¿Recuerdas qué es...?

Expresión algebraica

Es una combinación de números y letras relacionados mediante operaciones aritméticas.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma

Si a, b y c son tres números cualesquiera, se cumple que:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Multiplicación de potencias

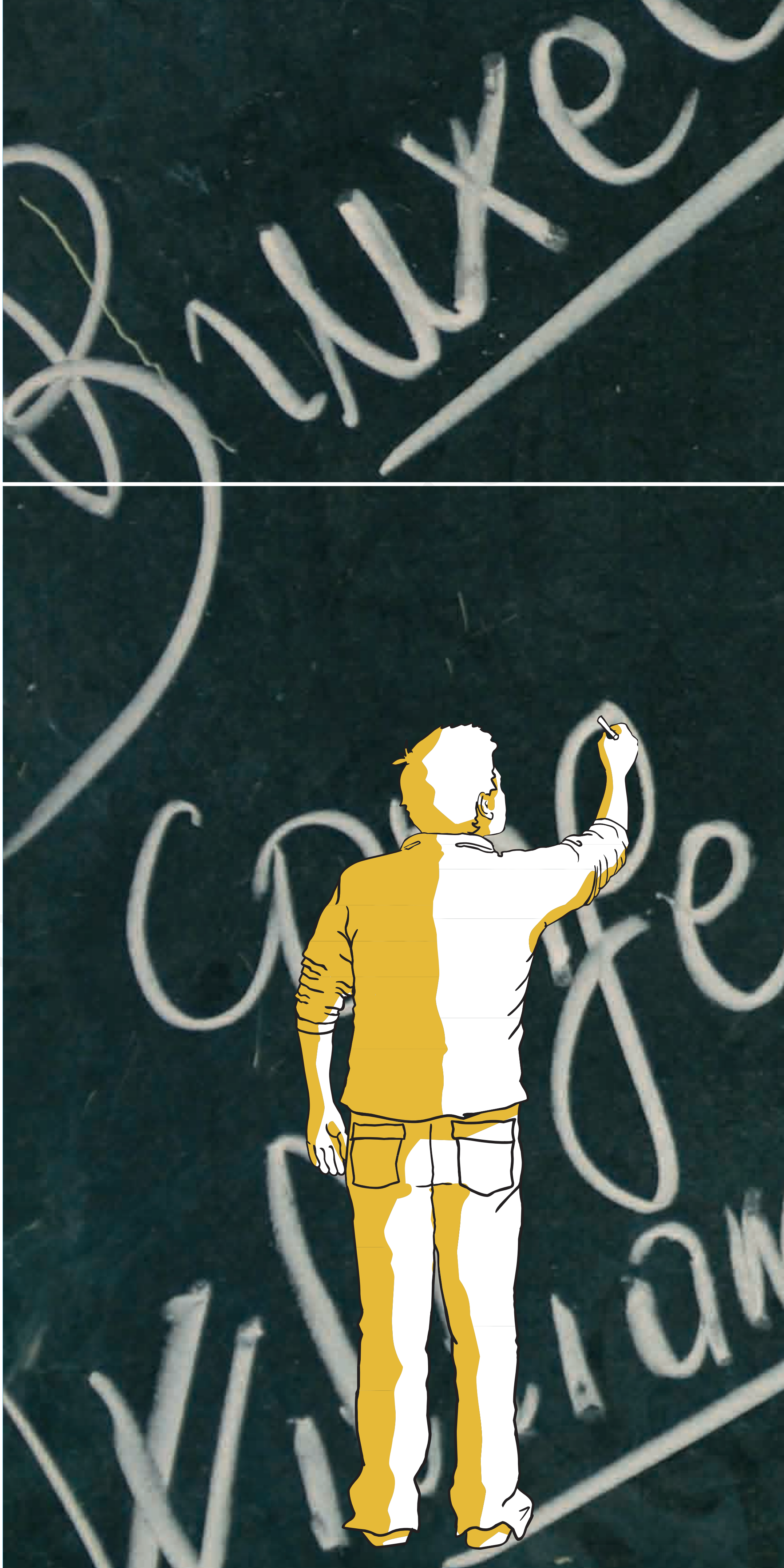
El resultado de multiplicar potencias de igual base es una potencia cuya base es la misma y el exponente es la suma de los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

División de potencias

El resultado de dividir potencias de igual base es una potencia cuya base es la misma y el exponente es la diferencia de los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$



5

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

El Álgebra es la rama de las Matemáticas en la que se usan letras para representar relaciones aritméticas. Al igual que en la Aritmética, las operaciones fundamentales del Álgebra son la adición, la sustracción, la multiplicación y la división.

La Aritmética, sin embargo, no es capaz de generalizar las relaciones matemáticas, como el teorema de Pitágoras, que dice que en un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. La Aritmética sólo da casos particulares de esta relación, por ejemplo, 3, 4 y 5, ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$. El Álgebra, por el contrario, puede dar una generalización del tipo: $a^2 + b^2 = c^2$.

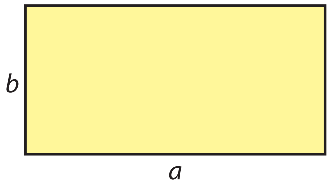
El Álgebra se considera el idioma de las Matemáticas, y por ello ha ido evolucionando a lo largo del tiempo gracias al estudio de muchos matemáticos.

Los objetivos de esta Unidad son:

- **Expresar algebraicamente enunciados verbales simples.**
- **Dominar la jerarquía de operaciones aritméticas y aplicarla en operaciones con expresiones algebraicas.**

1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS. EL LENGUAJE ALGEBRAICO

El *Álgebra* es la rama de las Matemáticas que se basa en el empleo de números y letras para representar relaciones aritméticas. Por ejemplo, para expresar el área de un rectángulo de lados a y b se tiene:



Área = lado × lado

$\boxed{A = a \times b}$

Si $a = 6$ cm y $b = 4$ cm, el área es $6 \times 4 = 24$ cm^2.

Observa que hemos generalizado la expresión del cálculo del área de un rectángulo mediante letras. Cada letra representa un lado.

Las *expresiones algebraicas*, o lenguaje algebraico, se utilizan para expresar una situación cualquiera o para generalizar propiedades matemáticas.

Ejemplos:

a) Si consideramos que x es la capacidad en litros de un embalse, expresamos el doble de esa capacidad como $2x$ y la mitad como $\frac{x}{2}$.

b) El área de un círculo se expresa como $\pi \cdot r^2$, donde r representa el radio del círculo.

El **Álgebra** es la rama de las Matemáticas que se basa en el empleo de números y letras para representar relaciones aritméticas.
Una **expresión algebraica** es la combinación de números y letras relacionados mediante operaciones aritméticas para expresar una situación cualquiera o para generalizar propiedades matemáticas.

@ WEB

http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Interpretacion_expresiones_algebraicas_d3/indice.htm

Actividades interesantes para familiarizarse con el uso de letras como una generalización de los números, visualizando las operaciones algebraicas elementales. Además, encontraremos actividades interactivas para trabajar otros aspectos del tema: valores numéricos, identidades…

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/index.htm

Página de José Antonio Ortega con actividades interactivas muy interesantes para trabajar todos los conceptos de la Unidad.

CD

En la pestaña Actividades/Unidad 1, encontrarás la actividad Relación unidad 5, *para repasar el lenguaje algebraico.*

Ejercicios

1 Si en una librería, el precio de un libro es x euros y el de cada bolígrafo es 7 € menos, expresa algebraicamente lo que cuestan:

a) Cuatro libros.

b) Diez bolígrafos.

c) La mitad de lo que cuestan seis libros.

d) Cinco libros más tres bolígrafos.

e) Cinco libros con un descuento de 3 €.

f) Dos bolígrafos y seis libros.

g) Tres bolígrafos y dos libros.

h) Seis libros y un bolígrafo.

2 Si x es un número natural, escribe las expresiones algebraicas que representan:

a) El doble de ese número.

b) La tercera parte del mismo.

c) Su cubo.

d) Su anterior.

e) Su posterior.

f) Su triple más tres unidades.

g) La mitad de su triple.

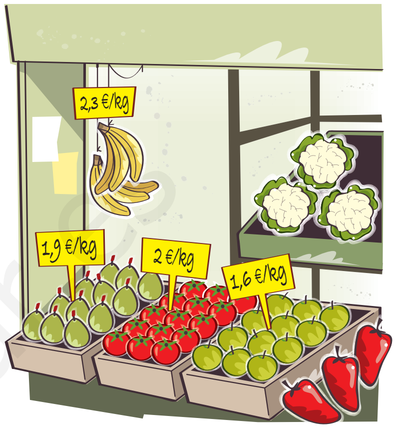
h) El cuádruple más cuatro unidades.

i) El doble de su posterior.

2 VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

La siguiente expresión algebraica describe el supuesto gasto que puedo realizar en una frutería en función del número de kilos de tomates que compre y pidiendo la entrega a domicilio:

$$2x + 1$$



Llamamos x a la cantidad de tomates que compro. La expresión algebraica asociada a esta situación es: $2x + 1$.

Al sustituir x por un número y efectuar operaciones se obtiene otro número, que se denomina *valor numérico de la expresión algebraica*. En el caso de que sean dos kilos, es decir, si $x = 2$:

$$2x + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ €. El valor numérico es } 5 \text{ €.}$$

El valor numérico de una expresión algebraica se obtiene calculando las operaciones aritméticas de dicha expresión sustituyendo las letras por números.

Fíjate bien en los siguientes ejemplos:

a) Si $x = 2$, el valor numérico de $3x^2 - 2x$ es: $3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 8$.

b) Si el lado de un cuadrado es 3 cm, su área es $A = l \cdot l = 3 \cdot 3 = 9$ cm^2.

c) Si $x = -2$, el valor numérico de $2x^2$ es: $2 \cdot (-2)^2 = 2 \cdot 4 = 8$.

Valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene cuando se sustituyen las letras de la expresión por números.

WEB @

http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/potencia/index.htm

http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Potencias_y_raices/potencias2.htm

Páginas con actividades para repasar las propiedades de las potencias, introduciéndolas con ejemplos para obtener la expresión algebraica.

http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/enteros2/opcombin.htm

Actividades para repasar la jerarquía de operaciones.

Ejercicios

3 Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores que se dan:

a) $12x + y$ si $x = 2,\ y = 3$

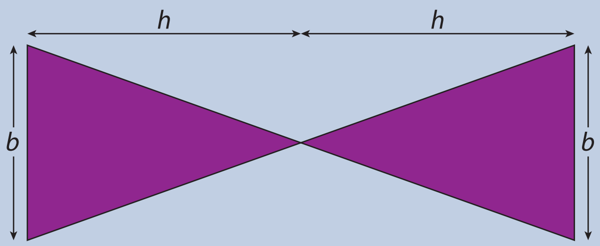
b) $\dfrac{xy}{3}$ si $x = 3,\ y = 4$

c) $(2x)^2$ si $x = 2$

d) $\dfrac{a^2 - b}{a}$ si $a = 4,\ b = 6$

e) $\dfrac{1}{3}x^2 + 2y$ si $x = 3,\ y = 2$

4 Halla la expresión algebraica que representa el área de la siguiente figura y calcula su valor numérico, sabiendo que las bases miden 5 cm y que la altura de ambos triángulos es 7 cm.



3 MONOMIOS Y POLINOMIOS

Las expresiones algebraicas que están formadas sólo por la multiplicación de números, letras o números y letras se llaman *monomios*.

Por ejemplo, $\frac{1}{2x}$ y $4\sqrt{x}$, no son monomios.

Son monomios: $3x^2$, $4x$, $7x^2y^3$.

En cada monomio hay una parte numérica que llamamos *coeficiente*, y una parte expresada con letras que se llama *parte literal*. Cada una de las letras de un monomio se denomina *variable*. La suma de los exponentes de las variables que forman la parte literal es el *grado del monomio*.

Los monomios que tienen la misma parte literal se llaman *monomios semejantes*.

Por ejemplo:

En el monomio: $-7x^2y^3$ se tiene:

— Coeficiente: -7

— Parte literal: x^2y^3

— Grado: $2 + 3 = 5$

— $-7x^2y^3$ es semejante a $-2x^2y^3$.

— $-7x^2y^3$ no es semejante a $6x^3y^2$.

Un *polinomio* es una expresión algebraica formada por sumas o restas de monomios no semejantes llamados *términos*. El *grado de un polinomio* es el mayor grado de los monomios que lo forman.

Por ejemplo, el polinomio $P(x)= 3x^2 - 2x + 5$, tiene tres términos y su grado es 2.

Un **monomio** es una expresión algebraica formada por la multiplicación de números, letras o números y letras.

El **coeficiente de un monomio** es la parte numérica del mismo.

La parte de un monomio expresada con letras se llama **parte literal.**

El **grado de un monomio** es la suma de los exponentes de la parte literal.

Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal.

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por sumas o restas de monomios no semejantes llamados términos.

El **grado de un polinomio** es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Ten en cuenta

En el monomio x^2y el coeficiente es 1, no 0.

Definición

*En un polinomio, el término que no tiene parte literal se denomina **término independiente.***

*Un polinomio formado por dos términos se llama **binomio.** Si está formado por tres términos se llama **trinomio.***

WEB

http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Polinomios/monomios.htm

Actividades interactivas para la clasificación y operaciones de monomios.

http://www.mismates.net/modules.php?name=Encyclopedia&op=list_content&eid=1

Página de Francisco Burzy que pretende llegar a ser un diccionario de las matemáticas que se ven en la Enseñanza Secundaria. El alumno puede investigar cuáles de las definiciones de este tema aparecen en este diccionario y completarlas.

Ejercicios

5 Señala cuántos términos hay en cada una de las siguientes expresiones algebraicas. En caso de ser polinomios, concreta de qué tipo son:

a) $3mn^2$ b) $3y^2 + 2xy - 1$

c) $\frac{5}{2}x + 1$ d) $4ab - 2b + a$

e) $7x^2z + z + 2$ f) $2ya$

6 Describe estas expresiones algebraicas (monomio, binomio, trinomio, etc.), e indica la parte literal, el coeficiente y el grado de cada término:

a) $9a^3b^4 + 3$ b) $4y^2z^3 - 5y$

c) $8z + y - 2y^5$ d) $\frac{3}{4}m^4$

e) $7a + 4b^2a - 2b + 1$ f) x

4 OPERACIONES CON MONOMIOS

Los monomios son las expresiones algebraicas más sencillas. Es importante conocer cómo se realizan las operaciones con ellos.

A SUMA Y RESTA DE MONOMIOS

Dos monomios sólo se pueden sumar o restar si tienen la misma parte literal, es decir, deben ser semejantes. Para obtener el resultado se suman o restan los coeficientes y se mantiene igual la parte literal.

Ejemplos:

— $7x + 2x = 9x$: «7 veces un número más 2 veces ese mismo número es 9 veces ese mismo número, es decir, $9x$».

— $10n + 3n - n = 12n$

— $5a^2 + 3a^2 - 2a^2 = 6a^2$.

— $7x + 2y$: esta suma de monomios no se puede realizar porque no tienen la misma parte literal, no son términos semejantes.

Puede darse el caso de que los coeficientes sean fracciones. La suma entre los coeficientes tendrá que realizarse como una suma de fracciones.

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x = \frac{5}{4}x$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

B MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE MONOMIOS

Para multiplicar o dividir monomios no es necesario que las partes literales sean iguales. El resultado en estos casos siempre va a ser un monomio.

La multiplicación se realiza de la siguiente manera:

1. Se multiplican entre sí los coeficientes teniendo en cuenta los signos de los mismos.
2. Para obtener la parte literal, se multiplican las partes literales de los monomios.

Ejemplo 1

a) $2x^2 \cdot 4x^3 \cdot x = 2 \cdot 4 \cdot x^{2+3+1} = 8x^6$

b) $-2a \cdot 5a^3 \cdot b = -2 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b = -10a^4b$

Regla de los signos

+ · + = +	+ : + = +
− · − = +	− : − = +
+ · − = −	+ : − = −
− · + = −	− : + = −

Reflexiona

Fíjate bien en las partes literales:

No es lo mismo $7x^3y^2$ que $7x^2y^3$:

$7x^3y^2 = 7 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$

$7x^2y^3 = 7 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$

Sí es lo mismo $x \cdot y$ que $y \cdot x$ por la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Ten en cuenta

Si dentro de una suma o resta hay algún monomio no semejante, no se operará y quedará tal y como está en el resultado.

$12y + 3y + x = 15y + x$

WEB

http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Polinomios/monomios.htm#opmon

Actividades para practicar las operaciones con monomios.

Para realizar la división, los pasos a seguir son:

1. Se dividen entre sí los coeficientes teniendo en cuenta su signo.
2. Para obtener la parte literal, se dividen las partes literales de los monomios, teniendo en cuenta cómo se realizan las operaciones con potencias.

Ejemplo 2

a) $2a^3 : 6a = \frac{2a^3}{6a} = \frac{2}{6}a^{3-1} = \frac{2}{6}a^2 = \frac{1}{3}a^2$

b) $10x^4y^3 : (-2)x^2y^3 = \frac{10}{-2}x^{4-2}y^{3-3} = -5x^2 \cdot y^0 = -5 \cdot x^2 \cdot 1 = -5x^2$

c) $\frac{4b^3}{2b} = \frac{2 \cdot 2 \cdot b \cdot b \cdot b}{2b} = 2 \cdot b \cdot b = 2b^2$

@ WEB

http://clic.xtec.net/db/act_es.jsp?id=2205

Paquete de actividades en Clic propuestas por Antonio Francisco Devesa Botella, Carmen Gutiérrez Vargas, Fernando López Juárez y Rosa Fargueta Calatayud para introducir el lenguaje algebraico y ejercitar las operaciones con monomios y polinomios.

http://www.jesuitasperu.org/almacen/archivos/arch171-Polinomios%203.htm

En la sección de recursos encontraremos interesantes enlaces relacionados con monomios y polinomios.

Dos monomios sólo se pueden **sumar** o **restar** si tienen la misma parte literal, es decir, deben ser semejantes. Para obtener el resultado se suman o restan los coeficientes y se mantiene igual la parte literal.

Para **multiplicar monomios,** se multiplican entre sí los coeficientes teniendo en cuenta los signos, y la parte literal se obtiene multiplicando las partes literales de los monomios.

Para **dividir monomios,** se dividen los coeficientes teniendo en cuenta su signo, y la parte literal se obtiene dividiendo las partes literales de los monomios.

Ejercicios

7 Halla el resultado de las siguientes operaciones con monomios:

a) $5z + 6z + z$

b) $10x^2 - 7x^2 + x^2$

c) $6yx + 4xy + yx$

d) $2n^2m + 3n^2m$

e) $\frac{3}{4}x - 2x + x$

f) $a^2 + 3a^2 + 9ab$

8 Realiza la multiplicación de los siguientes monomios:

a) $5x^2 \cdot 3x$ b) $3b^2 \cdot \frac{1}{2}b$

c) $2a^2 \cdot a \cdot 5a$ d) $4y \cdot (-4)y^2$

e) $4y \cdot 2y^2$ f) $6a^3 \cdot 2a$

9 Indica cuáles de estas igualdades son correctas y cuáles son incorrectas. Razona tu respuesta:

a) $3a + a = 4a^2$

b) $5x + x + x = 7x$

c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 = x^2$

d) $2n^2 + 3n^2 - 5n^2 = 0$

e) $3zy + 5zy = 8yz$

f) $5x^2 + 2x = 7x^3$

10 Realiza la división de los siguientes monomios:

a) $\frac{24a^4}{6a^2}$ b) $\frac{4ab}{2b}$

c) $\frac{12m^2}{15m}$ d) $\frac{-9x^2y^2}{3x}$

e) $\frac{12y^5}{6y^2}$ f) $\frac{6y^8x}{3x^3y}$

5 OPERACIONES CON POLINOMIOS

Realizar las operaciones con polinomios es muy sencillo si se domina el cálculo con monomios.

A SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

Para sumar polinomios, se suman entre sí los términos semejantes.

Ejemplo 3

Si $P(x) = 3x^2 + 10x - 7$ y $Q(x) = 2x^2 - 6x + 5$

$P(x) + Q(x) = (3x^2 + 10x - 7) + (2x^2 - 6x + 5)$

$$\begin{array}{rrrr} & 3x^2 + & 10x - & 7 \\ & 2x^2 - & 6x + & 5 \\ \hline P(x) + Q(x) = & 5x^2 + & 4x - & 2 \end{array}$$

Para restar polinomios, los pasos a seguir son:

Paso 1. Se ordenan los términos del polinomio de mayor a menor en función del grado.

Paso 2. Restar es sumar el opuesto, luego se cambian los signos del polinomio sustraendo.

Paso 3. Se suman los términos semejantes de los polinomios.

Ejemplo 4

$P(x) = 6x^3 + 5x - 7x^2 + 7$ $\qquad Q(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x - 2$

$P(x) - Q(x) = (6x^3 + 5x - 7x^2 + 7) - (2x^3 - 6x^2 + 3x - 2)$

$$\begin{array}{rrrrr} & 6x^3 & - 7x^2 & + 5x & + 7 \\ & -2x^3 & + 6x^2 & - 3x & + 2 \\ \hline P(x) - Q(x) = & 4x^3 & - x^2 & + 2x & + 9 \end{array}$$

Recuerda

$3a + a$ → *No es* $3a^2$ / *Sí es* $4a$

$4ab + ab$ → *No es* $4a^2b^2$ / *Sí es* $5ab$

$6ax + x$ → *No es* $6ax^2$ / *No son monomios semejantes. No se pueden sumar.*

WEB

http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Polinomios/polinomios1.htm#suma

Actividades interactivas para las operaciones con polinomios.

http://www.ejercitando.com.ar/teormate/suma%20de%20polinomios.htm

Actividades de suma de polinomios acompañadas de sus propiedades.

Ejercicios

11 Dados los polinomios:

$A(x) = 12x^6 + 6x^4 + 3x + 2$

$B(x) = 4x^6 - 4x^4 + 2$

$C(x) = 4x^4 - 5x^3 + x - 1$

Calcula las siguientes operaciones:

a) $A(x) + B(x) + C(x)$ b) $A(x) - B(x)$

c) $B(x) + A(x)$ d) $C(x) - A(x)$

12 Haz la suma o resta de los polinomios:

a) $\left(\frac{3}{4}z^2 + 6z^2 + 5z^3 - 3z\right) + \left(\frac{1}{2}z^2 + 4z^3 + z\right)$

b) $(3n^5 - 4n^2 + 5) - (2n^5 + 6n^2 + 3)$

c) $(m^3 + 3m + 7) - (m^3 - 2m + 1)$

d) $(y^{10} + 3y^3 - y) + \left((y^5)^2 - 4y^2 + 5y + 8\right)$

5

B

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

En el ejemplo, $3a \cdot (a^2 + 3a + 1)$ hay que multiplicar el monomio «$3a$» por cada uno de los términos del polinomio. Se opera como una multiplicación normal entre monomios: se multiplican los coeficientes respetando su signo y se multiplican las partes literales:

$$3a \cdot (a^2 + 3a + 1) = 3a \cdot a^2 + 3a \cdot 3a + 3a \cdot 1 = 3a^3 + 9a^2 + 3a$$

Multiplicación de dos polinomios

Para obtener el resultado de la multiplicación de dos polinomios habrá que multiplicar cada uno de los monomios del primer polinomio por cada uno de los monomios del segundo polinomio. Posteriormente, nos fijamos si en el resultado se pueden sumar monomios semejantes para reducir lo más posible la expresión del polinomio resultante.

Recuerda

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

WEB

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0453-02/ed99-0453-02.html

En esta página, Ignacio del Pino nos proporciona una interesante calculadora para operar con polinomios.

http://www.fisicanet.com.ar/matematica/m2_polinomios.php

En esta página hay ejercicios para practicar las operaciones con polinomios.

Ejemplo 5

Si $A(x) = 3x + 4x^3 + 1$ y $B(x) = x + 2$, vamos a calcular $A(x) \cdot B(x)$

Paso 1. Se ordenan los polinomios colocando los términos de mayor a menor según el grado.

$$A(x) = 4x^3 + 3x + 1 \qquad B(x) = x + 2$$

Paso 2. Se colocan los dos polinomios uno debajo del otro. Si falta algún término en el polinomio que se sitúa arriba, se pone cero o se deja un espacio.

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 3x + 1 \\ x + 2 \end{array}$$

Paso 3. Se multiplica cada monomio del segundo factor por todos los términos del primero, colocando adecuadamente los grados para luego sumarlos. Finalmente, se suman los términos semejantes.

$$\begin{array}{rrrrr} & 4x^3 & & +3x & +1 \\ & & & x & +2 \\ \hline & 8x^3 & & +6x & +2 \\ 4x^4 & & +3x^2 & +x & \\ \hline 4x^4 & +8x^3 & +3x^2 & +7x & +2 \end{array}$$

$$A(x) \cdot B(x) = 4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 7x + 2$$

Ejercicios

13 Calcula las multiplicaciones siguientes y reduce al máximo el resultado:

a) $(-z)^2 \cdot (z^3 + z^2 - 5z)$ b) $7y \cdot (6y^2 + 3y - 3)$

c) $(-2m)^2 \cdot (3m^2 + 2m)$ d) $x^6 \cdot (2x^2 - 4x + 3)$

e) $3x \cdot \left(\frac{1}{3}x + x^2\right)$ f) $\frac{1}{3}x \cdot (9x^2 + 27)$

14 Teniendo en cuenta los polinomios:

$A(x) = 5x^5 + 3x^4 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ $B(x) = 3x^2 + x - 2$

$C(x) = 7x - 10x^2 + 10$ $D(x) = \frac{1}{5}x^2 + 2x + 2$

Calcula:

a) $A(x) \cdot B(x)$ b) $-A(x) \cdot C(x)$ c) $C(x) \cdot B(x)$

d) $B(x) \cdot C(x)$ e) $A(x) \cdot C(x)$ f) $D(x) \cdot C(x)$

g) $D(x) \cdot B(x)$ h) $-D(x) \cdot B(x)$ i) $A(x) \cdot \big(-D(x)\big)$

6

IDENTIDADES NOTABLES

Existen multiplicaciones entre binomios que se pueden expresar de forma sencilla sin necesidad de operar por el procedimiento habitual. Estas multiplicaciones se denominan *identidades notables*.

A CUADRADO DE LA SUMA DE DOS MONOMIOS

El cuadrado de una suma $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$ es la multiplicación de dos binomios, y su resultado es $a^2 + 2ab + b^2$. Lo vamos a comprobar haciendo la multiplicación entre dichos polinomios tal y como hemos aprendido:

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Por ejemplo:

$$\mathbf{(2x+3)^2} = (2x+3) \cdot (2x+3) = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = \mathbf{4x^2 + 12x + 9}$$

B CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS MONOMIOS

En el caso de una diferencia ocurre lo mismo, pero el resultado en este caso es: $(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - ab - ba + b^2$, y agrupando términos semejantes tenemos el resultado.

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Por ejemplo:

$$\mathbf{(7-5x)^2} = (7-5x) \cdot (7-5x) = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot (-5x) + (-5x)^2 = \mathbf{49 - 70x + 25x^2}$$

C PRODUCTO DE UNA SUMA DE DOS MONOMIOS POR SU DIFERENCIA

En este caso, el producto sería $(a+b) \cdot (a-b)$, y el resultado es $a^2 - b^2$. Lo comprobamos realizando la multiplicación:

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - a \cdot b + b \cdot a - b^2 = a^2 - b^2$$

$$\boxed{(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2}$$

Por ejemplo:

$$\mathbf{(6x+2) \cdot (6x-2)} = (6x)^2 - 2^2 = \mathbf{36x^2 - 4}$$

WEB @

http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/encontexto/productos_notables_contexto.htm

Interesantes comentarios históricos y geométricos sobre las identidades notables.

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/pnotable.htm

Interesantes explicaciones interactivas de las identidades notables.

Recuerda

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline ab+b^2 \\ a^2+\ ab\quad \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Recuerda

$$\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline -ab+b^2 \\ a^2-\ ab\quad \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

Recuerda

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline -ab-b^2 \\ a^2+\ ab\quad \\ \hline a^2\qquad -b^2 \end{array}$$

Ejercicios

15 Calcula las siguientes identidades notables:

a) $(x+2)^2$

b) $(2x-3)^2$

c) $(3x^2-4x)^2$

d) $(x+2) \cdot (x-2)$

e) $\left(\frac{2}{3}x-3\right)^2$

f) $(2x-5) \cdot (2x+5)$

16 Indica si las siguientes igualdades son ciertas:

a) $(5x+8)^2 = 5x^2 + 8^2$

b) $\left(\frac{1}{2}y+2z\right) \cdot \left(\frac{1}{2}y+2z\right) = \frac{1}{4}y^2 - 4z^2$

c) $(3m-m^2)^2 = 9m^2 - 6m^3 + m^4$

5 EJERCICIOS RESUELTOS

$+ \cdot + = +$
$- \cdot - = +$
$+ \cdot - = -$
$- \cdot + = -$

1 Realiza la siguiente operación: $(-2)x^2 \cdot (x - 2 + 3x^2)$

$$\underbrace{(-2)x^2}_{A(x)} \cdot \underbrace{(x - 2 + 3x^2)}_{B(x)}$$

El signo negativo pertenece al coeficiente del monomio. No se debe confundir con una resta.

1) Se ordena el polinomio colocando los términos de mayor a menor según el grado.

$$A(x) = -2x^2 \qquad B(x) = 3x^2 + x - 2$$

2) Se colocan los dos factores uno debajo del otro. Si algún grado no existe se deja un espacio.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + x - 2 \\ -2x^2 \end{array}$$

3) Se multiplica el monomio por todos los términos del polinomio colocando adecuadamente los grados.

$$\begin{array}{rr} & 3x^2 + x - 2 \\ & -\ 2x^2 \\ \hline A(x) \cdot B(x) = & -6x^4 - 2x^3 + 4x^2 \end{array}$$

2 Resuelve esta operación entre polinomios:

$$\mathbf{\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{2}{5}x^2 + 3x + 2\right)}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}x}_{A(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{5}x^2 + 3x + 2\right)}_{B(x)}$$

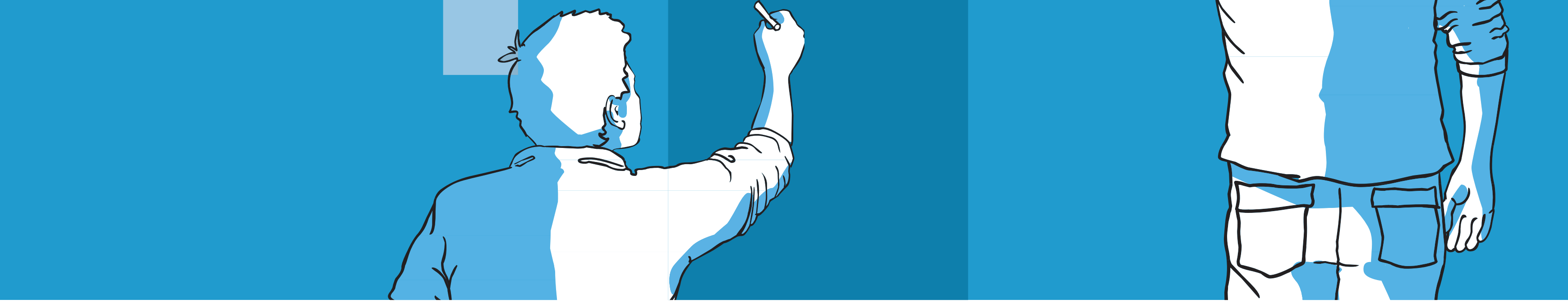
Recuerda que para la multiplicación de fracciones, no es necesario buscar el denominador común.

1) Se ordena el polinomio colocando los términos de mayor a menor según el grado.

$$A(x) = \frac{1}{2}x \qquad B(x) = \frac{2}{5}x^2 + 3x + 2$$

2) Se colocan los dos factores uno debajo de otro. Si algún grado no existe se deja un espacio.

$$\begin{array}{r} \frac{2}{5}x^2 + 3x + 2 \\ \frac{1}{2}x \end{array}$$



3) Se multiplica el monomio por todos los términos del polinomio, colocando adecuadamente los grados.

$$\begin{array}{rr}
 & \frac{2}{5}x^2 + 3x + 2 \\
 & \frac{1}{2}x \\
\hline
A(x) \cdot B(x) = & \frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x
\end{array}$$

3 Realiza la siguiente operación entre polinomios:

$$\underbrace{\left(6x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x\right)}_{A(x)} \cdot \underbrace{(x^3 - 2x + 7)}_{B(x)}$$

1) Se ordenan los polinomios colocando los términos de mayor a menor según el grado.

$$A(x) = 6x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x \qquad B(x) = x^3 - 2x + 7$$

2) Se colocan los dos polinomios uno debajo de otro. Si falta algún grado del polinomio que se coloca arriba, se pone cero o se deja un espacio en blanco.

$$\begin{array}{r}
6x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x \\
x^3 - 2x + 7
\end{array}$$

3) Se multiplica cada término del segundo factor por todos los términos del primer factor, colocando adecuadamente los grados. Se realiza después la suma de los términos semejantes.

$$\begin{array}{r}
6x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x \\
x^3 - 2x + 7 \\
\hline
42x^3 + 21x^2 + \frac{7}{2}x \\
-12x^4 - 6x^3 - x^2 \qquad \\
6x^6 + 3x^5 + \frac{1}{2}x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
6x^6 + 3x^5 - \frac{23}{2}x^4 + 36x^3 + 20x^2 + \frac{7}{2}x
\end{array}$$

$$A(x) \cdot B(x) = 6x^6 + 3x^5 - \frac{23}{2}x^4 + 36x^3 + 20x^2 + \frac{7}{2}x$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Expresiones algebraicas. El lenguaje algebraico

1 La variable x representa un número natural. Expresa en función de él:

a) Su cuádruple.

b) El doble de su posterior.

c) La mitad de su anterior más cuatro unidades.

2 Expresa algebraicamente los siguientes enunciados:

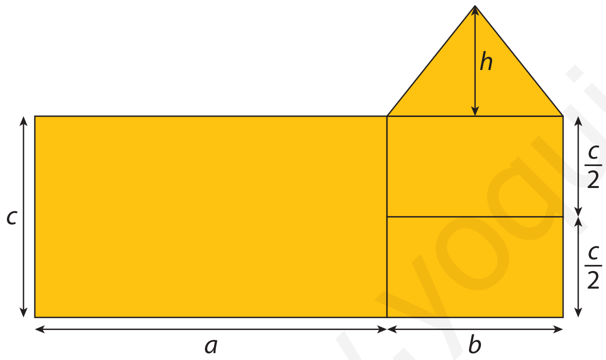
a) Las dos terceras partes del cuadrado de un número.

b) El cuadrado del doble de un número.

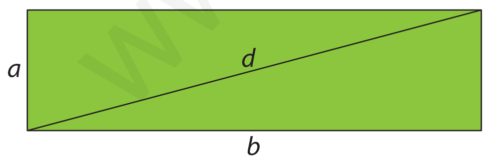
c) El triple de un número más tres.

d) El triple de un número, más tres.

3 Expresa algebraicamente el área del dibujo:



4 Expresa algebraicamente el valor de la siguiente diagonal:



Valor numérico de una expresión algebraica

5 Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x^2 + 2x$; si $x = 2$

b) $x^2 + 2x + mx$; si $x = 1$, $m = -1$

c) $2m + mx$; si $x = 2$, $m = \frac{1}{2}$

d) $xy - x^3$; si $x = 4$, $y = 3$

6 Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla indicando el valor numérico de cada expresión:

	$x = -1$	$x = 0$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
$x^3 - x$				
$6x - \frac{x^2}{2}$				
$x \cdot (10 - 6x)$				
$2 \cdot (x - 1) - 3$				

7 La velocidad de un cuerpo en movimiento viene definida por la siguiente expresión: $v = \frac{e}{t}$, donde v es el valor de dicha velocidad, e el espacio recorrido y t el tiempo que ha estado en movimiento. Si un cuerpo ha recorrido 500 metros en 30 segundos, ¿cuál es su velocidad?

8 Escribe las siguientes expresiones algebraicas de manera que queden ordenadas de menor a mayor en función de su valor numérico en $x = -3$.

a) $x^2 + 2x - x$

b) $3x^2 + 10x$

c) $x^3 + 2x - 7$

9 Halla el valor numérico en cada caso:

a) $m^2 + nx - m + 7$; si $m = 4$, $n = -1$, $x = 2$

b) $2xy - x + y^2 + 2y$; si $x = 3$, $y = 5$

c) $7m - \frac{1}{2}x^2 - 12$; si $m = 2$, $x = 2$

d) $8y^3 - 7y^2 + y - 2$; si $y = -2$

e) $x^2 + 2xy + y^2$; si $x = 3$, $y = -2$

Monomios y polinomios

10 Explica con tus propias palabras el significado de los términos:

a) Monomio.

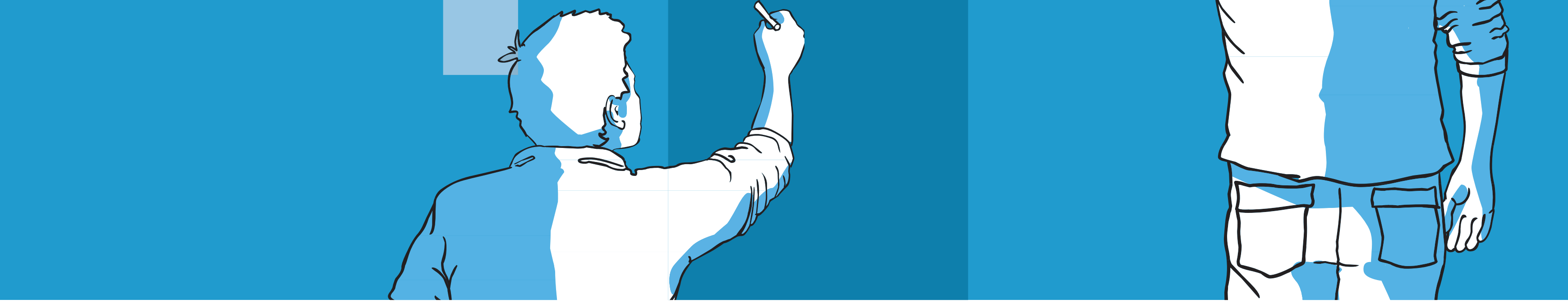
b) Polinomio.

c) Término.

d) Coeficiente.

e) Binomio.

f) Factor.



11 Clasifica las siguientes expresiones algebraicas, e indica el coeficiente y la parte literal de cada uno de los monomios. ¿Cuántos términos tiene cada uno?

a) $12x^2y + 15y - 2$

b) $-2nm^3 + \frac{1}{2}x$

c) $x^2 + x - 2$

d) $\frac{3}{5}x^2yz$

e) $\frac{-x^2y}{2} + 1$

f) $\frac{3}{5}ym^5 - x$

12 Clasifica las siguientes expresiones y di cuál es el coeficiente y cuál es la parte literal de cada monomio.

a) $-\frac{x^2yz}{2}$

b) $(2xy)^2 + x + \frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}xy + 5$

d) $mnx + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{5}$

13 Describe los siguientes polinomios, indicando el número de términos que lo componen y cuáles son los coeficientes y las partes literales de cada uno.

a) $A(x) = 64x^3 + 24x^2$

b) $B(x) = 6x + 3x - 5x - 4$

c) $C(x) = 8x - 28x^3 + 6x^3 - 49x^5 - 20$

d) $D(x) = 6x + 3x - 6x - 4$

14 ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Razónalas.

a) La parte literal del término independiente es x.

b) El coeficiente del monomio xy^2 es cero.

c) Todos los binomios están compuestos por dos monomios.

d) Dos términos de un polinomio son semejantes si tienen la misma parte literal.

Operaciones con monomios

15 ¿Qué condiciones deben cumplir dos monomios para que se puedan sumar o restar? ¿Ocurre lo mismo en el caso de multiplicar o dividir monomios?

16 Reduce al máximo las siguientes expresiones:

a) $x^2 + 3x + 5x^2 - x + 2$

b) $2x^5 - x^2 + 7x^2 - x^5 - 1$

c) $2x^3 - x^3 + 2$

d) $x^2 - 7x^2 + 30$

17 Calcula:

a) $6x^2 + 3x^2$

b) $5y^2 + y^2$

c) $m^3 + 10m^3 + 3m^3$

d) $-9x^6 + 3x^6 - x^6$

18 Opera los siguientes monomios:

a) $(7x) \cdot y$

b) $(2x^5) \cdot x^2$

c) $(-2x^2) \cdot x$

d) $\left(\frac{3y}{4}\right) \cdot y^2$

19 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{(2z)^3}{\frac{1}{2}z} + 3z^2$

b) $\frac{-\frac{3}{4}xy}{\frac{1}{4}xy} + \frac{1}{4}xy$

c) $2z \cdot z^2$

d) $\frac{-2m^3}{3} \cdot \frac{(3m)^2}{m^2}$

e) $3m \cdot m^3 - m^4$

20 Opera:

a) $\frac{7xy + 2xy}{2xy}$

b) $2x \cdot (5x + x^2) - x^3 + 5x^2$

c) $\left(\frac{7}{2}xy\right) \cdot (2xy)$

d) $4x^3 + 5x^3$

e) $-6m^2 + m^2$

21 ¿Son ciertas las siguientes igualdades?

a) $\left(-\frac{1}{2}xy\right) \cdot (2x^2y) = -x^3y$

b) $\frac{-\frac{1}{4}m^2}{\frac{1}{4}m^2} = 1$

c) $\frac{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}{xyz} = x^3y^3z^3$

d) $6x + 2x^2 - 6x \cdot 2x^2 = 0$

EJERCICIOS PROPUESTOS

22 Copia en tu cuaderno y une las columnas:

$\frac{1}{2}xy^2$	No es un monomio.
-5	Aunque tiene igual variable no se puede sumar con $3m$.
$8ab + b$	La parte literal de este monomio no existe.
$4m^2$	El coeficiente de este monomio es un número fraccionario.

23 Contesta si es verdadero o falso:

a) Un monomio con coeficiente negativo no se puede multiplicar por otro.

b) El resultado de la multiplicación entre dos monomios es siempre otro monomio.

c) Para sumar dos monomios, los coeficientes han de ser iguales.

d) A la hora de dividir polinomios, primero se dividen los coeficientes y después la parte literal.

e) Para multiplicar monomios, las partes literales han de ser semejantes.

24 Calcula mentalmente:

a) $7mx^2 + x^2m - 5x^2m$

b) $6y + 4y - 10y$

c) $4x^2 + x^2 + 5x^2$

d) $2 \cdot (4xm + 5xm)$

Operaciones con polinomios

25 Haz la suma o resta de los siguientes polinomios:

a) $(2x + 3x^2 + 2) + (4x^2 + 2x + 1)$

b) $(5m^2 + 3m + m^3) + (2m^2 + 2m - m^3)$

c) $(3x^2 + 2x^4 + 3x) - (-x^2 + x^4 + 2x)$

d) $(2x^3 - 2) - (3x^3 - 2x + 2)$

26 Opera:

a) $10x \cdot (6x^2 + 3x)$

b) $6x^2 \cdot (x^2 + x^4 + 3x^4)$

c) $3x^2 \cdot (2x + 3x^2 - x)$

d) $5x \cdot (3x^2 -1)$

27 Realiza la multiplicación de los siguientes polinomios:

a) $(3x + 2x^2 + 7) \cdot (4x - 2x^2 + 3)$

b) $(2x^3 + x) \cdot (5x^2 - 2x + 3)$

c) $(-3x^2 + 2) \cdot (5x^2 + x^3 + 2)$

d) $(2x - 2) \cdot (3x + 3)$

e) $(3x^4 - 2x + 5) \cdot (x^2 - x)$

28 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left[\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - 2x^3 - x\right] + (x^4 + 3x^3 + 2x)$

b) $\left(\frac{x^3}{2} + x^2 + \frac{3}{5}\right) - \left(-x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}\right)$

c) $2(x + y) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3$

d) $\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}x^2 + 2$

e) $\frac{1}{4}y^5 - \frac{2}{4}y^5 + y^2 + 3\,y^4 + \frac{3}{4}y^5 - y^5$

29 Opera:

a) $\frac{3}{8}m(m + n^2) + mn^2$

b) $\left(-4x^2 + \frac{1}{3}xy - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - xy + 2\right)$

c) $[4(x + y) - 3x - y] \cdot (2x + y)$

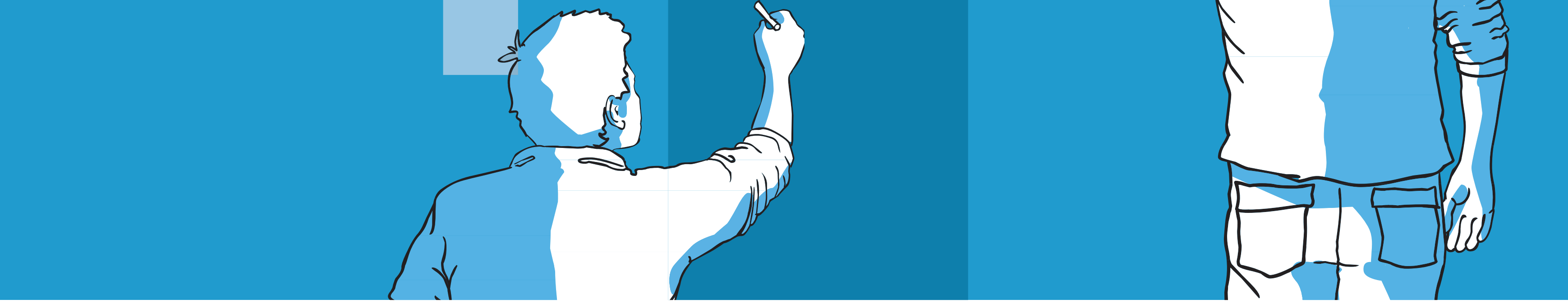
d) $[3(a \cdot b)^2 + 2] \cdot (x - 2y)$

30 Opera y reduce al máximo las siguientes expresiones:

a) $5x \cdot (x + 2) - x^2$

b) $x^2 \cdot (x + 1) + x^2$

c) $xy + 3y \cdot (x + y)$



31 Realiza las siguientes operaciones entre polinomios:

a) $\left(y^3 - \frac{1}{3}y\right) \cdot \left(y^2 + \frac{1}{2}y\right)$

b) $2 \cdot (6 - a) + 4a - 6 + a - 4 - 6a - 4$

c) $12x \cdot \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - 6x \cdot (-2x)^2 + 2x^2$

d) $\frac{3}{4}x \cdot (-4x^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{3}{2}x \cdot (-x^2)$

32 Realiza las siguientes operaciones y reduce al máximo la expresión algebraica resultante.

a) $4 \cdot (x + b) + (-2) \cdot (x + b)$

b) $10 \cdot (2 - 4x) - 6 \cdot (4x - 2)$

c) $3(x^2 - 1) - \frac{1}{2}(x + 2) \cdot \frac{1}{2}(2x + 1)$

d) $(3x + 2)^2 + 3x^3 - 10x - 2$

33 Dados los polinomios $A(x) = x^2 + 4x + 4$ y $B(x) = 2x^2 + x - 2$, comprueba que la multiplicación de polinomios cumple la propiedad conmutativa, es decir, $A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x)$.

34 Opera:

a) $3x \cdot (4xy + 2x) - 2 \cdot \left(x^2y + \frac{1}{2}x\right)$

b) $(5x^2 + 3x + 2) \cdot (4x - 3) - x^3 + 5x^4$

c) $(3x^2y + yx^2 - y) - \left(\frac{1}{2}y + 3x^2 + 4x^4\right)$

d) $(4a^2 - b^2) \cdot (b^2 + a) - (a^3 + 2b^4) \cdot 3$

Identidades notables

35 ¿Qué son las identidades notables? Explícalo ayudándote con ejemplos.

36 Halla las siguientes identidades notables y comprueba que, operando de la forma habitual, se obtiene el mismo resultado.

a) $(3x^2 + 2)^2$

b) $(4m^2 - 2m) \cdot (5m^2 + 3m)$

c) $(5 - y^2)^2$

d) $(5x - 2)^2$

e) $(x - 4) \cdot (x + 4)$

f) $(2a - 2)^2$

37 ¿Son ciertas las siguientes igualdades?

a) $(5a^2b + 2)^2 = (5a^2b)^2 + 20a^2b + 4$

b) $\frac{(2 + x)^2}{2} = 2 + 2x + x$

c) $(xy - 3x) \cdot (xy + 3x) = x^2y^2 - 9x^2$

d) $(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) = x^4 - 1$

38 Simplifica las expresiones:

a) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

b) $\frac{(a + b) \cdot (-b + a)}{a^2 - b^2}$

c) $\frac{9x^2 - 100}{3x - 10}$

d) $\frac{25 - 2x + x^2}{(5 - x)^2}$

39 Basándote en las identidades notables factoriza las siguientes expresiones:

a) $a^2 + 2ax + x^2$

b) $4a^2 + 4a + 1$

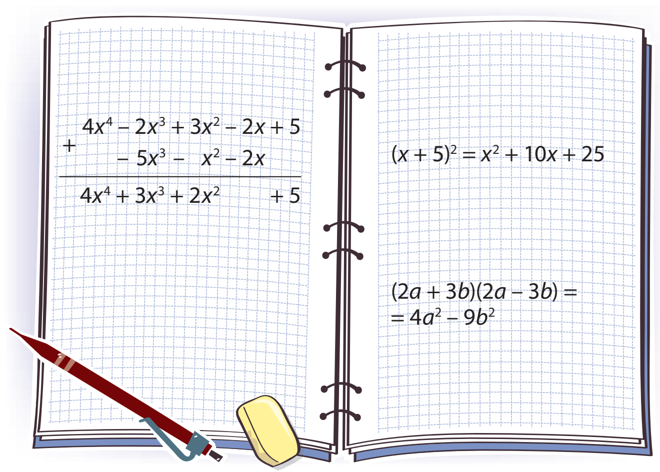
c) $81 - 4x^2$

d) $9 - 6y + y^2$

40 Opera teniendo en cuenta las identidades notables:

a) $\frac{49a^2 - 25}{8a - a + 5} + 5a$

b) $\frac{(64 - 16xy + x^2y^2) \cdot (8 - xy)}{(8 - xy)^3}$



5 PARA REPASAR EN GRUPO

Elabora con tu grupo de trabajo un esquema con los siguientes conceptos de la Unidad y pon un ejemplo de cada uno de ellos.

CONCEPTO	DEFINICIÓN
Álgebra	Rama de las Matemáticas que se basa en el empleo de símbolos y letras para representar relaciones aritméticas.
Expresiones algebraicas	Es la combinación de números y letras relacionados mediante operaciones aritméticas para expresar una situación cualquiera o para generalizar propiedades matemáticas.
Valor numérico de una expresión algebraica	Es el resultado que se obtiene cuando se sustituyen las letras de la expresión por números.
Monomio	Es una expresión algebraica formada por la multiplicación de números, letras o números y letras.
Coeficiente	Es la parte numérica de un monomio.
Parte literal	Es la parte de un monomio expresada con letras.
Grado de un monomio	Es la suma de los exponentes de la parte literal.
Polinomio	Es una expresión algebraica formada por sumas o restas de monomios no semejantes.
Operaciones con monomios	— Suma — Resta — Multiplicación — División
Identidades notables	Cuadrado de una suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
	Cuadrado de una diferencia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
	Producto de suma por diferencia: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

CD

En la pestaña Actividades/Unidad 1, encontrarás la actividad Respuesta múltiple unidad 5, *para repasar los conceptos más importantes.*

CD

En la pestaña Mapa del CD/Juegos matemáticos, encontrarás la ficha El regalo del tío Andrés, *para repasar la Unidad.*

CURIOSIDADES, JUEGOS Y DESAFÍOS

¡FÍJATE BIEN Y ACIERTA!

¿Cuál es el producto de la siguiente serie?

$$(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \ldots (x - z)$$

El resultado de la serie es «0», porque tiene el término $(x - x)$, que anula todo el producto.

APLICANDO LÓGICA CON LAS FICHAS DEL REVÉS

Las fichas del revés tienen la misma forma que las fichas del juego de damas, pero con una cara blanca y la otra negra. En una mesa hay un número «x» de fichas del revés. Solamente 10 de ellas tienen su cara blanca hacia arriba. Nos encontramos ante la mesa con los ojos vendados, y nuestro objetivo es dividir todas las fichas en dos grupos, de modo que en cada grupo haya el mismo número de fichas con el lado blanco hacia arriba. Obviamente, no se puede mirar las fichas.

¿Cómo podemos lograr el objetivo?

Simplemente hay que sacar 10 fichas y darles la vuelta. Supongamos que las 10 fichas separadas son b blancas, y $(10 - b)$ negras. Al darles la vuelta, el nuevo conjunto tendrá $(10 - b)$ blancas y b negras. En la pila originalmente había 10 blancas y $(x - 10)$ negras, por lo tanto al retirar 10 fichas, de las cuales b son blancas, quedarán $(10 - b)$ blancas.

DESAFÍO MATEMÁTICO

Poniendo valores a las variables

Debes colocar los valores en los lugares que figuran las variables para que se verifiquen los resultados horizontales y verticales.

8	×	***c***	+	***f***	**= 12**
+		+		+	
a	×	***d***	+	***g***	**= 10**
–		×		+	
b	×	***e***	×	***h***	**= 12**
= 10		**= 8**		**= 16**	