3 Divisibilidad

Si una determinada clase de yogures se vende en paquetes de 4 unidades, puedes comprar 8 yogures, porque 8 es dos veces 4, o 12 yogures, porque 12 es tres veces 4. Pero no puedes comprar 7, porque 7 no contiene a 4 una cantidad exacta de veces.

Cuando un número contiene a otro un número exacto de veces, se dice que entre ellos hay relación de divisibilidad.

En la tienda de especias de un zoco marroquí venden bolsas de 50 g de una mezcla especial para un plato de cuscús y bolsas de 20 g de menta para el té.

a) ¿Es posible comprar 100 g de las bolsas de menta? ¿Y 50 g?

b) ¿Podemos comprar 80 g del preparado para cuscús? ¿Y 150 g?

c) Piensa cómo podríamos llevarnos la misma cantidad de preparado para cuscús y de menta. ¿Hay más de una posibilidad?

Recuerda y resuelve

Cuáles son los términos de una multiplicación y de una división.

En una multiplicación:

$$\underbrace{5}_{\text{factores}} \cdot \underbrace{8}_{\text{factores}} = \underbrace{40}_{\text{producto}}$$

En una división:

dividendo 20 | 3 divisor
2 | 6
resto cociente

1 Escribe una multiplicación cuyos factores sean 4 y 11.

2 Indica cuáles son los factores y cuál es el producto de la operación $6 \cdot 4 = 24$.

3 Indica el dividendo, el divisor y el resto de las siguientes divisiones:

a) 15 : 4 ***c)*** 123 : 6

b) 32 : 8 ***d)*** 270 : 18

4 En una división, el dividendo es 20 y el divisor es 4. Calcula el cociente y el resto.

Qué es una división exacta y qué relación hay entre sus términos.

Una división exacta es aquella cuyo resto es cero.

Entre sus términos se cumple la siguiente relación:

dividendo = divisor · cociente

8 | 2
0 | 4 $\Rightarrow$ $8 = 2 \cdot 4$

5 Indica cuáles de las siguientes divisiones son exactas y escribe la relación entre sus términos:

a) 15 : 4 ***c)*** 123 : 6

b) 32 : 8 ***d)*** 270 : 18

6 Completa en tu cuaderno la relación entre los términos de las siguientes divisiones exactas:

a) 1 750 : 125 = 14 ▶ 1 750 = _____ · _____

b) 105 300 : 230 = 450 ▶ 105 300 = _____ · _____

Qué relación hay entre la multiplicación y la división exacta.

Cuando tenemos una multiplicación, podemos, a partir de ella, obtener dos divisiones exactas.

$$4 \cdot 7 = 28 \Rightarrow \begin{cases} 28 : 4 = 7 \\ 28 : 7 = 4 \end{cases}$$

7 Averigua cuáles son las divisiones exactas que se obtienen con los términos de las siguientes multiplicaciones:

a) $7 \cdot 19 = 133$

b) $15 \cdot 68 = 1\,020$

8 Completa en tu cuaderno estas operaciones:

a) 12 · _____ = 240

b) 123 · _____ = 5 535

Qué significado tiene una potencia.

$$\underbrace{4}_{\text{base}}^{\overbrace{3}^{\text{exponente}}} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

En una potencia, la base es el número que se multiplica por sí mismo tantas veces como indica el exponente.

9 Escribe en tu cuaderno estas multiplicaciones en forma de potencia:

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ ***b)*** $2 \cdot 2 \cdot 2$

10 Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) 3^2 ***b)*** 2^3 ***c)*** 5^2

11 Calcula el valor de estas expresiones:

a) $2^2 \cdot 3$ ***b)*** $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ ***c)*** $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

1 Relación de divisibilidad

Piensa y deduce

La clase de 1.º A tiene 20 alumnos, y la de 1.º B, 22 alumnos. La profesora de Educación Física quiere formar equipos de 5 jugadores para que todos puedan jugar a la vez a baloncesto.

a) ¿Puede hacerlo en las dos clases?

b) ¿Qué requisito tiene que cumplir el número de alumnos de una clase para que se puedan formar equipos de 5 jugadores?

La profesora de Educación Física puede formar equipos de 5 alumnos en 1.º A sin que ningún alumno se quede sin equipo. Sin embargo, en 1.º B, quedan dos alumnos sin equipo.

$\begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$ ▶ La división 20 : 5 **es exacta.** ▶ 20 se puede agrupar en 4 grupos de 5: 20 contiene 4 veces a 5.

$\begin{array}{r|l} 22 & 5 \\ \hline 2 & 4 \end{array}$ ▶ La división 22 : 5 **no es exacta.** ▶ Con 22 no podemos hacer grupos de 5 y que no sobre nadie: 22 no contiene a 5 una cantidad exacta de veces.

Hay **relación de divisibilidad** entre dos números naturales, *a* y *b,* cuando el mayor, *a,* contiene al menor, *b,* una cantidad exacta de veces. Entonces se dice que ***a* es divisible por *b*.**

Para saber si entre dos números hay relación de divisibilidad, debemos comprobar que la división del mayor entre el menor es exacta.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 ¿Hay relación de divisibilidad entre 35 y 7? ¿Y entre 32 y 9?

Hacemos la división de 35 (el número mayor) entre 7 (el número menor) y comprobamos si es exacta:

$\begin{array}{r|l} 35 & 7 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$ ▶ División exacta: 35 es divisible por 7.

Hacemos la división de 32 entre 9:

$\begin{array}{r|l} 32 & 9 \\ \hline 5 & 3 \end{array}$ ▶ División no exacta: 32 no es divisible por 9.

Entre 35 y 7 hay relación de divisibilidad, pero entre 32 y 9 no.

Actividades

1 ● Realiza la división y deduce como en el ejemplo:

Ejemplo: $\begin{array}{r|l} 32 & 7 \\ \hline 4 & 4 \end{array}$ ⇒ 32 no es divisible por 7.

a) 90 | 18 ***b)*** 543 | 45 ***c)*** 7 480 | 340

2 ● Indica si entre los pares de números dados hay relación de divisibilidad:

a) 14 y 28 ***c)*** 104 y 4 ***e)*** 1 050 y 46

b) 15 y 5 ***d)*** 244 y 12 ***f)*** 3 515 y 95

3 ● Di si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) El 24 es divisible por 8.

b) 54 es divisible por 6.

c) 40 es divisible por 10.

d) El 9 es divisible por 6.

4 ●● Agrupa los números dados formando cuatro parejas en las que haya relación de divisibilidad.

32, 45, 8, 15, 22, 14, 7, 11

2 Múltiplos y divisores

Hemos visto que cuando existe relación de divisibilidad entre dos números naturales, *a* y *b*, podemos decir que *a* es divisible por *b*. Por consiguiente:

- Un número natural, *b*, **es divisor** de otro, *a*, cuando la división $a : b$ es exacta.

  $a : b = c \Rightarrow b$ es divisor de a

  Por ejemplo:

  $12 : 3 = 4$ ▶ 3 es un divisor de 12

- Un número natural, *a*, **es múltiplo** de otro, *b*, si al multiplicar *b* por un número natural, se obtiene *a* como resultado.

  $b \cdot c = a \Rightarrow a$ es múltiplo de b

  Por ejemplo:

  $3 \cdot 4 = 12$ ▶ 12 es un múltiplo de 3

Observa que las expresiones «ser divisor de» y «ser múltiplo de» son relaciones recíprocas:

La división 12 : 3 es exacta:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

▼ 3 es divisor de 12

⟺

Se cumple que:
dividendo = divisor · cociente

$12 = 3 \cdot 4$

▼ 12 es múltiplo de 3

⟷

Si la división de dos números naturales, $a : b$, es exacta, es decir, si hay relación de divisibilidad entre ellos, entonces ***b* es un divisor de *a*** y, recíprocamente, ***a* es un múltiplo de *b*.**

Actividades

5 ● Indica verdadero o falso:

a) 24 es múltiplo de 6.

b) 2 es divisor de 8.

c) 14 es divisor de 7.

d) 15 es múltiplo de 5.

e) 3 es divisor de 20.

f) 18 es divisor de 9.

g) 7 es divisor de 22.

h) 24 es múltiplo de 3.

6 ●● A partir de la división 28 : 7 = 4, escribe y completa estas expresiones en tu cuaderno:

a) El 28 es _____ de 7.

b) El 7 es _____ de 28.

c) El _____ es igual a _____ por 7.

7 ● Escribe y completa en tu cuaderno las siguientes frases con las palabras «múltiplo» o «divisor»:

a) El 7 es _____ de 14. ⇔ El 14 es _____ de 7.

b) El 12 es _____ de 6. ⇔ El 6 es _____ de 12.

c) El 6 es _____ de 3. ⇔ El 3 es _____ de 6.

d) El 3 es _____ de 18. ⇔ El 18 es _____ de 3.

8 ●●● Sabiendo que *a* es divisible por *b*, indica si estas afirmaciones son verdaderas o falsas; razona tu respuesta:

a) El número *a* es divisor de *b*.

b) El número *a* es múltiplo de *b*.

c) El número *b* es un múltiplo de *a*.

d) El número *b* es un divisor de *a*.

e) La división $b : a$ es exacta.

f) La división $a : b$ es exacta.

3 Múltiplos de un número

Piensa y deduce

En un supermercado están de oferta los yogures que vienen en packs de 8 unidades. ¿Cuáles son las diferentes cantidades de yogures que te puedes llevar según el número de packs que compres?

Sea cual sea la cantidad de yogures que compres, siempre podrás hacer grupos de 8 yogures. Todas esas cantidades son múltiplos de 8.

1 pack: 8 yogures ▶ 8 es 1 vez 8 ▶ $8 \cdot 1 = 8$

2 packs: 16 yogures ▶ 16 es 2 veces 8 ▶ $8 \cdot 2 = 16$

3 packs: 24 yogures ▶ 24 es 3 veces 8 ▶ $8 \cdot 3 = 24$

4 packs: 32 yogures ▶ 32 es 4 veces 8 ▶ $8 \cdot 4 = 32$

Podríamos seguir comprando packs sin parar y obtendríamos infinitos múltiplos de 8.

Ten en cuenta

Cualquier número natural, *a*, es múltiplo de sí mismo y de 1, ya que:

$a \cdot 1 = a$

Los **múltiplos** de un número se obtienen multiplicando dicho número por los números naturales.

El conjunto de los múltiplos de un número, *a*, lo expresaremos como *M*(*a*).

EJERCICIOS RESUELTOS

2 Escribe los cinco primeros múltiplos de 4.

$4 \cdot 1 = 4$ $4 \cdot 2 = 8$ $4 \cdot 3 = 12$ $4 \cdot 4 = 16$ $4 \cdot 5 = 20$

$M(4) = \{4, 8, 12, 16, 20, \ldots\}$

Actividades

9 ● Añade tres términos más en cada serie:

a) $M(3) = 3, 6, 9, 12, \ldots$

b) $M(6) = 6, 12, 18, \ldots$

c) $M(30) = 30, 60, 90, 120, \ldots$

10 ● Contesta las preguntas. Justifica tus respuestas afirmativas con una multiplicación y el resto con una división.

a) ¿Es 12 múltiplo de 6?

b) ¿Es 45 múltiplo de 9?

c) ¿Es 33 múltiplo de 7?

d) ¿Es 1 260 múltiplo de 28?

11 ● Calcula los cinco primeros múltiplos de los siguientes números:

a) 5 ***c)*** 12

b) 7 ***d)*** 10

12 ●● Escribe en tu cuaderno:

a) Los cinco primeros múltiplos de 12 mayores que 282.

b) Los múltiplos de 3 comprendidos entre 40 y 55.

c) El primer número mayor que 100 que es múltiplo de 4 y 6.

13 ● Explica de forma clara por qué 168 es múltiplo de 12 y por qué 47 no es múltiplo de 6.

14 ●● ¿Cuál es la diferencia entre dos múltiplos consecutivos de 12? ¿Y de 27?

15 ●●● Un número, *b*, es múltiplo de otro, *a*, y, a su vez, otro número, *c*, es múltiplo de *b*. ¿Se puede asegurar que *c* es múltiplo de *a*?

16 ●●● Utiliza la calculadora para averiguar el primer múltiplo de 24 mayor que 2 300. ¿Cómo lo has hecho?

4 Divisores de un número

Piensa y deduce

Observa las siguientes divisiones:

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \hline 0 & 5 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

Por tanto, 3 y 5 son divisores de 15.

a) Si en una división exacta intercambiamos entre sí el divisor y el cociente, ¿se obtiene otra división exacta?

b) Fíjate en esta otra división:

$$\begin{array}{r|l} 120 & 8 \\ \hline 40 & 15 \\ 0 & \end{array}$$

¿Puedes asegurar que 8 y 15 son divisores de 120?

Para encontrar los divisores de un número, hay que dividirlo por los números naturales (1, 2, 3, 4, …) hasta que el cociente sea igual o menor que el divisor. Los **divisores** de un número son los divisores y los cocientes de todas las divisiones exactas encontradas.

El conjunto de los divisores de un número, *a*, lo expresaremos como *D*(*a*).

Ten en cuenta

- El 1 es divisor de cualquier número natural, *a*, porque:

$$a : 1 = a$$

- Cualquier número natural es divisor de sí mismo, ya que:

$$a : a = 1$$

EJERCICIOS RESUELTOS

3 **Busca los divisores de 16.**

$$\begin{array}{r|l} 16 & 1 \\ \hline 06 & 16 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ \hline 0 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \hline 1 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 4 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

El cociente es igual que el divisor. Dejamos de dividir.

1 y 16 son divisores de 16.

8 y 2 son divisores de 16.

3 y 5 no son divisores de 16.

4 es divisor de 16.

$$D(16) = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

Actividades

17 ● Escribe y completa en tu cuaderno las frases:

a) 12 : 6 = 2 ⇒ El _____ y el _____ son divisores de _____.

b) 8 : 2 = 4 ⇒ El _____ y el _____ son divisores de _____.

c) 48 : 8 = 6 ⇒ El _____ y el _____ son divisores de _____.

18 ● Contesta las siguientes cuestiones y justifica tu respuesta con una división:

a) ¿Es 7 divisor de 42?

b) ¿Es 9 divisor de 27?

c) ¿Es 6 divisor de 14?

d) ¿Es 18 divisor de 216?

e) ¿Es 212 divisor de 14?

f) ¿Es 9 divisor de 1 080?

19 ● De los números 3, 7, 10, 8, 2, 1, 12, 6, 24, indica cuáles son divisores de 12.

20 ● Calcula los divisores de cada número:

a) 4 ***b)*** 40 ***c)*** 12 ***d)*** 60 ***e)*** 18 ***f)*** 84 ***g)*** 11 ***h)*** 110

21 ●● Calcula mentalmente:

a) *D*(8) ***b)*** *D*(14) ***c)*** *D*(10) ***d)*** *D*(36)

22 ●● ¿Se puede asegurar que cualquier número natural tiene al menos dos divisores?

23 ●● En un campamento hay 60 participantes. Encuentra todas las formas posibles de hacer equipos con el mismo número de componentes sin que se quede ningún participante sin equipo.

5 Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad permiten averiguar si un número es o no divisible por otro, sin necesidad de efectuar la división.

Un número es divisible por…	Criterio de divisibilidad
2	Si es par, es decir, si termina en 0, 2, 4, 6 u 8.
3	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
5	Si termina en 0 o en 5.
11	Si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares pares y la suma de las cifras que ocupan los lugares impares es 0 o un múltiplo de 11.

EJERCICIOS RESUELTOS

4 Sin tener que dividir, indica si 4 158 es divisible por 2, 3, 5 y 11.

- Por 2: es par; por tanto, es divisible por 2.
- Por 3: la suma de sus cifras 4, 1, 5 y 8 es 18, que es un múltiplo de 3; por tanto, es divisible por 3.
- Por 5: no termina ni en 0 ni en 5; por tanto, no es divisible por 5.
- Por 11: suma de las cifras que ocupan un lugar impar: $4 + 5 = 9$.
  Suma de las cifras que ocupan un lugar par: $1 + 8 = 9$.
  La resta de estas dos sumas es $9 - 9 = 0$; por tanto, es divisible por 11.

Actividades

24 ● Indica si los siguientes números son divisibles por 2, 3, 5 y 11:

a) 18 ***b)*** 45 ***c)*** 120 ***d)*** 845 ***e)*** 1 320

25 ●● En tu cuaderno, añade una cifra para que se cumpla la condición dada. Da todas las soluciones posibles.

a) 12___ ⇒ Es múltiplo de 2 y de 5.

b) 13___ ⇒ Es múltiplo de 3, pero no de 2.

c) 4___1 ⇒ Es divisible por 3.

d) 4___31 ⇒ Es divisible por 11.

e) 63___ ⇒ Es divisible por 3 y por 2 y no por 5.

26 ●● Halla:

a) Un número de tres de cifras que sea divisible por 2 y por 3.

b) Un número de cinco cifras que sea divisible por 5 y por 3, pero no por 2.

c) Un múltiplo de 11 de cuatro cifras.

27 ●●● El número 1 452 es múltiplo de 11. Obtén otro múltiplo de 11 cambiando el orden de las cifras. ¿Cuántas soluciones hay?

28 ●●● Marta ha vendido papeletas de 3 € para una rifa. Al contar el dinero recaudado, comprueba que tiene 124 €. ¿Por qué sabe, sin hacer ninguna división, que le falta o le sobra dinero?

29 ●●● Escribe un criterio de divisibilidad para los números divisibles por 10 y otro para los divisibles por 100.

6 Números primos y compuestos

Piensa y deduce

Clasifica los 30 primeros números naturales, excepto el 1, en dos grupos:

- Los que tienen solo dos divisores.
- Los que tienen más de dos.

¿Cuáles son los divisores de los números que solo tienen dos divisores?

Un número es **primo** si solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.

Por ejemplo, 5 es un número primo, ya que sus únicos divisores son 1 y 5.

Un número es **compuesto** si tiene más de dos divisores.

Por ejemplo, 6 es un número compuesto, ya que sus divisores son 1, 2, 3 y 6.

Observa que el 1 solo tiene un divisor, él mismo, así que no se considera ni primo ni compuesto.

Para saber si un número es primo, se va dividiendo entre los números primos menores que él, a fin de comprobar que ninguno es divisor suyo. Como cuando calculábamos los divisores, basta con dividir hasta que el cociente sea igual o menor que el divisor.

Hay infinitos números primos. Los menores de 30 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29.

EJERCICIOS RESUELTOS

5 Averigua si son primos los números 37 y 91.

Dividimos por los primos que son menores:

37	2	37	3	37	5	37	7
1	18	1	12	2	7	2	5

Cociente < divisor dejamos de dividir.

El 37 no tiene ningún número primo menor que él que sea divisor suyo; por tanto, el 37 es un número primo.

Veamos qué ocurre con 91:

91	2	91	3	91	5	91	7
1	45	1	30	1	18	0	13

Hemos encontrado divisores. No es primo. Dejamos de dividir.

El 91 es un número compuesto, pues tiene más divisores que 1 y 91 como el 7 y el 13.

Actividades

30 • Clasifica en números primos y compuestos:
2, 7, 45, 11, 80, 23, 39, 5, 37, 67, 93, 9, 17

31 • Indica cuáles son compuestos expresándolos con una multiplicación:
a) 113 ***b)*** 143 ***c)*** 282 ***d)*** 352 ***e)*** 387

32 •• De los números 622, 705, 3 179, 177 y 2 099 averigua cuál es primo.

33 • ¿Puede ser primo un número par distinto de 2?

34 ••• ¿Cuántos divisores tiene un número que es el producto de dos números primos?

7 Descomposición factorial de un número

Observa estas diferencias entre 18, que es un número compuesto, y 17, que es un número primo.

Usando los divisores del 18, podemos expresarlo como un producto de dos números. Tenemos varias posibilidades:

$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ ▶ $18 = 1 \cdot 18$ $\quad 18 = 2 \cdot 9$ $\quad 18 = 3 \cdot 6$

En el caso del 17 hay una única forma de expresarlo como un producto:

$D(17) = \{1, 17\}$ ▶ $17 = 17 \cdot 1$

Piensa y deduce

¿De qué depende que un número se pueda expresar como un producto en el que no se utilice el propio número?

Los números compuestos, como 18, se pueden expresar en forma de producto sin utilizar el propio número como factor de la multiplicación. Se dice que se pueden **descomponer en factores.**

Sin embargo, los números primos, como el 17, solo se pueden expresar en forma de producto utilizando el propio número como factor de la multiplicación.

Piensa y deduce

Vamos a descomponer en factores el número 90:

$$90 = 3 \cdot 30 = 3 \cdot 3 \cdot 10 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$$

a) Al llegar a $90 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$, ¿puedes seguir descomponiendo en más factores? ¿Por qué?

b) Haz la descomposición partiendo de $90 = 2 \cdot 45$. ¿Obtienes el mismo resultado?

Factorizar un número es descomponerlo en producto de factores primos. Esta descomposición es única para cada número.

Para factorizar un número, se divide sucesivamente entre factores primos hasta que el cociente es 1.

2 es número primo, y 90 es divisible por 2.

3 es número primo, y 45 es divisible por 3.

3 es número primo, y 15 es divisible por 3.

5 es número primo, y 5 es divisible por 5.

$$\begin{array}{rrrr} 90 & \underline{|2} & & \\ 0 & 45 & \underline{|3} & \\ & 0 & 15 & \underline{|3} \\ & & 0 & 5 \;\; \underline{|5} \\ & & & 0 \;\; 1 \end{array}$$

Por tanto, $90 = 2 \cdot 45 = 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Habitualmente, el procedimiento anterior se escribe así:

Observa que en la columna de la derecha se escriben los divisores primos, y en la de la izquierda, los cocientes resultantes.

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Consideramos la descomposición en factores primos de 12:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Observa que ocurre con sus múltiplos y con sus divisores:

Múltiplos	Divisores $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$24 = 12 \cdot 2 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2$	$2 = 2$ (factor de $2 \cdot 2 \cdot 3$)
$36 = 12 \cdot 3 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 3$	$3 = 3$ (factor de $2 \cdot 2 \cdot 3$)
$48 = 12 \cdot 4 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 2$	$4 = 2 \cdot 2$ (factor de $2 \cdot 2 \cdot 3$)
…	$6 = 2 \cdot 3$ (factor de $2 \cdot 2 \cdot 3$)
Cualquier múltiplo de 12 contiene todos los factores primos de 12.	**Cualquier divisor de 12 mayor que 1 contiene solo factores primos de 12.**

- Un número, para ser múltiplo de otro, tiene que contener todos sus factores primos.
- Un número, para ser divisor de otro, solo puede contener factores primos de este.

EJERCICIOS RESUELTOS

6 La descomposición factorial de un número es $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Escribe tres múltiplos y cinco divisores suyos.

Múltiplos: $(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 2 = 120$, $(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 3 = 180$, $(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 7 = 420$

Divisores: $2, 3, 5, 2 \cdot 3 = 6, 2 \cdot 5 = 10$

Actividades

35 • Escribe los números indicados como un producto que contenga los factores que se indican:

a) 144 en dos factores. *c)* 27 en tres factores.
b) 90 en cuatro factores. *d)* 60 en tres factores.

36 • Descompón los siguientes números en dos factores, luego en tres, y así sucesivamente, hasta obtener todos los factores primos:

a) 24 *b)* 60 *c)* 260 *d)* 450

37 • Descompón en factores primos:

a) 18 *e)* 108 *i)* 675 *m)* 1 530
b) 20 *f)* 130 *j)* 1 100 *n)* 2 457
c) 36 *g)* 252 *k)* 900 *ñ)* 14 000
d) 70 *h)* 660 *l)* 2 184 *o)* 13 860

38 •• Descompón en factores primos estos números:

a) 6 *d)* 8 *g)* 9 *j)* 12
b) 15 *e)* 21 *h)* 24 *k)* 27
c) 28 *f)* 30 *i)* 50 *l)* 66

39 • Factoriza los números 12 y 90. ¿Qué factores tienen en común?

40 ••• Factoriza los números 120 y 840 y averigua, así, si 120 es divisor de 840.

41 • Indica si es correcta la siguiente factorización del número 60:

$$60 = 2 \cdot 5 \cdot 6$$

42 •• Escribe tres múltiplos y tres divisores del siguiente número:

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

43 ••• Sin hacer ninguna operación, averigua si el número *n* es divisor de *m*. Razónalo.

a) $m = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $n = 2 \cdot 3$
b) $m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, $n = 2^4 \cdot 3^2$
c) $m = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, $n = 2 \cdot 2 \cdot 2$
d) $m = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$, $n = 2 \cdot 3^2$

44 ••• Sin hacer ninguna operación averigua si *m* es múltiplo de *n*. Razona tus respuestas.

a) $m = 2^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, $n = 2 \cdot 5$
b) $m = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$, $n = 2 \cdot 3^2$
c) $m = 2^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$, $n = 2 \cdot 2 \cdot 11$
d) $m = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$, $n = 2^3 \cdot 3^2$

8 Múltiplos comunes y mínimo común múltiplo (m.c.m.)

Piensa y deduce

Los múltiplos de 4 son $M(4) = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \ldots\}$.

Los múltiplos de 6 son $M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \ldots\}$.

¿Hay números en común en los dos conjuntos? ¿Podemos saber cuál es el menor de los múltiplos comunes del 6 y el 4? ¿Y el mayor?

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números, *a, b, c,* …, es el menor de los múltiplos que tienen en común. Se expresa como m.c.m. (*a, b, c,* …).

EJERCICIOS RESUELTOS

7 Mario va a la piscina cada seis días y Luisa, cada ocho. Hoy han coincidido los dos. ¿Dentro de cuántos días volverán a coincidir?

Se trata de averiguar el mínimo común múltiplo de 6 y 8. Para ello, primero calculamos los múltiplos de cada uno:

Mario va cada 6 días: $M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots\}$.

Luisa va cada 8 días: $M(8) = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, \ldots\}$.

A continuación buscamos el común más pequeño: m.c.m. (6, 8) = 24

Por tanto, Mario y Luisa coincidirán dentro de 24 días.

8.1. Obtención del mínimo común múltiplo

Como vimos, para que un número sea múltiplo de otro, tiene que contener todos sus factores primos. Por tanto, para que sea múltiplo de dos números, debe de contener todos los factores primos de ambos números. Veamos un ejemplo, descomponemos en factores primos 32 y 12:

$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

El m.c.m. de 12 y 32 tiene que contener todos los factores primos de ambos el menor número de veces posible (2^5, 2^2 y 3, pero 2^2 ya está contenido en 2^5):

$$\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3}_{12}}^{32} = 2^5 \cdot 3 = 96$$

Observa que para obtener el m.c.m., se multiplican los factores primos comunes y no comunes que aparecen en las dos descomposiciones elevados al mayor exponente.

$$\text{m.c.m. } (12, 32) = 2^5 \cdot 3 = 96$$

Para obtener el **mínimo común múltiplo** de dos o más números, se procede de la siguiente manera:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se multiplican todos los factores que aparecen en las descomposiciones, elevando cada uno al mayor exponente con el que figuran en ellas.

EJERCICIOS RESUELTOS

8 Halla el mínimo común múltiplo de 10, 12 y 75.

1. Descomponemos en factores primos:

$$10 = 2 \cdot 5 \qquad 12 = 2^2 \cdot 3 \qquad 75 = 3 \cdot 5^2$$

2. Factores que aparecen: 2, 3 y 5. Los multiplicamos elevados al mayor exponente con el que aparecen:

$$\text{m.c.m. } (10, 12, 75) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$$

Actividades

45 • Averigua los tres primeros múltiplos que tienen en común:

a) 3 y 9 *c)* 12 y 18 *e)* 1, 3 y 6

b) 2 y 5 *d)* 2, 3 y 4 *f)* 3, 6 y 9

46 • Escribe los primeros múltiplos de los números dados hasta encontrar su mínimo común múltiplo.

a) 3 y 6 *c)* 2 y 9 *e)* 15 y 20

b) 6 y 8 *d)* 4 y 10 *f)* 2, 5 y 6

47 •• Calcula:

a) m.c.m. (2, 4) *d)* m.c.m. (3, 9)

b) m.c.m. (2, 6) *e)* m.c.m. (5, 6)

c) m.c.m. (8, 12) *f)* m.c.m. (4, 6)

48 • Escribe los primeros múltiplos de los siguientes números hasta averiguar cuál es su mínimo común múltiplo. Vuelve a obtenerlo después, a partir de la descomposición en factores primos y comprueba que consigues el mismo resultado.

a) 8 y 12 *b)* 15 y 20 *c)* 4 y 18

49 • Obtén, usando la factorización de los números:

a) m.c.m. (4, 18) *d)* m.c.m. (30, 72)

b) m.c.m. (10, 198) *e)* m.c.m. (365, 600)

c) m.c.m. (45, 54) *f)* m.c.m. (315, 1 845)

50 •• Averigua:

a) m.c.m. (2, 6, 9) *e)* m.c.m. (3, 5, 15)

b) m.c.m. (4, 6, 12) *f)* m.c.m. (2, 20, 30)

c) m.c.m. (12, 18, 24) *g)* m.c.m. (35, 45, 150)

d) m.c.m. (6, 15, 18) *h)* m.c.m (4, 6, 21, 27)

51 • Calcula el mínimo común múltiplo de *m* y *n*, sin averiguar el valor numérico de cada uno:

a) $m = 2^3 \cdot 3$
$n = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

b) $m = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
$n = 2^2 \cdot 3^2$

c) $m = 3 \cdot 5$
$n = 2 \cdot 7$

d) $m = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$
$n = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$

52 •• En una carrera de 50 km hay un puesto de agua cada 4 km y un control de los corredores cada 3 km. ¿En qué puntos kilométricos coincidirán el puesto de agua y el control?

53 •• Por una misma parada pasan los autobuses de la línea A cada 5 min y los de la línea B cada 8 min. A las doce en punto han coincidido los de las dos líneas. ¿A qué hora volverán a coincidir?

54 •• Con el número de alumnos que tiene una clase se pueden formar equipos de 3, de 4 o de 6 miembros, sin que ningún alumno se quede sin equipo. ¿Cuántos alumnos tiene como mínimo dicha clase?

55 •• Se han hecho dos torres de cajas con la misma altura. Si una de las torres está formada por cajas de 15 cm de alto y la otra por cajas de 20 cm de alto, ¿qué altura han alcanzado como mínimo las dos?

56 •• Un grupo de 6 amigos va a una pizzería. Las pizzas vienen divididas en 8 porciones y todos quieren tomar el mismo número de porciones, ¿cuántas pizzas tienen que pedir cómo mínimo?

57 ••• Jaime cuenta sus cómic de 2 en 2, de 4 en 4 y de 6 en 6, y en ningún caso le sobra ninguno. ¿Cuántos cómic tiene Jaime si posee entre 30 y 40?

58 ••• ¿Cuánto mide el lado del cuadrado más pequeño que se puede formar con fichas rectangulares de 12 cm de largo y 8 cm de ancho?

59 ••• Indica cuál es el mínimo común múltiplo de dos números que cumplen la condición dada:

a) Uno es múltiplo del otro.

b) Ambos números carecen de divisores primos en común.

c) Uno de los dos números es 1.

60 •• ¿Se puede asegurar que dados dos, o más números, siempre tienen múltiplos en común?

9 Divisores comunes y máximo común divisor (M.C.D.)

Piensa y deduce

Los divisores de 12 son $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Los divisores de 20 son $D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

¿Podemos saber cuál es el mayor de los divisores comunes? ¿Cómo mínimo cuántos divisores tienen en común dos números?

El **máximo común divisor** de dos o más números, *a, b, c,* …, es el mayor de los divisores que tienen en común. Se expresa como M.C.D. (*a, b, c,*…).

Como el 1 es divisor de todos los números naturales, dos números naturales tienen al menos un divisor en común, el 1. Si el 1 es el único divisor que tienen en común, los **números son primos entre sí.** Por ejemplo, el 3 y el 4 son primos entre sí.

EJERCICIOS RESUELTOS

9 Los padres de Jonás quieren cambiar los azulejos del suelo del baño, que tiene forma rectangular. Uno de sus lados mide 12 dm, y el otro, 16 dm. Los azulejos que les ofrecen son cuadrados; ¿cuánto tiene que medir el lado del azulejo más grande que pueden poner?

Los azulejos se tienen que ajustar a los dos lados de las paredes, de modo que su medida tiene que ser divisor de las medidas de las dos paredes. Veamos cuáles son los divisores de los dos lados de la pared:

$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \qquad D(16) = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

Los azulejos pueden medir 1 dm, 2 dm o 4 dm de lado; como quieren los más grandes (M.C.M. (12, 16) = 4), deben coger azulejos de 4 dm de lado.

9.1. Obtención del máximo común divisor

Como vimos, un número, para ser divisor de otro, solo puede contener sus factores primos. Así, para ser divisor de dos números, debe contener los factores primos comunes a ambos. Veamos un ejemplo:

Descomponemos en factores primos 36 y 60.

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

El M.C.D. de ambos tiene que contener todos los factores primos comunes, así para hallar el M.C.D., se multiplican los factores comunes elevados al menor exponente con el que aparecen en las dos descomposiciones:

$$\text{M.C.D. } (36, 60) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Para obtener el **máximo común divisor** de dos o más números, se procede de la siguiente manera:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se multiplican los factores que tienen en común, elevando cada uno al menor exponente con el que aparece en las descomposiciones.

EJERCICIOS RESUELTOS

10 Halla el máximo común divisor de 24, 48 y 56.

1. Descomponemos en factores primos:

$$24 = 2^3 \cdot 3 \qquad 48 = 2^4 \cdot 3 \qquad 56 = 2^3 \cdot 7$$

2. El único factor que tienen en común es el 2 y el menor exponente con el que aparece es 3. De este modo:

$$\text{M.C.D. } (24, 48, 56) = 2^3 = 8$$

Actividades

61 • Halla todos los divisores de los siguientes números y obtén su máximo común divisor:

a) 3 y 6 ***c)*** 8 y 20 ***e)*** 12 y 42

b) 18 y 25 ***d)*** 12, 18 y 30 ***f)*** 20, 30 y 90

62 • Calcula un divisor común de estos números:

a) 8 y 20 ***b)*** 30 y 50 ***c)*** 15 y 18

63 •• Calcula:

a) M.C.D. (3, 6) ***d)*** M.C.D. (6, 9)

b) M.C.D. (4, 6) ***e)*** M.C.D. (10, 20)

c) M.C.D. (2, 9) ***f)*** M.C.D. (20, 30)

64 • Indica si las siguientes pares de números son primos entre sí:

a) 18 y 20 ***b)*** 6 y 15 ***c)*** 4 y 9 ***d)*** 3 y 2

65 • Escribe todos los divisores de estos números y averigua su máximo común divisor. A continuación, vuelve a obtenerlo a partir de la descomposición en factores primos y comprueba que llegas al mismo resultado.

a) 12 y 30 ***b)*** 18 y 45 ***c)*** 16 y 40

66 • Factorizando, obtén los números dados:

a) M.C.D. (12, 16) ***d)*** M.C.D. (600, 200)

b) M.C.D. (9, 30) ***e)*** M.C.D. (150, 315)

c) M.C.D. (60, 200) ***f)*** M.C.D. (980, 2 200)

67 •• Averigua:

a) M.C.D. (6, 15, 18) ***c)*** M.C.D. (18, 24, 30)

b) M.C.D. (60, 84, 132) ***d)*** M.C.D. (24, 60, 80)

68 • Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los siguientes números:

a) 9 y 12 ***c)*** 8 y 15 ***e)*** 140 y 300

b) 18 y 42 ***d)*** 108 y 630 ***f)*** 693 y 1 485

69 •• Un número, *a*, es divisor de otro, *b*; ¿cuál es el máximo común divisor de ambos?

70 •• Dos números son primos entre sí; ¿cuál es su m.c.m y su M.C.D.?

71 •• ¿Se te ocurre alguna forma rápida de averiguar el máximo común divisor de dos números a partir de los divisores del menor de ellos?

72 •• Hay que colocar en cajas 24 botellas de refresco de naranja y 60 de limón, de manera que en todas las cajas haya el mismo número de unidades y que no se mezclen en una misma caja botellas de los dos sabores. ¿Cuál es el número máximo de botellas que pueden contener las cajas?

73 •• Se dispone de tres listones de madera que miden 90 cm, 120 cm y 150 cm de longitud, respectivamente. Si se quieren cortar los tres listones en trozos del mismo tamaño:

a) ¿Cuánto puede medir cada trozo como máximo?

b) ¿Cuántos trozos saldrán de cada listón?

74 •• Maite tiene 30 caramelos de fresa y 45 de menta. Los quiere empaquetar en bolsas, de manera que todas tengan la misma composición. Si quiere preparar el mayor número de bolsas sin que le sobre ningún caramelo:

a) ¿Cuántas bolsas obtendrá?

b) ¿Qué composición tendrá cada bolsa?

75 • Calcula el máximo común divisor de *m* y *n*, sin averiguar el valor numérico de cada uno:

a) $m = 2^3 \cdot 3$ y $n = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

b) $m = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ y $n = 2^2 \cdot 3^2$

c) $m = 3 \cdot 5$ y $n = 2 \cdot 7$

d) $m = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ y $n = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$

76 ••• Observa la descomposición factorial de los números *a, b, c* y *d* y contesta:

$$a = 2 \cdot 3^2 \qquad b = 2 \cdot 3 \qquad c = 5 \cdot 7 \qquad d = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

a) ¿Es *b* el M.C.D de *a* y *c*?

b) ¿Cuáles son primos entre sí?

Estrategias para resolver problemas

Buscar todos los casos posibles

Una forma de resolver un problema es buscar todos los casos posibles.

Problema

Averigua todos los divisores de 60 a partir de su factorización.

Resolución

1. Se descompone 60 en factores primos, tal y como indica el enunciado del problema:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

2. Observa que la descomposición factorial de 60 contiene 4 factores primos. Por tanto, los divisores de 60 podrán tener 1, 2, 3 o 4 factores de 60.

3. Se buscan todos los casos posibles con números que contengan 1, 2, 3 o 4 factores de 60. Para ello copia en tu cuaderno la siguiente tabla y añade los números que faltan de cada caso:

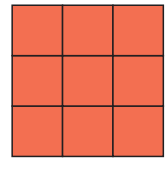
Divisores de 60 con 1 factor	Divisores de 60 con 2 factores	Divisores de 60 con 3 factores	Divisores de 60 con 4 factores
2 …	$2 \cdot 2 = 4$ …	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ …	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

4. A los divisores anteriores hay que añadir el 1, que es divisor de cualquier número. Ahora ya puedes escribir en tu cuaderno los doce divisores que tiene 60.

Otros problemas

1 ●● Busca todos los divisores de 210.

2 ● Calcula cuántos cuadrados puedes contar en la siguiente figura:

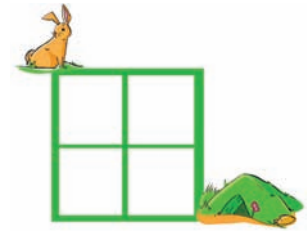


3 ● ¿Cuántos números distintos se pueden obtener al sumar el resultado de lanzar dos dados de parchís?

4 ● Supón que dispones de dos billetes de 20 € y otros dos de 50 €. Calcula todas las cantidades que puedes formar con esos cuatro billetes.

5 ●●● Eva tiene tres hermanos. El producto de sus edades es 36, y su suma, 13. ¿Qué edades pueden tener los hermanos de Eva?

6 ●●● Un conejo se desplaza por las rayas verdes para llegar a su madriguera y nunca pasa dos veces por el mismo punto. Si parte de A, ¿cuántos recorridos distintos puede hacer?



Ejercicios y problemas

Divisibilidad. Múltiplos y divisores

1 • Di si las siguientes afirmaciones son correctas. Razona la respuesta.

a) 49 es múltiplo de 7.

b) 6 es divisor de 12.

c) 24 es divisible por 7.

d) 52 es múltiplo de 13.

e) 258 es divisible por 65.

f) 13 es un divisor de 86.

g) 7 es un múltiplo de 14.

2 • Averigua si entre la pareja de números de cada apartado hay relación de divisibilidad. En tal caso, indícalo utilizando las expresiones «es divisible por», «es múltiplo de» y «es divisor de».

a) 8 y 24

b) 12 y 312

c) 24 y 748

3 • Calcula los cinco primeros múltiplos de 8.

4 • Halla los múltiplos de 12 comprendidos entre 200 y 250.

5 •• Determina las cifras con las que puede terminar un múltiplo de 3 y uno de 6.

6 •• Escribe los divisores de estos números:

a) 16 *c)* 80

b) 24 *d)* 90

Criterios de divisibilidad

7 • Indica, sin hacer ninguna división, cuáles de los siguientes números son múltiplos de 2, cuáles lo son de 3, cuáles de 5 y cuáles de 11:

a) 24 *e)* 121

b) 120 *f)* 99

c) 396 *g)* 1 335

d) 345 *h)* 112 722

8 •• Escribe el primer múltiplo común de 2 y 3 mayor que 102.

9 • ¿Se puede formar un número de tres cifras que sea múltiplo de 3 y que esté compuesto por las cifras 1, 5 y 7? ¿Y por 0, 5 y 7?

10 •• Escribe todos los números de tres cifras múltiplos de 2 que se pueden formar con las cifras 1, 2 y 3, sin repetir ninguna.

11 •• Escribe todos los números de tres cifras múltiplos de 5 que se pueden formar con las cifras 0, 2 y 5, sin repetir ninguna.

12 ••• Juan tiene una forma muy peculiar de dar a sus amigos su número de teléfono, que consta de nueve cifras, todas ellas distintas. Les dice que, leyéndolo de izquierda a derecha, se cumple que:

- La primera cifra es un múltiplo de 3 mayor que 6.
- Las dos primeras cifras forman un múltiplo de 2 y 5.
- Las tres primeras cifras forman un número par múltiplo de 3.
- Las cuatro primeras cifras forman un número que es múltiplo de 5, pero no de 2.
- Las cinco primeras cifras forman un múltiplo de 2 y de 3.
- Las seis primeras cifras forman un múltiplo de 11.
- La séptima cifra es un múltiplo de 7.
- Las ocho primeras cifras forman un número impar.
- Las cuatro últimas cifras forman un múltiplo de 11.

¿Sabrías decir cuál es el número de teléfono de Juan?

Números primos y compuestos

13 • Clasifica estos números en primos y compuestos:

a) 6 *e)* 49

b) 7 *f)* 81

c) 15 *g)* 93

d) 63 *h)* 1

14 • Escribe los números primos menores que 25.

15 • Determina, en cada caso, si el número es primo o compuesto:

a) 91 *d)* 209

b) 103 *e)* 251

c) 187 *f)* 300

16 • Escribe cada número como producto de dos factores distintos de 1. Averigua cuál es el único caso en que no es posible hacerlo.

a) 36 *c)* 71

b) 54 *d)* 120

Descomposición en factores primos

17 • Descompón el número 106 en un producto de dos factores, de tres factores, y así sucesivamente, hasta conseguir el mayor número posible de factores.

18 • Descompón en factores primos:

a) 45 *e)* 162

b) 63 *f)* 1 400

c) 360 *g)* 225

d) 504 *h)* 4 680

Ejercicios y problemas

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

19 • Halla los cinco primeros múltiplos comunes de los siguientes números:

a) 4 y 6 *b)* 6 y 15 *c)* 12 y 18

20 •• ¿Cuál es el primer múltiplo común mayor que 200 de 6 y 9?

21 • Averigua los divisores comunes de 12 y 18.

22 • Contesta las siguientes preguntas sobre los números *m* y *n*. En las respuestas negativas da la solución correcta:

a) $m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$
- ¿Es su m.c.m. $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$?
- ¿Es su M.C.D. $2^3 \cdot 3^3$?

b) $m = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ y $n = 2^3 \cdot 5$
- ¿Es su m.c.m. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$?
- ¿Es su M.C.D. 2^3?

c) $m = 3^2 \cdot 5$ y $n = 3^3$
- ¿Es su m.c.m. $3^2 \cdot 3 \cdot 5$?
- ¿Es su M.C.D. 3?

d) $m = 2 \cdot 7^2$ y $n = 3 \cdot 5$
- ¿Es su m.c.m. $2 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 5$?
- ¿Es su M.C.D. 0?

23 • Calcula:

a) m.c.m. (8, 40)
M.C.D. (8, 40)

b) m.c.m. (15, 35)
M.C.D. (15, 35)

c) m.c.m. (84, 360)
M.C.D. (84, 360)

d) m.c.m. (420, 585)
M.C.D. (420, 585)

e) m.c.m. (240, 270)
M.C.D. (240, 270)

f) m.c.m. (396, 756)
M.C.D. (396, 756)

24 •• Averigua el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los números dados:

a) 6, 8 y 12 *b)* 270, 315 y 360

25 •• Calcula mentalmente el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los siguientes números:

a) 4 y 8
b) 2 y 3
c) 3 y 12
d) 7 y 10
e) 6 y 12
f) 6 y 9
g) 10 y 15
h) 2 y 5
i) 4 y 6
j) 2, 3 y 4
k) 3, 6 y 12
l) 3, 4 y 6

26 •• Si $m = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $n = 2 \cdot 3^3$, indica cuáles de los siguientes números son múltiplos comunes de *m* y *n:*

a) $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ *b)* $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ *c)* $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

27 •• Sabiendo que $m = 2 \cdot 3^3$ y $n = 2 \cdot 3 \cdot 5$, indica cuáles de los siguientes números son divisores comunes de *m* y *n:*

a) 2 *b)* 3^2 *c)* $2 \cdot 3$ *d)* $2 \cdot 5$

Problemas de divisibilidad

28 • Una marca de flanes se vende en envases de 8 unidades. ¿Se pueden comprar 184 flanes de esa marca? ¿Y 138 flanes?

29 • Samuel y Samia están contando hasta 100 al mismo tiempo. Samuel da una palmada cada 6 números, y Samia, cada 8 números. ¿En qué números coincidirán las palmadas de ambos amigos?

30 • Sandra ha contado 18 monedas de 1 €. Para comprobar que no se ha equivocado, hace montones del mismo tamaño. ¿De cuántas formas puede comprobar que efectivamente tiene 18 €?

31 •• ¿Cuántos modos hay de colocar 45 bollos en bandejas, de manera que cada una contenga el mismo número de bollos?

32 • En un campamento hay 47 participantes. ¿Qué problema tienen los monitores para hacer equipos con el mismo número de componentes?

33 • A Javier le cobran 36 € y 28 céntimos por 3 camisas iguales. ¿Cómo se da cuenta Javier, sin hacer ninguna división, de que le han cobrado mal?

34 •• Julia tiene 135 cuentas amarillas, 150 rojas y 180 verdes. Quiere hacer el mayor número posible de collares con la misma composición de cuentas.

a) ¿Cuántos collares puede confeccionar sin que le sobre ninguna cuenta?

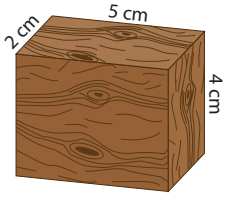
b) ¿Cuántas cuentas de cada color tendrá cada collar?

35 •• En una granja avícola empaquetan los huevos de la clase L en estuches de 12 huevos y los de la clase XL en estuches de 10 huevos. Cierto día empaquetaron entre 3 130 y 3 200 huevos de cada clase. Si usaron el mismo número de huevos de ambas categorías:

a) ¿Cuántos huevos empaquetaron en total?

b) ¿Cuántos estuches prepararon de cada clase?

36 •• Calcula cuántas piezas como la que aparece a continuación son necesarias, como mínimo, para construir un cubo:



37 ●● Tres piezas de tela miden, respectivamente, 72 m, 126 m y 180 m. Se desea cortar las tres piezas en trozos iguales de la mayor longitud posible:

a) ¿Qué longitud deben tener dichos trozos?

b) ¿En cuántas partes se dividirá cada pieza de tela?

38 ●● Un semáforo se pone en verde cada 5 min, otro cada 6 min y un tercero cada 4 min. Se acaban de poner en verde los tres, ¿cuándo volverán a coincidir en este color?

39 ●● Si se cuentan los libros de una estantería de 2 en 2, no sobra ninguno. Lo mismo ocurre si se cuentan de 3 en 3 o de 5 en 5. ¿Cuántos libros tiene como mínimo dicha estantería?

40 ●● Un trozo de papel continuo mide 1,50 m de largo y 45 cm de ancho. Si se quiere dibujar en él una cuadrícula formada por cuadrados enteros del mayor tamaño posible:

a) ¿Cuánto debe medir el lado del cuadrado?

b) ¿En cuántos cuadrados quedará dividida la cartulina?

41 ● ¿Cuál es el peso mínimo que se puede medir en una balanza empleando únicamente pesas de 30 g, o de 120 g o de 500 g?

42 ●●● Una carpeta contiene menos de 100 archivos. Contándolos de 4 en 4, de 5 en 5 o de 6 en 6, sobran, en todos los casos, 3 archivos. ¿Cuántos hay en la carpeta?

43 ●●● Al dividir la edad de Juan entre 3 y entre 8, el resto es 1. Sin embargo, al dividirla entre 7, el resto es 0. ¿Qué edad tiene Juan si todavía no ha cumplido 100 años?

44 ●●● El número de personas que participan en un concurso es tal que si se agrupan de 2 en 2 sobra una; si lo hacen de 3 en 3, sobran 2; si lo hacen de 5 en 5, sobran 4, y si lo hacen de 7 en 7, no sobra ninguna. ¿Cuántos concursantes hay si son más de 105 y menos de 125?

45 ●●● Un panadero ha preparado entre 140 y 200 galletas, que empaqueta en bolsas de 6 o de 8 unidades. Sin embargo, con dos galletas más podría haberlas empaquetado en bolsas de 10. ¿Cuántas galletas hizo?

Evaluación

Reconoces si entre dos números existe relación de divisibilidad

1 Averigua si 216 es múltiplo de 18.

2 Comprueba si 98 es divisible por 7.

3 Razona si 9 es un divisor de 34.

Obtienes los múltiplos y divisores de un número

4 Averigua los múltiplos comunes de 8 y 12 menores que 80.

5 Escribe todos los divisores comunes de 30 y 48.

Aplicas los criterios de divisibilidad

6 Indica, sin hacer ninguna división, cuáles de los siguientes números son divisibles por 2, cuáles por 3, cuáles por 5 y cuáles por 11.

a) 30 ***b)*** 99 ***c)*** 330 ***d)*** 2 145

7 ¿Qué cifra hay que añadir para que el número 13___ sea múltiplo de 3, pero no de 2? ¿Y para que sea múltiplo de 11?

Identificas si un número es primo o compuesto

8 Averigua si los números 137 y 391 son primos o compuestos.

Descompones un número en factores primos y obtienes el m.c.m. y el M.C.D.

9 Descompón en factores primos y calcula:

a) m.c.m (18, 30)
M.C.D. (18, 30)

b) m.c.m. (180, 756)
M.C.D. (180, 756)

c) m.c.m. (5, 10, 15)
M.C.D. (5, 10, 15)

d) m.c.m. (3, 6, 8)
M.C.D. (3, 6, 8)

Resuelves problemas de divisibilidad

10 En unos almacenes reciben ropa cada 6 días y juguetes cada 14 días. Hoy han coincidido los dos tipos de mercancía. ¿Cuántas veces volverán a coincidir en los próximos 100 días?

11 Rita ha comprado chicles de 15 céntimos y caramelos de 20 céntimos. ¿Cuánto se ha gastado, como mínimo si ha empleado la misma cantidad de dinero en las dos clases de golosinas?

12 En una cafetería tienen dos depósitos: uno contiene 125 L de refresco de limón y otro 100 L de horchata. Se ha transvasado el contenido de ambos a otros dos recipientes iguales, empleando un bidón de la mayor capacidad posible para hacer el menor número de transvases. En cada transvase el bidón siempre se ha llenado por completo. ¿Cuántos litros entran en él?