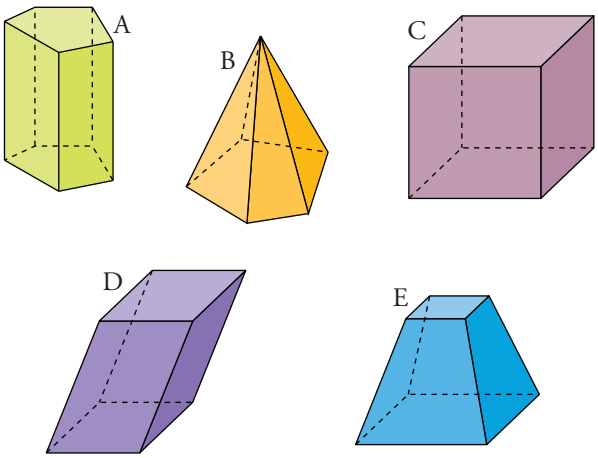
PÁGINA 200

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Tipos de poliedros

1 ▲△△ **Di, justificadamente, qué tipo de poliedro es cada uno de los siguientes:**



¿Hay entre ellos algún poliedro regular?

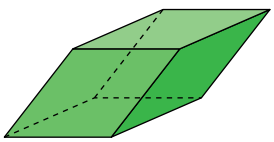
A → Prisma pentagonal recto. Su base es un pentágono.
B → Pirámide pentagonal. Su base es un pentágono.
C → Cubo. Sus caras son cuadrados.
D → Paralelepípedo. Sus caras son paralelogramos.
E → Tronco de pirámide regular. Sus bases son cuadrados.

Solo es poliedro regular el cubo.

2 ▲△△ **¿Una pirámide pentagonal regular es un poliedro regular? Explica por qué.**

No, porque no todas sus caras son polígonos regulares iguales.

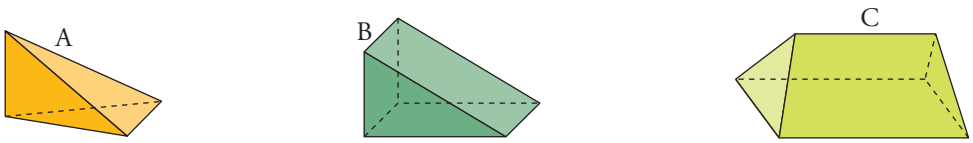
3 ▲▲△ **Esta figura está formada por seis rombos idénticos.**



Aunque sus caras son iguales y concurren tres de ellas en cada vértice, no es un poliedro regular. Explica por qué.

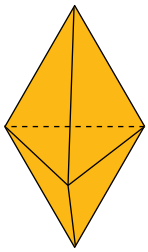
No es poliedro regular, porque sus caras no son polígonos regulares.

4 ▲△△ **Alguno de los siguientes poliedros no es catalogable entre los que ya conocemos. Señálalo y cataloga los demás.**



A es una pirámide de base triangular y *B* es un prisma de base triangular.
C no es un prisma, porque las bases no son paralelas.

5 ▲▲△

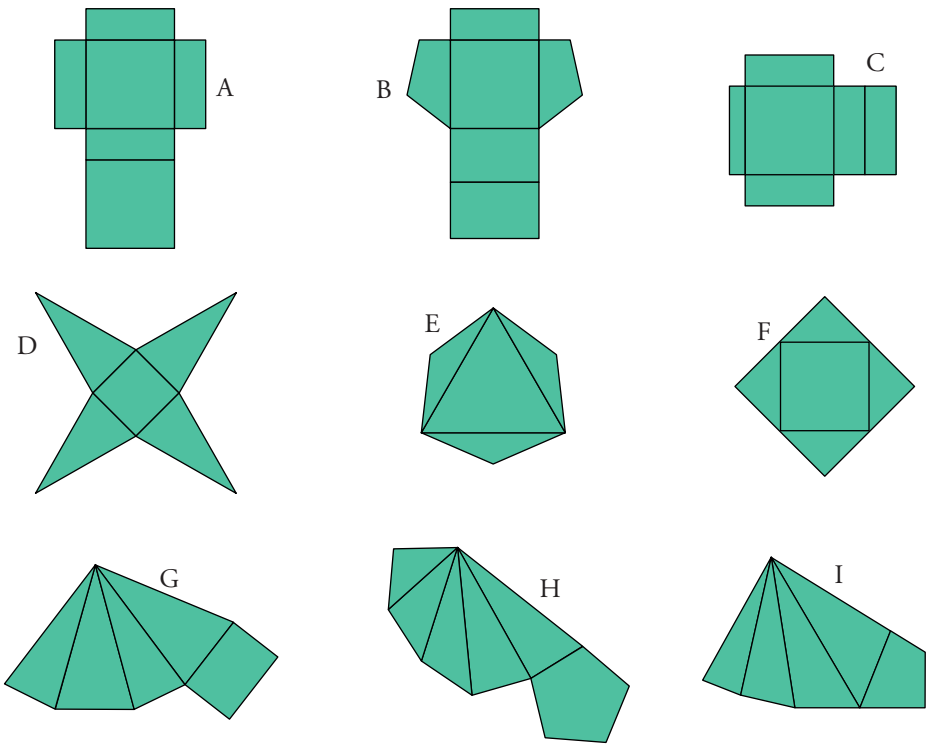


Este poliedro está formado por seis triángulos equiláteros iguales. Sin embargo, no es un poliedro regular. Explica por qué.

No es poliedro regular, porque en todos sus vértices no concurre el mismo número de caras: en unos vértices concurren tres caras y en otros, cuatro caras.

Desarrollo con poliedros

6 ▲▲△ **¿Con cuáles de los siguientes desarrollos se puede completar un poliedro? Contesta razonadamente.**



A → Es un ortoedro.

B → Es un prisma cuadrangular.

C → No se puede construir un poliedro, pues la altura del poliedro no tiene la misma longitud que el lado lateral del rectángulo de la izquierda.

D → Es una pirámide cuadrangular regular.

E → Las caras laterales no pueden cerrarse.
No se puede construir un poliedro.

F → Las caras laterales no pueden cerrarse.
No se puede construir un poliedro.

G → Es una pirámide cuadrangular con base rectangular.

H → Las dos caras laterales extremas son de distinto tamaño y deberían coincidir.
No se puede construir un poliedro.

I → Sí se puede construir un poliedro. Es una pirámide cuadrangular inclinada.

7 ▲△△

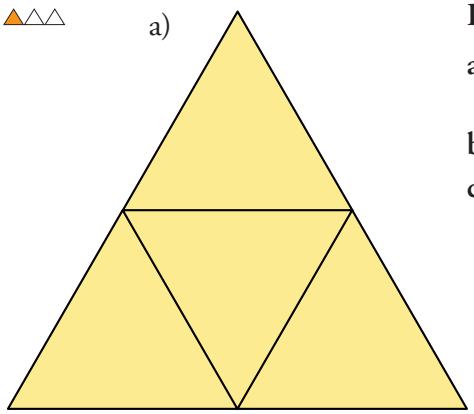
Dibuja el desarrollo de:

a) Un tetraedro regular de 3 cm de arista.

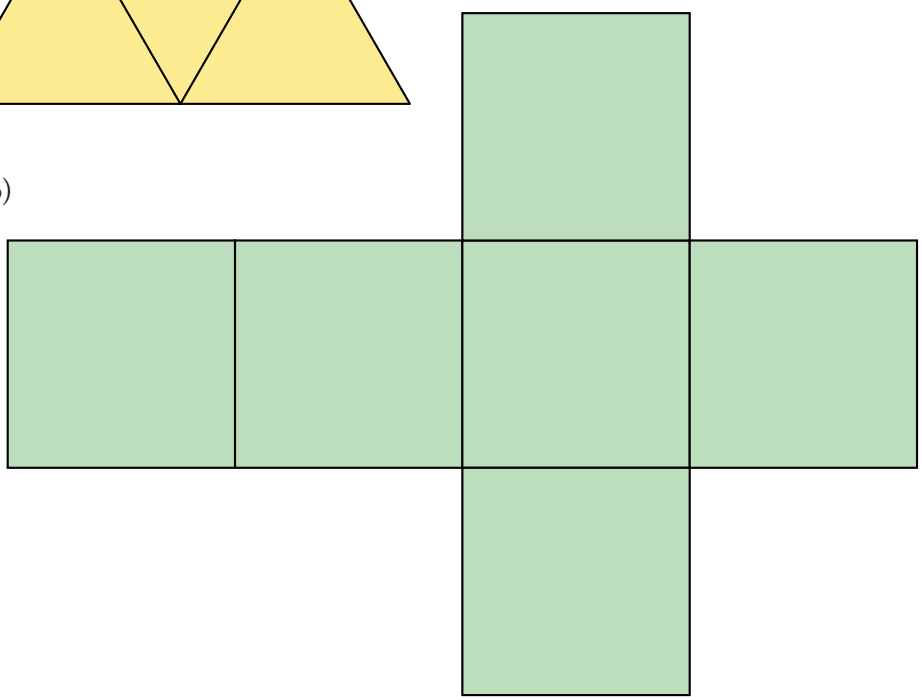
b) Un cubo de 3 cm de arista.

c) Un octaedro de 2 cm de arista.

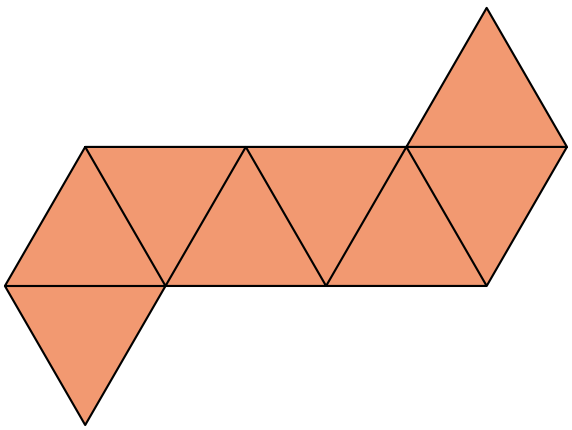
a)



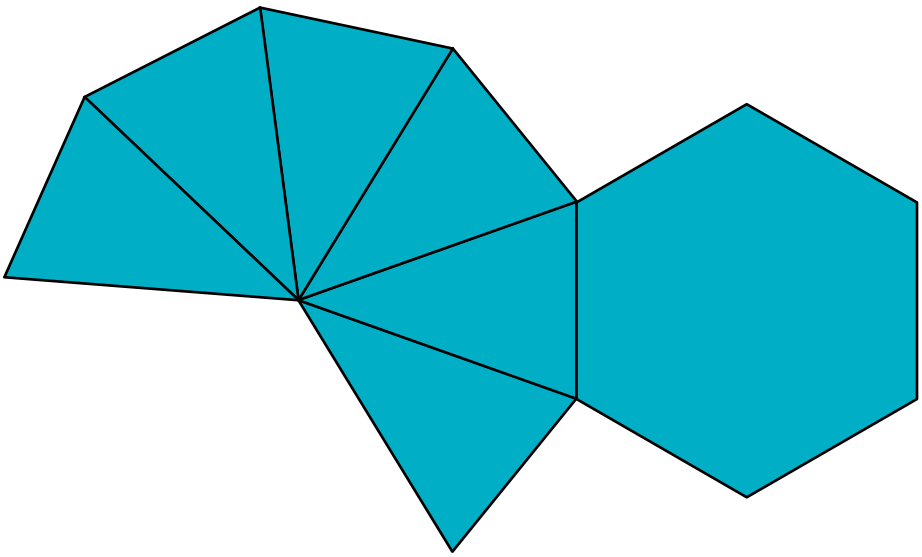
b)



c)



8 ▲△△ **Dibuja el desarrollo de una pirámide hexagonal regular cuyas aristas laterales midan 6 cm y las de la base 4 cm.**



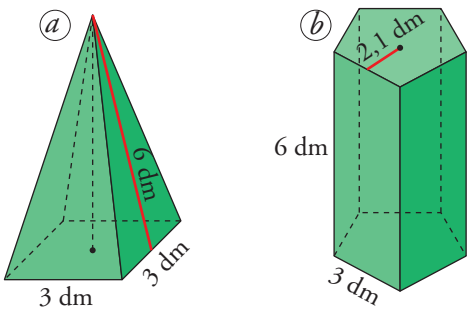
NOTA: El dibujo está reducido al 65%.

PÁGINA 201

Áreas sencillas

Halla el área total de los siguientes cuerpos geométricos:

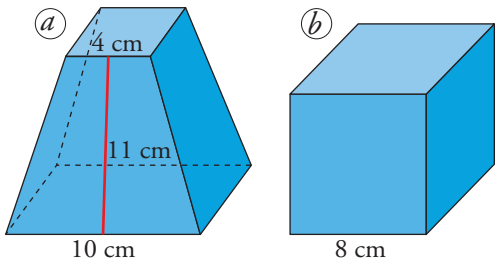
10 ▲△△



a) $A = 3^2 + 4\left(\frac{6 \cdot 3}{2}\right) = 9 + 36 = 45 \text{ dm}^2$

b) $A = 2 \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 2{,}1}{2} + 5(6 \cdot 3) = 31{,}5 + 90 = 121{,}5 \text{ dm}^2$

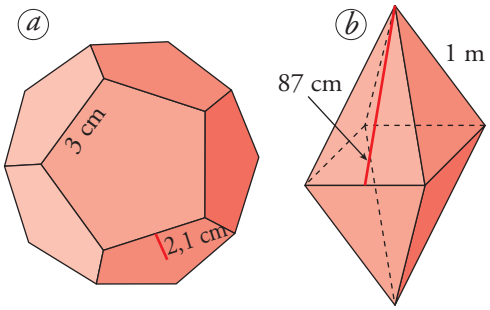
11 ▲△△



a) $A = 10^2 + 4^2 + 4\left(\frac{10 + 4}{2} \cdot 11\right) = 100 + 16 + 308 = 424 \text{ cm}^2$

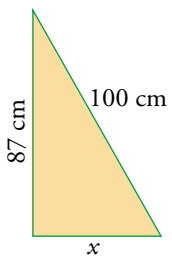
b) $A = 6 \cdot 8^2 = 384 \text{ cm}^2$

12 ▲▲△



a) $A = 12\left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 2{,}1}{2}\right) = 189 \text{ cm}^2$

b)



• Cálculo de la altura de una cara lateral:

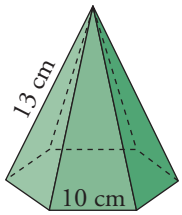
$x = \sqrt{100^2 - 87^2} = \sqrt{2\,431} = 49{,}3 \text{ cm}$

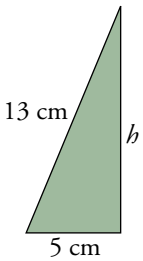
$2x = 98{,}6$

• $A_{total} = 8 \cdot \frac{98{,}6 \cdot 87}{2} = 34\,312{,}8 \text{ cm}^2 = 3{,}43128 \text{ m}^2$

Áreas con cálculos intermedios

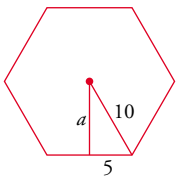
13 ▲▲△ **Halla el área total de una pirámide hexagonal regular con aristas laterales de 13 cm y aristas de la base de 10 cm.**





• Cálculo de la altura de una cara lateral:

$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm



• Cálculo de la apotema de la base:

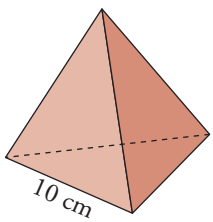
$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8{,}66$ cm

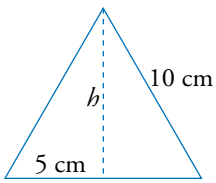
• $A_{base} = \dfrac{(10 \cdot 6) \cdot 8{,}66}{2} = 259{,}8 \text{ cm}^2$

• $A_{lat} = 6\left(\dfrac{10 \cdot 12}{2}\right) = 360 \text{ cm}^2$

• $A_{total} = 259{,}8 + 360 = 619{,}8 \text{ cm}^2$

14 ▲▲△ **Halla el área de un tetraedro regular de 10 cm de arista.**



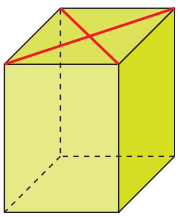


• Altura de una cara:

$h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8{,}66$ cm

• $A = 4\left(\dfrac{10 \cdot 8{,}66}{2}\right) = 173{,}2 \text{ cm}^2$

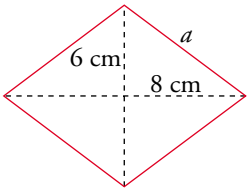
15 ▲▲△ **Halla el área total de un prisma recto de 15 cm de altura cuya base son rombos de diagonales 16 cm y 12 cm.**



• $A_{rombo} = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$

• Cálculo del lado del rombo:

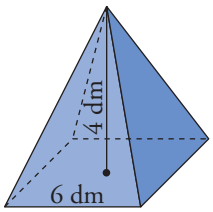
$a = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ cm

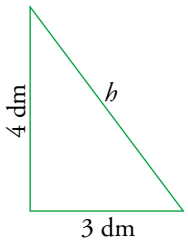


• $A_{lat} = 4\,(10 \cdot 15) = 600$ cm^2

• $A_{total} = 2 \cdot 96 + 600 = 192 + 600 = 792$ cm^2

16 ▲△△ **La base de una pirámide regular es un cuadrado de 6 dm de lado. Su altura es de 4 dm. Hallar su área total.**





• Cálculo de la altura de una cara lateral:

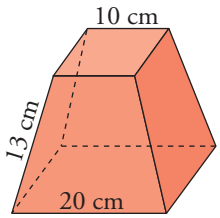
$h = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ dm

• $A_{base} = 36$ dm^2

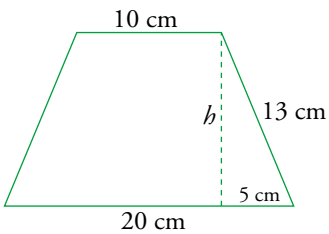
$A_{lat} = 4\left(\dfrac{6 \cdot 5}{2}\right) = 60$ dm^2

• $A_{total} = 36 + 60 = 96$ dm^2

17 ▲△△ **Las bases de un tronco de pirámide regular son cuadrados de 10 cm y 20 cm de lado, respectivamente. Las aristas laterales son de 13 cm. Halla su área total.**



• Cálculo de la altura de una cara lateral:



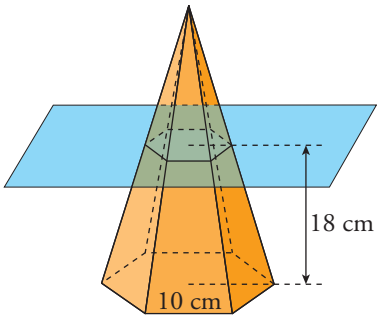
$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm

• $A_{bases} = 400$ cm$^2 + 100$ cm$^2 = 500$ cm^2

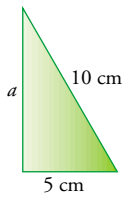
• $A_{lateral} = 4\left(\dfrac{20 + 10}{2} \cdot 12\right) = 720$ cm^2

• $A_{total} = 500 + 720 = 1\,220$ cm^2

18 ▲▲△ **La base de esta pirámide regular es un hexágono de 10 cm de lado. Su altura es 24 cm. Se corta por un plano que pasa a 18 cm de la base. Halla el área total del tronco de pirámide que resulta.**



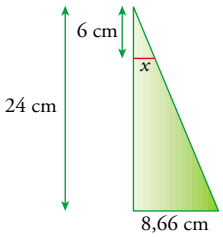
• Apotema de la base mayor:



$$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8{,}66 \text{ cm}$$

• Apotema de la base menor:

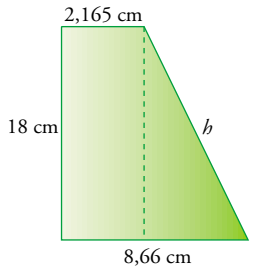
$$\frac{24}{8{,}66} = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 8{,}66}{24} = 2{,}165 \text{ cm}$$



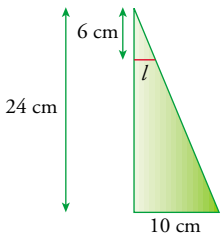
• Altura de la cara lateral:

$$h = \sqrt{18^2 + (6{,}495)^2} = \sqrt{324 + 42{,}185} =$$

$$= \sqrt{366{,}185} = 19{,}13 \text{ cm}$$



• Lado de la base menor:



$$\frac{24}{10} = \frac{6}{l} \rightarrow l = \frac{60}{24} = 2{,}5 \text{ cm}$$

• $A_{lat} = 6 \cdot \left(\frac{10 + 2{,}5}{2} \cdot 19{,}13\right) = 717{,}375 \text{ cm}^2$

$$A_{bases} = \frac{(6 \cdot 2{,}5) \cdot 2{,}165}{2} + \frac{(6 \cdot 10) \cdot 8{,}66}{2} = 16{,}238 + 259{,}8 = 276{,}038 \text{ cm}^2$$

• $Atotal = 993{,}413 \text{ cm}^2$

PÁGINA 202

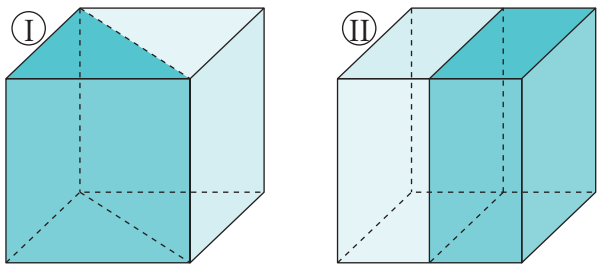
Problemas geométricos

19 ▲▲△ **Contesta a las siguientes preguntas:**

a) Calcula el área total de un cubo de arista 4 cm.

b) Si lo partimos por la mitad como se indica en I, ¿cuál es el área de cada mitad?

c) Si lo partimos por la mitad como se indica en II, ¿cuál es el área de cada mitad?



a) $A = 6 \cdot 4^2 = 96 \text{ cm}^2$

b) $A_1 = \dfrac{96}{2} + 4 \cdot d$, donde d es la diagonal de una de sus caras.

$d = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5{,}66$; $A_1 = 48 + 4 \cdot 5{,}66 = 70{,}64 \text{ cm}^2$

c) $A_2 = \dfrac{96}{2} + 4^2 = 64 \text{ cm}^2$

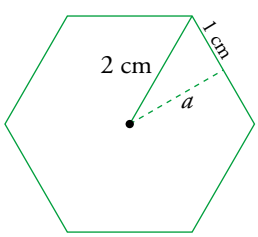
20 ▲△△ **Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 3 cm, 4 cm y 12 cm. Halla la longitud de su diagonal.**

Área total $= 2(3 \cdot 4 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 12) = 192 \text{ cm}^2$

Diagonal $= \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13 \text{ cm}$

21 ▲▲△ **Halla el área total de un prisma hexagonal regular cuya arista lateral mide 4 cm y las aristas de la base, 2 cm.**

• Cálculo de la apotema de la base:

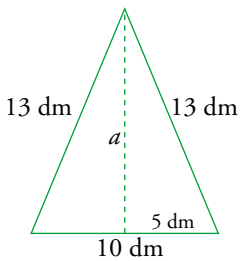


$a = \sqrt{2^2 - 1^2} = 1{,}73 \text{ cm}$

• *Área de la base* $= \dfrac{(2 \cdot 6) \cdot 1{,}73}{2} = 10{,}38 \text{ cm}^2$

• *Área total* $= 6 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 10{,}38 = 68{,}76 \text{ cm}^2$

22 ▲△△ **Halla el área total de una pirámide cuadrangular regular cuyas aristas miden: 10 dm las de la base y 13 dm las laterales.**



$a = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ dm

$\text{Área de cada cara} = \dfrac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ dm}^2$

$A_{lat} = 4 \cdot 60 = 240 \text{ dm}^2$

$A_{total} = 240 + 10^2 = 340 \text{ dm}^2$

23 ▲△△ **¿Cuál es la superficie lateral de un prisma recto en el que tanto el perímetro de la base como la altura es de 12 cm?**

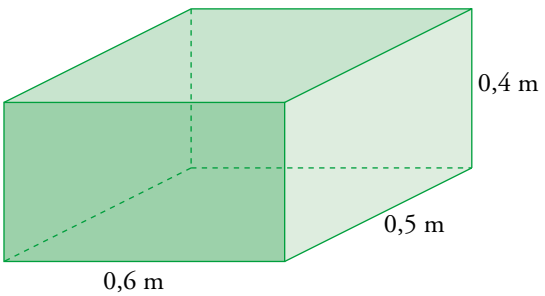
$A_{lat} = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$

24 ▲△△ **¿Cuál es el precio de un cajón de embalaje de medidas 0,6 m × 0,5 m × 0,4 m si la madera cuesta a razón de 18 €/m²?**

$A = 2(0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}4) = 2(0{,}3 + 0{,}24 + 0{,}2) = 1{,}48 \text{ m}^2$

$\text{Precio} = 1{,}48 \cdot 18 = 26{,}64$ €

25 ▲△△ **¿Cuál es la suma de las longitudes de todas las aristas del cajón descrito en el ejercicio anterior (0,6 m × 0,5 m × 0,4 m)?**



$L = 4 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}4 = 4(0{,}6 + 0{,}5 + 0{,}4) = 4(1{,}5) = 6$ m

26 ▲▲△ **Deseamos construir con alambres el esqueleto de todos los poliedros regulares, de modo que cada una de las aristas midan 1 dm. ¿Qué cantidad de alambre utilizaremos en cada uno de ellos?**

	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
Nº DE ARISTAS	6	12	12	30	30
LONGITUD TOTAL	6 dm	12 dm	12 dm	30 dm	30 dm

27 ▲△△ **Una pirámide regular tiene por base un pentágono regular de 2,5 m. La apotema de la pirámide mide 4,2 m. ¿Cuál es su superficie lateral?**

$$A_{lat} = 5 \cdot \frac{2{,}5 \cdot 4{,}2}{2} = 26{,}25 \text{ m}^2$$

28 ▲▲△ **Una caja en forma de ortoedro tiene 9 dm de larga y 6 dm de ancha. Su superficie total es 228 dm^2. Halla su altura y su diagonal.**

- Cálculo de la altura:

$A = 2(9 \cdot 6 + 9 \cdot h + 6 \cdot h) = 228 \text{ dm}^2$

$108 + 30h = 228 \rightarrow 30h = 120 \rightarrow h = 4 \text{ dm}$

La altura de la caja es de 4 dm.

- Cálculo de la diagonal:

$d = \sqrt{4^2 + 6^2 + 9^2} = \sqrt{133} = 11{,}53 \text{ dm}$

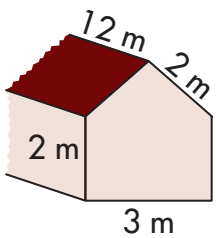
29 ▲▲△ **El área total de un cubo es 150 dm^2. Halla su diagonal.**

$A = 6a^2 = 150 \rightarrow a^2 = 25$

$d = \sqrt{3a^2} = \sqrt{75} = 8{,}66 \text{ dm}$

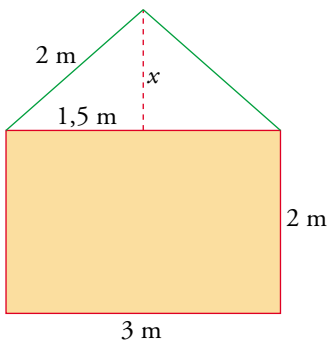
30 ▲▲△ **Averigua cuánto cuesta la reparación de esta casa sabiendo que hay que:**

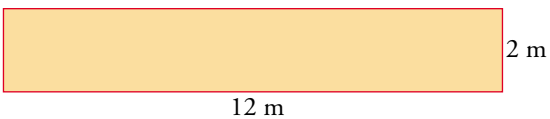
- **Encalar las cuatro paredes, por dentro y por fuera, a 2 €/m^2.**
- **Reparar el tejado, a 4,5 €/m^2.**
- **Poner el suelo, a 22 €/m^2.**



- Área de las paredes: $x = \sqrt{2^2 - 1{,}5^2} = 1{,}32 \text{ m}$

Área de cada fachada: $\frac{3 \cdot 1{,}32}{2} + 2 \cdot 3 = 7{,}98 \text{ m}^2$





Área de cada pared lateral: $12 \cdot 2 = 24 \text{ m}^2$

Área de todas las paredes: $2 \cdot 7{,}98 + 2 \cdot 24 = 63{,}96 \text{ m}^2$

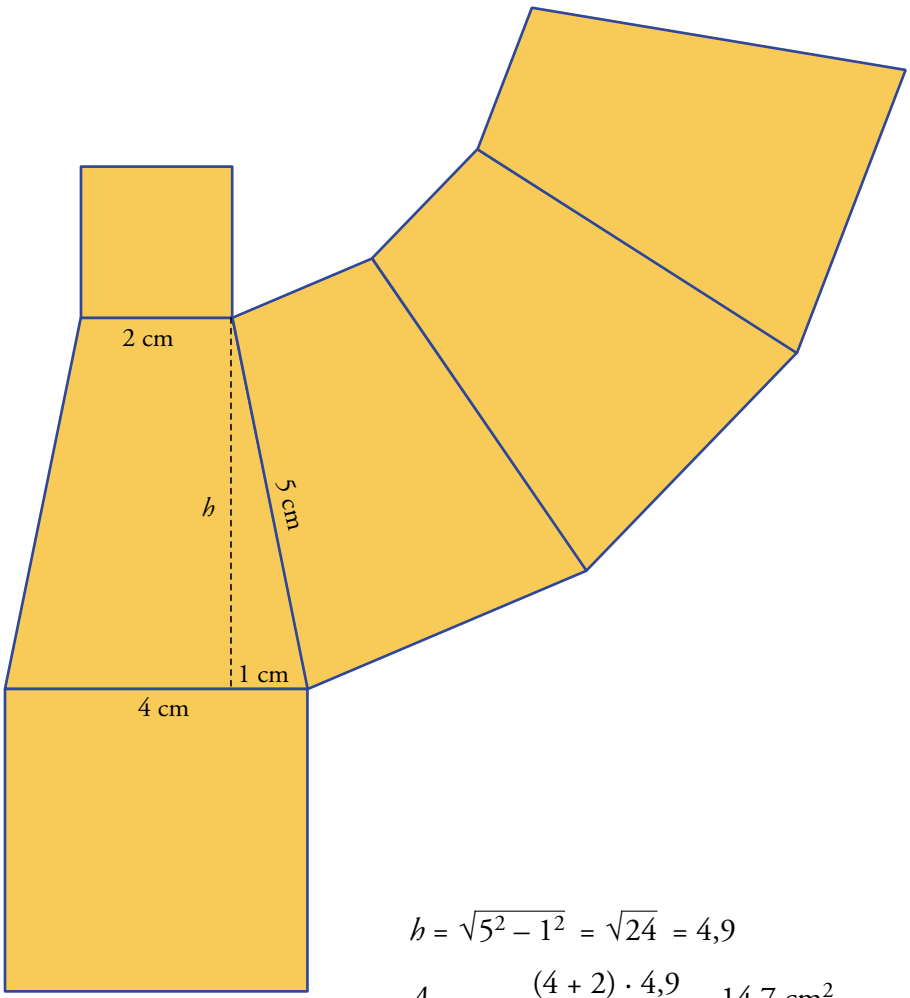
- Precio por encalar las cuatro paredes por dentro y por fuera:

$$(2 \cdot 63{,}96) \cdot 2 = 255{,}84 \text{ €}$$

- Área del tejado: $A = 2(2 \cdot 12) = 48 \text{ m}^2$
- Precio por repasar el tejado: $48 \cdot 4{,}5 = 216$ €
- Área del suelo: $A = 3 \cdot 12 = 36 \text{ m}^2$
- Precio por poner el suelo: $36 \cdot 22 = 792$ €
- Total coste de la reparación: $255{,}84 + 216 + 792 = 1\,263{,}84$ €

31 ▲▲△ **Dibuja el desarrollo de un tronco de pirámide cuadrada, regular, cuyas aristas midan: las de la base mayor 4 cm, las de la base menor, 2 cm, y las laterales, 5 cm.**

Halla su área total. (Las caras laterales son trapecios. Comprueba que su altura es 4,9 cm).



$$h = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24} = 4{,}9$$

$$A_{trapecio} = \frac{(4 + 2) \cdot 4{,}9}{2} = 14{,}7 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = 4(14{,}7) + 4^2 + 2^2 = 58{,}8 + 16 + 4 = 78{,}8 \text{ cm}^2$$

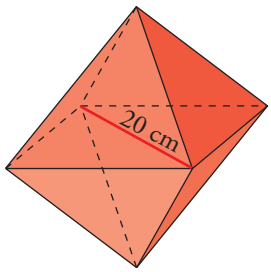
32 ▲△△ **¿Hay algún poliedro regular que sea prisma? ¿Hay algún poliedro regular que sea pirámide?**

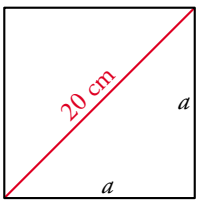
El hexaedro o cubo es un prisma y es un poliedro regular.

El tetraedro es un poliedro regular y es una pirámide triangular regular.

33 ▲△△ **Halla el área total de un octaedro en el que la distancia entre los vértices no contiguos es de 20 cm.**

▶ *Observa que la arista del octaedro es el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 20 cm.*





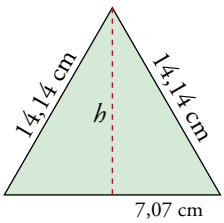
$20^2 = a^2 + a^2 \rightarrow 400 = 2a^2 \rightarrow$

$\rightarrow a^2 = 200 \rightarrow a = 14{,}14$ cm

El octaedro está formado por 8 triángulos equiláteros de lado 14,14 cm.

- Cálculo de la altura de un triángulo:

$h = \sqrt{14{,}14^2 - 7{,}07^2} = 12{,}2$ cm



- Área del octaedro:

$A = 8\left(\dfrac{14{,}14 \cdot 12{,}2}{2}\right) = 690{,}032$ cm^2

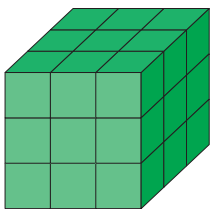
PÁGINA 203

Problemas de estrategia

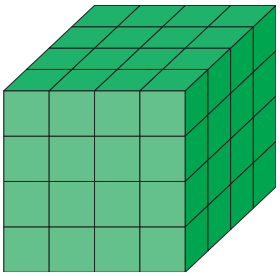
34 **Apilamos 27 cubitos de 1 cm^3 formando un cubo de $3 \times 3 \times 3$. Pintamos de rojo las seis caras de este cubo grande.**

A continuación lo descomponemos de nuevo en los 27 cubitos. ¿Cuántos de estos no tienen ninguna cara pintada? ¿Y una cara pintada? ¿Y dos? ¿Y tres? ¿Hay alguno con más de tres caras pintadas?

Si seguimos el mismo proceso con 64 cubitos di, el número de cubitos que tienen 0, 1, 2, 3, … caras pintadas.



• Con 27 cubitos:



Solo queda un cubito con ninguna cara pintada.

Los cubitos que están en los vértices del cubo grande, tienen tres caras pintadas.

Los cubitos que están en las aristas del cubo grande (excepto los que están en los vértices), tienen dos caras pintadas (uno por cada arista).

El resto de los cubitos, excepto el que está en el interior y no se ve, tiene una cara pintada (uno por cada cara).

Por tanto:

Cubitos con ninguna cara pintada $\rightarrow$ 1

Cubitos con 1 cara pintada $\rightarrow$ 6

Cubitos con 2 caras pintadas $\rightarrow$ 12

Cubitos con 3 caras pintadas $\rightarrow$ 8

• Con 64 cubitos:

En el interior queda un cubo de $2 \times 2 \times 2$ cubitos sin ninguna cara pintada.

Por tanto:

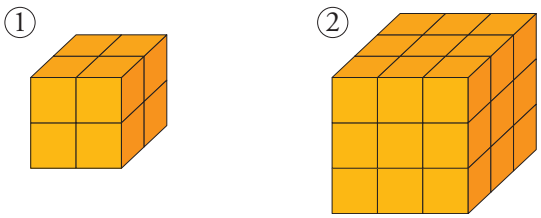
Cubitos con ninguna cara pintada $\rightarrow$ 8

Cubitos con 1 cara pintada (4 por cada cara) $\rightarrow$ 24

Cubitos con 2 caras pintadas (2 por cada arista) $\rightarrow$ 24

Cubitos con 3 caras pintadas (1 por cada vértice) $\rightarrow$ 8

35



a) De los 8 cubitos que están apilados en 1 , ¿cuántos no se ven desde esta postura?

b) ¿Cuántos no se ven en 2 ?

c) ¿Cuántos no se ven en un cubo formado por $4 \times 4 \times 4$ situado de la misma forma?

d) ¿Cuántos no se ven en un gran cubo de $10 \times 10 \times 10$ mirado desde una esquina?

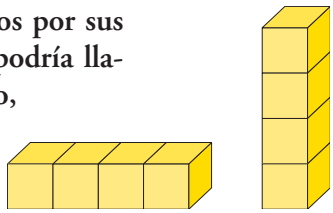
a) Solo un cubito no se ve.

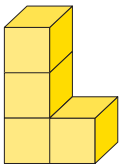
b) Se ven 19. No se ven 8.

c) No se ven 27 cubitos.

d) No se ven $9 \times 9 \times 9 = 729$ cubitos.

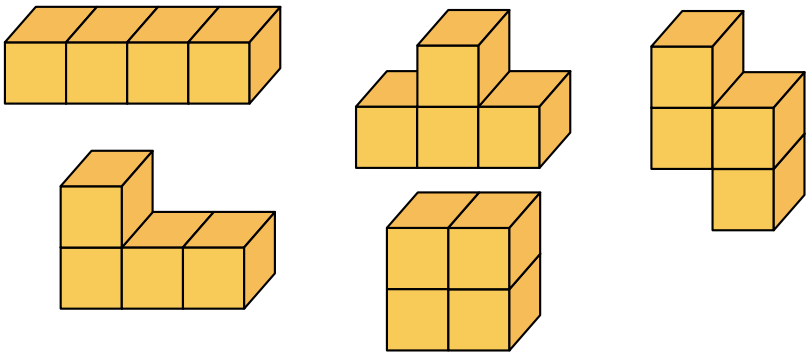
36 **Una configuración formada por varios cubos unidos por sus caras se llama policubo. Un policubo de 4 cubos podría llamarse tetracubo. Estos dos tetracubos, por ejemplo, son el mismo.**





Este tetracubo es diferente.

¿Cuántos tetracubos distintos hay?



37 **a) En un cubo, en un tetraedro y en un octaedro es fácil contar el número de aristas y el número de vértices. Hazlo.**

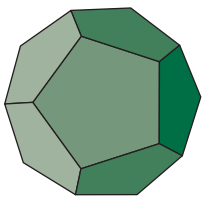
APLICA ESTA ESTRATEGIA

Para contar el número de aristas de un dodecaedro razonamos así:

- Cada cara tiene 5 aristas y hay 12 caras.

$$5 \times 12 = 60$$

- Pero cada dos caras tienen una arista común. Por tanto, el número de aristas es $60 : 2 = 30$.



Para contar el número de vértices del dodecaedro razonamos así:

- Cada cara tiene 5 vértices, $5 \times 12 = 60$.
- Pero cada tres caras comparten un mismo vértice, $60 : 3 = 20$.

  El número de vértices es 20.

b) Calcula cuántas aristas y cuántos vértices tiene el icosaedro.

c) Completa la siguiente tabla:

CARAS	**4**	**6**	**8**	**12**	**20**
ARISTAS					
VÉRTICES					

Comprueba que en los cinco poliedros regulares se cumple la relación:

CARAS + VÉRTICES – ARISATAS = 2 (*)

d) Cuenta el número de CARAS, de ARISTAS y de VÉRTICES que tienen una pirámide cuadrangular y un prisma pentagonal.

Comprueba que también se cumple para ellos la fórmula (*). Realmente esa fórmula se cumple para cualquier poliedro.

b) • Número de aristas:

Cada cara tiene 3 aristas y hay 20 caras $\rightarrow$ $3 \cdot 20 = 60$

Pero cada dos caras tienen una arista común. Por tanto, el número de aristas es:

$$60 : 2 = 30$$

• Número de vértices:

Cada cara tiene 3 vértices $\rightarrow$ $3 \cdot 20 = 60$

Pero cada 5 caras comparten un mismo vértice: $60 : 5 = 12$

El número de vértices es 12.

c)

CARAS	4	6	8	12	20
ARISTAS	6	12	12	30	30
VÉRTICES	4	8	6	20	12
$C + V = A$	2	2	2	2	2

$C + V = A + 2$

d) • Pirámide cuadrangular:

5 caras, 5 vértices y 8 aristas $\rightarrow$ $C + V = A + 2$

• Prisma pentagonal:

7 caras, 10 vértices y 15 aristas $\rightarrow$ $C + V = A + 2$