Proporcionalidad

La razón de dos números a y b es la fracción $\frac{a}{b}$. (Es su cociente, en el orden que dice.)

Ejemplo: Si en una clase hay 3 chicas por cada 2 chicos, la razón correspondiente, chicas–chicos, es $\frac{3}{2}$. La razón chicos–chicas es $\frac{2}{3}$.

Una proporción es la igualdad de dos razones. Esto es, una igualdad de la forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Esa igualdad indica que las cantidades a y c son directamente proporcionales a las cantidades b y d, respectivamente. Puede leerse así: "a es a b como c es a d".

- Si dos magnitudes son directamente proporcionales, la razón entre las magnitudes correspondientes es la misma.

Ejemplo: Las magnitudes A y B, dadas en la tabla adjunta, son directamente proporcionales. Por tanto, todas las razones que se forman son iguales; esto es:

$$\frac{2}{3}=\frac{14}{21}=\frac{20}{30}=\frac{30}{y}=\frac{x}{60}=\frac{1}{k}$$

Tabla 1. Directamente proporcionales

Magnitud A	**2**	14	20	**30**	***x***	**1**
Magnitud B	**3**	21	30	***y***	**60**	***k***

Propiedad: En una proporción, el producto de los *extremos* (a y d) es igual al producto de los *medios* (b y c). Esto es: $a \cdot d = b \cdot c$.

- Esta propiedad permite encontrar el valor desconocido de uno cualquiera de los cuatro términos de la proporción, conocidos los otros tres.

Ejemplos: a) De $\frac{2}{3}=\frac{30}{y} \Rightarrow 2\cdot y = 3\cdot 30 \Rightarrow y=\frac{3\cdot 30}{2}=\frac{90}{2}=45$.

b) En un frutero hay peras y manzanas. La razón peras–manzanas es de 3 a 4. ¿Si hay 12 manzanas, cuántas peras habrá?

La proporción que se obtiene es $\frac{3}{4}=\frac{x}{12} \Rightarrow 3\cdot 12 = 4\cdot x \Rightarrow 36 = 4x \Rightarrow x = 9$.

Reducción a la unidad en la proporcionalidad directa: constante de proporcionalidad

En los problemas de proporcionalidad resulta útil saber cuánto vale B cuando A = 1. Ese valor se halla dividiendo el valor de B por su correspondiente en A. (Dividiendo la razón dada.)

Ejemplo: En la Tabla 1 el valor de B cuando A = 1 es 3 : 2 = 1,5. Es el valor de k en la tabla, que también puede obtenerse, por ejemplo, de la igualdad $\frac{20}{30}=\frac{1}{k}$. Sea como sea, $k = 1,5$.

- Conociendo el valor de k, los valores de B se hallan multiplicando los de A por k.
- Conociendo el valor de k, los valores de A se hallan dividiendo los de B por k.
- El valor de k, para dos magnitudes proporcionales, es siempre el mismo, y se llama constante de proporcionalidad.

Ejemplo: a) Para la Tabla 1, si A = 4 ⇒ B = 4 · 1,5 = 6; si A = 30 ⇒ B = 30 · 1,5 = 45.
b) En la misma Tabla 1, si B = 15 ⇒ A = 15 : 1,5 = 10; si B = 60 ⇒ A = 60 : 1,5 = 40.

Los problemas de regla de tres pueden resolverse:

- aplicando la propiedad de la igualdad de razones: cálculo del valor desconocido
- mediante la constante de proporcionalidad: reducción a la unidad.

Ejemplo: Si 15 vacas se comen 36 kg de pienso al día, ¿cuántos kg de pienso serán necesarios para alimentar a 50 vacas diariamente?
Para resolverlo se hace el siguiente esquema:

Si 15 vacas $\to$ comen 36 kg

50 vacas $\to$ comerán x kg $\to$ Las proporciones asociadas a estos datos son:

$\frac{15}{50}=\frac{36}{x}$, o bien: $\frac{15}{36}=\frac{50}{x}$. En ambos casos: $x=\frac{36\cdot 50}{15}=120$ kg.

- La solución mediante la reducción a la unidad consiste en determinar lo que come una vaca al día, que es $\frac{36}{15}=2{,}4$ kg. En consecuencia, 50 vacas comerán: $2{,}4 \cdot 50 = 120$ kg.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número; o cuando al dividir la primera por un número, la segunda queda multiplicada por el mismo número.

Ejemplo: Las magnitudes A y B, dadas en la tabla adjunta, son inversamente proporcionales
Como puede observarse, al multiplicar la magnitud A (cuyo valor inicial es 2), por 2, por 4, …, la magnitud B (de valor inicial 50) se divide por 2, por 4, …
.

Tabla 2. Inversamente proporcionales						
Magnitud A	**2**	4	8	**20**	***x***	**1**
Magnitud B	**50**	25	12,5	***y***	**2,5**	***k***

Propiedad: si dos magnitudes son inversamente proporcionales, el producto de las cantidades correspondientes es constante: $2\cdot 50 = 4\cdot 25 = 8\cdot 12{,}5 = 10\cdot 10 = \ldots = 20\cdot y = x\cdot 2{,}5$.
Esta propiedad permite encontrar la cantidad y, de B, correspondiente a cierta cantidad conocida de A. Y al revés, la cantidad x de A, correspondiente a una cantidad conocida de B.
Ejemplo: Para las magnitudes dadas en la tabla, los valores desconocidos y y x se pueden determinar fácilmente, ya que si $2\cdot 50 = 20\cdot y$, entonces $y = 5$; y si $2\cdot 50 = x\cdot 2{,}5$, entonces $x = 40$.

Reducción a la unidad en la proporcionalidad inversa
Es el valor de k en la Tabla 2, que puede obtenerse de la igualdad $2\cdot 50 = 1\cdot k \Rightarrow k = 100$. (Es el valor de B correspondiente al valor de A = 1.)
- Conociendo la constante k, los valores de B se hallan dividiendo k entre los valores de A.
- Conociendo la constante k, los valores de A se hallan dividiendo k entre los valores de B.

Ejemplo: a) Para la Tabla 2, si A = 2 $\Rightarrow$ B = 100 : 2 = 50; si A = 20 $\Rightarrow$ B = 100 : 20 = 5.
b) Para la Tabla 2, si B = 10 $\Rightarrow$ A = 100 : 10 = 10; si B = 8 $\Rightarrow$ A = 100 : 8 = 12,5.

Los problemas de regla de tres inversa pueden resolverse:
- aplicando la propiedad de los productos.
- mediante la constante de proporcionalidad: reducción a la unidad.

Ejemplo: Si 2 pintores encalan una pared en 20 horas, ¿cuántas horas tardarían en encalarla entre 5 pintores?
Para resolverlo se hace el siguiente esquema:

Si 2 pintores $\to$ tardan 20 h

5 pintores $\to$ tardarán x h $\Rightarrow 2 \cdot 20 = 5 \cdot x \Rightarrow 40 = 5 \cdot x \Rightarrow x = \frac{40}{5} = 8$ h

- La solución mediante la reducción a la unidad consiste en determinar el tiempo que tardaría un solo pintor. Ese tiempo sería de 40 horas $\to$ 2 · 20 = 28; el doble que si lo hacen entre dos. En consecuencia, entre 5 pintores emplearían $\frac{40}{5}=8$ horas.