2,9}{5,8} = 0,5 \qquad CV_B = \dfrac{1,2}{6,3} = 0,19$

Hay notas más extremas en 3.°A que en 3.° B, pues su coeficiente de variación es mucho mayor. Por tanto, hay 6 sobresalientes y 8 suspensos en 3.° A.

14 ▼▼▽ **Para hallar la nota de una asignatura, el segundo examen vale el doble que el primero, y el tercero, el triple que el primero.**

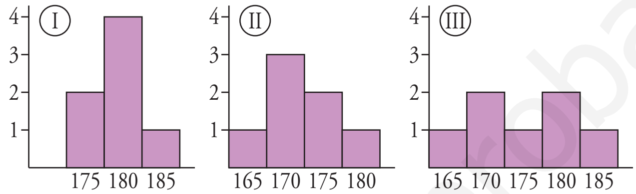
a) ¿Cuál es la nota final de una alumna que sacó un 5, un 6 y un 4?

b) ¿Y si esas notas son el 10%, el 40% y el 50% de la nota final, respectivamente?

a) $\dfrac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4}{1 + 2 + 3} = \dfrac{29}{6} = 4,8\widehat{3}$

b) $\dfrac{10 \cdot 5 + 40 \cdot 6 + 50 \cdot 4}{10 + 40 + 50} = \dfrac{490}{100} = 4,9$

15 ▼▼▽ **Las estaturas de los componentes de tres equipos escolares de baloncesto A, B y C se distribuyen según las siguientes gráficas:**



Los parámetros correspondientes son:

	A	B	C
$\bar{x}$	175	179,3	172,1
σ	6,5	3,2	4,5

Razona qué gráfica corresponde a cada equipo.

El gráfico I corresponde al equipo B, ya que la media es un poco menor que 180, la desviación típica es la menor de todos y el gráfico tiene los datos muy agrupados en torno a la media.

El gráfico II corresponde al equipo C, porque la media anda alrededor de 172, la desviación típica no es la mayor ni la menor y las barras no están ni muy agrupadas alrededor de la media, ni muy dispersas.

El gráfico III corresponde al equipo A, pues está claro que la media es 175 y la desviación típica es muy alta, lo cual es lógico por lo dispersas que se ven las barras.

16 ▼▼▽ **Un jugador de baloncesto tiene una media de 17 puntos por partido y una desviación típica de 9 puntos. Otro jugador del mismo equipo tiene una media de 20 puntos y una desviación típica de 3 puntos. Si en el próximo partido es necesario que el equipo consiga muchos puntos, ¿a cuál de los dos jugadores debe seleccionar el entrenador con la espectativa de que alcancen una puntuación en torno a 30 puntos? Razona la respuesta.**

Quien debe jugar es el jugador con la desviación típica más alta, ya que el otro es muy poco probable que, con una media de 20 puntos y 3 de desviación típica, llegue a anotar 30 puntos (son más de tres desviaciones típicas alejadas de la media). Sin embargo, aunque el otro baloncestista tenga una media de 17 puntos, su desviación típica es muy alta, por lo que, si le sale un partido bueno, es más probable que llegue a los 30 puntos (menos de una y media desviaciones típicas alejadas de la media).

12 Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 256

Resuelve problemas

17 ▼▽▽ **A la pregunta: ¿cuántas personas forman tu hogar familiar?, 40 personas respondieron esto:**

4	**5**	**3**	**6**	**3**	**5**	**4**	**6**	**3**	**2**
2	**4**	**6**	**3**	**5**	**3**	**4**	**5**	**3**	**6**
4	**5**	**7**	**4**	**6**	**2**	**3**	**4**	**4**	**3**
4	**4**	**5**	**3**	**2**	**6**	**3**	**7**	**4**	**3**

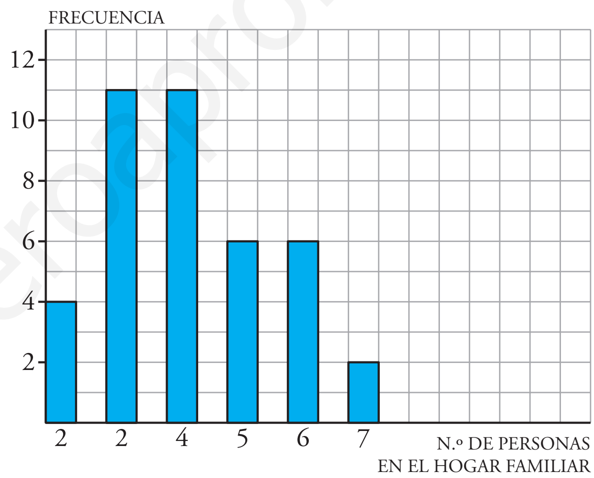
a) Haz la tabla de frecuencias y el diagrama correspondiente.

b) Calcula la media, la mediana, la moda y la desviación típica.

a)

N.º DE PERSONAS EN EL HOGAR FAMILIAR	FREC.
2	4
3	11
4	11
5	6
6	6
7	2
	40

Diagrama de barras



b)

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
2	4	8	16
3	11	33	99
4	11	44	176
5	6	30	150
6	6	36	216
7	1	14	98
	40	165	755

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{165}{40} = 4{,}125$$

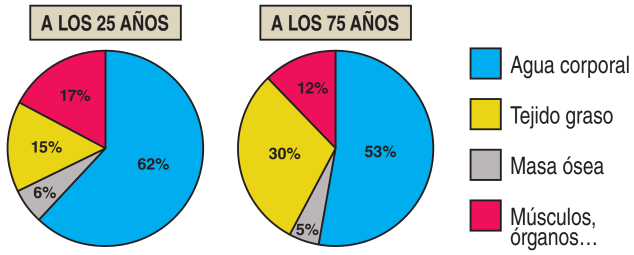
$Me = 4$

$(\overbrace{2, 2, 2, 2,}^{4\text{ veces}}\ \overbrace{3 \dots 3,}^{11\text{ veces}}\ \overbrace{4 \dots 4,}^{11\text{ veces}}\ \overbrace{5 \dots 5,}^{6\text{ veces}}\ \overbrace{6 \dots 6,}^{6\text{ veces}}\ \overbrace{7, 7}^{2\text{ veces}}$. En el lugar 20 y 21 hay un 4).

$Mo = 3$ y 4. (Los datos que más se repiten).

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{755}{40} - (4{,}125)^2} \approx 1{,}364$$

18 ▼▽▽ **En estos dos diagramas se muestra la composición del organismo en dos edades distintas:**



a) ¿Cómo varía el porcentaje de agua corporal, de masa ósea, de tejido graso y de músculos, órganos… en esos 50 años?

b) Si una persona de 25 años pesa 80 kg, ¿cuál es la cantidad de agua que compone su organismo? ¿Y de tejido graso?

c) Responde a las preguntas del apartado anterior para el caso de una persona de 75 años con el mismo peso.

a) A medida que envejecemos, se observa que la cantidad de agua corporal, músculos, órganos y masa ósea disminuye, siendo el tejido graso lo único que aumenta.

b) Agua corporal: $\dfrac{62 \cdot 80}{100} = 49{,}6$ kg   Tejido graso: $\dfrac{15 \cdot 80}{100} = 12$ kg

c) Agua corporal: $\dfrac{53 \cdot 80}{100} = 42{,}4$ kg   Tejido graso: $\dfrac{30 \cdot 80}{100} = 24$ kg

19 ▼▼▽ **En un test de inteligencia realizado a una muestra de 200 personas, se han obtenido los resultados siguientes:**

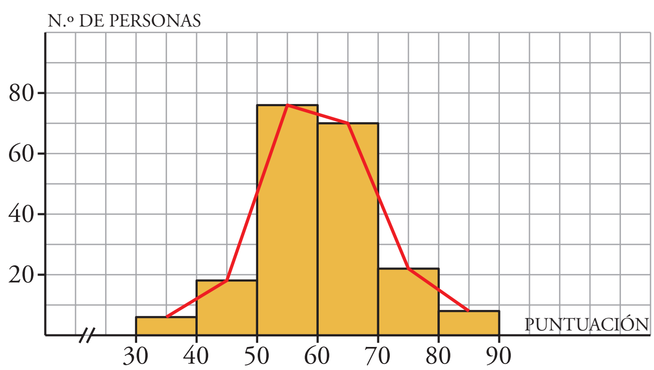
PUNTUACIÓN	N.º DE PERSONAS
30 - 40	6
40 - 50	18
50 - 60	76
60 - 70	70
70 - 80	22
80 - 90	8

a) Dibuja un histograma para representar gráficamente los datos y haz también el polígono de frecuencias.

b) Calcula la media y la desviación típica.

c) ¿Qué porcentaje de individuos tiene una inteligencia superior a $\bar{x} + 2\sigma$? ¿Y cuántos inferior a $\bar{x} - 2\sigma$? Haz una estimación razonada.

a)



12 Soluciones a "Ejercicios y problemas"

b)

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
30-40	35	6	210	7 350
40-50	45	18	810	36 450
50-60	55	76	4 180	229 900
60-70	65	70	4 550	295 750
70-80	75	22	1 650	123 750
80-90	85	8	680	57 800
		200	12 080	751 000

$$\bar{x} = \frac{12\,080}{200} = 60{,}4; \quad \sigma = \sqrt{\frac{751\,000}{200} - (60{,}4)^2} = 10{,}336$$

c) Como $\bar{x} + 2\sigma = 60{,}4 + 2 \cdot 10{,}336 \approx 81$ y en el intervalo 80-90 hay 8 personas, estimamos que en el intervalo 81-90 hay, aproximadamente, 7 personas. Como en total hay 200 personas, el porcentaje de individuos con una inteligencia superior a $\bar{x} + 2\sigma$ es $\frac{7}{200} = 0{,}35 \approx 3{,}5\%$.

Por otro lado, como $\bar{x} - 2\sigma = 60{,}4 - 2 \cdot 10{,}336 \approx 39{,}7$, y en el intervalo 30-40 hay 6 personas, estimamos que en el intervalo 30-39,7 hay, aproximadamente, 6 personas. Como en total hay 200 personas, el porcentaje de individuos con una inteligencia inferior a $\bar{x} - 2\sigma$ es $\frac{6}{200} = 0{,}3 = 3\%$.

Los dos porcentajes deberían ser aproximadamente iguales.

20 ▼▼▽ **Al medir el peso al nacer en una determinada especie de animales, hemos obtenido los datos siguientes:**

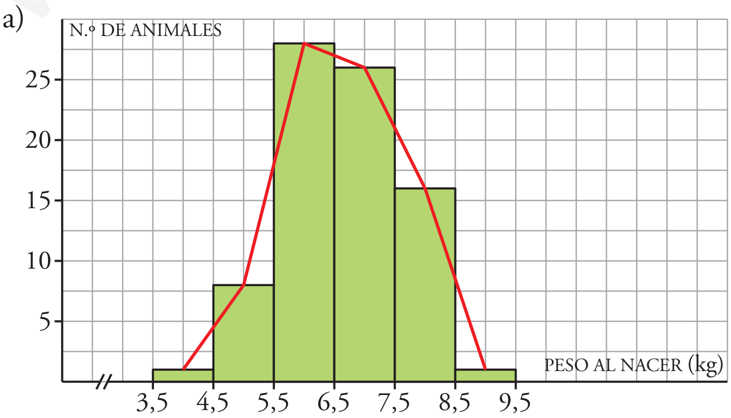
a) Representa estos datos con el gráfico adecuado.

b) Calcula la media y la desviación típica.

c) ¿Qué porcentaje de animales pesó entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} - \sigma$? ¿Y más que $\bar{x} + \sigma$? ¿Y menos que $\bar{x} - \sigma$?

PESO (kg)	N.º DE ANIMALES
3,5 - 4,5	1
4,5 - 5,5	8
5,5 - 6,5	28
6,5 - 7,5	26
7,5 - 8,5	16
8,5 - 9,5	1

a)



b)

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
3,5-4,5	4	1	4	16
4,5-5,5	5	8	40	200
5,5-6,5	6	28	168	1 008
6,5-7,5	7	26	182	1 274
7,5-8,5	8	16	128	1 024
8,5-9,5	9	1	9	81
		80	531	3 603

$$\bar{x} = \frac{531}{80} = 6{,}638$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3\,603}{80} - (6{,}638)^2} = 0{,}997$$

c) $\bar{x} - \sigma = 6{,}638 - 0{,}997 = 5{,}641 \approx 5{,}5$; $\bar{x} + \sigma = 6{,}638 + 0{,}997 = 7{,}635 \approx 7{,}5$

En el intervalo que va de $\bar{x} - \sigma$ a $\bar{x} + \sigma$ hay 28 + 26 = 54 individuos, que supone un $\frac{54}{80} = 0{,}675 = 67{,}5\%$.

Con más de $\bar{x} + \sigma$ hay 16 + 1 = 17 individuos, que supone un $\frac{17}{80} = 0{,}2125 = 21{,}25\%$

Con menos de $\bar{x} - \sigma$ hay 1 + 8 = 9 individuos, que supone un $\frac{9}{80} = 0{,}1125 = 11{,}25\%$.

21 ▼▼▽ **Estas son las horas de estudio semanal de un grupo de alumnas y alumnos:**

14	**9**	**9**	**20**	**18**	**12**	**14**	**6**	**14**	**8**
15	**10**	**18**	**20**	**2**	**7**	**18**	**8**	**12**	**10**
20	**16**	**18**	**15**	**24**	**10**	**12**	**25**	**24**	**17**
10	**4**	**8**	**20**	**10**	**12**	**16**	**5**	**4**	**13**

a) Reparte estos datos en intervalos de extremos:

1,5 - 6,5 - 11,5 - 16,5 - 21,5 - 26,5

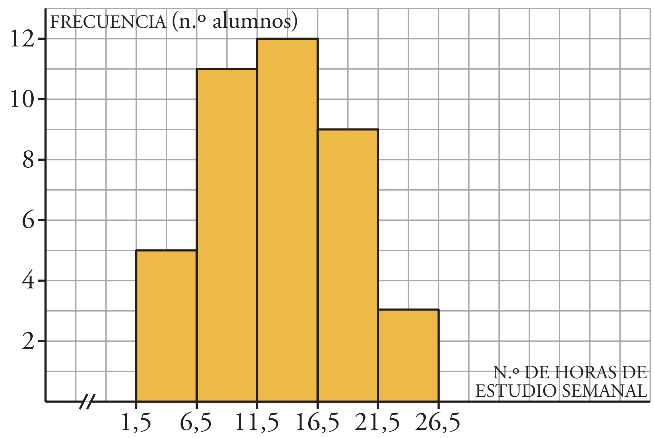
Haz la tabla de frecuencias y el histograma.

b) Calcula la media y la desviación típica.

c) Utilizando los parámetros $\bar{x}$ y σ, haz cinco intervalos con las siguientes características: estudia muy poco, estudia poco, estudia normal, estudia mucho, estudia muchísimo. ¿Qué proporción de individuos hay en cada uno?

a)

INTERVALO	FRECUENCIA
1,5-6,5	5
6,5-11,5	11
11,5-16,5	12
16,5-21,5	9
21,5-26,5	3



b)

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1,5-6,5	4	5	20	80
6,5-11,5	9	11	99	891
11,5-16,5	14	12	168	2 352
16,5-21,5	19	9	171	3 249
21,5-26,5	24	3	72	1 728
		40	530	8 300

$$\bar{x} = \frac{530}{40} = 13,25 \text{ h}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{8\,300}{40} - (13,25)^2} = 5,6513$$

c) $\bar{x} - 2\sigma = 13,25 - 2 \cdot 5,6513 \approx 1,9$

$\bar{x} - \sigma = 13,25 - 5,6513 \approx 7,6$

$\bar{x} + \sigma = 13,25 + 5,6513 \approx 18,9$

$\bar{x} - 2\sigma = 13,25 + 2 \cdot 5,6513 \approx 24,6$

Por tanto:

Esudian muy poco los que están entre 0 h y 1,9 h a la semana.

Estudian poco los que están entre 1,9 h y 7,6 h a la semana.

Estudian normal los que están entre 7,6 h y 18,9 h a la semana.

Estudian mucho los que están entre 18,9 h y 24,6 h a la semana.

Estudian muchísimo los que están más de 24,6 h a la semana.

Construimos una tabla para hallar la proporción de individuos que hay en cada intervalo:

INTERVALO	f_i	%
menos de 1,9	0	0%
1,9 - 7,6	6	15%
7,6 - 18,9	27	67,5%
18,9 - 24,6	6	15%
más de 24,6	1	2,5%
TOTAL	40	100%

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 257

Problemas “+”

22 ▼▼▽ **En una clase, las notas de un examen se distribuyen así:**

NOTAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.° ALUMNOS	4	3	2	1	7	3	2	8	3	2

Calcula las notas medias de: la clase ($\bar{x}$), los aprobados ($\bar{x}_A$) y los suspensos ($\bar{x}_B$). ¿Se podría hallar $\bar{x}$ haciendo la media de $\bar{x}_A$ y $\bar{x}_B$?

$\bar{x} = \dfrac{198}{35} \approx 5,657$ $\qquad \bar{x}_A = \dfrac{178}{25} = 7,12$ $\qquad \bar{x}_B = \dfrac{20}{10} = 2$

Haciendo la media de $\bar{x}_A$ y $\bar{x}_B$ no se puede hallar $\bar{x}$. Observamos que:

Si $\bar{x}_A = \dfrac{a}{b}$ y $\bar{x}_B = \dfrac{c}{d}$, $\bar{x} = \dfrac{a+c}{b+d}$

$$\frac{\bar{x}_A + \bar{x}_B}{2} \neq \frac{a+c}{b+d}$$

23 ▼▼▼ **Este es el reparto de la población española, según el tamaño del municipio en que vivía desde 1900 hasta 1990:**

MUNICIPIOS	1900	1930	1960	1990
Hasta 5 000 hab.	51%	40%	29%	16%
De 5 001 a 20 000	28%	29%	25%	20%
De 20 001 a 100 000	12%	16%	18%	22%
Más de 100 000	9%	15%	28%	42%

Aquí tienes el número de habitantes de España desde 1900 hasta 1990, en millones:

1900	1930	1960	1990
18,6	23,6	30,4	38,8

a) ¿Cuánto suma cada columna de la primera tabla? ¿Era de esperar ese resultado?

b) ¿Se puede decir que en 1900 más de la mitad de los españoles vivía en municipios de menos de 5 001 habitantes?

c) Calcula el número de personas que vivían en los municipios más pequeños desde 1900 hasta 1990. ¿Cómo evolucionó la población en estos municipios?

d) Calcula cuántos españoles vivían en los municipios más grandes desde 1900 y di cuál fue la evolución.

e) ¿Es cierto que la población española se duplicó en el pasado siglo?

f) Haz los diagramas de sectores que muestren la distribución de la población en cada uno de los años que figuran en la tabla.

a) Las sumas son, en cada columna, 100%, resultado esperado, ya que el estudio se hace sobre toda la población.

b) Sí, ya que en 1900 un 51% de la población vivía en municipios de hasta 5 000 habitantes.

c) En municipios de hasta 5 000 habitantes vivían:

En 1990 $\rightarrow$ $18{,}6 \cdot 0{,}51 = 9{,}486$ millones de habitantes

En 1930 $\rightarrow$ $23{,}6 \cdot 0{,}40 = 9{,}44$ millones de habitantes

En 1960 $\rightarrow$ $30{,}4 \cdot 0{,}29 = 8{,}816$ millones de habitantes

En 1990 $\rightarrow$ $38{,}8 \cdot 0{,}16 = 6{,}208$ millones de habitantes

La población, en estos municipios, a lo largo de los años ha ido descendiendo, y más drásticamente desde 1960 a 1990.

d) En municipios de más de 100 000 habitantes vivían:

En 1990 $\rightarrow$ $18{,}6 \cdot 0{,}09 = 1{,}674$ millones de habitantes

En 1930 $\rightarrow$ $23{,}6 \cdot 0{,}15 = 3{,}54$ millones de habitantes

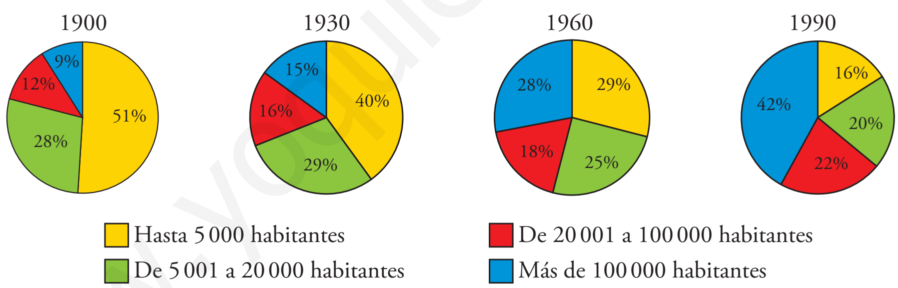
En 1960 $\rightarrow$ $30{,}4 \cdot 0{,}28 = 8{,}512$ millones de habitantes

En 1990 $\rightarrow$ $38{,}8 \cdot 0{,}42 = 16{,}296$ millones de habitantes

Con el paso de los años, la población en estos municipios ha ido creciendo, siendo más acelerado en los últimos años.

e) Sí. Pasó de 18,6 millones a 38,8, más del doble.

f)



24 **Estas son las estaturas de 4 350 soldados:**

ESTATURA (m)	1,52	1,56	1,60	1,64	1,68	1,72	1,76	1,80	1,84	1,88
N.º SOLDADOS	62	186	530	812	953	860	507	285	126	29

Decimos que los soldados que tienen su estatura entre $\bar{x} + \sigma$ y $\bar{x} + 2\sigma$ son *altos*, si la tienen entre $\bar{x} - 2\sigma$ y $\bar{x} - \sigma$, son *bajos* y entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} + \sigma$, son *normales*.

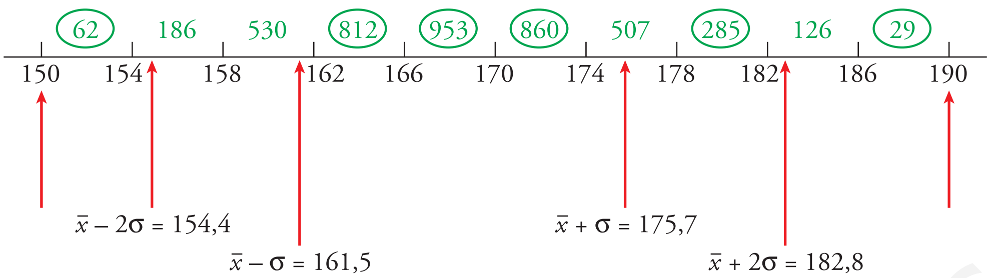
Estima qué tanto por ciento de *altos*, de *bajos* y de *normales* hay. ¿Qué porcentaje hay de *altísimos* y de *bajísimos*?

Empezamos por calcular $\bar{x}$ y σ. Obtenemos $\bar{x} = 168{,}6$ cm, $\sigma = 7{,}1$ cm

Son importantes los siguientes valores:

$\bar{x} - 2\sigma = 154{,}4$ $\quad$ $\bar{x} - \sigma = 161{,}6$ $\quad$ $\bar{x} + \sigma = 175{,}7$ $\quad$ $\bar{x} + 2\sigma = 182{,}8$

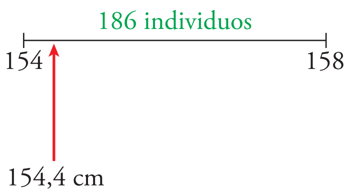
Representamos estos valores junto con los extremos de los intervalos:



Deseamos averiguar el número de individuos que hay en los *tramos* delimitados por las líneas rojas. Para ello, hemos puesto, en verde, los individuos de cada intervalo. Se han señalado los que están contenidos por completo en uno de los *tramos*. Así, 62 son los individuos del primer intervalo que están dentro del *tramo* 150-154,4.

Los demás números en verde hemos de repartirlos del siguiente modo:

2.º intervalo:



$$\frac{186 \text{ individuos}}{4 \text{ cm}} = \frac{x}{154{,}4 - 154} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{0{,}4 \cdot 186}{4} = 18{,}6 \approx 19 \text{ individuos}$$

Asignamos **19** individuos a la izquierda de 154,4 y 186 – 19 = **167** a la derecha

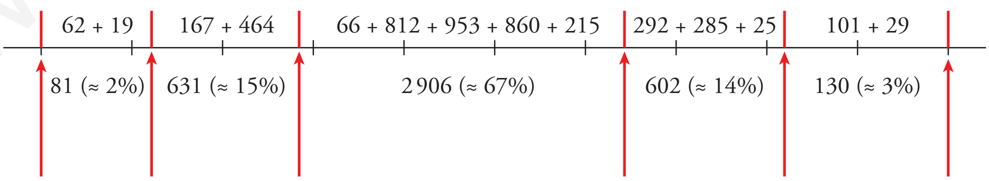
Analogamente:

3.er intervalo: → **464** individuos a la izquierda de 161,5 y **66** a la derecha.

7.º intervalo: → **215** individuos a la izquierda de 175,7 y **292** a la derecha.

9.º intervalo: → **25** individuos a la izquierda de 182,8 y **101** a la derecha.

Conclusión:



Por tanto, diremos que hay:

2% de bajísimos, 15% de bajos, 67% de normales, 14% de altos y 3% de altísimos.

(Los porcentajes suman 101 y no 100 debido al redondeo).

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

Reflexiona sobre la teoría

25 **Si dos distribuciones tienen la misma media, y la desviación típica de la primera es mayor que la de la segunda, ¿en cuál de los dos casos es mayor el coeficiente de variación?**

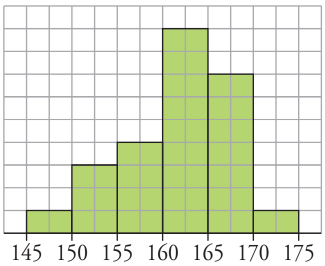
$$\left.\begin{array}{l}\bar{x} = \bar{x}' \\ \sigma > \sigma'\end{array}\right\} \to \text{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}},\ \text{CV}' = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{\sigma'}{\bar{x}} \to \text{CV} > \text{CV}'$$

El coeficiente de variación es mayor en la 1.ª distribución.

26 **Si dos distribuciones tienen la misma desviación típica, y la media de la primera es mayor que la de la segunda, ¿en cuál de los dos casos es mayor el coeficiente de variación?**

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x} = \bar{x}' \\ \sigma > \sigma'\end{array}\right\} \to \text{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}},\ \text{CV}' = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{\sigma}{\bar{x}'} \to \text{CV} < \text{CV}'$$

27 **Sin realizar ningún cálculo, estima $\bar{x}$ y σ en la siguiente distribución:**



Comprueba, haciéndolo con calculadora, que $\bar{x} = 161{,}7$ y $\sigma = 5{,}95$.

Hay 50 cuadraditos, de los cuales $\frac{3}{2}$, que son aproximadamente 33, pertenecen al intervalo que va de $\bar{x} - \sigma$ a $\bar{x} + \sigma$. Si tomamos el intervalo 155-167,5, la media es 161,25 y la desviación típica, 6,25.

28 **¿Qué le ocurre a $\bar{x}$ y a σ si a todos los datos les sumamos un mismo número? ¿Y si los multiplicamos por el mismo número?**

Comprueba tus conjeturas con estos datos:

3, 5, 6, 3, 4, 2, 3, 6

- Si a cada dato le sumamos un mismo número, a, entonces la media aumenta a unidades pero la desviación típica no varía.

  Datos $\to$ $x'_i = x_i + a$

  Parámetros $\to$ $\bar{x}' = \bar{x} + a$; $\sigma' = \sigma$

- Si cada dato se multiplica por k, la media y la desviación típica se multiplican por k:

  Datos $\to$ $x_i'' = k \cdot x_i$

  Parámetros $\to$ $\bar{x}'' = k \cdot \bar{x}$; $\sigma'' = k \cdot \sigma$

29 ▼▼▼ **Si restas la media de una distribución a cada dato y sumas esas diferencias, ¿qué resultado obtendrías? Justifica tu respuesta y compruébala con los datos de la siguiente distribución:**

x_i	2	3	4	5	6	7
f_i	5	21	20	8	5	3

La suma es cero. Lo comprobamos en el ejemplo presentado:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 21 + 4 \cdot 20 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 3}{5 + 21 + 20 + 8 + 5 + 3} = \frac{244}{62}$$

Restamos la media a cada dato y sumamos:

$$5 \cdot \left(2 - \frac{244}{62}\right) + 21 \cdot \left(3 - \frac{244}{62}\right) + 20 \cdot \left(4 - \frac{244}{62}\right) + 8 \cdot \left(5 - \frac{244}{62}\right) +$$

$$+ 5 \cdot \left(6 - \frac{244}{62}\right) + 3 \cdot \left(7 - \frac{244}{62}\right) = 10 - \frac{1\,220}{62} + 63 - \frac{5\,124}{62} +$$

$$+ 80 - \frac{4\,880}{62} + 40 - \frac{1\,952}{62} + 30 - \frac{1\,220}{62} + 21 - \frac{732}{62} =$$

$$= 244 - \frac{15\,128}{62} = 244 - 244 = 0$$

Soluciones a “Y para terminar…”

PÁGINA 258

▼ Observa, anaiza y decide

La influencia del lugar donde se muestrea

Estas gráficas corresponden a un estudio sobre gustos musicales, realizado a cuatro muestras de población tomadas en distintos ambientes.

MUESTRAS: A la salida de una discoteca.

MUESTRAS: En la puerta del conservatorio musical.

MUESTRAS: En una fiesta en la casa de Colombia.

MUESTRAS: En el parque junto a la pista de los monopatines.

Teniendo en cuenta el grupo al que pertenece cada muestra, ¿podrías decir el tipo de música que representa cada color?

Azul → Pop-Rock

Verde → Clásica

Amarillo → Salsa

Morado → Rap

Rojo → Jazz (por eliminación)

12 Soluciones a "Y para terminar…"

▼ Investiga

Organiza los datos

Un padre negociador hace un pacto con su hijo:

Después del próximo examen de Matemáticas, deberá sumar, por un lado, las notas de todos los compañeros y compañeras que le hayan superado y, por otro, todas las que queden por debajo de la suya, y entonces:

— Si las bajas superan a las altas en 50 o más puntos, le regalará una moto.

— Si las altas superan a las bajas en 20 o más puntos, se quedará en casa estudiando todos los domingos durante un mes.

— En el resto de los casos, quedan en paz.

Las notas de sus compañeros y compañeras han sido:

5 - 5 - 4 - 9 - 8 - 6 - 3 - 6 - 3 - 7 - 4 - 5 - 6 - 6

7 - 7 - 4 - 7 - 5 - 2 - 6 - 5 - 5 - 8 - 3 - 9 - 10 - 5

¿Te parece un trato ventajoso para el chico?

¿Qué ocurre si su nota es un 5? ¿Y si saca un 6? ¿Qué nota necesita sacar para conseguir la moto?

Para hacer un análisis detallado, organizamos los datos en la siguiente tabla:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	SUMA ASCENDENTE	SUMA DESCENDENTE
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	1	2	2	160
3	3	9	11	158
4	3	12	23	149
5	7	35	58	137
6	5	3	88	102
7	4	28	116	72
8	2	16	132	44
9	2	18	150	28
10	1	10	160	10

Con esta información vemos que:

	SUMA DE NOTAS INFERIORES	SUMA DE NOTAS SUPERIORES	DIFERENCIA	RESULTADO PARA EL HIJO
Si saca un 5	23	102	–79	MALO
Si saca un 6	58	72	–14	NEUTRO
Si saca un 7	88	44	+44	NEUTRO
Si saca un 8	116	28	+88	BUENO

12 Soluciones a “Y para terminar…”

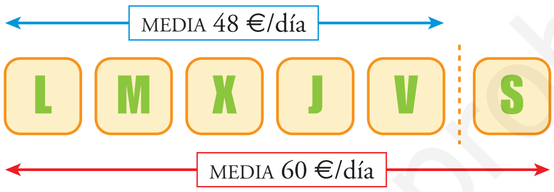
Por tanto:

- Para conseguir la moto, debe obtener, al menos, un 8.
- Para no quedarse en casa los domingos, debe obtener, al menos, un 6.

▼ Utiliza tu ingenio

Medias semanales

Rafael es vendedor ambulante seis días a la semana. Ayer, viernes, calculó que durante esta semana había conseguido una ganancia media de 48 € diarios. Sin embargo, al hacer la misma cuenta hoy, sábado, resulta una media de 60 € diarios. ¿Cuánto ha ganado hoy?



- Ganancias obtenidas de lunes a viernes → $48 \cdot 5 = 240$ €
- Ganancias obtenidas de lunes a sábado → $60 \cdot 6 = 360$ €
- Ganancias obtenidas el sábado → $360 - 240 = 120$ €

12

Soluciones a la Autoevaluación

PÁGINA 259

¿Conoces la terminología básica de la estadística?: individuo, población, muestra, tipos de variables?

1 **Indica, para cada caso, cuáles son los individuos, cuál la población, cuál la variable y de qué tipo es:**

- **Número de almendras que hay en cada tableta de chocolate de una producción.**
- **Tiempo de espera de cada paciente en una consulta de un centro de salud.**
- **Tipo de especialista al que acuden los pacientes a un centro de salud.**

- Individuo: una tableta. Población: producción de tabletas. Variable: número de almendras por cada tableta. Tipo de variable: cuantitativa discreta.
- Individuo: un paciente. Población: pacientes del centro de salud. Variable: tiempo de espera. Tipo de variable: cuantitativa continua.
- Individuo: un paciente. Población: pacientes del centro de salud. Variable: tipo de especialista. Tipo de variable: cualitativa.

2 **Para estudiar el "número de almendras que hay en cada tableta de chocolate" de una cierta producción, se analiza una de cada 200 producidas un cierto día.**

Las tabletas analizadas, ¿son población o muestra?

Las tabletas analizadas son una muestra, ya que no se analizan todas, solo una de cada 200. Si se analizara toda la población, posiblemente se estropearían todas las tabletas.

¿Sabes elaborar e interpretar tablas y gráficas estadísticas?

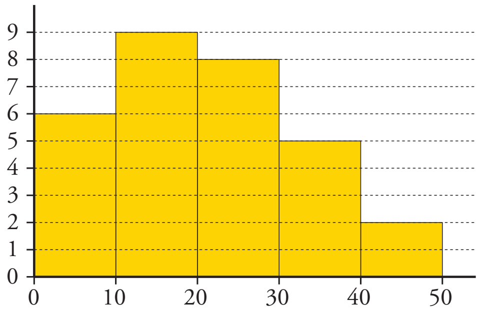
3 **Tiempo, en minutos, que pasaron en la sala de espera los pacientes de un médico cierto día:**

28	**4**	**12**	**35**	**2**	**26**	**45**	**22**	**6**	**23**
27	**16**	**18**	**32**	**8**	**47**	**8**	**12**	**34**	**15**
28	**37**	**7**	**39**	**15**	**25**	**18**	**17**	**27**	**15**

Haz una tabla, repartiéndolos en intervalos de extremos 0 - 10 - 20 - 30 - 40 - 50.

Representa los resultados mediante un gráfico adecuado (diagrama de barras o histograma).

INTERVALO	f_i
0-10	6
10-20	9
20-30	8
30-40	5
40-50	2
TOTAL	30

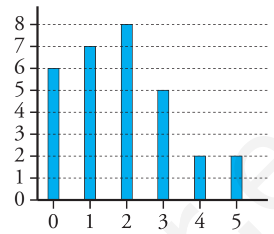


4 **Número de días que han ido a la biblioteca del Centro los alumnos de un curso:**

3 1 2 4 0	**2 1 3 1 0**	**2 0 3 5 2**
0 2 4 1 2	**1 2 0 5 3**	**3 1 2 1 0**

Haz una tabla de frecuencias y representa los resultados mediante un gráfico adecuado (diagrama de barras o histograma).

x_i	0	1	2	3	4	5	
f_i	6	7	8	5	2	2	30



¿Sabes estimar, calcular e interpretar los parámetros estadísticos?

5 **Halla media, mediana, desviación media, desviación típica y coeficiente de variación de esta distribución:**

6 9 1 4 8 2 3 4 4 9

Ordenamos primero los datos: 1 2 3 4 4 4 6 8 9 9

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{1 + 2 + 3 + 4 \cdot 3 + 6 + 8 + 9 \cdot 2}{10} = 5$

MEDIANA = 4

DESVIACIÓN MEDIA: $DM = \dfrac{|1-5| + |2-5| + |3-5| + \dots}{10} = \dfrac{24}{10} = 2{,}4$

VARIANZA: $\dfrac{1^2 + 2^2 + 3^3 + 4^2 \cdot 3 + 6^2 + 8^2 + 9^2 \cdot 2}{10} - 5^2 = \dfrac{324}{10} - 25 = 7{,}4$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{7{,}4} \approx 2{,}72$

6 **Calcula $\bar{x}$, σ y C.V. de las distribuciones…**

a) …del ejercicio 4. **b) …del ejercicio 3.**

a)

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	6	0	0
1	7	7	7
2	8	16	32
3	5	15	45
4	2	8	32
5	2	10	50
	30	56	166

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{56}{30} \approx 1{,}87$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\dfrac{166}{30} - 1{,}87^2} \approx 1{,}43$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $C.V. = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{1{,}43}{1{,}87} \approx 0{,}7647$

b)

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0-10	5	6	30	150
10-20	15	9	135	2025
20-30	25	8	200	5000
30-40	35	5	175	6125
40-50	45	2	90	4050
		30	630	17350

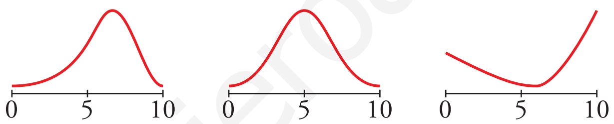
MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{630}{30} \approx 21$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\dfrac{17350}{30} - 21^2} \approx 11,72$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $\text{C.V.} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{11,72}{21} \approx 0,56$

7 **Se ha hecho un mismo examen en dos clases, A y B, de 30 alumnos cada una. Sus medias y sus desviaciones típicas son: $\bar{x}_A = 6$, $\sigma_A = 1$, $\bar{x}_B = 6$, $\sigma_B = 3$.**

a) Asigna una de estas tres gráficas a A y otra a B.



b) En una de las clases hay 11 suspensos y 4 sobresalientes, mientras que en la otra hay 5 suspensos y 1 sobresaliente. ¿Cuál es A y cuál es B?

c) Si M.ª José necesita sacar sobresaliente y Alfredo se conforma con aprobar, ¿qué clase te parece más adecuada para cada uno de ellos?

a) La clase A corresponde a la primera gráfica, ya que está centrada en el 6 y tiene una desviación típica pequeña $(\sigma = 1)$.

La clase B corresponde a la tercera gráfica, ya que su desviación típica es muy alta y también está centrada en el 6.

b) En la clase A hay 5 suspensos y 1 sobresaliente, ya que tiene poca desviación típica. Todas las demás notas están más agrupadas alrededor de la media.

En la clase B hay 11 suspensos y 4 sobresalientes, ya que tiene mucha desviación típica y los datos están muy separados de la media.

c) A Maria José le viene bien la clase B porque es más fácil separarse de la media y sacar un sobresaliente. Sin embargo, a Alfredo le viene mejor quedarse en la clase A, que hay muchos más aprobados y otras notas cercanas al aprobado.

13 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 261

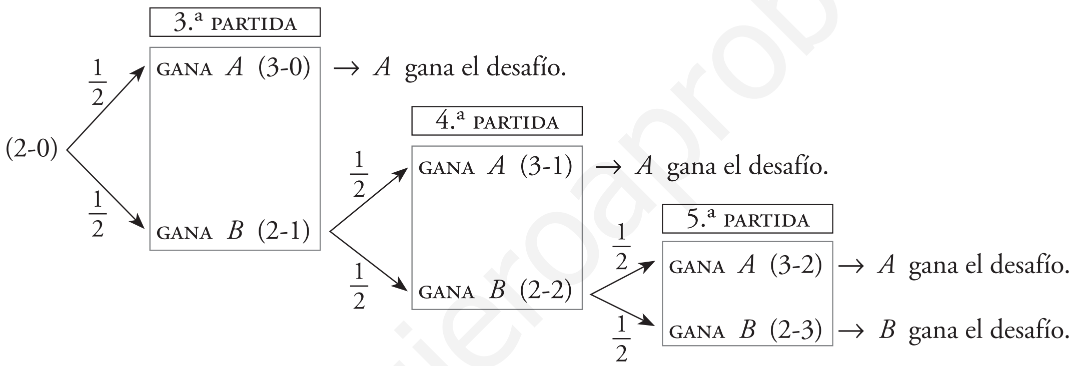
PARA EMPEZAR...

▼ Un desafío interrumpido

Uno de los problemas que el caballero de Meré le propuso a Pascal es el siguiente:

"Dos contendientes, A y B, se juegan 3 000 doblones (han puesto 1 500 cada uno) a un juego de azar. Se lleva el dinero quien gane tres partidas. Cuando A va ganando 2 a 1, hay que interrumpir el juego, sin posibilidad de reanudarlo después. ¿Cómo han de repartir los 3 000 doblones?"

■ **¿Cómo se deberían repartir los 3 000 doblones si el juego se interrumpiera cuando A va ganando 2-0?**



B ganaría el desafío en la mitad de la mitad de la mitad de los casos; es decir, en la octava parte de los casos.

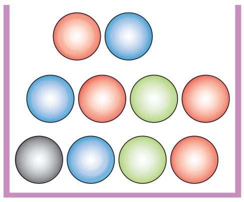
$P[B \text{ gana el desafío}] = \frac{1}{8}$

$P[A \text{ gana el desafío}] = \frac{7}{8}$

A debería llevarse $\frac{7}{8} \cdot 3\,000 = 2\,625$ doblones

B debería llevarse $\frac{1}{8} \cdot 3\,000 = 375$ doblones

PÁGINA 263

1 

En una urna hay 10 bolas de cuatro colores.

Sacamos una bola y anotamos su color.

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral y cinco sucesos.

a) Sí, pues el resultado depende del azar.

b) E = {R, A, V, N}

Sucesos:

S_1 = {R, A, V, N} S_2 = {R, N} S_3 = {V}

S_4 = {A} S_5 = {A, V, N}

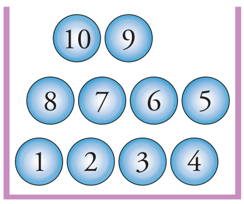
2 ***Lanzamos una chincheta y observamos si cae con la punta hacia arriba o no.***

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

a) Sí, pues el resultado depende del azar.

b) E = {PUNTA HACIA ARRIBA, PUNTA NO HACIA ARRIBA}

3 

En una urna hay 10 bolas numeradas.

Sacamos una bola y anotamos el número.

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral y seis sucesos.

a) Sí, pues el resultado depende del azar.

b) E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Sucesos:

S_1: "par" = {2, 4, 6, 8, 10} S_2: "impar" = {1, 3, 5, 7, 9}

S_3 "múltiplo de 3" = {3, 6, 9} S_4: "múltiplo de 5" = {5, 10}

S_5: "número primo" = {2, 3, 5, 7} S_6: "cuadrado perfecto" = {1, 4, 9}

4 **En una bolsa hay 10 bolas, todas rojas.**

Sacamos una bola y anotamos su color.

¿Es una experiencia aleatoria?

¿Por qué?

No, el resultado no depende del azar. Siempre obtendremos bola roja.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 265

1 En una bolsa hay 90 bolas idénticas, numeradas del 1 al 90. ¿Cuál es la probabilidad de extraer la bola con el número 58? ¿Cuál es la probabilidad de extraer cada una de las bolas?

$P[58] = \frac{1}{90}$

La probabilidad de extraer una bola concreta será, también, $\frac{1}{90}$.

2 En otra bolsa hay bolas de dos tamaños. Sacamos una, miramos si es grande, *G*, o chica, *CH*, y la devolvemos a la bolsa. Así observamos 84 bolas *G* y 36 bolas *CH*. ¿Qué valores asignarás a $P[G]$ y a $P[CH]$?

84 + 36 = 120 experiencias. Asignamos:

$P[G] = \frac{84}{120} = 0,7$ $\qquad$ $P[CH] = \frac{36}{120} = 0,3$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 266

1 **En un campamento juvenil hay 32 jóvenes europeos, 13 americanos, 15 africanos y 23 asiáticos. Se elige al azar al portavoz de ellos. ¿Qué probabilidad hay de que sea europeo?**

$32 + 13 + 15 + 23 = 83$ jóvenes. $P[\text{EUROPEO}] = \dfrac{32}{83}$

2 **Al hacer girar la aguja, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en alguno de los colores rojo, verde o azul?**

$P[\text{ROJO, VERDE O AZUL}] = \dfrac{3}{7}$

13 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 267

3 **Calcula las restantes probabilidades en la experiencia I. (Sumas 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12).**

$P[2] = \frac{1}{36}$ $\quad P[3] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ $\quad P[4] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $\quad P[6] = \frac{5}{36}$

$P[7] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $\quad P[8] = \frac{5}{36}$ $\quad P[9] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$P[10] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $\quad P[11] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ $\quad P[12] = \frac{1}{36}$

4 **En la experiencia del ejercicio anterior:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea menor que 6?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor que 6?

c) ¿Y de que esté entre 4 y 7, ambos incluidos?

a) 1 + 2 + 3 + 4 = 10 resultados menores que 6. Por tanto:

$$P[\text{MENOR QUE } 6] = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

b) $P[\text{MAYOR QUE } 6] = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ $\quad$ c) $P[4, 5, 6 \text{ ó } 7] = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

5 ***Lanzamos dos dados y nos fijamos en la mayor de las puntuaciones.***

Completa el cuadro adjunto. ¿Cuál es la probabilidad de que la mayor de las puntuaciones sea 1?

¿Y de que sea 2? ¿Y 3? ¿Y 4? ¿Y 5? ¿Y 6?

	1	2	3	4	5	6
	2	2	3	4	5	6
	3	3	3	4	5	6
	4	4	4	4	5	6
	5	5	5	5	5	6
	6	6	6	6	6	6

$P[1] = \frac{1}{36}$ $\quad P[2] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $\quad P[3] = \frac{5}{36}$

$P[4] = \frac{7}{36}$ $\quad P[5] = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ $\quad P[6] = \frac{11}{36}$

13 Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 268

Practica

Espacios muestrales. Sucesos

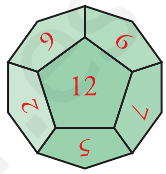
1 ▼▽▽ **Lanzamos un dado con forma de dodecaedro con las caras numeradas del 1 al 12 y anotamos el número obtenido.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

A = “Menos de 5”   B = “Más de 4”

C = “Número par”   D = “No múltiplo de 3”



a) E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

b) A = {1, 2, 3, 4}; B = {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

C = {2, 4, 6, 8, 10, 12}; D = {1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11}

2 ▼▽▽ **Nos fijamos en la cifra en la que termina el premio gordo de la lotería.**

a) Describe el espacio muestral.

b) Describe los sucesos:

A = “Menor que 4”   B = “Número impar”   C = “Mayor que 5”

a) E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

b) A = {0, 1, 2, 3}   B = {1, 3, 5, 7, 9}   C = {6, 7, 8, 9}

3 ▼▽▽ **Escribimos cada una de las letras de la palabra JUEGO en un papel diferente y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.**

a) Describe los sucesos elementales de este experimento aleatorio.

b) Describe el suceso “obtener vocal”.

c) Si la palabra elegida fuera PROBABILIDAD, ¿cómo responderías a los apartados a) y b)?

a) Sucesos elementales: {J}, {U}, {E}, {G}, {O}

b) “Obtener vocal” = {U, E, O}

c) Sucesos elementales: {P}, {R}, {O}, {B}, {A}, {I}, {L}, {D}

“Obtener vocal” = {O, A, I}

4 ▼▼▽ **Lanzamos una moneda dos veces y anotamos los resultados ordenadamente.**

a) Completa el espacio muestral: E = {CC, C+, …}

b) Describe los sucesos: A = “La primera fue cara”, B = “Ninguna fue cara”

a) E = {CC, C+, +C, ++}

b) A = {CC, C+}, B = {++}

13 Soluciones a “Ejercicios y problemas”

5 ▼▼▽ **Lanzamos una moneda tres veces y anotamos los resultados en el orden en que salen.**

a) Describe el espacio muestral (hay 8 casos).

b) Describe los sucesos siguientes:

A = “Obtener dos veces cara”

B = “Obtener dos veces cruz”

C = “No obtener ninguna cruz”

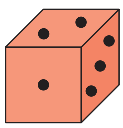
a) E = {CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++}

b) A = {CC+, C+C, +CC} B = {C++, +C+, ++C} C = {CCC}

Probabilidades sencillas

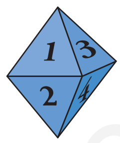
6 ▼▽▽ **Halla la probabilidad de obtener un 2 y la probabilidad de obtener un 5, al lanzar un dado correcto en cada uno de estos casos:**

a)



(Cubo numerado del 1 al 6)

b)



(Octaedro numerado del 1 al 8)

c)

(Tetraedro numerado del 1 al 4)

a) $P[2] = \frac{1}{6}$; $P[5] = \frac{1}{6}$ b) $P[2] = \frac{1}{8}$; $P[5] = \frac{1}{8}$ c) $P[2] = \frac{1}{4}$; $P[5] = 0$

7 ▼▽▽ **En una bolsa hay 6 bolas rojas, 4 azules, 7 verdes, 2 amarillas y una negra. Extraemos una al azar. Halla la probabilidad de que:**

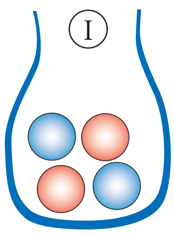
a) Sea azul. b) No sea negra. c) Sea roja o verde. d) No sea amarilla ni negra.

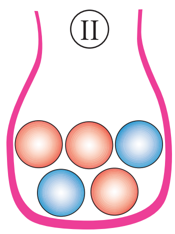
En total hay 20 bolas.

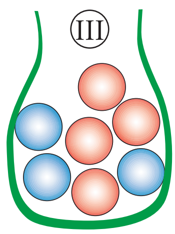
a) $P[\text{AZUL}] = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ b) $P[\text{NO NEGRA}] = \frac{19}{20}$

c) $P[\text{ROJA O VERDE}] = \frac{13}{20}$ d) $P[\text{NO AMARILLA Y NO NEGRA}] = \frac{17}{20}$

8 ▼▽▽ **Razona de cuál de las bolsas siguientes es más probable sacar bola roja:**







$P_I[R] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$ $P_{II}[R] = \frac{3}{5} = 0,6$ $P_{III}[R] = \frac{4}{7} = 0,57$

Por tanto, es más probable extraer bola roja de la bolsa II.

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

9 ▼▽▽ **Lanzamos un dado correcto. Hallas las probabilidades de que el resultado sea:**

a) Múltiplo de 3. **b) Múltiplo de 2.** **c) Mayor que 1.**

d) Menor que 5. **e) Menor que 1.** **f) Potencia de base 2.**

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) $P[\text{MÚLTIPLO DE } 3] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) $P[\text{MÚLTIPLO DE } 2] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) $P[\text{RESULTADO MAYOR QUE } 1] = \frac{5}{6}$

d) $P[\text{RESULTADO MENOR QUE } 5] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

e) $P[\text{RESULTADO MENOR QUE } 1] = 0$

f) $P[\text{POTENCIA DE BASE } 2] = P[2 \text{ ó } 4] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

10 ▼▽▽ **Extraemos una carta de una baraja española de 40 naipes. Halla la probabilidad de que:**

a) La carta sea de BASTOS.

b) La carta NO sea ni AS ni FIGURA.

c) La carta sea un número menor que 6.

d) La carta sea de OROS o FIGURA.

a) $P[\text{BASTOS}] = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

b) $P[\text{NI AS NI FIGURA}] = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$

c) $P[\text{NÚMERO MENOR QUE } 6] = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

d) $P[\text{OROS O FIGURA}] = \frac{19}{40}$

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 269

11 ▼▼▽ **En un libro de 120 páginas, hemos contado el número de erratas en cada una de las páginas. Los resultados se resumen en esta tabla:**

Al elegir una página al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ninguna errata?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga exactamente dos erratas?

c) ¿Y la de que tenga alguna errata? ¿Y la de que tenga más de tres?

N.º ERRATAS	N.º PAGINAS
0	58
1	42
2	16
3	3
4	1

a) $P[\text{NINGUNA ERRATA}] \approx f_r[\text{NINGUNA ERRATA}] = \dfrac{58}{120} = 0{,}48$

b) $P[\text{DOS ERRATAS}] \approx f_r[\text{DOS ERRATAS}] = \dfrac{16}{120} = 0{,}13$

c) $P[\text{ALGUNA ERRATA}] \approx f_r[\text{ALGUNA ERRATA}] = \dfrac{62}{120} = 0{,}52$

$P[\text{MÁS DE TRES ERRATAS}] \approx f_r[\text{MÁS DE TRES ERRATAS}] = \dfrac{1}{120} = 0{,}01$

12 ▼▽▽ **Extraemos una carta de una baraja española de 40 naipes. Halla la probabilidad de que:**

a) Sea un CINCO.

b) NO sea un CABALLO.

c) Sea de OROS o de COPAS.

d) NO sea de ESPADAS.

a) $P[5] = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

b) $P[\text{NO CABALLO}] = \dfrac{36}{40} = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$

c) $P[\text{OROS O COPAS}] = \dfrac{20}{40} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

d) $P[\text{NO ESPADAS}] = \dfrac{30}{40} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

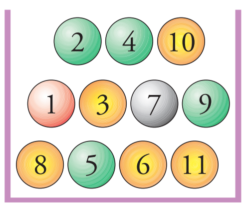
13 ▼▼▽ **De esta urna extraemos una bola y observamos su número y color. Halla las probabilidades de los siguientes sucesos:**

a) Obtener bola verde con número par.

b) Obtener bola roja con número par.

c) Obtener bola amarilla o roja.

d) Obtener una bola con número mayor que 7.



a) $P[\text{VERDE CON NÚMERO PAR}] = \dfrac{2}{11}$ (son las bolas 2 y 4)

b) $P[\text{ROJA Y PAR}] = 0$ (no hay ninguna roja con número par)

c) $P[\text{AMARILLA O ROJA}] = \dfrac{6}{11}$

d) $P[\text{NÚMERO} > 7] = \dfrac{4}{11}$

14 ▼▽▽ **De una bolsa con 7 bolas rojas, 5 verdes, 3 amarillas, 11 negras y 3 azules, sacamos una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que…**

a) … sea roja? **b) … no sea negra?**

En total hay 29 bolas.

a) $P[\text{ROJA}] = \frac{7}{29}$ b) $P[\text{NO NEGRA}] = \frac{29 - 11}{29} = \frac{18}{29}$

Resuelve problemas

15 ▼▼▽ **Encima de una mesa tenemos estas cuatro cartas de una baraja española:**

Sacando al azar otra carta del mazo y fijándonos en su número, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones de las cinco cartas (las cuatro de la mesa y la extraída del mazo) sea 15? ¿Y 16?

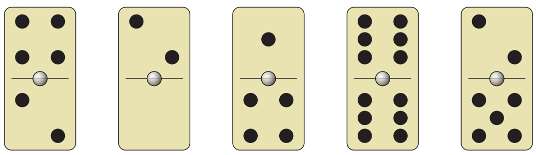
5 + 1 + 4 + 2 = 12 son los puntos de las que ya hay. Para que la suma sea 15, la nueva carta debe ser un 3. Quedan los 4 "treses" en las 36 cartas restantes.

Por tanto, $P[\text{SUMA } 15] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}111$

Para que la suma sea 16, la nueva carta debe ser "cuatro". Quedan 3 "cuatros" entre las 36 cartas sin repartir.

Por tanto, $P[\text{SUMA } 16] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0{,}083$

16 ▼▼▽ **¿Conoces el dominó? Es un juego cuyas fichas son de este tipo:**



Hay fichas con todas las posibles combinaciones con los números 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, incluyendo las dobles como el 6-6 del dibujo.

a) Comprueba que en total son 28 fichas.

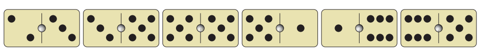
Sacamos una ficha al azar. Calcula las siguientes probabilidades:

b) La suma de los dos números es 6.

c) La suma es un número impar.

d) El producto de los dos números es menor que 6.

En el desarrollo del juego, las fichas se van posando sobre la mesa y se enlazan unas con otras, así:



La siguiente ficha debe tener un 2, y se situaría a la izquierda, o un 5, e iría a la derecha.

e) ¿Cuál es la probabilidad de que, sacando al azar una de las restantes fichas, pueda enlazar con una de las que están sobre la mesa?

a) En esta tabla vemos cuáles son las fichas del dominó: son 28.

	0	1	2	3	4	5	6
0	0-0	0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6
1		1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2			2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3				3-3	3-4	3-5	3-6
4					4-4	4-5	4-6
5						5-5	5-6
6							6-6

b) Hay 4 fichas cuya suma es 6 (marcadas en azul).

$P[\text{SUMA } 6] = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

c) Hay 12 fichas cuya suma es un número impar (marcadas en verde).

$P[\text{SUMA IMPAR}] = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0-0	0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6
1		1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2			2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3				3-3	3-4	3-5	3-6
4					4-4	4-5	4-6
5						5-5	5-6
6							6-6

d) Hay 13 fichas en las que el producto de los dos números es menor que 6.

$P[\text{PRODUCTO MENOR QUE } 6] = \frac{13}{28}$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0-0	0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6
1		1-1	1-2	1-3	1-4	~~1-5~~	1-6
2			2-2	~~2-3~~	2-4	2-5	2-6
3				3-3	3-4	~~3-5~~	3-6
4					4-4	4-5	4-6
5						~~5-5~~	~~5-6~~
6							6-6

e) Como hay 6 fichas sobre la mesa, hay 22 casos posibles.

Hay 13 fichas que cumplen la condición, pero 5 de ellas ya están sobre la mesa.

$P[\text{TIENE 2 O TIENE } 5] = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$

17 ▼▼▽ **Lanzamos una moneda y un dado y observamos los resultados obtenidos.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener CRUZ y CINCO?

b) ¿Y la de obtener CARA y NÚMERO PAR?

	1	2	3	4	5	6
C	C1	C2	C3	C4	C5	C6
+	+1	+2	+3	+4	+5	+6

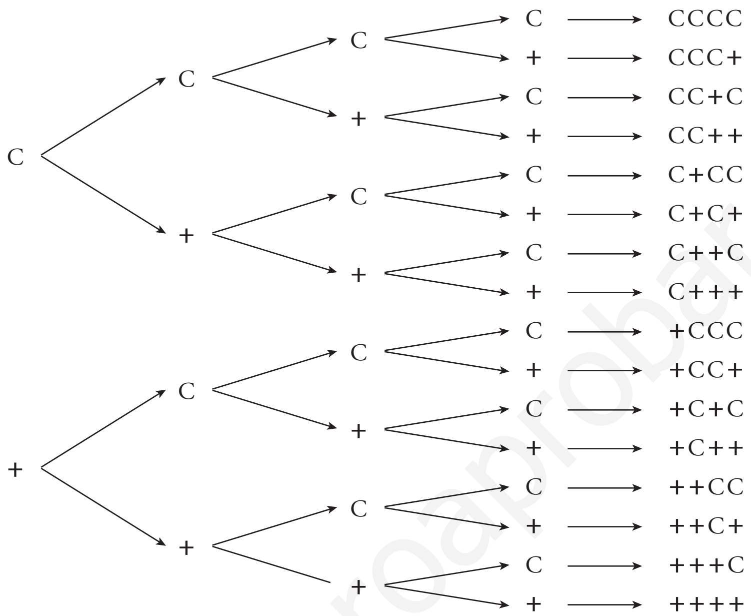
a) $P[\text{CRUZ Y } 5] = \frac{1}{12}$

b) $P[\text{CARA Y PAR}] = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

18 ▼▽▽ **Lanzamos cuatro monedas. Halla la probabilidad de obtener:**

a) Dos caras. b) Ninguna cara. c) Alguna cara.

Hacemos un diagrama en árbol para ver los casos posibles:



Hay $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ casos posibles.

a) $P[\text{DOS CARAS}] = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ b) $P[\text{NINGUNA CARA}] = \frac{1}{16}$

c) $P[\text{ALGUNA CARA}] = 1 - P[\text{NINGUNA CARA}] = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

19 ▼▼▽ **En una familia de 4 hijos, ¿cuál es la probabilidad de que todos sean varones? ¿Cuál es la probabilidad de que en una familia de tres hijos, sean 2 chicos y 1 chica?**

Este problema es similar al anterior. Hay 16 combinaciones distintas y solo una opción de que los cuatro salgan varones. Por tanto, $P[\text{TODOS VARONES}] = \frac{1}{16}$.

En una familia de tres hijos, pueden darse $2^3 = 8$ combinaciones distintas. En 3 de ellas hay 2 chicos y 1 chica. Por tanto, $P[\text{DOS CHICOS Y UNA CHICA}] = \frac{3}{8}$.

20 ▼▼▽ **Lanzamos dos dados. Calcula la probabilidad de que el producto de las puntuaciones:**

a) Sea 5. b) Sea 6. c) Sea 4.

☞ ***Haz una tabla con todos los casos posibles.***

a) 1 y 5, 5 y 1 b) 1 y 6, 2 y 3, 3 y 2, 6 y 1 c) 1 y 4, 2 y 2, 4 y 1

$P[\text{PROD.} = 5] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ $P[\text{PROD.} = 6] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ $P[\text{PROD.} = 4] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

21 ▼▼▽ **Lanzamos dos dados. Calcula la probabilidad de que la diferencia de las puntuaciones:**

a) Sea 0. **b) Sea 1.** **c) Sea 3.** **d) Sea 5.**

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Hay 36 posibles casos.

a) $P[\text{SEA } 0] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{SEA } 1] = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

c) $P[\text{SEA } 3] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

d) $P[\text{SEA } 5] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

22 ▼▼▽ **Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de:**

a) Obtener al menos un 6.

b) Que las dos puntuaciones coincidan.

c) Que una puntuación sea mayor que la otra.

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

a) Hay 36 opciones y 11 de ellas tienen un 6. Por tanto, $P[\text{AL MENOS UN } 6] = \frac{11}{36}$

b) Hay 36 opciones y en 6 de ellas las puntuaciones coinciden.

Así, $P[\text{COINCIDEN}] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) Es lo mismo que decir que no coincidan las puntuaciones.

Por tanto, $P[\text{UNA MAYOR QUE OTRA}] = P[\text{NO COINCIDEN}] = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

23 ▼▼▽ **En un centro escolar hay 1 000 alumnos repartidos como indica esta tabla:**

	CHICOS	CHICAS
USAN GAFAS	187	113
NO USAN GAFAS	413	287

Se elige al azar uno de ellos. Di cuál es la probabilidad de que:

a) Sea chico. **b) Sea chica.** **c) Use gafas.** **d) No use gafas.**

e) Sea una chica con gafas.

f) Si al elegir al azar nos dicen que es una chica, ¿cuál es la probabilidad de que use gafas?

Completamos la tabla con los totales; así se obtienen las probabilidades de forma más sencilla:

	CHICOS	CHICAS	TOTAL
USAN GAFAS	187	113	300
NO USAN GAFAS	413	287	700
TOTAL	600	400	1 000

a) $P[\text{CHICO}] = \dfrac{600}{1\,000} = \dfrac{3}{5}$

b) $P[\text{CHICA}] = \dfrac{400}{1\,000} = \dfrac{2}{5}$

c) $P[\text{USA GAFAS}] = \dfrac{300}{1\,000} = \dfrac{3}{10}$

d) $P[\text{NO USA GAFAS}] = \dfrac{700}{1\,000} = \dfrac{7}{10}$

e) $P[\text{CHICA CON GAFAS}] = \dfrac{113}{1\,000}$

f) $P[\text{USA GAFAS SABIENDO QUE ES CHICA}] = \dfrac{113}{400}$

24 ▼▼▽ **En una empresa hay 200 empleados, de los que 100 son hombres y 100 son mujeres. Los fumadores son 40 hombres y 35 mujeres.**

a) Si elegimos un empleado al azar, calcula la probabilidad de que sea hombre y no fume.

b) Si sabemos que el elegido no fuma, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

☞ ***Haz una tabla como la del ejercicio anterior.***

Construimos una tabla como la de la actividad anterior:

	HOMBRES	MUJERES	TOTAL
FUMAN	40	35	75
NO FUMAN	60	65	125
TOTAL	100	100	200

a) $P[\text{HOMBRE QUE NO FUMA}] = \dfrac{60}{200} = \dfrac{3}{10}$

b) $P[\text{MUJER SABIENDO QUE NO FUMA}] = \dfrac{65}{125} = \dfrac{13}{25}$

25 ▼▼▼ **Una botella contiene 20 bolas de colores negro, rojo y verde. No sabemos cuántas de cada color, ni podemos verlo, porque la botella es opaca. Solo podemos ver, cuando la tumbamos, el color de la bola que queda junto al tapón, que es transparente.**

Durante unos días hacemos 1 000 veces la experiencia de *agitar*, *inclinar la botella* y *anotar el color de la bola que se ve*. Al final, hemos obtenido estos resultados:

$$f(\bigcirc) = 461 \quad f(\bigcirc) = 343 \quad f(\bigcirc) = 196$$

Podemos averiguar, con cierta seguridad, cuántas bolas hay de cada color. Hagámoslo con las negras:

$$f_r(\bigcirc) = \frac{461}{1\,000} = 0{,}461$$

$$P[\bigcirc] = \frac{n}{20} \quad (n \text{ es el número de bolas negras})$$

Como $f_r(\bigcirc) \approx P[\bigcirc]$, **hacemos:** $0{,}461 \approx \dfrac{n}{20} \rightarrow n \approx 20 \cdot 0{,}461 = 9{,}22$

Estimamos que el número de bolas negras es 9.

¿Cuántas bolas de cada color hay en la botella?

- Bolas rojas: $0{,}343 \approx \dfrac{n}{20} \rightarrow n \approx 20 \cdot 0{,}343 = 6{,}86 \rightarrow n = 7$
- Bolas verdes: $0{,}196 \approx \dfrac{n}{20} \rightarrow n \approx 20 \cdot 0{,}196 = 3{,}92 \rightarrow n = 4$

Estimamos que hay 9 bolas negras, 7 rojas y 4 verdes.

26 ▼▽▽ **Elisa, para estudiar el comportamiento de un dado chapucero, lo ha lanzado 1 200 veces, obteniendo estos resultados:**

CARAS	1	2	3	4	5	6
N.º DE VECES	248	355	175	180	126	116

a) Halla la frecuencia relativa de cada una de las seis caras, expresando los resultados en forma de fracción y de decimal con tres cifras decimales.

b) Justifica que es razonable decir que las probabilidades de las caras son, aproximadamente:

$P[1] = 0{,}2 \quad P[2] = 0{,}3 \quad P[3] = 0{,}15$

$P[4] = 0{,}15 \quad P[5] = 0{,}1 \quad P[6] = 0{,}1$

a) $f_r(1) = \dfrac{248}{1\,200} = 0{,}207 \quad f_r(2) = \dfrac{355}{1\,200} = 0{,}296 \quad f_r(3) = \dfrac{175}{1\,200} = 0{,}146$

$f_r(4) = \dfrac{180}{1\,200} = 0{,}15 \quad f_r(5) = \dfrac{126}{1\,200} = 0{,}105 \quad f_r(6) = \dfrac{116}{1\,200} = 0{,}097$

b) $0{,}207 \approx 0{,}2$; $0{,}296 \approx 0{,}3$; $0{,}146 \approx 0{,}15$; $0{,}105 \approx 0{,}1$; $0{,}097 \approx 0{,}1$

Por tanto, a la vista de la experiencia, sí es razonable afirmar que las probabilidades son las que se nos dice.

13 Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 271

Problemas “+”

27 ▼▼▽ **Hemos de jugar a C y + con una cierta ficha. Antes de empezar, experimento con ella y obtengo 37 CARAS y 3 CRUCES. ¿Qué te parece más correcto, apostar por + porque “ya es hora de que salga” o por C porque “parece que sale más”?**

Si de 40 lanzamientos se han obtenido 37 CARAS y 3 CRUCES, las probabilidades de C o + serán equivalentes a sus frecuencias relativas (el número de lanzameintos es relativamente grande). Por tanto:

$f_r(\text{C}) \approx P[\text{C}] = \dfrac{37}{40}$ $\qquad\qquad$ $f_r(+) \approx P[+] = \dfrac{3}{40}$

Sería más correcto apostar por CARA.

28 ▼▼▼ **Se han hecho análisis de sangre a 200 personas para determinar su grupo sanguíneo, así como el Rh. Los resultados se resumen en esta tabla:**

	GRUPO A	GRUPO B	GRUPO AB	GRUPO 0	TOTALES
RH+	74	12	6	70	162
RH–	18	3	1	16	38
TOTALES	92	15	7	86	200

a) Si elegimos al azar una persona de entre esas 200, ¿cuál es la probabilidad de que su grupo sanguíneo sea A? ¿Y de que sea 0? ¿Y de que tenga Rh+?

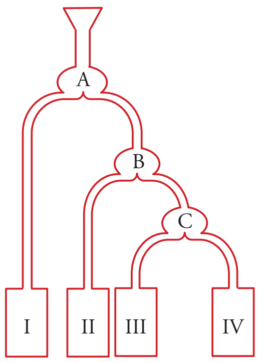
b) Si elegimos una persona del grupo sanguíneo B, ¿cuál es la probabilidad de que tenga Rh+?

a) $P[\text{A}] = \dfrac{92}{200} = 0{,}46$ $\qquad$ $P[\text{O}] = \dfrac{86}{200} = 0{,}43$ $\qquad$ $P[\text{Rh+}] = \dfrac{162}{200} = 0{,}81$

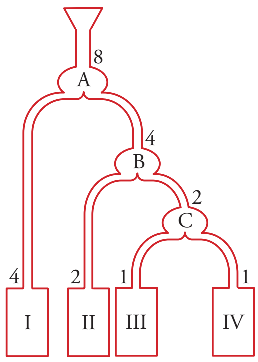
b) Si elegimos alguien con grupo B: $P[\text{Rh+}] = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

29 ▼▼▼ **Dejamos caer una bola en el embudo de este aparato.**

Calcula la probabilidad de que caiga en cada uno de los depósitos I, II, III y IV.



Si tirásemos 8 bolas y se repartieran equitativamente:



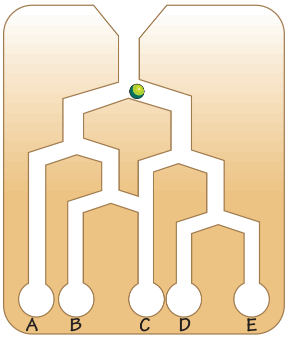
$P[\text{I}] = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$P[\text{II}] = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

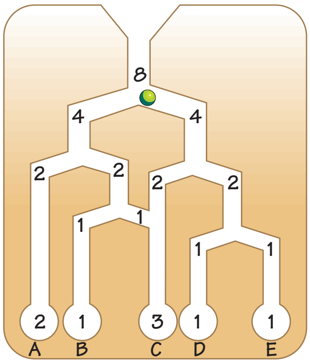
$P[\text{III}] = \dfrac{1}{8}$

$P[\text{IV}] = \dfrac{1}{8}$

30 ▼▼▼ **¿Cuál es la probabilidad de que una bola caiga en cada uno de los depósitos?**



Si tirásemos 8 bolas:



$P[\text{A}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

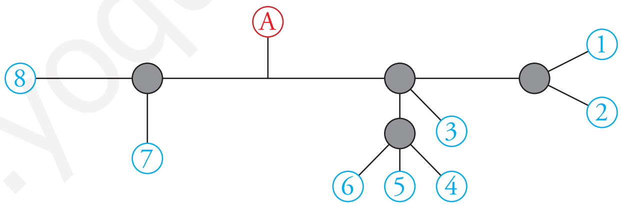
$P[\text{B}] = \frac{1}{8}$

$P[\text{C}] = \frac{3}{8}$

$P[\text{D}] = \frac{1}{8}$

$P[\text{E}] = \frac{1}{8}$

31 ▼▼▼ **Esto es un plano de parte de la red de cercanías de una ciudad. En cada bifurcación es igual de probable que el tren continúe por un camino u otro.**



Si un viajero se sube a un tren en A sin saber adónde se dirige, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a la estación 5?

Calcula la probabilidad de llegar a cada una de las estaciones.

Si el tren se encuentra en una bifurcación con 2 opciones, tiene 1/2 de probabilidad de ir por cada una de ellas. Si se encuentra en una bifurcación con 3 posibles opciones, tendrá 1/3 de probabilidad de ir por cada uno de los caminos, y así en todos los casos.

Para llegar de A a la estación 5 pasa por una bifurcación con 2 posibles caminos, otra con 3 posibles caminos y una última con otros tres posibles caminos.

Por tanto, $P[\text{LLEGAR A } 5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$.

$P[\text{LLEGAR A } 1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ $\quad$ $P[\text{LLEGAR A } 2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$P[\text{LLEGAR A } 3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\quad$ $P[\text{LLEGAR A } 4] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

$P[\text{LLEGAR A } 6] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ $\quad P[\text{LLEGAR A } 7] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P[\text{LLEGAR A } 8] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

32 ▼▼▼ En una bolsa hay seis bolas numeradas, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, y extraemos tres de ellas. Calcula:

a) *P*[suma 10]. (Hay 20 casos posibles. Descríbelos todos: 123, 124, 125, 126, 134…)

b) *P*[suma 9]

c) *P*[producto 12]

d) *P*[la mayor es cinco]

e) *P*[la mayor es 2]

a) Estos son todos los casos: 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456. $P[\text{SUMA } 10] = \frac{3}{20}$

b) $P[\text{SUMA } 9] = \frac{3}{20}$

c) $P[\text{PRODUCTO } 12] = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

d) $P[\text{LA MAYOR ES } 5] = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

e) $P[\text{LA MAYOR ES } 2] = 0$

33 ▼▼▼ Lanzamos tres dados: rojo, verde y azul.

a) Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados sea 10. Para ello ten en cuenta que:

- **Los posibles resultados son 6 · 6 · 6 = 216.**
- **La suma 10 se da con los siguientes resultados:**

136, 145, 226, 235, 244 y 334

Pero 136 puede ser cualquiera de estos casos:

136, 163, 316, 361, 613, 631

Y 226 puede ser cualquiera de estos:

226, 262, 622

Es decir, si los tres valores son distintos, hay 6 casos, y si hay dos valores iguales, salen 3 casos.

Calcula, además:

b) *P*[suma 11]

c) *P*[suma 9]

d) *P*[producto 12]

e) *P*[producto 36]

f) *P*[el mayor es 5]. Por ejemplo, 351. Si ha salido 552, el mayor es 5.

a) Para 136, 145 y 235 tenemos 6 posibles casos con cada uno y para 226, 244 y 334 tenemos 3 casos con cada uno. Luego hay 3 · 6 + 3 · 3 = 27 casos favorables. Por tanto, $P[\text{SUMA } 10] = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

b) La suma 11 se da con estos resultados: 146, 155, 236, 245, 335, 344.

Para 146, 236 y 245 tenemos 6 posibles casos con cada uno y para 155, 335 y 344 tenemos 3 casos con cada uno. Luego hay $3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 27$ casos favorables. Por tanto, $P[\text{SUMA } 11] = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

c) La suma 9 se da con estos resultados: 126, 135, 144, 225, 234, 333.

Para 126, 135 y 234 tenemos 6 posibles casos con cada uno; para 144 y 225 tenemos 3 casos con cada uno, y para 333 solo existe un caso. Luego hay $3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 1 = 25$ casos favorables. Por tanto, $P[\text{SUMA } 9] = \frac{25}{216}$.

d) El producto 12 se da con estos resultados: 126, 134, 223.

Para 126 y 134 tenemos 6 posibles casos con cada uno y para 223 tenemos 3 casos con cada uno. Luego hay $2 \cdot 6 + 3 = 15$ casos favorables.

Por tanto, $P[\text{PRODUCTO } 12] = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$.

e) El producto 36 se da con estos resultados: 166, 236, 334.

Para 236 tenemos 6 posibles casos y para 166 y 334 tenemos 3 casos con cada uno. Luego hay $6 + 2 \cdot 3 = 12$ casos favorables. Por tanto, $P[\text{PRODUCTO } 36] = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$.

f) El número 5 aparece en los siguientes casos, y es el mayor: 115, 125, 135, 145, 155, 225, 235, 245, 255, 335, 345, 355, 445, 455, 555.

Para 125, 135, 145, 235, 245, 345 hay 6 posibles casos.

Para 115, 155, 225, 255, 335, 355, 445, 455 hay 3 casos posibles.

Para 555 solo hay un caso.

$$P[\text{EL MAYOR ES } 5] = \frac{6 \cdot 6 + 8 \cdot 3 + 1}{216} = \frac{61}{216}$$

Soluciones a "Y para terminar…"

PÁGINA 272

▼ Utiliza tu ingenio

Rifa

Todas las papeletas de una rifa se han vendido en tres pueblos: Montejo, Montoro y Montilla.

En Montoro se han vendido la mitad que en Montejo, y en este, el triple que en Montilla.

¿Cuál es la probabilidad de que toque el premio en cada uno?

Supongamos que la probabilidad de que toque en Montejo es p. Las probabilidades para cada población serían:

Montoro (mitad que en Montejo) $\longrightarrow \dfrac{p}{2}$

Montejo $\longrightarrow p$

Montilla (un tercio de Montejo) $\longrightarrow \dfrac{p}{3}$

La suma de probabilidades debe ser 1:

$$\frac{p}{2} + p + \frac{p}{3} = 1 \ \rightarrow \ \frac{11}{6}p = 1 \ \rightarrow \ p = \frac{6}{11}$$

Las probabilidades para cada población son, por tanto:

Montoro $\rightarrow \dfrac{6}{22} = \dfrac{3}{11}$

Montejo $\rightarrow \dfrac{6}{11}$

Montilla $\rightarrow \dfrac{6}{33} = \dfrac{2}{11}$

13 Soluciones a “Y para terminar…”

PÁGINA 273

▼ Utiliza tu ingenio

Cuatro iguales

De una bolsa que contiene veinte bolas rojas, diez verdes y cinco negras, se van sacando bolas, una a una.

¿Cuántas extracciones hay que realizar para tener la seguridad de haber sacado cuatro bolas del mismo color?

Si hacemos 10 extracciones, es seguro que habrá cuatro bolas del mismo color. Con menos extracciones no podemos asegurarlo, porque podría haber 3 bolas de cada color.

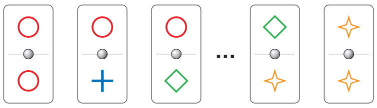
13 Soluciones a la Autoevaluación

PÁGINA 273

¿Recuerdas lo que es una experiencia aleatoria, cuál es el espacio muestral y qué son los sucesos?

1 **Describe un dominó con ○ + ◇ ✧.**

Las piezas serían como estas:



Dibuja todas.

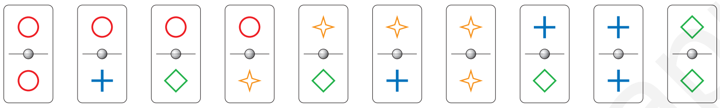
Deben ser 10 fichas.

Echamos las fichas en una bolsa y extraemos una.

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

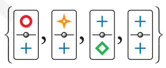
b) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

c) Describe el suceso "la ficha extraída tiene el símbolo +".



a) Sí es aleatoria.

b) El espacio muestral consta de 10 elementos.

c) LA FICHA EXTRAÍDA TIENE EL SÍMBOLO + = 

¿Eres capaz de entender la ley fundamental del azar y utilizarla en algunos casos?

2 **Dejamos caer 1 000 chinchetas. Caen 649 así y el resto así.**

Halla las frecuencias absoluta y relativa de los sucesos y. Estima las probabilidades de ambos casos.

$f(\ ) = 649$, $f_r(\ ) = 0{,}649$; $f(\ ) = 351$, $f_r(\ ) = 0{,}351$; $P[\ ] = 0{,}65$; $P[\ ] = 0{,}35$

3 **Hemos lanzado 1 000 veces un dado de cuatro caras, numeradas del 1 al 4, obteniendo estos resultados:**

CARA OBTENIDA	1	2	3	4
N.° DE VECES	180	370	262	188

a) ¿Qué probabilidad le asignarías a cada uno de los posibles resultados?

b) ¿Se puede suponer que el dado es correcto?

a) $P[1] \approx \dfrac{180}{1\,000} = 0{,}18$ $\qquad P[2] \approx \dfrac{370}{1\,000} = 0{,}37$

$P[3] \approx \dfrac{262}{1\,000} = 0{,}26$ $\qquad P[4] \approx \dfrac{188}{1\,000} = 0{,}19$

b) El dado no es correcto, porque la probabilidad de cada cara no es la misma.

¿Eres capaz de aplicar la ley de Laplace, tanto en casos sencillos como en casos más complejos?

4 En un equipo de natación hay 3 niñas americanas, 5 europeas, 2 asiáticas y 2 africanas. Si elegimos una de ellas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea asiática? ¿Y la de que no sea europea?

En total son 3 + 5 + 2 + 2 = 12 niñas.

$P[\text{ASIÁTICA}] = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$

$P[\text{NO EUROPEA}] = P[\text{AMERICANA O ASIÁTICA O AFRICANA}] = \dfrac{3+2+2}{12} = \dfrac{7}{12}$

Para calcular esta probabilidad también podíamos haber hecho lo siguiente:

$P[\text{NO EUROPEA}] = 1 - P[\text{EUROPEA}] = 1 - \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{12}$

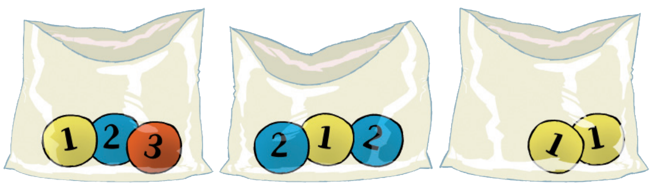
5 Ana tira un dado y su hermana Eva lo tira después. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Eva sea mayor que la de Ana?

Construimos una tabla:

		EVA					
		1	2	3	4	5	6
ANA	1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
	2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
	3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
	4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
	5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
	6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

Hay 36 posibles casos, 15 de los cuales (los sombreados) son favorables para Eva. Por tanto, $P[\text{EVA TENGA MAYOR PUNTUACIÓN QUE ANA}] = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$.

6 De cada una de estas bolsas extraemos una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las tres cifras sea 5?



Que la suma de las tres cifras sea 5 es lo mismo que que la suma de las dos primeras bolas sea 4, ya que la tercera bolsa solo tiene dos bolas con la cifra 1. Resolvemos entonces el problema de sacar al azar una bola de la primera bolsa, otra bola de la segunda bolsa y sumar sus cifras.

Si sacamos un 1 de la primera bolsa, no sumaremos nunca 4. Por tamto. descartamos esa posibilidad.

Si sacamos un 2 de la primera bolsa, habrá que sacar un 2 de la segunda. Las probabilidades son:

$P[\text{SACAR 2 EN LA 1.ª BOLSA Y SACAR 2 EN LA 2.ª BOLSA}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

Si sacamos un 3 de la primera bolsa, habrá que sacar un 1 de la segunda. Las probabilidades son:

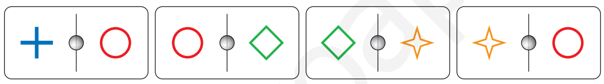
$P[\text{SACAR 3 EN LA 1.ª BOLSA Y SACAR 1 EN LA 2.ª BOLSA}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Por lo tanto: $P[\text{LA SUMA DE LAS TRES CIFRAS SEA 5}] = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

7 En el juego similar al dominó, descrito en el ejercicio 1:

a) Calcula la probabilidad de extraer una ficha que tenga el símbolo +.

b) Sobre la mesa tenemos estas fichas encadenadas:

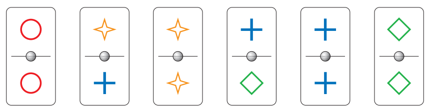


Sacamos al azar otra de las fichas que quedan. ¿Cuál es la probabilidad de que se pueda encadenar con las que hay en la mesa?

a) De las 10 fichas, hay 4 que tienen el símbolo +.

$P[\text{FICHA CON SÍMBOLO } +] = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

b) Si esas 4 fichas están sobre la mesa, quedan estas seis:



De las 6 fichas, 4 tienen los símbolos + o ○.

Por tanto, $P[\text{ENCADENAR CON LAS DE LA MESA}] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.