EJERCICIOS PROPUESTOS

11.1 Dos puntos determinan una recta.

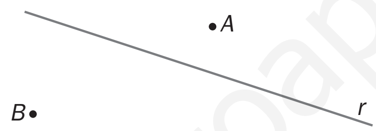
a) ¿Cuántas rectas se pueden trazar con un solo punto?

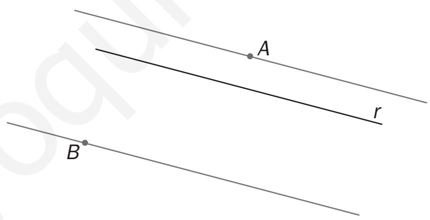
b) ¿Cómo son las rectas que pasan por ese punto?

a) Tantas como se quiera.

b) Secantes, porque se cortan todas en ese punto.

11.2 Dibuja dos rectas paralelas a la recta *r* que pasen por los puntos *A* y *B*.





11.3 La medida de un ángulo $\widehat{A}$ es 49° 45′ y la de otro ángulo $\widehat{B}$ es 130° 4′. ¿Son suplementarios los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$?

$\widehat{A} + \widehat{B} = 49° \, 45' + 130° \, 4' = 179° \, 49' \neq 180° \Rightarrow \widehat{A}$ y $\widehat{B}$ no son suplementarios.

11.4 La medida del ángulo $\widehat{A}$ es 50° 30′.

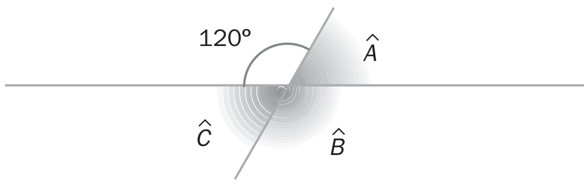
a) Halla el complementario de $\widehat{A}$.

b) ¿Cuánto mide el suplementario de $\widehat{A}$?

a) El complementario de $\widehat{A}$ es: $90° - \widehat{A} = 90° - 50° \, 30' = 39° \, 30'$.

b) El suplementario de $\widehat{A}$ es: $180° - \widehat{A} = 180° - 50° \, 30' = 129° \, 30'$.

11.5 Halla los valores de los ángulos que faltan.

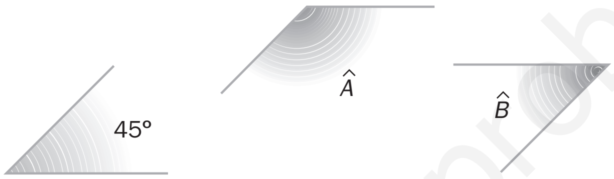


$\widehat{B} = 120°$ por ser opuestos por el vértice.

$\widehat{A}$ es el suplementario de 120°; por tanto: $\widehat{A} = 180° - 120° = 60°$.

$\widehat{C} = \widehat{A} = 60°$ por ser opuesto a $\widehat{A}$ por el vértice.

11.6 Calcula los ángulos que faltan.

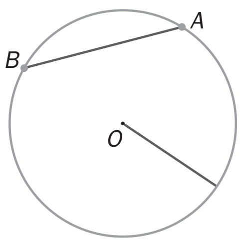


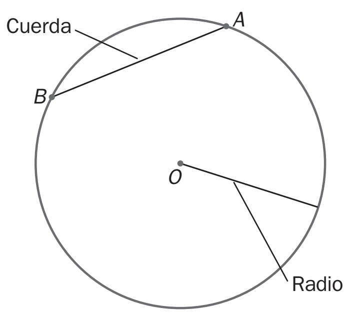
Llamamos $\widehat{C}$ al ángulo que mide 45°.

$\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son ángulos agudos y tienen lados paralelos dos a dos, luego $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$.

$\widehat{A}$ y $\widehat{C}$ tienen lados paralelos dos a dos; $\widehat{A}$ es un ángulo obtuso, y $\widehat{C}$, un ángulo agudo, luego son suplementarios, $\widehat{A} = 180° - \widehat{C} = 135°$

11.7 Identifica en la figura los elementos de la circunferencia que aparecen marcados en rojo. Si el radio mide 1,5 centímetros, ¿cuánto mide el diámetro?

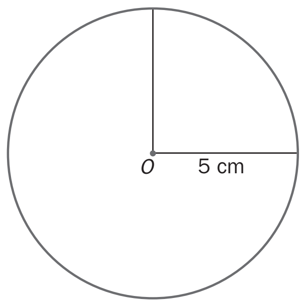




Como $d = 2 \cdot r = 2 \cdot 1{,}5 = 3$ cm

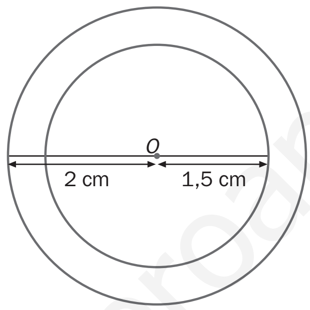
El diámetro mide 3 cm.

11.8 Dibuja un círculo de 5 centímetros de diámetro y dos radios que formen ángulo recto. ¿Qué figura circular resulta?



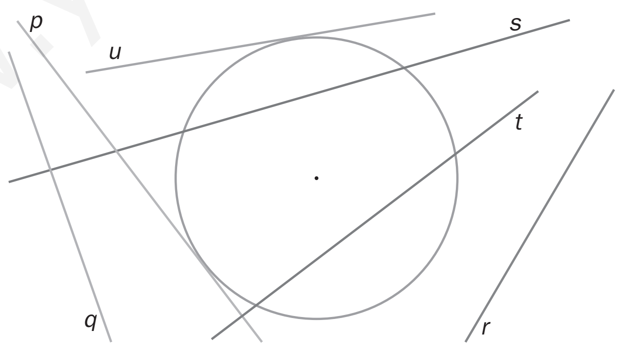
La figura resultante es un sector circular.

11.9 Dibuja un círculo de 2 centímetros de radio y una circunferencia de 3 centímetros de diámetro con el mismo centro. ¿Qué figura circular resulta entre ambos?



Resulta una corona circular.

11.10 Indica la posición relativa de esta circunferencia y cada una de las rectas.



Rectas exteriores: *q* y *r*

Rectas secantes: *s* y *t*

Rectas tangentes: *p* y *u*

11.11 El radio de una circunferencia mide 3 decímetros. La distancia de una recta al centro de la circunferencia es 4 decímetros. ¿Cuál es su posición relativa?

Como la distancia de la recta al centro, 4 dm, es mayor que el radio, 3 dm, son exteriores.

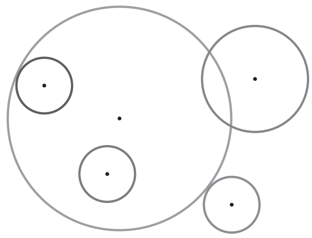
11.12 ¿Cómo son una recta y una circunferencia si la longitud del radio de la circunferencia es de 7 centímetros y la distancia de su centro a la recta es 10 centímetros?

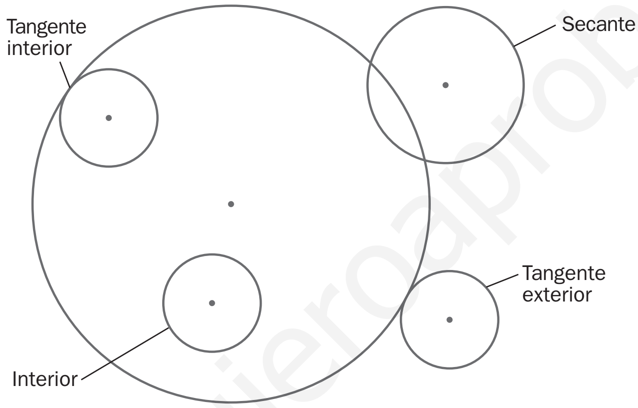
Como la distancia de la recta al centro, 10 cm, es mayor que el radio, 7 cm, son exteriores.

11.13 El radio de una circunferencia mide 4 centímetros. Si la distancia de su centro a una recta es 4 centímetros, ¿cuál es su posición relativa?

La distancia de la recta al centro, 4 cm, es igual que el radio, 4 cm; por tanto, son tangentes.

11.14 Indica la posición relativa de estas circunferencias.





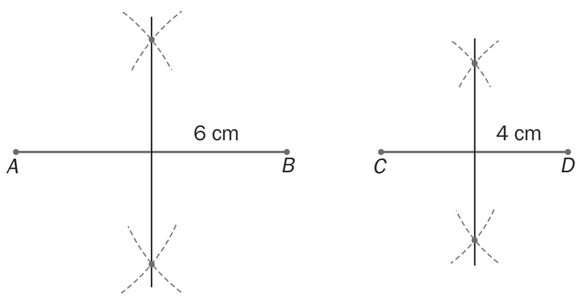
11.15 ¿Cómo son dos circunferencias si sus radios miden 14 y 10 centímetros, respectivamente y la distancia entre sus centros es 3 centímetros?

Como la distancia entre los centros, 3 cm, es menor que la diferencia de los radios, $14 - 10 = 4$ cm, las circunferencias son interiores.

11.16 Los radios de dos circunferencias miden 4 y 6 centímetros, respectivamente. La distancia entre sus centros es de 2 centímetros. ¿Cuál es su posición relativa?

Como la distancia entre los centros, 2 cm, es igual a la diferencia de los radios, $6 - 4 = 2$ cm, las circunferencias son tangentes interiores.

11.17 Traza las mediatrices de dos segmentos paralelos de 4 y 6 centímetros de longitud.



11.18 La distancia del punto *A* al punto *M* es 2,5 centímetros. Si *M* es el punto medio del segmento *AB*, ¿cuánto mide el segmento *AB*?

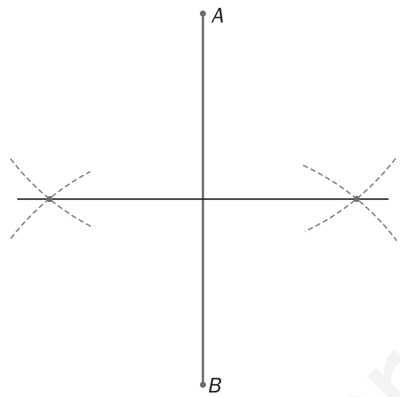
Por ser *M* el punto medio del segmento *AB*, la distancia del punto *M* al punto *B* es igual que la distancia del punto *A* al punto *M*.
Por tanto, el segmento *AB* mide: distancia *AB* = distancia *AM* + distancia *MB* = 2 · distancia *AM* = 2 · 2,5 = 5 cm.

11.19 Dibuja un segmento vertical de 7 centímetros de longitud.

a) Traza su mediatriz utilizando regla y compás.

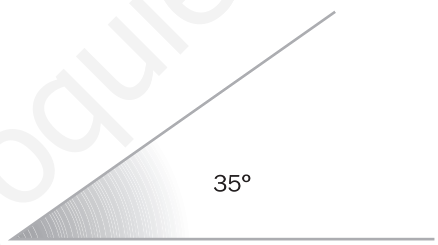
b) Comprueba que el punto de corte de la mediatriz con el segmento es su punto medio.

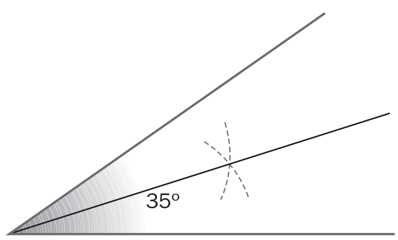
a)



b) Con la regla se comprueba que la distancia del punto *M* a *A* y de *M* a *B* es de 3,5 cm.

11.20 Traza la bisectriz del siguiente ángulo utilizando regla y compás.





11.21 ¿Cuánto miden los dos ángulos en que la bisectriz divide un ángulo recto?

Como los divide en dos ángulos iguales, cada uno mide: $\frac{90°}{2} = 45°$.

11.22 Se traza la bisectriz de un ángulo llano. ¿Cuánto miden los ángulos que se forman?

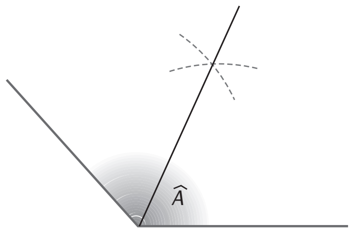
Cada uno mide: $\frac{180°}{2} = 90°$

11.23 **Dibuja la bisectriz de los siguientes ángulos.**

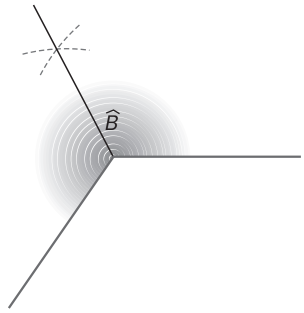
a) Un ángulo obtuso.

b) Un ángulo cóncavo.

a)

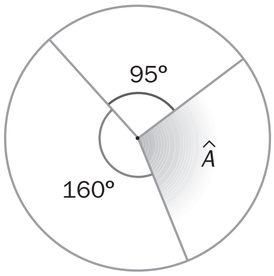


b)

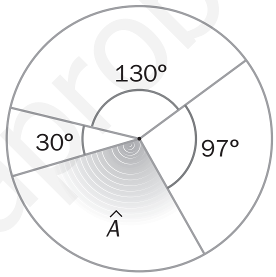


11.24 **Calcula la medida del ángulo central $\widehat{A}$ en los siguientes casos.**

a)



b)



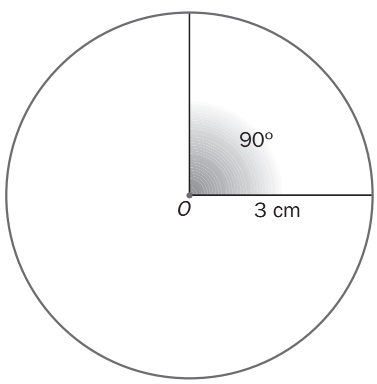
a) $\widehat{A} = 360° - (160° + 95°) = 105°$

b) $\widehat{A} = 360° - (30° + 130° + 97°) = 103°$

11.25 **El diámetro de una circunferencia mide 6 centímetros. Dibuja un arco de 90° y su ángulo central.**

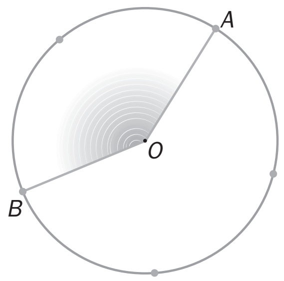
Al ser el radio la mitad del diámetro, este mide: $r = \frac{6}{2} = 3$.

La medida de un arco es la misma que la de su ángulo central correspondiente; por tanto, hay que dibujar un ángulo central de 90°.

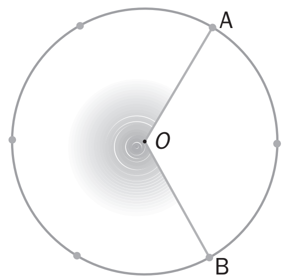


11.26 Las circunferencias de los dibujos se han dividido en partes iguales. Determina la medida de los arcos que se indican.

a)



b)



a) Como la circunferencia mide 360°, si se divide en 5 partes iguales, el ángulo central de cada uno es: $\frac{360°}{5} = 72°$. El arco correspondiente mide lo mismo que el ángulo central, 72°.

Como el arco *AB* abarca dos de las 5 partes de la circunferencia, el arco mide $2 \cdot 72° = 144°$.

b) Como la circunferencia mide 360°, si se divide en 6 partes iguales, el ángulo central de cada uno es: $\frac{360°}{6} = 60°$. El arco correspondiente mide lo mismo que el ángulo central, 60°.

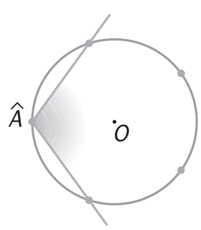
Como el arco *AB* abarca dos de las 6 partes de la circunferencia, el arco mide $2 \cdot 60° = 120°$.

11.27 En una semicircunferencia, ¿cuánto miden el ángulo central y su arco correspondiente?

El ángulo central mide 180°.

El arco correspondiente mide lo mismo que el ángulo central, 180°.

11.28 La circunferencia se ha dividido en arcos iguales. ¿Cuánto mide el ángulo inscrito $\widehat{A}$?

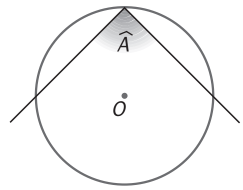


Como la circunferencia se ha dividido en 5 arcos iguales, cada uno de ellos mide: $\frac{360°}{5} = 72°$

El arco que abarca $\widehat{A}$ es 3 de las 5 partes de la circunferencia, el arco mide: $3 \cdot 72° = 216°$

El ángulo inscrito $\widehat{A}$ mide la mitad del arco que abarca: $\widehat{A} = \frac{216°}{2} = 108°$

11.29 Cuánto mide el ángulo inscrito que abarca una semicircunferencia?

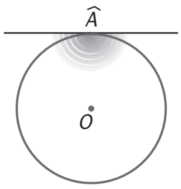


Como la medida del ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del arco que abarca y esta coincide con la medida del ángulo central, 180°, por ser una semicircunferencia, obtenemos:

$$\widehat{A} = \frac{180°}{2} = 90°$$

El ángulo inscrito que abarca una semicircunferencia mide 90°.

11.30 Un ángulo inscrito está formado por dos semirrectas tangentes. Con ayuda de un dibujo, calcula cuánto vale el ángulo central correspondiente.



La medida del ángulo inscrito, 180°, es igual a la mitad de la medida del arco que abarca, 360°; por tanto, la medida de un arco es la misma que la de un ángulo central.

El ángulo central mide 360°.

11.31 El radio de una circunferencia mide 9 centímetros. ¿Cuál es la longitud de esa circunferencia?

La longitud de la circunferencia es: $L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9 = 56{,}52$ cm

11.32 En un campo de fútbol, el radio del círculo central mide 9,15 metros. Calcula la longitud de la circunferencia que hay que pintar.

La longitud de la circunferencia que hay que pintar es: $L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}15 = 57{,}46$ m

11.33 El radio de una circunferencia mide 6 centímetros. ¿Cuál es la longitud de un arco de 120°?

$$L_{\text{arco de }120°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n°}{360°} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 \cdot 120°}{360°} = 12{,}56 \text{ cm}$$

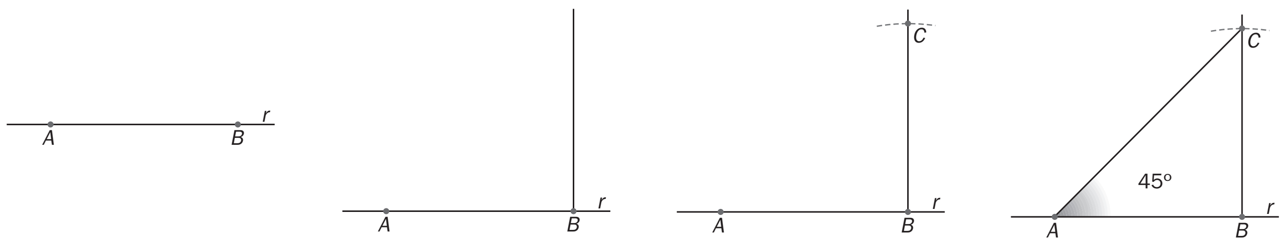
La longitud de un arco de 120° y radio 6 cm es 12,56 cm.

11.34 El diámetro de una circunferencia mide 8 decímetros. ¿Cuál es la longitud de un arco de 85°?

$$r = \frac{d}{2} = 4 \text{ dm} \Rightarrow L_{\text{arco de }85°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n°}{360°} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 85°}{360°} = 5{,}93 \text{ dm}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

11.35 Sobre una recta dada, construye un ángulo de 45°.



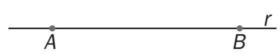
Se fijan dos puntos *A* y *B* en la recta *r*.

Se traza una recta perpendicular a *r* por *B*.

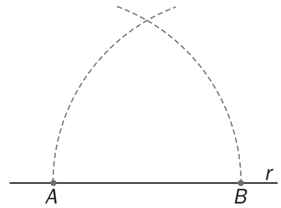
Con centro en *B*, se lleva la distancia *AB* sobre la perpendicular a *r*.

El ángulo *CAB* mide 45°, porque el triángulo *ABC* es isósceles rectángulo.

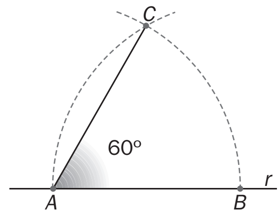
11.36 Sobre una recta dada, construye un ángulo de 120°.



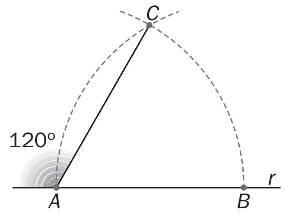
Se fijan dos puntos A y B en la recta r.



Con centro en A, se traza un arco de radio AB, y con centro en B, se traza un arco de radio AB.



Se determina el punto C. El ángulo $\widehat{CAB}$ mide 60º, porque el triángulo ABC es equilátero.



El ángulo suplementario de $\widehat{A}$ mide 120º.

CÁLCULO MENTAL

11.37 Calcula la medida de los ángulos en que la bisectriz divide a cada uno de los siguientes.

a) 40° **b) 120°** **c) 180°** **d) 210°**

La bisectriz divide un ángulo en dos partes iguales:

a) $\frac{40°}{2} = 20°$ b) $\frac{120°}{2} = 60°$ c) $\frac{180°}{2} = 90°$ d) $\frac{210°}{2} = 105°$

11.38 Calcula la medida del ángulo central cuando el ángulo inscrito en una circunferencia mide:

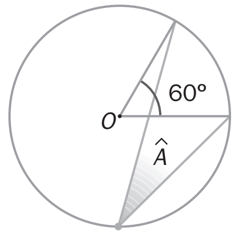
a) 30° **b) 50°** **c) 60°** **d) 80°**

La medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito.

a) $2 \cdot 30° = 60°$ b) $2 \cdot 50° = 100°$ c) $2 \cdot 60° = 120°$ d) $2 \cdot 80° = 160°$

11.39 Elige y razona la respuesta. El ángulo $\widehat{A}$ de la figura mide:

a) 30° **b) 15°** **c) 60°** **d) 10°**



El ángulo $\widehat{A}$, por ser inscrito, tiene como medida la mitad del arco que abarca: $\widehat{A} = \frac{60°}{2} = 30°$.

11.40 Calcula la longitud de una semicircunferencia de 2 centímetros de diámetro.

Se calcula la longitud de una circunferencia y la dividimos por 2.

$r = \frac{d}{2} = 1 \text{ cm} \Rightarrow L_{\text{circunferencia}} = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 = 6{,}28 \text{ cm}$

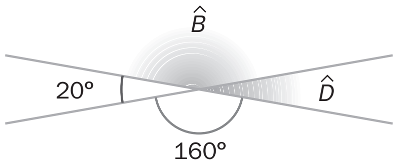
$L_{\text{semicircunferencia}} = \frac{L_{\text{circunferencia}}}{2} = \frac{6{,}28}{2} = 3{,}14 \text{ cm}$

11.41 **¿Cuánto mide el complementario de 60°?**

a) 120° **b) 90°** **c) 180°** **d) 30°**

Dos ángulos son complementarios si suman 90°; por tanto, el complementario de 60° es el del apartado d, 30°.

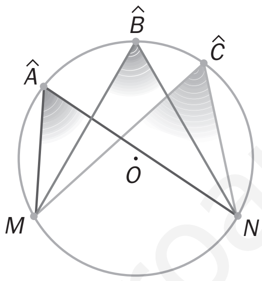
11.42 **Halla el valor de los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$ de la figura.**



$\widehat{B}$ es opuesto por el vértice a 160°. Entonces, $\widehat{B} = 160°$.

$\widehat{D}$ es opuesto por el vértice a 20°. Entonces, $\widehat{D} = 20°$.

11.43 **Un alumno dice que los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son iguales. ¿Por qué?**



Son iguales por ser ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco.

11.44 **En un segmento de 10 decímetros de longitud se traza la mediatriz. ¿Cuánto mide cada una de las partes que resultan?**

La mediatriz pasa por el punto medio, así que divide el segmento en dos partes iguales. Cada una mide 5 cm.

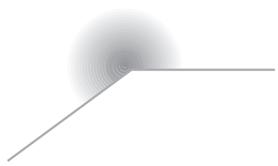
EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Ángulos

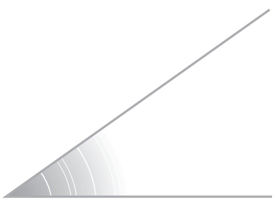
11.45 **Clasifica los siguientes ángulos.**

a)

c)



b)



d)

a) Obtuso y convexo.

c) Obtuso y cóncavo.

b) Agudo y convexo.

d) Obtuso y convexo.

11.46 Calcula, cuando sea posible, el complementario y el suplementario de:

a) $\widehat{A} = 25° \ 15'$ b) $\widehat{C} = 108°$ c) $\widehat{B} = 34° \ 37'$ d) $\widehat{D} = 89° \ 30'$

a) Complementario: $90° - \widehat{A} = 90° - 25° \ 15' = 64° \ 45'$
Suplementario: $180° - \widehat{A} = 180° - 25° \ 15' = 154° \ 45'$

b) Complementario: No se puede calcular porque es el ángulo que hay que sumar a $\widehat{C}$ para obtener 90° y $\widehat{C}$ es mayor de 90°.
Suplementario: $180° - \widehat{C} = 180° - 108° = 72°$

c) Complementario: $90° - \widehat{B} = 90° - 34° \ 37' = 55° \ 23'$
Suplementario: $180° - \widehat{B} = 180° - 34° \ 37' = 145° \ 23'$

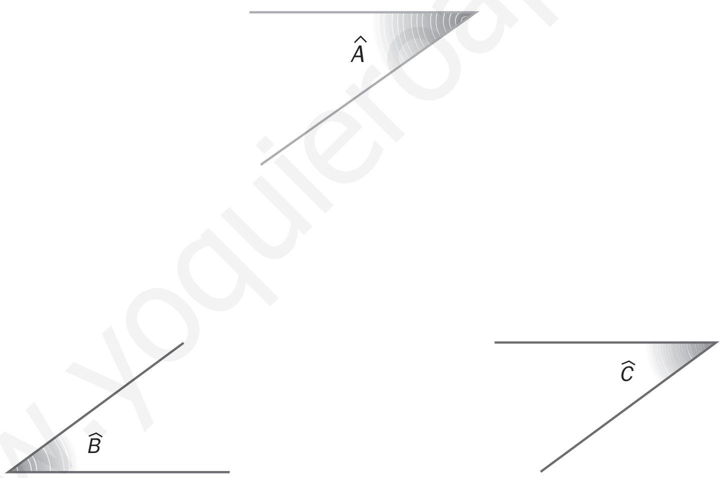
d) Complementario: $90° - \widehat{D} = 90° - 89° \ 30' = 30'$
Suplementario: $180° - \widehat{D} = 180° - 89° \ 30' = 90° \ 30'$

11.47 Si $\widehat{A}$ es un ángulo agudo y $\widehat{B}$ es obtuso, ¿pueden sumar 90°? ¿Por qué?

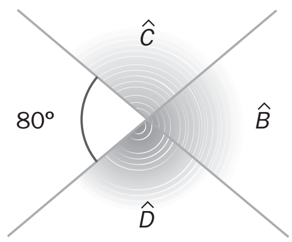
Porque $\widehat{B}$, al ser obtuso, ya mide más de 90°.

Ángulos iguales

11.48 Dibuja dos ángulos iguales a $\widehat{A}$ utilizando ángulos de lados paralelos.



11.49 Calcula los ángulos que faltan en la figura.



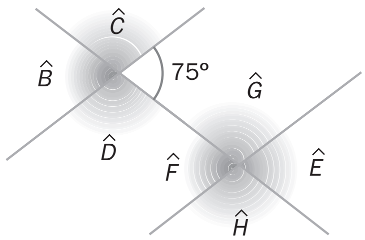
Se considera $\widehat{A} = 80°$.

$\widehat{B} = 80°$, por ser opuesto a $\widehat{A}$ por el vértice.

$\widehat{C}$ es el suplementario de $\widehat{B}$, entonces: $\widehat{C} = 180° - \widehat{B} = 180° - 80° = 100°$

$\widehat{D} = \widehat{C} = 100°$ por ser $\widehat{D}$ y $\widehat{C}$ opuestos por el vértice.

11.50 Con el valor de uno de los ángulos de la figura, calcula el valor del resto.



Se considera $\widehat{A} = 75°$.

$\widehat{B} = 75°$ por ser $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ opuestos por el vértice.

$\widehat{E}$ y $\widehat{F}$ son ángulos agudos y de lados paralelos a $\widehat{B}$. Por tanto, $\widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{B} = 75°$.

$\widehat{C}$ es el suplementario de 75°, entonces: $\widehat{C} = 180° - 75° = 105°$.

$\widehat{D} = \widehat{C} = 105°$ por ser $\widehat{D}$ y $\widehat{C}$ opuestos por el vértice.

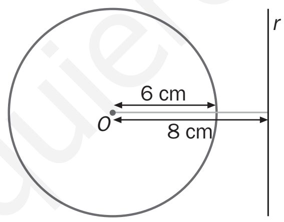
$\widehat{G}$ es el suplementario de $\widehat{E} = 75°$, entonces: $\widehat{G} = 180° - 75° = 105°$.

$\widehat{H} = \widehat{G} = 105°$ por ser $\widehat{G}$ y $\widehat{H}$ opuestos por el vértice.

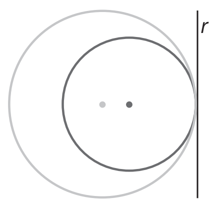
Posiciones de rectas y circunferencias

11.51 ¿Cuál es la posición relativa de una recta situada a 8 centímetros de una circunferencia de 6 centímetros de radio?

Como la distancia de la recta al centro de la circunferencia es mayor que el radio de la misma, la recta es exterior a la circunferencia.

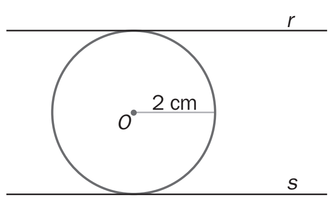


11.52 Dibuja dos circunferencias tangentes interiores y una recta tangente a ambas.



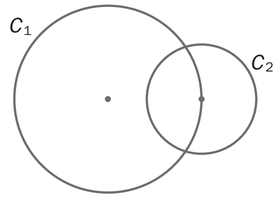
11.53 Traza una circunferencia de 0,2 decímetros de radio y dos rectas tangentes a ella y paralelas entre sí.

$r = 0{,}2$ dm $= 2$ cm



11.54 Si el centro de una circunferencia está sobre otra circunferencia, ¿cuál es la posición relativa de las dos circunferencias?

Las dos circunferencias resultan secantes.

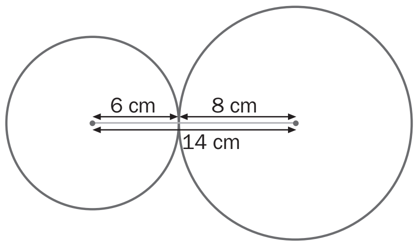


11.55 Dos circunferencias tienen de radio 6 y 8 centímetros, respectivamente.

a) ¿Cuál es su posición relativa si la distancia entre los centros es 14 centímetros?

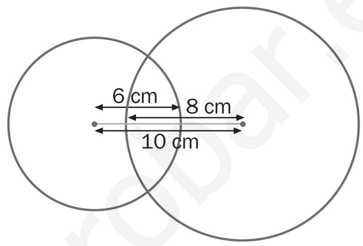
b) ¿Y si fuera 10 centímetros?

a)



Tangentes exteriores

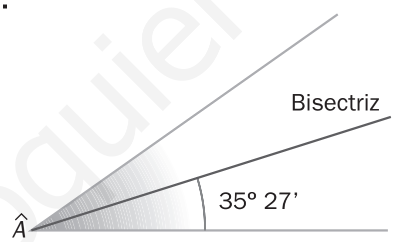
b)



Secantes

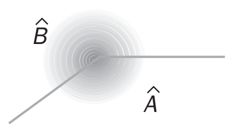
Mediatriz y bisectriz

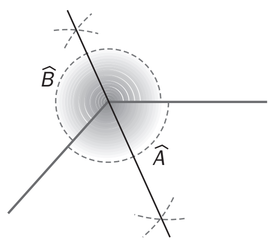
11.56 Calcula el ángulo $\widehat{A}$ de la figura.



La bisectriz divide $\widehat{A}$ en dos ángulos iguales de 35° 27′; entonces: $\widehat{A} = 2 \cdot 35° \, 27' = 70° \, 54'$.

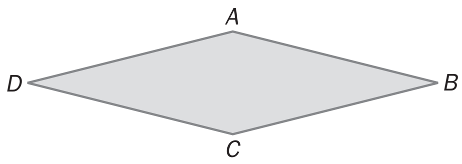
11.57 Traza las bisectrices de los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ y di qué observas.

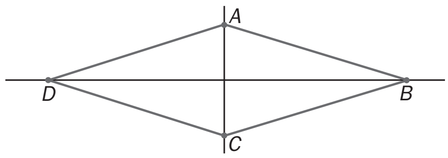




Las bisectrices de los dos ángulos coinciden en la misma recta.

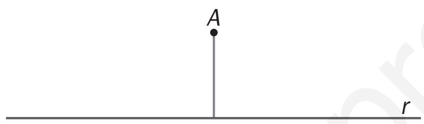
11.58 **Traza las mediatrices de los segmentos *AC* y *BD* y di qué observas.**



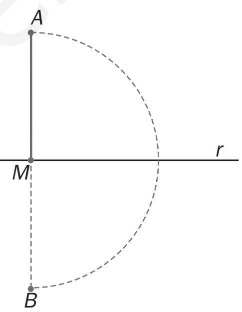


La mediatriz del segmento *DB* contiene el segmento *AC*.
La mediatriz del segmento *AC* contiene el segmento *DB*.

11.59 **En la siguiente figura, *r* es la mediatriz del segmento *AB*. Halla *B*.**



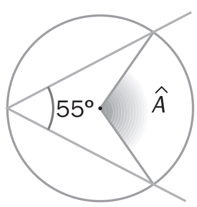
Para obtener *B* hay que prolongar el segmento que une *A* con *M*, y con un compás se traza el arco, con centro *M* y radio *MA*. El punto obtenido de la intersección del arco con la recta que contiene *AM* es *B*.



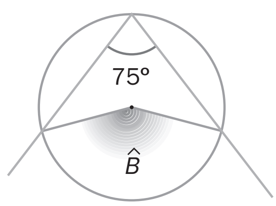
Ángulos centrales y ángulos inscritos

11.60 **Calcula los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ de las siguientes figuras.**

a)



b)



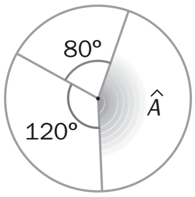
La medida del ángulo central es el doble del arco que abarca el ángulo inscrito correspondiente.

a) $\widehat{A} = 2 \cdot 55° = 110°$

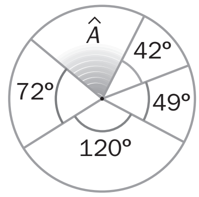
b) $\widehat{B} = 2 \cdot 75° = 150°$

11.61 Halla el valor del ángulo central $\widehat{A}$ utilizando los datos de cada figura.

a)



b)

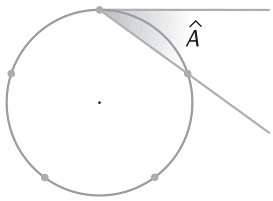


a) $\widehat{A} = 360° - 120° - 80° = 160°$

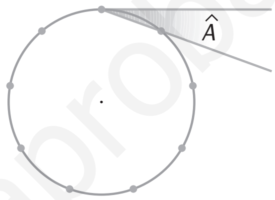
b) $\widehat{A} = 360° - 42° - 49° - 120° - 72° = 77°$

11.62 Determina la medida de los siguientes ángulos inscritos, sabiendo que la circunferencia se ha dividido en partes iguales.

a)



b)



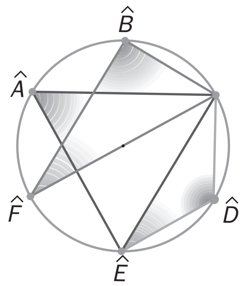
a) La circunferencia se ha dividido en 5 arcos iguales, luego miden: $\frac{360°}{5} = 72°$

Como $\widehat{A}$ es inscrito y abarca el arco de 72°, mide la mitad de este: $\widehat{A} = \frac{72°}{2} = 36°$

b) Esta circunferencia se ha dividido en 9 arcos iguales, luego miden: $\frac{360°}{9} = 40°$

Como $\widehat{A}$ es inscrito y abarca un arco de 40°, mide la mitad de este: $\widehat{A} = \frac{40°}{2} = 20°$

11.63 Los seis arcos en los que se ha dividido la circunferencia son iguales. Calcula los ángulos inscritos, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, $\widehat{E}$ y $\widehat{F}$.



Los seis arcos en que se ha dividido la circunferencia son iguales. Luego cada arco mide: $\frac{360°}{6} = 60°$

Según los arcos que abarca cada ángulo y teniendo en cuenta que al ser inscritos, equivalen a la mitad de ese arco, se obtiene:

$\widehat{A} = \frac{2 \cdot 60°}{2} = 60°$ $\quad \widehat{B} = \frac{3 \cdot 60°}{2} = 90°$ $\quad \widehat{D} = \frac{4 \cdot 60°}{2} = 120°$ $\quad \widehat{E} = \frac{2 \cdot 60°}{2} = 60°$ $\quad \widehat{F} = \frac{60°}{2} = 30°$

Longitud de circunferencia y arcos

11.64 Calcula la longitud de una circunferencia:

a) De 7 centímetros de radio.

b) De 18 decímetros de diámetro.

c) Si un arco de 90° mide 1,57 metros.

a) La longitud de la circunferencia es: $L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 7 = 43{,}96$ cm

b) La longitud de la circunferencia es: $L = \pi \cdot d = \pi \cdot 18 = 56{,}52$ dm

c) Si se conoce la longitud de un arco de 90°, se sabe la longitud de $\frac{1}{4}$ de la circunferencia, puesto que $\frac{360°}{4} = 90°$.

Entonces, la longitud de la circunferencia es: $L = 4 \cdot 1{,}57 \Rightarrow L = 6{,}28$ m

11.65 El diámetro de una circunferencia mide 6 centímetros. Determina el valor de la longitud de un arco con los siguientes grados.

a) 30° **b) 120°** **c) 45°** **d) 90°**

a) $L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n°}{360°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 30°}{360°} = 1{,}57$ cm

b) $L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n°}{360°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 120°}{360°} = 6{,}28$ cm

c) $L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n°}{360°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 45°}{360°} = 2{,}36$ cm

d) $L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n°}{360°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 90°}{360°} = 4{,}71$ cm

PROBLEMAS PARA APLICAR

11.66 Se quiere forrar el borde de una mesa circular de 90 centímetros de diámetro. ¿Cuántos metros de material se necesitan?

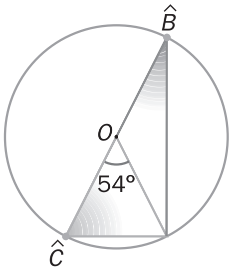
Se necesitan: $L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 45 = 282{,}6$ cm $= 2{,}83$ metros de material.

11.67 Los compañeros de Ismael tienen que calcular en cuántas partes iguales ha dividido una circunferencia sabiendo que el ángulo central que une dos puntos consecutivos es de 45°.

Como el ángulo central que une dos puntos consecutivos es de 45°, al dividir 360° entre 45° debe darnos el número de partes.

Por tanto, la circunferencia se ha dividido en: $\frac{360°}{45°} = 8$ partes.

11.68 Calcula los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ indicados de la siguiente figura.



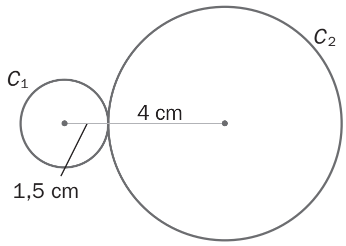
El ángulo $\widehat{B}$ es inscrito; por tanto, mide la mitad del central: $\frac{54°}{2} = 27°$

El arco correspondiente al ángulo $\widehat{C}$ es el suplementario de 54°, es decir, $180° - 54° = 126°$

El ángulo $\widehat{C}$ es inscrito, luego su medida es: $\frac{126°}{2} = 63°$

11.69 Rosa y Luis quieren dibujar en el suelo dos circunferencias tangentes exteriores de 3 y 8 centímetros de diámetro. Si ellos se sitúan en el centro, ¿a qué distancia deben colocarse uno del otro?

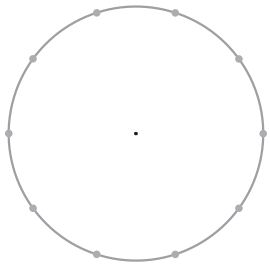
Para que sean tangentes, solo deben tener un punto común, y eso sólo es posible cuando la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios.



Por tanto, Rosa y Luis deben situarse a 1,5 + 4 = 5,5 cm de distancia.

11.70 Copia la figura y construye a partir de ella los ángulos inscritos cuyas medidas son las siguientes.

a) 18° **b) 36°** **c) 54°** **d) 72°**



El arco de cada división mide: $\frac{360°}{10} = 36°$

Luego basta construir ángulos inscritos que abarquen 1, 2, 3 y 4 divisiones, respectivamente.

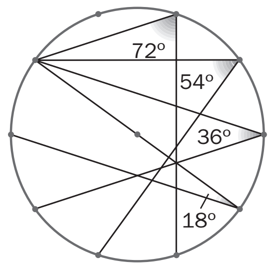
Si consideramos el ángulo inscrito que abarca:

1 división: $\frac{36° \cdot 1}{2} = \frac{36°}{2} = 18°$

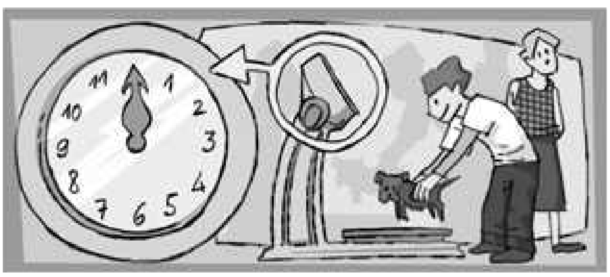
2 divisiones: $\frac{36° \cdot 2}{2} = \frac{72°}{2} = 36°$

3 divisiones: $\frac{36° \cdot 3}{2} = \frac{108°}{2} = 54°$

4 divisiones: $\frac{36° \cdot 4}{2} = \frac{144°}{2} = 72°$



11.71 Observa la báscula de la figura.



a) ¿Qué ángulo recorre la aguja al pasar de un kilogramo a otro?

b) ¿Y cuando recorre 100 gramos?

a) Ángulo recorrido al pasar de un kilogramo a otro: $\frac{360°}{12} = 30°$

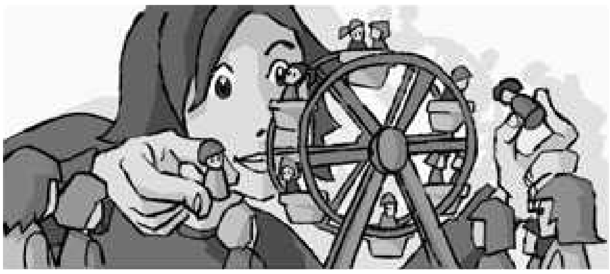
b) Como un kilogramo equivale a 10 veces 100 g, el ángulo que recorre la aguja en este caso es: $\frac{30°}{10} = 3°$

11.72 ¿Cuánto mide el borde de la tapa de una cacerola de aluminio de 24 centímetros de diámetro?

Las cacerolas tienen formas circulares. Por tanto, su tapa es un círculo, y el borde de esta, una circunferencia.

El borde mide: $L = \pi \cdot d = \pi \cdot 24 = 75{,}36$ cm

11.73 En la noria de la figura, ¿a qué distancia se encuentra cada cestillo si el diámetro de la noria es de 75 centímetros?



Si la noria tiene 6 cestillos y están todos a la misma distancia, el ángulo central que abarca dos cestillos consecutivos mide: $\dfrac{360°}{6} = 60°$.

Como el radio es la mitad del diámetro, $r = \dfrac{75}{2} = 37{,}5$ cm

La longitud del arco que hay entre un cestillo y otro es: $L = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n°}{360°} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 37{,}5 \cdot 60°}{360°} = 39{,}25$ cm

11.74 Calcula la diferencia entre las longitudes de las circunferencias de las monedas de 20 céntimos de euro y 50 céntimos de euro. Indica cómo has hallado los datos que necesitas para ello.

Para poder calcular las longitudes hay que hallar primero el diámetro de cada una de las monedas.

El diámetro de la moneda de 0,20 € es 22,25 mm y el de la moneda de 0,50 € es 24,25 mm.

Sus longitudes son: $L_{0,20\,€} = \pi \cdot d = \pi \cdot 22{,}25 = 69{,}87$ mm

$L_{0,50\,€} = \pi \cdot d = \pi \cdot 24{,}25 = 76{,}15$ mm

La diferencia entre las longitudes es: $L_{0,50\,€} - L_{0,20\,€} = 76{,}15 - 69{,}87 = 6{,}28$ mm

11.75 Un relojero quiere construir un reloj de esfera circular de 8 decímetros de diámetro.

a) ¿Cuánto miden los ángulos centrales que se forman al unir el centro de la circunferencia con cada uno de los números que marcan la hora?

b) ¿Cuál es la longitud del arco de circunferencia que une cada número con el siguiente?

a) En el reloj hay que poner 12 números, así que habrá 12 ángulos centrales.

Cada uno de ellos medirá: $\dfrac{360°}{12} = 30°$

b) La longitud del arco de circunferencia que le corresponde a cada ángulo de 30° es:

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n°}{360°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 30°}{360°} = 2{,}09 \text{ dm}$$

11.76 El radio de la rueda de un remolque mide 60 centímetros. ¿Cuánto mide la longitud de la huella que deja en el suelo en una vuelta?

La longitud de la huella de la rueda es: $L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 60 = 376{,}8$ cm $= 3{,}8$ m

11.77 **El ecuador terrestre tiene 40 000 kilómetros de longitud aproximadamente. Si suponemos que la Tierra es una esfera perfecta, ¿cuánto mide el radio de la Tierra?**

La longitud de la circunferencia es: $L = 2 \cdot \pi \cdot r$

$40\,000 = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow 40\,000 = 6{,}28 \cdot r \Rightarrow r = \dfrac{40\,000}{6{,}28} = 6\,369{,}43$ km

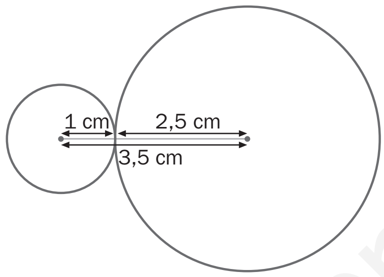
El radio mide 6 369,43 km.

R E F U E R Z O

Posiciones relativas

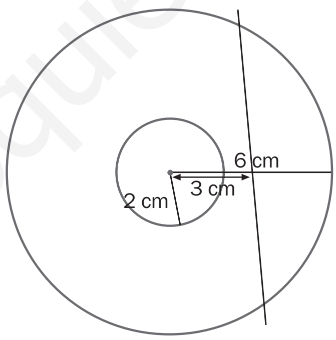
11.78 **El radio de una circunferencia mide 1 centímetro y el diámetro de otra mide 50 milímetros. La distancia entre sus centros es 3,5 centímetros. ¿Cuál es su posición relativa?**

Las circunferencias son tangentes exteriores porque la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios.



11.79 **Junto a dos circunferencias concéntricas de radios 2 y 6 centímetros, respectivamente, se dibuja una recta a una distancia del centro de 3 centímetros. ¿Qué posición tiene la recta respecto a cada una de las circunferencias?**

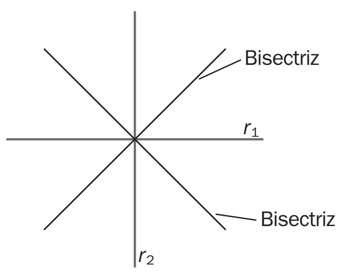
La situación del problema queda reflejada en la figura.



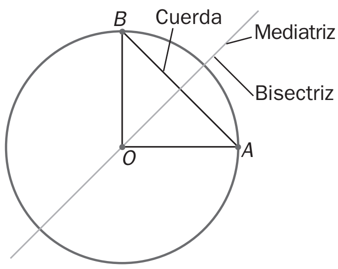
La recta es exterior a la circunferencia de 2 cm de radio y secante a la circunferencia de 6 cm de radio.

Mediatriz y bisectriz

11.80 **Traza dos rectas secantes que se corten formando un ángulo de 90° y las bisectrices de los 4 ángulos formados.**



11.81 En un círculo de 10 centímetros de diámetro se considera un sector circular de 90° y su cuerda correspondiente. ¿Qué relación existe entre la bisectriz del sector y la mediatriz de la cuerda?



La bisectriz del sector y la mediatriz de la cuerda coinciden.

Ángulos: iguales, centrales e inscritos

11.82 ¿Son iguales el complementario de 32° 40′ y el suplementario de 147° 20′?

Complementario de 32° 40′: $90° - 32° 40' = 57° 20'$

Suplementario de 147° 20′: $180° - 147° 20' = 32° 40'$

No son iguales porque no miden lo mismo.

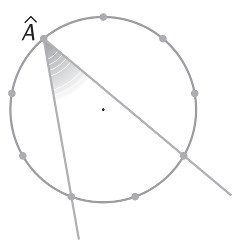
11.83 ¿Cómo son y cuánto miden los arcos que abarcan un ángulo central de 75° y un ángulo inscrito de 37° 30′?

El arco que abarca el ángulo central mide lo mismo que él. Por tanto, es de 75°.

El arco que abarca el ángulo inscrito es el doble de su medida. Entonces es de $2 \cdot 37° 30' = 75°$.

Los dos miden lo mismo, 75°; por tanto, son iguales.

11.84 ¿Cuánto mide el ángulo $\widehat{A}$ de la figura?



Como la circunferencia se ha dividido en 9 partes iguales, cada arco mide: $\frac{360°}{9} = 40°$

El ángulo $\widehat{A}$ abarca dos arcos de 40°, es decir, abarca un arco de 80°.

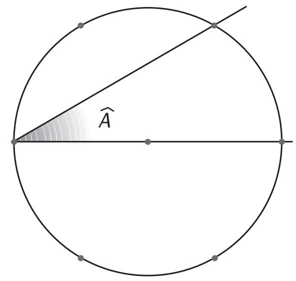
Como $\widehat{A}$ es un ángulo inscrito: $\widehat{A} = \frac{80°}{2} = 40°$

Longitudes de circunferencias y arcos

11.85 En una circunferencia de radio 4 centímetros dibuja un ángulo inscrito de 30°.

a) ¿Cuánto mide el ángulo central correspondiente?

b) ¿Cuál es la longitud del arco de circunferencia que abarca?



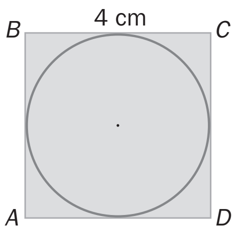
a) Si el ángulo inscrito es de 30°, el arco que abarca es el doble, 60°.

El ángulo central mide lo mismo que el arco que abarca, 60°.

b) $L = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n°}{360°} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 60°}{360°} = 4{,}19$ cm

La longitud de arco mide 4,19 cm.

11.86 Calcula la longitud de la circunferencia.



El diámetro de la circunferencia coincide con el lado del cuadrado. Entonces mide 4 cm.

Su longitud es: $L = \pi \cdot d = \pi \cdot 4 = 12{,}56$ cm

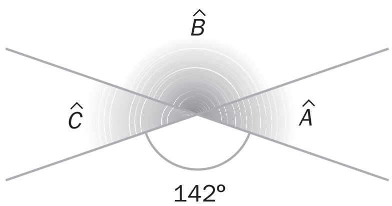
AMPLIACIÓN

11.87 Encuentra un ángulo que sea igual a su complementario y otro que sea igual a su suplementario.

En el primer caso hay que encontrar un ángulo que sumado con él mismo dé 90°. Ese ángulo es: $\dfrac{90°}{2} = 45°$

En el segundo caso hay que encontrar un ángulo que sumado con él mismo dé 180°. El ángulo es: $\dfrac{180°}{2} = 90°$

11.88 Calcula los ángulos que faltan en esta figura.



$\widehat{B} = 142°$ por ser opuestos por el vértice.

$\widehat{A}$ es el suplementario de 142°. Entonces, $\widehat{A} = 180° - 142° = 38°$.

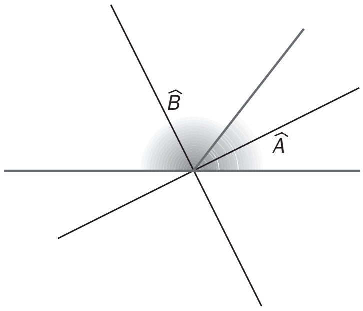
$\widehat{C} = \widehat{A} = 38°$ por ser opuestos por el vértice.

11.89 Estudia el ángulo que forman las bisectrices de dos ángulos.

a) Suplementarios.

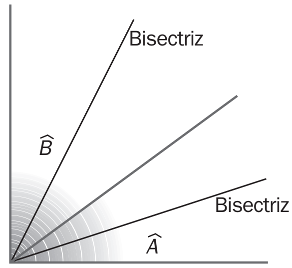
b) Complementarios.

a)



Forman un ángulo de 90°.

b)



Forman un ángulo de 45°.

11.90 Si una circunferencia de 9 centímetros de diámetro se divide en 10 arcos iguales, ¿cuál es la longitud de cada uno de ellos?

Si la circunferencia se ha dividido en 10 arcos iguales, cada ángulo central mide: $\frac{360°}{10} = 36°$

Como el radio es la mitad del diámetro, $r = \frac{9}{2} = 4{,}5$ cm

Entonces, la longitud de uno de los arcos es: $L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n°}{360°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4{,}5 \cdot 60°}{360°} = 2{,}83$ cm

11.91 La longitud de un arco de circunferencia correspondiente a un ángulo central de 30° mide 26 centímetros.

a) ¿Cuál es la longitud de la circunferencia?

b) ¿Y la del diámetro?

a) Si el ángulo central mide 30°, el arco también.

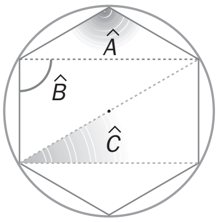
La circunferencia se ha dividido en un número entero de arcos de 30° de amplitud, es decir, en $\frac{360°}{30°} = 12$ arcos, que mide cada uno 26 centímetros.

Luego la longitud de la circunferencia es: $12 \cdot 26 = 312$ cm

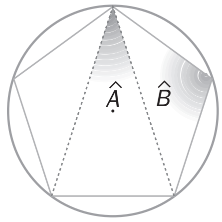
b) $L = \pi \cdot d \Rightarrow 312 = 3{,}14 \cdot d \Rightarrow d = \frac{312}{3{,}14} = 99{,}36$ cm

11.92 Calcula los ángulos inscritos indicados en las siguientes figuras.

a)



b)



a) Los 6 arcos en que se ha dividido la circunferencia son iguales. Luego miden: $\dfrac{360°}{6} = 60°$

Los 3 ángulos son inscritos; por tanto, miden la mitad del arco que abarcan:

$\widehat{A}$ abarca 4 arcos de 60°: $\widehat{A} = \dfrac{4 \cdot 60°}{2} = 120°$ $\widehat{C}$ abarca 1 arco de 60°: $\widehat{C} = \dfrac{60°}{2} = 30°$

b) Los 5 arcos en que se ha dividido la circunferencia son iguales. Luego miden: $\dfrac{360°}{5} = 72°$

Los 2 ángulos son inscritos; por tanto, miden la mitad del arco que abarcan:

$\widehat{A}$ abarca 1 arco de 72°: $\widehat{A} = \dfrac{72°}{2} = 36°$ $\widehat{B}$ abarca 3 arcos de 72°: $\widehat{B} = \dfrac{3 \cdot 72°}{2} = 108°$

11.93 La longitud de una semicircunferencia es 9,42 centímetros.

a) ¿Cuál es la longitud de la circunferencia?

b) ¿Cuánto mide el radio?

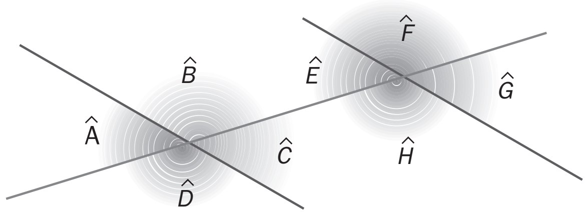
a) Una semicircunferencia es la mitad de una circunferencia. Entonces: $L = 2 \cdot 9{,}42 = 18{,}84$ cm.

b) Utilizando la fórmula de la longitud de la circunferencia y sustituyendo en ella el valor obtenido en el apartado anterior:

$L = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow 18{,}84 = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow 18{,}84 = 6{,}28 \cdot r \Rightarrow r = \dfrac{18{,}84}{6{,}28} = 3$ cm

El radio mide 3 cm.

11.94 Determina el valor de los ángulos que faltan en la figura sabiendo que $\widehat{A} + \widehat{C} = 94°$.



$\widehat{A}$ y $\widehat{C}$ son iguales por ser opuestos por el vértice y entre los dos suman 94°:

$\widehat{A} = \widehat{C} = \dfrac{94°}{2} = 47°$

$\widehat{E}$ y $\widehat{G}$ son los correspondientes de $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$. Por tanto, $\widehat{E} = \widehat{G} = \widehat{A} = \widehat{C} = 47°$.

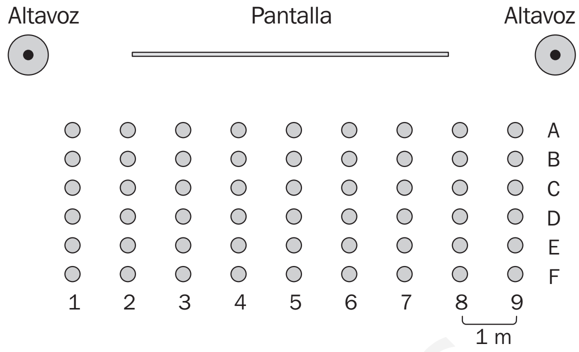
$\widehat{B}$ es el suplementario de $\widehat{A}$: $\widehat{B} = 180° - \widehat{A} = 180° - 47° = 133°$

$\widehat{D} = \widehat{B} = 133°$ por ser opuestos por el vértice.

$\widehat{F}$ y $\widehat{H}$ son los correspondientes de $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$. Entonces, $\widehat{F} = \widehat{H} = \widehat{B} = \widehat{D} = 133°$.

11.95 Entradas para el cine

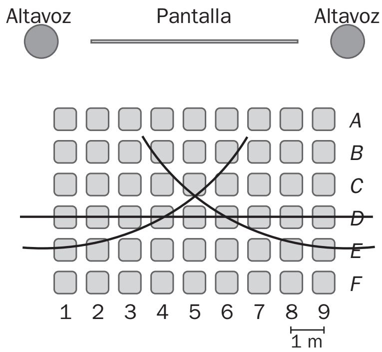
Roberto va a adquirir una entrada para el cine por internet. En la pantalla del ordenador le ofrecen el siguiente esquema de la sala de cine:



Con ayuda de regla y compás, indica los asientos adecuados para que Roberto:

a) Esté situado a ocho metros de cada uno de los altavoces.

b) Esté situado a ocho metros de uno de los altavoces y a siete metros de la pantalla.

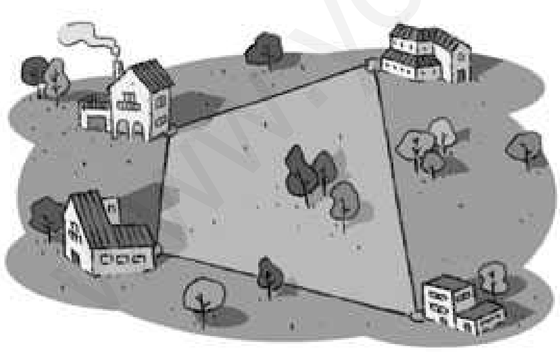


a) El asiento más adecuado es el *C*5.

b) Los asientos más adecuados son el *D*4 y el *D*6.

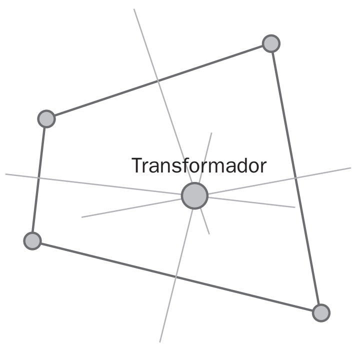
11.96 Abastecimiento de energía

Se quiere situar un transformador eléctrico que permita abastecer de energía a cuatro casas.



a) ¿Sería posible encontrar un punto equidistante de las cuatro casas independientemente de cómo estas se encuentren situadas?

b) Intenta hallar dicho punto en el caso representado en el siguiente dibujo.



a) No se puede en todos los casos ya que las mediatrices de los segmentos de extremos dos de las casas no tienen que pasar todas por un mismo punto fijo.

b) En este caso sí es posible ya que las mediatrices pasan todas por un mismo punto.

11.A1 Una recta está a una distancia de 50 milímetros del centro de una circunferencia de 10 centímetros de diámetro. ¿Qué posición tienen la recta y la circunferencia?

El radio de la circunferencia es la mitad del diámetro: 5 cm = 50 mm.
Como la recta está a la misma distancia del centro que cualquier punto de la circunferencia, es tangente a ella.

11.A2 Calcula el ángulo central correspondiente a un ángulo inscrito de 84°.

El ángulo central es el doble del ángulo inscrito. Entonces, el ángulo central mide $2 \cdot 84° = 168°$.

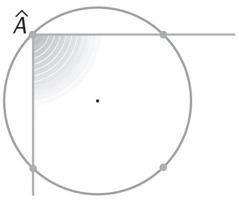
11.A3 ¿Cuál es el complementario y el suplementario de los ángulos?

a) 32° **b) 63° 5′** **c) 87°**

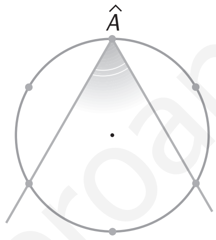
a) Complementario: $90° - 32° = 58°$ Suplementario: $180° - 32° = 148°$
b) Complementario: $90° - 63°\,5' = 26°\,55'$ Suplementario: $180° - 63°\,5' = 116°\,55'$
c) Complementario: $90° - 87° = 3°$ Suplementario: $180° - 87° = 93°$

11.A4 Halla la medida del ángulo inscrito en cada caso.

a)



b)



a) Como la circunferencia se ha dividido en 4 arcos iguales, cada uno mide: $\frac{360°}{4} = 90°$

El ángulo inscrito abarca dos arcos, es decir, abarca un arco de $2 \cdot 90° = 180° \Rightarrow \widehat{A} = \frac{180°}{2} = 90°$

b) Como la circunferencia se ha dividido en 6 arcos iguales, cada uno mide: $\frac{360°}{6} = 60°$

El ángulo inscrito abarca dos arcos, es decir, abarca un arco de $2 \cdot 60° = 120° \Rightarrow \widehat{B} = \frac{120°}{2} = 60°$

11.A5 En una circunferencia de 22 centímetros de diámetro, calcula la longitud del arco que abarca un ángulo inscrito de 45°.

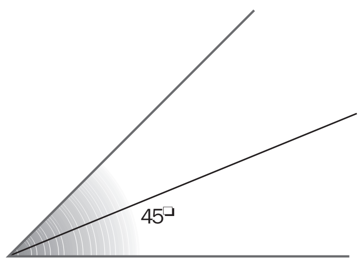
El arco que abarca el ángulo inscrito es el doble de su medida: $2 \cdot 45° = 90°$.
El radio de la circunferencia es la mitad del diámetro: $r = 11$ cm.

Entonces, la longitud del arco es: $L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n°}{360°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 11 \cdot 90°}{360°} = 17{,}27$ cm

11.A6 Dibuja la bisectriz de un ángulo de 45° e indica cuánto miden cada uno de los ángulos en que queda dividido por ella.

La bisectriz divide un ángulo en dos iguales.

Cada uno de estos mide: $\frac{45°}{2} = 22°\,30'$.



11.A7 **Explica por qué los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son iguales al ángulo $\widehat{A}$.**

$\widehat{B}$ y $\widehat{A}$ son ángulos iguales por ser opuestos por el vértice.

$\widehat{C} = \widehat{A}$ por ser ángulos de lados paralelos.

11.A8 **Una circunferencia de 6 decímetros de radio se divide en 3 partes iguales. ¿Cuánto mide el arco correspondiente a cada una de ellas?**

Si la circunferencia se ha dividido en 3 arcos iguales, cada ángulo central mide: $\dfrac{360°}{3} = 120°$.

La longitud de cada parte de los arcos es: $L = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n°}{360°} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 120°}{360°} = 12{,}56$ dm

11.A9 **Un arco de 90° de una circunferencia mide 25,12 centímetros. ¿Cuánto mide la longitud de la circunferencia?**

$$25{,}12 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n°}{360°} \Rightarrow r = \frac{25{,}12 \cdot 360°}{2 \cdot \pi \cdot n°} = 16 \text{ cm} \Rightarrow L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 16 = 100{,}48 \text{ cm}$$

La longitud de la circunferencia es de 100,48 cm.

11.A10 **Calcula la longitud de una semicircunferencia sabiendo que el radio mide 5 centímetros.**

$$L_{\text{circunferencia}} = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4 \text{ cm} \Rightarrow L_{\text{semicircunferencia}} = \frac{L_{\text{circunferencia}}}{2} = 15{,}7 \text{ cm}$$

M U R A L D E M A T E M Á T I C A S

Jugando con las matemáticas

CAMBIO DE RUMBO

El pez del dibujo está formado por ocho segmentos. Cambia de lugar tres segmentos como máximo para que el pez nade en sentido contrario.