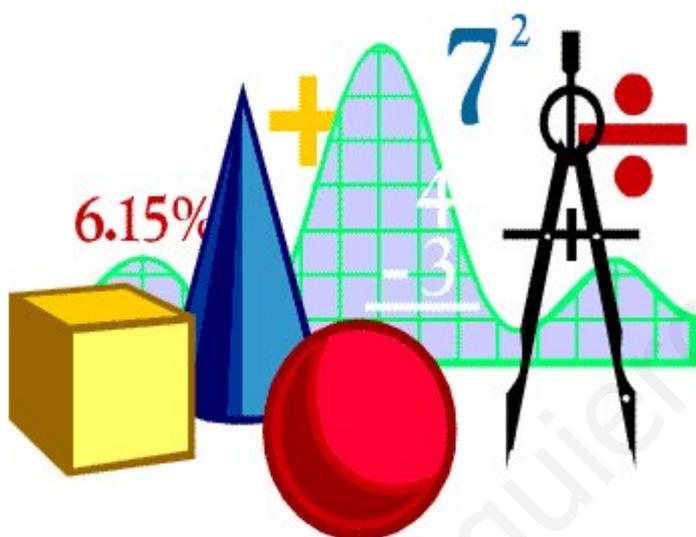


Cuaderno de Apoyo



MATEMÁTICAS 1º E.S.O

Nombre:.....
.....

1º E.S.O.:.....



ÍNDICE

1º Números Naturales	Pág. 4
2º Potencias	Pág. 9
3º Números enteros	Pág. 12
4º Raíces cuadradas	Pág. 21
5º Divisibilidad	Pág. 26
6º Fracciones	Pág. 31
7º Números decimales	Pág. 38
8º Proporcionalidad	
8.1 Directa	Pág. 45
8.2 Inversa	Pág. 50
8.3 Porcentajes	Pág. 53
9º Expresiones algebraicas. Ecuaciones	
9.1 Expresiones algebraicas	Pág. 56
9.2 Valor numérico de una expresión algebraica.	Pág. 57
9.3 Monomios.	Pág. 59
9.4 Ecuaciones de primer grado	Pág. 63
10º El sistema métrico decimal	Pág. 69
11º Elementos geométricos	
11.1 Rectas	Pág. 76
11.2 Ángulos	Pág. 78
12º Polígonos	
12.1 Líneas poligonales	Pág. 85
12.2 Triángulos	Pág. 85
12.3 Cuadriláteros	Pág. 86
12.4 Polígonos regulares	Pág. 87
12.5 Teorema de Pitágoras	Pág. 93
13º Circunferencia	Pág. 95
14º Longitudes y áreas	Pág. 99
15º Cuerpos geométricos. Volúmenes	
15.1 Poliedros	Pág. 105
15.2 Poliedros regulares	Pág. 105
15.3 Prismas	Pág. 106
15.4 Pirámides	Pág. 106
15.5 Cilindro	Pág. 106
15.6 Cono	Pág. 107
16º Tablas y gráficas	Pág. 113
17º Estadística	Pág. 121
18º Probabilidad	Pág. 125

1º NÚMEROS NATURALES

Ejercicios



1º Escribe, para cada caso, el número que corresponda y cómo se lee:

- a) 15 centenas y 7 unidades
- b) 88 millares, 67 decenas y 29 unidades
- c) 3 millares, 34 centenas y 42 decenas

2º Halla el resultado de estas operaciones:

- a) $3 + 4 \cdot 2$
- b) $8 + 10 : 2 - 3 \cdot 2$
- c) $3 \cdot 2 + 4 \cdot 5$
- d) $2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2$
- e) $4 \cdot 3 - 2 + 5 \cdot 2$
- f) $8 + 12 : 3 \cdot 2 - 6$
- g) $3 \cdot 4 + 2 - 6 : 2$
- h) $8 + 3 - 2 \cdot 4 - 1$
- i) $5 - 3 + 2 \cdot 2$
- j) $4 + 6 : 2 - 3 + 2 \cdot 5$
- k) $3 + 2 \cdot 3 : 6 - 2$
- l) $2 - 6 \cdot 2 : 4 + 3 - 5 \cdot 2$

3º De las siguientes operaciones indica cuáles son verdaderas, V, y cuáles son falsas, F, y en ese caso poner la solución correcta:

- 1) $(7+5) \cdot 8 = 7 + 5 \cdot 8$
- 2) $7 \cdot (6+3) = 7 \cdot 6 + 3$
- 3) $(4+7) \cdot 4 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 7$
- 4) $11 \cdot (20-10) = 20 - 11 \cdot 10$
- 5) $3-5+3-5+3-5 = 3 \cdot (3-5)$
- 6) $5+2+5+2+5+2+5+2 = 5 \cdot 5 + 2$
- 7) $5 \cdot (5+2) = 5 + 5 \cdot 2$
- 8) $7 \cdot (3-9) = 7 \cdot 3 - 7 \cdot 9$

4º Cuando hay operaciones con paréntesis se pueden hacer dos cosas, resolver primero las operaciones encerradas entre los mismos, o aplicar la propiedad distributiva.

Realiza las operaciones siguientes aplicando la propiedad distributiva:

- a) $(7+5) \cdot 8 =$ ¿Es igual que $7+5 \cdot 8$? SI NO
- b) $7 \cdot (6+3) =$ ¿Es igual que $7 \cdot 6 + 3$? SI NO
- c) $(4+7) \cdot 4 =$ ¿Es igual que $4 \cdot 4 + 4 \cdot 7$? SI NO
- d) $5 \cdot (5+2) =$ ¿Es igual que $5 \cdot 5 + 2$? SI NO
- e) $(3+9) \cdot 7 =$ ¿Es igual que $7 \cdot 3 - 7 \cdot 9$? SI NO

5º Calcula:

- a) $3 + 5 \cdot (4 - 3)$
- b) $3 \cdot (4 + 2) - 3$
- c) $3 \cdot (6 - 2) + 4 \cdot (2 + 3)$
- d) $12 - (3 + 4 \cdot 2 - 1) + 4$
- e) $18 - 4 \cdot (4 \cdot 2 - 6) + 15 : 3$
- f) $5 \cdot (7 - 3 \cdot 2) - 12 : 4$
- g) $8 : 2 \cdot 4 + 6 : (3 \cdot 2)$
- h) $4 \cdot 6 : 3 - (10 - 12 : 2 + 1)$
- i) $3 \cdot (4 + 2) - 8 : (3 + 1) + 4 \cdot 2$
- j) $6 + 2 \cdot (8 - 4 \cdot 2 + 3) - 6 : (5 + 1)$
- k) $40 : (5 \cdot 2 - 2) - 5 \cdot (6 - 3 \cdot 2)$
- l) $(4 + 3) \cdot (6 - 2) - (3 + 1) \cdot (7 - 3)$
- m) $(4 \cdot 6 - 5 \cdot 2) : (15 - 8) + (8 - 2) \cdot 2$
- n) $(15 - 5 \cdot 2) \cdot 3 - (6 \cdot 2 - 3 \cdot 3)$
- o) $18 : (9 \cdot 3 - 6 \cdot 3) + 4 \cdot 2 - (27 - 5 \cdot 4)$
- p)

6º Resuelve los siguientes ejercicios combinados:

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1) $(9 + 6) : 3$ | 14) $(4 \times 7 \times 25 \times 2) : 25$ |
| 2) $(18 - 12) : 6$ | 15) $(3 \times 5 \times 8 \times 4) : (3 \times 8)$ |
| 3) $(12 - 8 + 4) : 2$ | 16) $(7 \times 8) : 8$ |
| 4) $(18 + 15 + 30) : 3$ | 17) $(60 \times 2) : 10$ |
| 5) $(54 - 30) : 4$ | 18) $60 : (10 \times 2)$ |
| 6) $(15 - 9 + 6 - 3) : 3$ | 19) $(60 : 5) : (10 : 5)$ |
| 7) $(32 - 16 - 8) : 8$ | 20) $(60 : 2) : 10$ |
| 8) $(16 - 12 - 2 + 10) : 2$ | 21) $60 : (10 : 2)$ |
| 9) $(6 \times 5) : 2$ | 22) $(60 \times 2) : (10 \times 2)$ |
| 10) $(9 \times 4) : 2$ | 23) $(24 : 3) - 2$ |
| 11) $(5 \times 6) : 5$ | 24) $(9 : 3) \times (4 : 2)$ |
| 12) $(5 \times 9 \times 8) : 3$ | 25) $10 \times (6 : 2) \times (4 : 2) \times 7$ |
| 13) $(7 \times 6 \times 5) : 6$ | |

7º Aproxima a los millares por truncamiento las cantidades siguientes:

- | | |
|------------|------------|
| a. 2357 | d. 824 846 |
| b. 824 746 | e. 34754 |
| c. 3347 | f. 4 8461 |

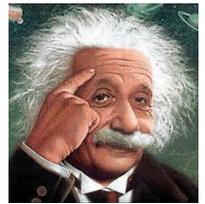
8º Calcula:

- $78 - 6 - 12 + 8 - 1 + 7 + 2 - 3 =$
- $189 + 72 - 4 + 53 - 7 + 19 =$
- $700 - 250 \cdot 2 + 9 \cdot 3 - 25 - 1 \cdot 9 =$
- $54 + 45 + 2 \cdot 123 - 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 =$
- $5 \cdot 7 - 6 \cdot 4 + 3 \cdot 10 \cdot 5 - 2 - 1 + 150 : 5 + 7 =$
- $(98 - 89 + 6 \cdot 3 \cdot 2 - 5 \cdot 2) : 7 =$
- $25 - (46 - 11) : 7 + 3 \cdot 8 =$
- $(14 - 4) \cdot 2 + 8 \cdot 7 - 2 + (14 - 6) : 2 + 7 \cdot 4 =$
- $6 \cdot (4 + 2 \cdot 3) + 3 - 2 \cdot (4 + 25 : 5) =$
- $25 + (89 - 45) : 11 - 4 \cdot 2 + 17 =$
- $(6 \cdot 4 + 8 \cdot 10 + 11 \cdot 6) : (26 - 6 \cdot 2 - 4) =$
- $[2 \cdot (8 - 5) + 4 \cdot 3 - 56 : 7 + 2] \cdot 3 =$
- $[(15 + 6) \cdot 2 : 6 - 3] \cdot [36 : 2 - (4 + 6)] : [(36 - 20) : 4] =$
- $2 \cdot 9 \cdot 3 - 5 + 4 \cdot 3 - (5 \cdot 2 + 4) =$
- $[25 - (5 - 4 + 2 \cdot 6 + 10)] \cdot [(2 : 2 + 7 - 3) : (5 - 4 + 3 \cdot 2 - 6)] =$
- $89 - 10 - 15 + 7 + 1 - 7 + 24 - 13 =$
- $19 + 42 - 5 + 33 - 17 + 1 =$
- $600 - 120 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 15 - 2 \cdot 6 =$
- $24 + 35 + 2 \cdot 13 - 3 \cdot 5 - 5 \cdot 2 + 6 : 2 =$
- $2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 \cdot 10 - 8 - 4 + 250 : 25 - 7 =$
- $(108 - 88 + 3 \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 4 + 5 \cdot 4) : 7 =$
- $35 - (46 - 11) : 5 + 2 \cdot 8 =$
- $(8 - 6) \cdot 3 + 9 \cdot 7 - 10 + (20 - 6) : 7 + 9 \cdot 3 =$
- $5 \cdot (4 \cdot 2 + 3) + 11 - 4 \cdot (4 + 15 : 3) =$
- $10 + (78 - 45) : (3 + 8) - 5 \cdot 2 + 25 =$
- $(5 \cdot 3 + 3 + 11 \cdot 6) : (18 - 5 \cdot 2 - 2) =$
- $[3 \cdot (9 - 5) + 2 \cdot 5 - 49 : 7 + 3] : (12 - 9) =$
- $[(10 + 4) \cdot 3 : 6 - 5 + 2] \cdot [26 : 2 - (4 + 6)] : [(26 - 10) : 4] =$

- 29) $3 \cdot 4 \cdot 5 - 5 + 7 \cdot 3 - (6 \cdot 2 + 9) =$
 30) $45 - 5 - 12 + 4 - 1 + 7 + 2 - 6 =$
 31) $172 + 25 - 4 + 67 - 7 + 15 =$
 32) $400 - 150 \cdot 2 + 8 \cdot 3 - 25 - 1 + 1 \cdot 9 =$
 33) $54 - 45 + 2 \cdot 123 - 3 \cdot 6 - 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 =$
 34) $5 \cdot 7 - 6 \cdot 4 + 3 \cdot 10 \cdot 5 - 2 - 1 + 250 : 5 + 3 =$
 35) $(98 - 89 + 6 \cdot 3 \cdot 2 - 5 \cdot 2) : 7 =$
 36) $25 - (66 - 10) : 7 + 3 \cdot 5 =$
 37) $(18 - 4) \cdot 2 + 3 \cdot 9 - 2 + (12 - 6) : 2 - 5 \cdot 5 =$
 38) $9 \cdot (10 - 2 \cdot 4) + 3 - 2 \cdot (4 + 75 : 5) =$
 39) $[25 + (76 - 13)] : \{11 - 4 \cdot 2 + 8\} =$
 40) $(5 \cdot 4 + 8 \cdot 10 + 11 \cdot 4) : (16 - 4 \cdot 2 + 4) =$
 41) $[2 \cdot (9 - 5) + 4 \cdot 3 - 49 : 7 + 2] : 3 =$
 42) $[(15 + 3) \cdot 2 : 6 - 3] \cdot [28 : 2 - (4 + 6)] : [(25 - 16) : 9] =$
 43) $2 \cdot 9 - 5 + 4 \cdot 3 - (5 \cdot 3 + 4) =$
 44) $[25 - (5 - 4 + 2 \cdot 6 + 10)] \cdot (2 : 2 + 7 - 3) : (5 - 4 + 3 \cdot 2 - 6) =$
 45) $[6 + (10 - 2 - 3 \cdot 4 + 10)] \cdot (6 \cdot 2 - 10 + 3) : (5 + 6 + 4 \cdot 2 - 4) =$

Problemas

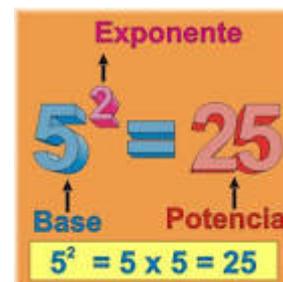
- 1º En un parque de atracciones existen dos tipos de entradas: la infantil, que cuesta 15 €, y la de adulto, que vale 18 €. Cierta día han vendido 302 entradas infantiles y 1274 entradas de adulto. ¿Cuánto dinero han recaudado por la venta de entradas para niños? ¿Y por el resto de las entradas?
- 2º Marta se encuentra en el kilómetro 340 de una carretera. Dos horas y media después está en el kilómetro 610 de la misma carretera. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido en ese tiempo?
- 3º Marcos ha salido de casa con 60 €. Se ha gastado 22 € en un libro, 18 € en un CD y 12 € en una camiseta. ¿Cuánto dinero le ha sobrado?
- 4º Hugo está haciendo una colección que consta de 234 cromos. Si ya tiene 127, ¿cuántos cromos le faltan para terminar la colección?
- 5º Si José Manuel es 27 años mayor que su hijo Gonzalo, ¿qué edad tendrá este último cuando su padre tenga 60 años?
- 6º Un concesionario de coches ha vendido en un año 324 vehículos, 53 más que el año anterior. ¿Cuántos coches ha vendido en total en esos dos años?
- 7º En un partido de baloncesto, el equipo local ha perdido por una diferencia de 12 puntos. Si ha conseguido un total de 74 puntos, ¿cuántos puntos ha conseguido el equipo visitante?
- 8º Pilar nació en el año 1969, y su hija Ana, en 2003. ¿Qué edad tendrá Pilar cuando Ana cumpla 15 años?
- 9º Paula coge su coche con 45 L de gasolina y consume 27 L hasta que se detiene para repostar. ¿Cuántos litros de combustible ha echado Paula si tiene 55 L cuando abandona la gasolinera?
- 10º Maite va tres días por semana a la piscina. Si nada 1300 m cada día, ¿cuántos metros nadará en cuatro semanas?



- 11º** En un supermercado se colocan 15 cajas de huevos con 12 docenas cada una. ¿Cuántos huevos contienen las 15 cajas?
- 12º** Paco compra 3 CD de 18 € cada uno y 2 libros de 15 € cada uno. Si paga con un billete de 100 €, ¿cuánto dinero le devuelven?
- 13º** Un mayorista compra a un agricultor 300 sacos de patatas por 3 600 € Y se gasta en transporte 390 €. Si vende 224 sacos a 27 € Y el resto a 25 €, ¿qué beneficio obtiene por la venta de todos los sacos?
- 14º** Carmen reparte por igual 108 cromos entre 18 amigos. ¿Cuántos cromos les da a cada uno?
- 15º** Silvia tiene 34 € para comprar bolígrafos. Si cada uno vale 3 €, ¿cuántos puede comprar? ¿Le sobra dinero? ¿Cuántos euros necesita para adquirir uno más?
- 16º** Javier sale de casa con 78 € y, después de comprar 5 CD al mismo precio, le sobran 18 €. ¿Cuál es el precio de cada CD?
- 17º** Marta compra 3 entradas para un concierto y paga con un billete de 50 € y otro de 20 €. Si cada entrada cuesta 18 €, ¿cuánto dinero le devuelven?
- 18º** Roberto tiene que hacer la revisión del coche a los 40000 km. Si el cuentakilómetros marca 25000 km y cada mes hace alrededor de 1 500 km, ¿dentro de cuántos meses tendrá que llevarlo a revisar?
- 19º** En un campamento hay 72 chavales que se reparten en 6 equipos para un juego. Si a cada equipo se le entregan 9 cintas rojas y 3 amarillas, ¿cuántas cintas se necesitan para jugar?
- 20º** Un vendedor compra camisetas a 36 € el paquete de 12 unidades y las vende a 10 € el par. ¿Cuántas camisetas debe vender para ganar 300 €?
- 21º** Rosana compra un televisor por 1300 €. Para ello, da una entrada y paga el resto en 6 meses sin recargo. Si cada mes quiere pagar 120 €, ¿cuánto dinero tiene que dar de entrada?
- 22º** En una granja avícola se han recogido 6500 huevos. En el control de calidad se retiran 260. Con el resto se preparan 120 cartones de dos docenas y los demás se reparten en cartones de una docena. ¿Cuántos cartones de una docena se preparan en total?
- 23º** Marta va a comprar un saco de 20 kg de melocotones para un restaurante, pero, al ir a pagar, comprueba que no tiene suficiente dinero y se lleva solo 15 kg, con lo que se ahorra 10 €. ¿Cuánto ha tenido que pagar por los 15 kg?
- 24º** Un coche cuesta 18320 €, lo que supone 450 € menos que el modelo superior. ¿Cuánto cuesta este último modelo?
- 25º** Pedro y Samuel tienen que repartir 1220 sobres en paquetes de 50. Pedro divide 1220 entre 50 sin quitar ceros ni en el dividendo ni en el divisor, y afirma que harán 24 paquetes, y les sobrarán 20 sobres. Samuel, tras hacer la división quitando un cero en el dividendo y otro en el divisor, dice que van a poder hacer 24 paquetes pero que les sobrarán 2 sobres. ¿Cuál de las dos amigos lleva razón?
- 26º** En un jardín hay un rosal junto a un lila. El lilo mide 120 cm, 40 cm más que el rosal. ¿Cuánto mide: el rosal? '
- 27º** Tres hermanos juntan sus cromos. Alicia tiene 12 cromos, 3 menos que Miguel, mientras que Javier tiene 4 más que Miguel. ¿Cuántos cromos tienen entre los tres?
- 28º** Las ciudades Machuca, Terraplén, Cercadas y Barriles se encuentran alineadas, en ese orden, en la misma carretera. Desde Machuca a Terraplén hay 35 km; desde Terraplén

- a Cercadas, 15 km, y desde Machuca a Barriles, 86 km. ¿Qué distancia separa Cercadas de Barriles?
- 29º** Aníbal trabaja en una fábrica que está a 18 km de su casa. ¿Cuántos kilómetros recorre a la semana sabiendo que libra los sábados y los domingos?
- 30º** Amelia ha recogido hoy, en su granja, 22 bandejas de huevos, y Arturo, 18 bandejas. Si en una bandeja entran dos docenas y media, ¿cuántos huevos han recogido entre los dos?
- 31º** Un parque de atracciones recibe una media de 8 600 personas al día en primavera, 15 400 en verano, 6 200 en otoño y 1 560 en invierno. ¿Cuántos visitantes tiene en un año?
- 32º** Un restaurante pagó el mes pasado a su proveedor 1 144 € por una factura de 143 kg de carne. ¿Cuántos kilos ha gastado este mes sabiendo que la factura asciende a 1 448 €?
- 33º** Un tendero compra 15 cajas de leche con 10 botellas de litro cada una. Cada caja le sale a 5 €. En el transporte se cae una caja y se rompen 5 botellas. Después vende la mercancía al detalle, a 1 € la botella. ¿Cuál es la ganancia que obtiene?
- 34º** Un almacenista compra 200 cajas de naranjas, de 20 kg cada una, por 1 000 €. El transporte vale 160 €. Las selecciona y las envasa en bolsas de 5 kg. En la selección desecha, por defectuosas, unos 100 kg. ¿A cómo debe vender la bolsa si desea ganar 400 €?
- 35º** Si preguntamos a Aurora y a Joaquín cuántas papeletas han vendido entre los dos, responderán que 25. Si preguntamos a Joaquín e Irene, dirán que 35, y si lo hacemos con Aurora e Irene, dirán que 30. ¿Cuántas papeletas ha vendido cada uno?
- 36º** Un almacenista de fruta compra las manzanas a 22 € la caja y las vende a 2 €/kg. Sabiendo que una caja contiene 15 kg, ¿cuántas cajas ha de vender para ganar 600 €?
- 37º** Una finca rectangular tiene 90 m de largo y 42 m de ancho. Se desea cercar con una alambrada sostenida por postes colocados cada 6 metros. Si cada poste cuesta 10 €, y cada metro de alambrada cuesta 2 €. ¿Cuánto costará la cerca?
- 38º** Con la venta de 21 vacas se han comprado 8 caballos y han sobrado 7250 €. Si cada caballo se ha valorado en 800 €, ¿en cuánto se ha valorado cada vaca? (650 €)
- 39º** El mayor de cuatro hermanos tiene 17 años y los otros tres tienen 3, 5 y 9 años menos que aquel, respectivamente. ¿Cuánto sumarán las edades de los cuatro hermanos dentro de 8 años?
- 40º** Una madre le saca 28 años a su hijo. Sabiendo que dentro de 16 años la edad de la madre doblará a la del hijo, averigua: a) la edad que tendrán dentro de 16 años; b) la edad actual de cada uno
- 41º** Un carpintero compró 45 rollos de chapa de 120 m cada rollo. Si ha gastado 1 751 m, ¿cuántos metros le quedan?
- 42º** Una librería compra una remesa de 40 libros a 10 € cada uno. ¿Cuánto gana por la venta de los libros si los vende a 13€cada uno? Si solo vendiese la mitad a 15 €, ¿cuánto ganaría?
- 43º** Una ferretería compra 4 bobinas de cable, de 200 m cada una, a 2 € el metro. ¿A cuánto debe vender el metro si quiere ganar 800 €?

2º POTENCIA DE EXPONENTE NATURAL



Recordemos que elevar un número a una potencia es multiplicarlo por sí mismo tantas veces como indique otro llamado exponente.

Base es el número que se multiplica por sí mismo (que se escribe debajo).

Exponente es el número que indica las veces que aparece la base en la multiplicación (se escribe encima del anterior en pequeño).

Ejemplo: **Exponente** $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
Base

OPERACIONES CON POTENCIAS DE LA MISMA BASE.-

1º Para **multiplicar** potencias de igual base, se suman los exponentes y se mantiene la base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplos:

1) $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

2) $3^4 \cdot 3^6 = 3^{4+6} = 3^{10}$

2º Para **dividir** potencias de igual base, se restan los exponentes y se conserva la base.

Ejemplos:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

1) $4^8 : 4^3 = 4^{8-3} = 4^5$

2) $5^{10} : 5^5 = 5^{10-5} = 5^5$

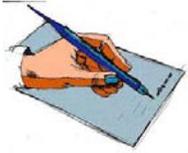
3º Para **elevar una potencia a otra potencia**. Se eleva la base al producto (multiplicación) de los exponentes; o sea, se conserva la base y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ejemplos:

1) $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$

2) $(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4$



Ejercicios

1º) Aplica las propiedades de las potencias y expresa en forma de una única potencia:

1) $3^5 \cdot 3^7 \cdot 3^0 =$

2) $2^3 \cdot 2^5 =$

3) $3^8 : 3^6 =$

4) $(2^3)^2 =$

5) $2^5 \cdot 3^5 =$

6) $5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 =$

7) $7^8 : 7 \cdot 7^3 =$

8) $2^8 \cdot 2^3 =$

9) $(7^5 \cdot 7^1) : (7^2 \cdot 7^3) =$

10) $(5^3 \cdot 5^2 \cdot 5^4) : (5^2 \cdot 5^6) =$

11) $(2^3)^4 =$

12) $(3^5)^0 =$

13) $2^7 \cdot 5^7 =$

14) $12^4 : 4^4 =$

15) $(5^1)^2 =$

16) $6^6 \cdot 2^6 =$

17) $3^4 \cdot 3 =$

18) $(4^2)^5 : (4^2 \cdot 4^8) =$

19) $\frac{3^6 \cdot 3}{3^4} =$

20) $(8-4)^2 \cdot 4^2 =$

21) $6^4 : (10-4)^4 =$

22) $x^3 \cdot x^2 \cdot x^4 =$

23) $a^8 : a^3 =$

24) $(x^2)^3 =$

25) $x^6 \cdot x^4 \cdot x^2 =$

26) $((a^2)^3)^2 =$

2º) . Expresa en una sola potencia:

1) $2^2 \cdot 2^3 =$

2) $5^8 : 5^3 =$

3) $(2^3)^5 =$

4) $5^8 \cdot 5^3 =$

5) $(7^2)^4 =$

6) $(9^3)^5 =$

7) $(1^2)^4 =$

8) $((2^3)^5)^3 =$

9) $6^2 \cdot 6^3 \cdot 6^4 \cdot 6^3 =$

10) $4^6 \cdot 4^3 \cdot 4^2 \cdot 4^3 =$

11) $5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4 : 5^2 =$

12) $(9^{10} : 9^6) : 9^2 =$

13) $(2^6 : 2^4) \cdot 2^3 =$

14) $(3^7 : 3^6) : 3^4 =$

15) $(4^8 : 4^4) \cdot 4^3 =$

16) $(2^3)^5 \cdot (2^5 : 2^2) =$

17) $(7^{10} \cdot 7^5) : 7^3 \cdot 7^0 =$

18) $(8^6 : 8^4)^2 \cdot 8^2 =$

19) $5^8 : (5^3 \cdot 5^2) =$

20) $(3^3)^5 \cdot (3^2)^4 =$

21) $4^3 \cdot 4^0 \cdot 4^2 =$

22) $2^6 : 2^4 \cdot 2^3 =$

23) $6^2 \cdot 6^6 \cdot 6^2 \cdot 6^5 \cdot 6^2 \cdot 6^3 =$

24) $(5^{12} : 5^6) : 5^2 =$

25) $(3^6 : 3^4) \cdot 3^3 \cdot 3^4 =$

26) $5^8 \cdot 5^3 \cdot 5^4 \cdot 5^2 =$

27) $(4^7 : 4^2) : 4^4 =$

28) $(3^8 : 3^4) \cdot 3^4 =$

29) $(5^3)^5 \cdot (5^5 : 5^2) =$

30) $(7^3 \cdot 7^5) : (7)^3 \cdot 7^2 =$

31) $(5^8 : 5^4)^2 \cdot 5^2 =$

32) $6^{10} : (6^3 \cdot 6^2) =$

33) $4^2 \cdot 4^3 \cdot 4^4 \cdot 4^2 =$

34) $(5^3)^2 \cdot (5^2)^3$

35) $4^3 \cdot 4^0 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot 4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot 4^2 =$

36) $2^{12} : 2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^3 =$

3º) ¿Cuál es el valor del interrogante en cada caso?

1) $2^? \cdot 2^{11} = 2^{20}$

2) $5^? : 5^3 = 5^8$

3) $3^4 : 3^? = 3^2$

4) $(5^7)^? = 5^{21}$

5) $(2^?)^5 = 2^{10}$

6) $5^? \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 5^9$

7) $((2^3)^?)^2 = 2^{18}$

8) $6^? \cdot 6^3 \cdot 6^4 \cdot 6^2 = 6^{10}$

9) $4^6 \cdot 4^3 : 4^2 \cdot 4^? = 4^9$

10) $5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4 : 5^? = 5^6$

11) $(5^?)^2 \cdot (5^2)^3 = 5^{12}$

12) $(2^? : 2^4) \cdot 2^3 = 2^7$

13) $(2^3)^5 \cdot (2^5 : 2^?) = 2^{18}$

14) $(6^6 : 6^4)^2 \cdot 6^? = 6^8$

4º) Completa las siguientes tablas

Producto	Potencia	Base	Exponente	Se lee	Valor
5.5.5.5					
	2⁵				
		3	3		
		2			16
				Cuatro al cubo	

Potencia	Base	Exponente	Valor	Se lee
3⁵				
	4	4		
	6		36	
				Dos a la quinta

5º Completa la siguiente tabla con medidas de lados y áreas de cuadrados:

Lado	1		5	7		
Área		4			36	64

Problemas



Ejemplo: Tenemos 3 cajas de aceite, cada una de las cuales contiene 3 botellas de aceite y cada botella tiene una capacidad de 3 litros. Si deseamos saber el total de litros que poseemos, podemos indicar $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ y este producto puede expresarse en forma de potencia: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$.

1º Indica los productos y potencias que correspondan en los casos siguientes:

- El número de cajas es 4; las botellas por caja son 4; los litros de cada botella son 4, ¿cuántos litros hay en total?
 - Son 5 amigos y cada uno tiene 5 euros. ¿Cuántos euros reúnen entre todos?
 - Dos camiones, cada camión transporta 2 contenedores, cada contenedor tiene 2 toneles, cada tonel contiene 2 hl. ¿Cuántos hl se transportan en total?
- 2º En un almacén se han dispuesto 12 filas de cajas cuadradas iguales formando un cuadrado. ¿Cuántas cajas se han utilizado?
- 3º 15 cajas de bombones contienen 15 estuches cada una. Estos a su vez contienen 15 bombones, cada uno pesa 15 gramos ¿Cuántos kilos de bombones hay en las 15 cajas?
- 4º Ramón ha barnizado dos tableros cuadrados de 30cm y 40 cm de lado respectivamente. ¿Habría gastado la misma cantidad de barniz si barniza un tablero cuadrado de 70 cm de lado? ¿Cuántas losas de un metro cuadrado se necesitan para cubrir un patio cuadrado de 22 m de lado?
- 5º Queremos vender los pinos de una finca que tiene 28 filas y 28 columnas, al precio de 28 € cada pino. Expresa en forma de potencia el valor de los pinos y halla el resultado.

3º NÚMEROS ENTEROS



El **número entero** consta de dos partes: Signo y Valor absoluto.

- El **signo** puede ser positivo (+) o negativo (-). Cuando un número no lleve signo se sobreentiende que es positivo (+).
- El **Valor Absoluto** es el valor del número sin tener en cuenta el signo.

Ejemplos: $\left\{ \begin{array}{l} -4 \text{ Signo: Negativo (-).} \\ \text{Valor absoluto: 4.} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} +5 \text{ Signo: Positivo (+).} \\ \text{Valor absoluto: 5.} \end{array} \right.$

Dos números son opuestos cuando tienen el mismo valor absoluto y distinto signo (su suma da cero).

Ejemplo: El opuesto de -3 es 3.

SUMA Y DIFERENCIA

Para **sumar** dos números enteros, se determina el signo y el valor absoluto del resultado del siguiente modo:

- Si ambos sumandos tienen el mismo signo: ese es también el signo del resultado, y su valor absoluto es la suma de los valores absolutos de los sumandos
- Si ambos sumandos tienen distinto signo:
 - El signo del resultado es el signo del sumando con mayor valor absoluto.
 - El valor absoluto del resultado es la diferencia entre el mayor valor

La **resta** de dos números enteros (*minuendo menos sustraendo*) se realiza sumando el minuendo más el sustraendo cambiado de signo.

PRODUCTO

- La multiplicación de números enteros, al igual que la suma, requiere determinar por separado el signo y valor absoluto del resultado.

En la **multiplicación** de dos números enteros se determinan el valor absoluto y el signo del resultado de la siguiente manera:

- El valor absoluto es el producto de los valores absolutos de los factores.
- El signo es «+» si los signos de los factores son iguales, y «-» si son distintos.

Para recordar el signo del resultado, también se utiliza la regla de los signos:

Regla de los signos

- $(+) \times (+) = (+)$ *Más por más igual a más.*
- $(+) \times (-) = (-)$ *Más por menos igual a menos.*
- $(-) \times (+) = (-)$ *Menos por más igual a menos.*
- $(-) \times (-) = (+)$ *Menos por menos igual a más.*

Ejemplos.

$$(+4) \times (-6) = -24$$

$$(+5) \times (+3) = +15$$

$$(-7) \times (+8) = -56$$

$$(-9) \times (-2) = +18.$$

$$(-5) \times (+4) = -20$$

$$(-2)(1)(-1)(-3)(-2)(+1)(-1) = -12$$

$$(-2)(-1)(3)(-1) = -6$$

COCIENTE

Regla de los signos: La misma que la del producto.

- Después, **se dividen los números** y, si no da exacto, lo dejaremos indicado en forma de fracción simplificándose si se puede.

- *Ejemplos:*

$$\frac{-8}{-4} = +2 \quad ; \quad \frac{-6}{+2} = -3 \quad ; \quad \frac{+8}{+2} = +4 \quad ; \quad \frac{-8}{-2} = +4$$

POTENCIAS

La **potencia de exponente natural de un número entero** es otro **número entero**, cuyo valor **absoluto es el valor absoluto de la potencia** y cuyo **signo** es el que se deduce de la aplicación de las siguientes **reglas**:

1. Las potencias de exponente par son siempre positivas.

$$(+)^{\text{par}} = +$$

$$(-)^{\text{par}} = +$$

2. Las potencias de exponente impar tienen el mismo signo de la base.

$$(+)^{\text{impar}} = +$$

$$(-)^{\text{impar}} = -$$

Un error que se comete cuando se trabaja con potencias con base entera es desconocer cuál es la base de la potencia. Así en la expresión $(-2)^3$ la base es (-2) , en cambio en la expresión -2^3 la base es 2 .

Ha de quedar muy claro que $-2^4 \neq 16$: y que $-2^6 \neq (-2)^6$

Ejemplos

$$(-2)^3 = -2 \cdot -2 \cdot -2 = -8$$

$$(-3)^3 = -3 \cdot -3 \cdot -3 = -27$$

$$(-2)^4 = -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 = +16$$

$$(-3)^4 = -3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3 = +81$$

$$-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$$

$$-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$$

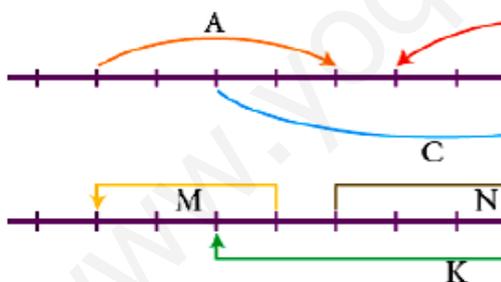
Ejercicios

1º Interpreta las siguientes situaciones, escribiendo en cada caso, el número entero:

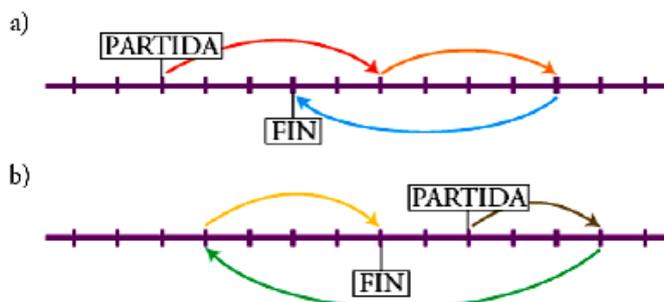
Situación	Número entero
Avancé 4 metros.	
Avancé 12 metros.	
El ascensor está en el 3º piso.	
El ascensor está en el 0º piso.	
Debo \$11.000	
Debo \$2.000	
El submarino está a 40 metros de profundidad.	
El submarino está a 24 metros de profundidad.	
La temperatura en la Antártica es de 3 grados bajo cero.	
La temperatura en la Antártica es de 2 grados bajo cero.	
El ascensor está en el primer subterráneo.	
Ahorré \$10.000	
Ahorré \$24.000	
Giré de mi libreta de ahorros \$8.000	
Giré de mi libreta de ahorros \$5.000	
Retrocedí 2 pasos.	
Bajamos al sótano 3	
Nació en el año 234 antes de Cristo	
El avión vuela a 2455 m de altura	
El termómetro marcaba 5º C bajo cero	



2º Escribe un número entero asociado a cada movimiento



3º Escribe una expresión que refleje los movimientos encadenados y halla el resultado



4º Estudia los movimientos de la cuenta y el saldo que tenía el día 6 de noviembre, sabiendo que el día 15 de octubre tenía 250 €

BANCO KOKO		EXTRACTO DE MOVIMIENTOS	
		nº de cuenta.....	
FECHA	D	H	CONCEPTO
16 - X	150 €		Extracción cajero
25 - X		2 €	Devolución comisión
31 - X		1284 €	Abono nómina
2 - XI	84 €		Gasto tarjeta comercio
3 - XI	100 €		Extracción cajero
3 - XI	572 €		Préstamo hipotecario
5 - XI	65 €		Recibo luz

Nota :

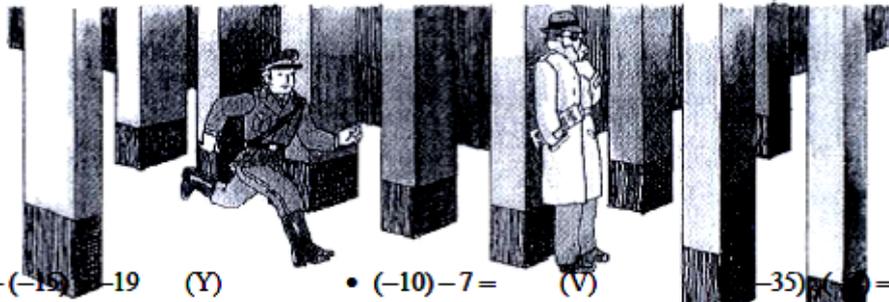
H significa Haber y son ingresos

D significa debe y son extracciones

5º Resuelve las siguientes sumas y restas de números enteros:

- 1) $-21 + 45 - 20 =$
- 2) $23 - 15 - 10 =$
- 3) $9 + 20 + 3 - 24 =$
- 4) $-16 + 20 - 8 + 2 =$
- 5) $3 - 2 + 5 + 3 + 2 + 7 + 1 - 2 =$
- 6) $22 - 12 - 3 + 5 + 6 - 7 - 8 + 4 =$
- 7) $3 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 + 12 - 11 =$
- 8) $22 + 2 + 3 - 4 - 5 - 6 - 7 =$
- 9) $3 - 4 - 4 - 4 - 6 + 21 + 7 + 8 =$
- 10) $31 - 24 - 12 + 45 - 22 + 6 =$
- 11) $12 - 12 - 34 + 5 + 6 - 12 + 44 =$
- 12) $90 - 56 + 2 - 24 - 13 =$
- 13) $14 - 12 + 45 - 22 - 1 + 1 =$
- 14) $1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 =$
- 15) $2 + 0 - 5 - 3 + 0 - 1 - 0 =$
- 16) $11 - 4 - 67 + 34 + 8 + 6 - 2 =$
- 17) $9 + 9 - 8 - 8 + 9 - 8 =$
- 18) $4 - 5 - 6 + 2 - 2 + 3 - 7 =$
- 19) $11 - 13 - 2 + 56 =$
- 20) $(+2) - (-9) - (-8) - (-8) =$
- 21) $(+4) + (-7) - (+2) + (+1) =$
- 22) $(+2) - (+8) + (-5) - (-3) - (+1) =$
- 23) $(-1) + (-1) + (-5) - (+7) + (-7) =$
- 24) $3 - (-2) + 5 + (-3) + 2 + (-7) + 1 - 2 =$
- 25) $22 - (-12) - 3 + (-5) + 6 - (-7) - 8 + 4 =$
- 26) $3 - 2 - (-3) - 4 - 5 - (-6) - 12 - 11 =$
- 27) $22 + (-2) + 3 - 4 - (-5) - 6 - 7 =$
- 28) $3 - 4 - (-4) - 4 - 6 + 21 + (-7) + 8 =$
- 29) $31 - (24) - 12 + 45 - 22 + 6 =$
- 30) $12 - (-12) - 34 + 5 + 6 - 12 + 44 =$
- 31) $90 - (-56) + (-2) - 24 - 13 =$
- 32) $14 - (-12) + 45 - 22 - 1 + (-1) =$
- 33) $-1 - 1 - 1 - (-1) + 1 + 1 - 1 =$
- 34) $2 + (-0) - (-5) - 3 + 0 - 1 - 0 =$
- 35) $-11 - (-4) - 67 + (-34) + 8 + 6 - 2 =$
- 36) $-9 + (-9) - 8 - 8 + 9 - 8 =$
- 37) $4 - (-5) - 6 + 2 - 2 + (3) - 7 =$
- 38) $-11 - (-13) - 2 + 56 =$
- 39) $(3 - 2) + (5 + 3) + 2 + (7 + 1 - 2) =$
- 40) $5 + 7 + (7 - 3) + (2 + 56) + 3 =$
- 41) $(25 - 11 + 2) + 3 + 5 + 2 + (7 - 2) =$
- 42) $(45 - 23) + (67 - 89 + 45) + 34 + (3 + 5) =$
- 43) $23 + (32 - 11) + (8 + 45) + 5 + 8 + (34 - 23) =$
- 44) $5 - 7 + (7 - 3) - (2 + 56) + 3 =$
- 45) $(25 - 11 + 2) + 3 + 5 + 2 - (7 - 2) =$
- 46) $(45 - 23) - (67 - 89 + 45) + 34 - (3 + 5) =$
- 47) $23 + (32 - 11) - (8 + 45) + 5 + 8 + (34 - 23) =$

6º Un espía nos ha enviado un mensaje que debes descifrar. Para ello, resuelve primero cada operación.



- $(-4) + (-15) = -19$ (Y)
- $6 - (-4) =$ (E)
- $(-3) \cdot 2 =$ (N)
- $-15 : 15 =$ (S)
- $12 : (-3) =$ (S)
- $(-4) \cdot (-7) =$ (D)
- $7 + (-19) =$ (E)
- $(-3) - (-6) =$ (Z)
- $5 \cdot 4 =$ (I)
- $(-84) : (-4) =$ (A)
- $-18 \cdot 3 =$ (S)
- $(-10) - 7 =$ (V)
- $(-5) + 9 =$ (T)
- $9 + 3 =$ (I)
- $(-9) \cdot (-1) =$ (N)
- $(-4) \cdot 0 =$ (O)
- $(-15) + 0 =$ (I)
- $0 - 7 =$ (S)
- $30 : 2 =$ (E)
- $14 + (-17) =$ (N)
- $4 \cdot (-2) =$ (S)
- $33 - (-21) =$ (C)
- $(-35) \cdot (-5) =$ (A)
- $(-28) - (-5) =$ (Q)
- $(-9) \cdot 1 =$ (E)
- $9 + (-8) =$ (U)
- $(-20) + (-4) =$ (E)
- $(-5) - (-7) =$ (A)
- $30 : 5 =$ (A)
- $3 + (-13) =$ (E)
- $(-11) \cdot 3 =$ (C)
- $7 + 1 =$ (R)

Para obtener finalmente el mensaje rellena las casillas poniendo en cada una la letra asociada al número entero que figura debajo.

28	20	10	-2	4	21	-6	-23	1	-12	-1	-19
-4	15	12	-54	5	-17	-15	0	9	-9	-7	
-8	-24	2	54	-10	8	-33	6	-3			

7º Completa la siguiente tabla:

$7 \cdot 3 =$	$-8 \cdot 5 =$	$-3 \cdot 2 =$	$20 : 5 =$	$-18 : 6 : 3 =$
$7 \cdot -2 =$	$8 \cdot -4 =$	$-3 \cdot -10 =$	$-20 : 4 =$	$-24 : 6 : -2 =$
$-7 \cdot 1 =$	$-8 \cdot 3 : 2 =$	$-3 \cdot 4 \cdot -2 =$	$20 : 3 =$	$-16 : 4 : -2 =$
$-7 \cdot =$	$-8 \cdot -2 =$	$-3 \cdot -1 \cdot -4 =$	$10 : 2 =$	$-30 : 2 : -3 =$
$-7 \cdot -1 =$	$-8 \cdot 1 =$	$-3 \cdot -1 \cdot -2 =$	$8 : -1 =$	$16 : 2 : -4 =$
$7 \cdot -2 =$	$-8 \cdot 0 =$	$3 \cdot -3 \cdot -4 =$	$40 : -10 =$	$32 : -4 : -4 =$
$-7 \cdot -3 =$	$-8 \cdot -1 =$	$-3 \cdot -1 \cdot -4 =$	$2 : -2 =$	$36 : -6 : -3 =$
$-7 \cdot 4 =$	$8 \cdot -2 =$	$-3 \cdot -2 \cdot -5 =$	$18 : -3 =$	$-48 : -8 : 2 =$

8º Resuelve las siguientes multiplicaciones y divisiones de enteros

- | | |
|---|--|
| 1) $(-8) \cdot (-3) =$ | 8) $(-18) : (+3) =$ |
| 2) $(+12) \cdot (+2) =$ | 9) $(+63) : (-9) =$ |
| 3) $(-7) \cdot (+4) =$ | 10) $(-12) : (-6) =$ |
| 4) $(+13) \cdot (-3) =$ | 11) $(+5) \cdot (-12) : (+4) =$ |
| 5) $(-25) \cdot (-5) =$ | 12) $(-15) \cdot (-2) : [(+3) \cdot (+2)] =$ |
| 6) $(-21) : (-7) =$ | 13) $(-3) \cdot (+2) \cdot (-4) : (-6) =$ |
| 7) $(+15) : (+3) =$ | |
| 14) $(-2 + 7) \cdot (-3 - 1) : (-2) - (-3) \cdot (-2) =$ | |
| 15) $(-10 - 2 \cdot 4) : (-2 - 1) + (-6) : (-3) - (-1) =$ | |
| 16) $(-24) : (-7 + 1) - (-4 - 2 \cdot 3 + 1) =$ | |
| 17) $(-5) - (+4) : [(-2) - (-3)] =$ | |
| 18) $(+4) - [(-15) : (+3)] + (-4) \cdot (-2) =$ | |

9º Efectuar las siguientes **POTENCIAS** de números:

- | | |
|---------------|----------------|
| 1) $(-2)^6 =$ | 7) $(-3)^3 =$ |
| 2) $(+4)^3 =$ | 8) $(-1)^2 =$ |
| 3) $(+3)^4 =$ | 9) $(+3)^3 =$ |
| 4) $(-5)^3 =$ | 10) $(+2)^5 =$ |
| 5) $(-2)^7 =$ | 11) $(-1)^5 =$ |
| 6) $(-2)^4 =$ | 12) $(-2)^5 =$ |

10º Operaciones combinadas

- | | |
|---|---|
| 1) $-4 - (+24) : (+1 - 9) - (-1 - 2)$ | 6) $(-5 - 10 - 32) \cdot (4 - 8 - 16) =$ |
| 2) $+7 + (-5) : (-7 + 2) - (+1 - 6)$ | 7) $2 + 3 \cdot 5 - 7 \cdot (-3 + 2 - 8) - 4 =$ |
| 3) $-6 - [+7 + (+1) \cdot (-1)]$ | 8) $+4 + [+2 + (+8) \cdot (-6) - (-7 + 6)]$ |
| 4) $+7 + [+1 - (-10) : (+5)]$ | 9) $-2 - [-6 + (-4) : (-2) - (-7 - 5)]$ |
| 5) $(-2 - 3 + 4) \cdot 5 - 9 \cdot (-2 - 6) =$ | |
| 10) $+1 - [-4 + (-10) : (-5)] + [+3 + (-9) : (-9)]$ | |
| 11) $+1 - [+3 - (-8) \cdot (+8)] + [+6 + (+8) : (+4)]$ | |
| 12) $(2 - 10) \cdot (6 - 3) - (-8 - 2) \cdot (-9 - 7) =$ | |
| 13) $15 + 16 \cdot 2 - 3 \cdot (5 \cdot 2 + 4 - 3 \cdot 2) - [2 + 2 \cdot (-2) - 9] \cdot (-5) =$ | |
| 14) $10 - (-2 - 1 + 5 \cdot 3) \cdot [-4 + 1 \cdot (-1)] + 8 + 4 \cdot (-2) =$ | |
| 15) $10 - 4 \cdot (-3) + 15 : (-3) + (-8) =$ | |
| 16) $(4 - 8) : (-2) - (-27) + (-15) \cdot 3 =$ | |
| 17) $3 \cdot (-5) + 8 : 2 - 9 : 3 + 4 =$ | |
| 18) $3 \cdot [(-25) : 5 + (8 - 4 : 2)] - 11 =$ | |
| 19) $[45 : (-5) + 3 \cdot (7 - 2)] + 8 =$ | |
| 20) $17 - (-4) \cdot 5 + 18 : (-9) - 18 =$ | |
| 21) $[15 - (-3) \cdot 4] \cdot (-2) - 8 \cdot (-4) + 1 =$ | |
| 22) $[4 - (-2) \cdot 5] + 1 \cdot (-1) - 18 =$ | |
| 23) $7 + 8 : (-4) - [4 + (-12) : 4] =$ | |
| 24) $(-4 + 5) : (-1) + 3 - 21 : (-7) : 3 [-11 \cdot (-2) - 19] =$ | |
| 25) $(-24) : (-6) - \{8 : (-4) - (-2 - 3)\} \cdot 2 + 1 =$ | |
| 26) $(-3) + 3 \cdot (-4 + 5) - 5 \cdot [-2 + 7 \cdot (-1) + 9] =$ | |
| 27) $(-1 - 8) : (-3) + (9 - 2 \cdot 5) \cdot (-2) \cdot (-2) =$ | |

11º . Calcula las operaciones combinadas siguientes:

- | | |
|---|---|
| 1) $(2 + 3)^2 - 2^2 + 3^2 =$ | 32) $4^0 + 4^2 : 4^0 - 2^3 =$ |
| 2) $3^3 - 3^2 + (4 - 3)^2 =$ | 33) $(1 + 3)^2 - (1^3 - 2^3) =$ |
| 3) $3^2 + 3^2 : 3^0 - 3^3 =$ | 34) $5^2 - 3^2 + (1+3)^2 =$ |
| 4) $4 + 3 \cdot 2^2 - (3 - 5)^3 =$ | 35) $(2 + 4)^2 - (2^2 + 4^2) =$ |
| 5) $5 - (3^2 + 4 \cdot 3) =$ | 36) $(1 + 5)^2 - 1^2 + (-5)^2 =$ |
| 6) $3 + 2 \cdot (6 - 2^3 : 4) =$ | 37) $(2 + 3)^2 - (-2)^2 - 3^2 =$ |
| 7) $7 + 3 \cdot [5 + (6 - 8)^3] =$ | 38) $2 \cdot 3^2 - (5 - 4)^3 =$ |
| 8) $4 - 3^3 + (-1)^3 \cdot [(4 - 3^2) - 3^2] =$ | 39) $7 - (2^2 + 2^2 \cdot 3) =$ |
| 9) $-3^3 + 2 \cdot [3 - 2 \cdot (-5 + 2 \cdot 4^2)] =$ | 40) $(2 + 3)^2 - 2^2 + 3^2 =$ |
| 10) $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2^2 - (2 - 5)^2 =$ | 41) $(3 - 2)^2 - 5^2 + 3^2 =$ |
| 11) $4 - (3^2 + 5 \cdot 7) =$ | 42) $(2 + 3)^2 - (2^3 - 3^3) =$ |
| 12) $-8 + 2 \cdot (2 - 2^3 : 4) =$ | 43) $3^3 : 3^2 - (-3)^2 + (3 - 5)^3 =$ |
| 13) $6 + 3 \cdot [4 + (3 - 5)^3] =$ | 44) $3^2 + 3 + 3^2 : 3^0 - 3^2 =$ |
| 14) $(5 + 6)^2 - 5^2 + 6^2 =$ | 45) $-6 + 2^2 \cdot (2 - 2^4 : 4) =$ |
| 15) $2^0 + 4^2 : 4^0 - 2^3 =$ | 46) $4 + 3 \cdot [4 + (3 - 2)^3] =$ |
| 16) $(2 + 3)^2 - (2^3 - 3^3) =$ | 47) $5 + 3^0 \cdot (6 - 2^3 : 2) =$ |
| 17) $4^2 - 3^2 + (4 + 3)^2 =$ | 48) $6 - 3 \cdot [5 - (8 - 6)^3] =$ |
| 18) $(5 + 6)^2 - (5^2 + 6^2) =$ | 49) $5 - 2^3 + (-1)^3 \cdot [(6 - 3^2) - 3^2] =$ |
| 19) $(6 - 2)^2 - 2^2 + (-2)^2 =$ | 50) $-2^3 - 2 \cdot [4 - 2 \cdot (-10 + 2 \cdot 4^2)] =$ |
| 20) $(5 + 3)^2 - 4^2 + 3^2 =$ | 51) $(2 - 3)^2 - (2^2 + 3^2) =$ |
| 21) $2^3 + 2 \cdot 3^2 - (2 - 4)^3 =$ | 52) $(-2)^2 - (-5)^2 - 6^2 =$ |
| 22) $7 - (2^2 + 2^2 \cdot 3) =$ | 53) $(5 - 3)^2 - (-4)^2 - 3^2 =$ |
| 23) $-6 + 2^0 \cdot (5 - 2^3 : 4) =$ | 54) $(-1)^3 + 3 \cdot [2 - 2 \cdot (5 - 2 \cdot 2^2)] =$ |
| 24) $5 - 3 \cdot [5 + (9 - 7)^3] =$ | 55) $2 - 2 \cdot (-2)^2 - (2 - 4)^2 =$ |
| 25) $2^2 - 3^2 + (-1)^3 \cdot [(4 - 3^2) + 2^2] =$ | 56) $(2^3 \cdot 2^4) : 2^5 + 3^0 \cdot (2^5 : 2^4) =$ |
| 26) $(-2)^3 + 2 \cdot [2 - 2 \cdot (5 + 2 \cdot 2^2)] =$ | 57) $6 - 2^3 + (-1)^3 \cdot [(8 - 3^2) - 2^2] =$ |
| 27) $3 + 3 \cdot (-2)^2 - (2 - 4)^2 =$ | 58) $2^3 + (-2)^3 \cdot [3 - 2 \cdot (-5 + 2 \cdot 2^2)] =$ |
| 28) $2^3 - (5^2 - 5 \cdot 7) =$ | 59) $7 - (2^2 + 2^2 \cdot 3) =$ |
| 29) $-7 + 2 \cdot (2 - 2^5 : 2^3) =$ | 60) $5 + 5^0 \cdot (5 - 2^3 : 2) =$ |
| 30) $(3^3 \cdot 3^4) : 3^6 + 3^0 \cdot (2^5 : 2^4) =$ | 61) $2^2 - 3 \cdot [5 - (7 - 5)^3] =$ |
| 31) $(1 + 3)^2 - 3^2 + 1^2 =$ | |
| 62) $[4 \cdot (-4) - 6 \cdot (-2)] : (-2) + 3 \cdot 6 - 2 \cdot (-1) + (2 \cdot 25 - 50) : 5 =$ | |
| 63) $[2 \cdot (-4) - 6 \cdot (-2)] : (-4) + 5 \cdot 6 - 2 \cdot (-1) + (25 - 150) : 5 =$ | |

12º Copia y completa en tu cuaderno las siguientes expresiones con uno de los signos = o ≠:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| a) 5^3 _____ $5 \cdot 3$ | i) 7^2 _____ $7 \cdot 2$ |
| b) $(-5)^3$ _____ -5^3 | j) $(-2)^5$ _____ -2^5 |
| c) $(2 + 3)^2$ _____ $2^2 + 3^2$ | k) $(5 + 7)^2$ _____ $5^2 + 7^2$ |
| d) $(4 + 5)^2$ _____ 9^2 | d) $(3 + 4)^2$ _____ 7^2 |
| e) 4^3 _____ $4 \cdot 4 \cdot 4$ | e) 7^3 _____ $7 \cdot 7 \cdot 7$ |
| f) $(-7)^6$ _____ -7^6 | f) $(-5)^4$ _____ -5^4 |
| g) $(7 - 5)^2$ _____ $7^2 - 5^2$ | g) $(11 - 4)^2$ _____ $11^2 - 4^2$ |
| h) $(9 - 3)^2$ _____ 6^2 | h) $(4 - 3)^2$ _____ 1 |

Problemas

- 1) Una persona nació en el año 17 antes de Cristo y se casó en el año 24 después de Cristo. ¿A qué edad se casó?
- 2) En el año 31 después de Cristo una persona cumplió 34 años. ¿En qué año nació?
- 3) Una persona nació en el año 2 antes de Cristo y se casó a los 25 años ¿En qué año se casó?
- 4) El termómetro marca ahora 7°C después de haber subido 15°C . ¿Cuál era la temperatura inicial?
- 5) Hace una hora el termómetro marcaba -2°C y ahora marca 2°C . La temperatura ¿ha aumentado o ha disminuido? ¿Cuánto ha variado?
- 6) Por la mañana un termómetro marcaba 9° bajo cero. La temperatura baja 12°C a lo largo de la mañana. ¿Qué temperatura marca al mediodía?
- 7) El ascensor de un edificio está en el sótano 1 y sube 5 pisos hasta que se para. ¿A qué planta ha llegado?
- 8) Una persona vive en la planta 2 de un edificio y su plaza de garaje está en el sótano 1. ¿Cuántas plantas separan su vivienda de su plaza de garaje?
- 9) Después de subir 6 pisos el ascensor de un edificio llega al piso 5. ¿De qué planta ha salido?
- 10) Elena tenía ayer en su cartilla -234 euros y hoy tiene 72 euros. Desde ayer ¿ha ingresado o ha gastado dinero? ¿Qué cantidad?
- 11) El saldo de la cartilla de ahorros de Elena es hoy 154 €. Le cargan una factura de 313 €. ¿Cuál es el saldo ahora?
- 12) La temperatura mínima de hoy ha sido -4°C . Si hasta alcanzar la temperatura máxima ha subido 10°C , ¿cuál ha sido la temperatura máxima de hoy?
- 13) La Fosa de las Marianas tiene -11.034 m, la de Tonga -10.882 y la de Puerto Rico -9.218 m.
 - a) Un submarinista se encuentra en la Fosa de Tonga 4 tiene que subir o descender: para llegar a la Fosa de las Marianas?, ¿Qué distancia recorre?
 - b) ¿Qué distancia hay entre la Fosa de las Marianas y la Fosa de Puerto Rico?
 - c) ¿Qué Fosa es la más profunda?
- 14) Mi cometa tiene 540 metros de hilo y la de Felipe 460. Si queremos que las dos cometas vuelen igual de altas, ¿cuántos metros de hilo he de quitar a mi cometa para dárselos a Felipe?
- 15) Una cigüeña emigra a África cierto día en que la temperatura en Cáceres es de -3°C y la temperatura en Rabat es de 18°C , ¿qué variación de temperatura notará la cigüeña?
- 16) Un deportista se encuentra en la cima de El Teide que tiene 3.718 m de altura y decide practicar submarinismo y descender a la Fosa de Bonin que tiene -10.340 m. ¿qué distancia recorre el deportista?
- 17) Mónica parte en ascensor desde la planta cero de su edificio. El ascensor sube 5 plantas, después baja 3, sube 5, baja 8, sube 10, sube 5 y baja 6. ¿En qué planta está?



- 18) Juan debe 40 euros a un taller por la reparación de su moto. Si abona 35 euros, ¿cuánto debe?
- 19) En una estación de esquí el termómetro marcaba 14° bajo cero a las 8 de la mañana; al mediodía la temperatura había subido 10 grados y a las 19.00 había bajado 5 grados respecto al mediodía. ¿Cuál era la temperatura a esa hora?
- 20) El día 28 de enero, el termómetro marcó en Burgos una mínima de -12°C y en Santa Cruz de Tenerife llegó a una máxima de 25°C . ¿Cuál fue la diferencia de temperatura entre ambas ciudades?
- 21) Un depósito de agua potable de 10 000 litros está lleno. Cada día entran 2000 litros y salen 3000 litros. Indica el tiempo que tardará en vaciarse.
- 22) Un barco está hundido a unos 200 metros de profundidad. Se reflota a una velocidad de 2 metros por minuto.
- 23) ¿A qué profundidad estará al cabo de una hora? 7.- Jaime tiene una deuda y decide pagar 12 euros cada mes. ¿Cuál era el importe de la deuda si tarda 10 meses en saldarla?
- 24) En una estación de esquí, la temperatura desciende 2 grados cada hora a partir de las 00.00 y hasta las 8.00. ¿Qué temperatura hay a las 8.00, si la temperatura a las 00.00 de la noche era de 4°C ?
- 25) La fosa marina de Mindanao tiene una profundidad de 11 040 metro, y la fosa marina de Java , de 7250 metros. Calcula la diferencia entre la más y la menos profunda. Calcula también la diferencia entre la menos y la más profunda.
- 26) Un repartidor de pizzas gana 36 euros cada día y gasta, por término medio, 5 en gasolina y 10 en reparaciones de la moto. Si además recibe 11 euros de propina, ¿cuánto ahorra diariamente?
- 27) La temperatura del aire baja según se asciende en la atmósfera a razón de 9°C cada 300 metros. ¿A qué altura vuela un avión si la temperatura del aire ha variado -81°C ?
- 28) La temperatura más alta medida en un congelador ha sido de 4°C bajo cero y la más baja, de 26°C bajo cero. ¿Cuál es la diferencia entre las temperaturas?
- 29) . Un avión vuela a 8 000 m de altura. Sube 1 000 m para evitar una tormenta y luego desciende hasta los 2 600 m. ¿Cuántos metros ha descendido el avión?
- 30) . En un almacén tuvieron 3 400 € de beneficio en el primer mes, perdieron 837 € en el segundo mes y ganaron 2 800 € en el tercer mes. ¿Tuvieron ganancias o pérdidas durante el trimestre? ¿A cuánto ascendieron?
- 31) Hemos comprado 100 acciones de una empresa a un precio de 24 €. Pasados tres meses, el valor de cada acción es de 19 €. ¿A cuánto asciende la pérdida?
- 32) ¿Cuántos años transcurrieron desde 234 a.C. a 1967 d.C.?
- 33) Hemos comprado un camión congelador que estaba, al ponerlo en marcha, a 25°C . Al cabo de 4 horas estaba a -7°C . ¿Cuántos grados bajó cada hora?
- 34) Un globo asciende 350 m, luego baja 183 m y vuelve a subir 130 m. ¿A qué altura se encuentra?
- 35) Salí de mi piso y bajé 3 plantas a buscar a mi amigo Juan. Subimos 4 pisos hasta la casa de Inés, que vive en el 9º. ¿En qué piso vivo?



4º RAÍCES CUADRADAS.

Se define la **raíz cuadrada** de un número a como otro número b tal que $b^2 = a$, que escribimos simbólicamente: $b = \sqrt{a}$.

El número a se llama **radicando** y b se llama la **raíz**

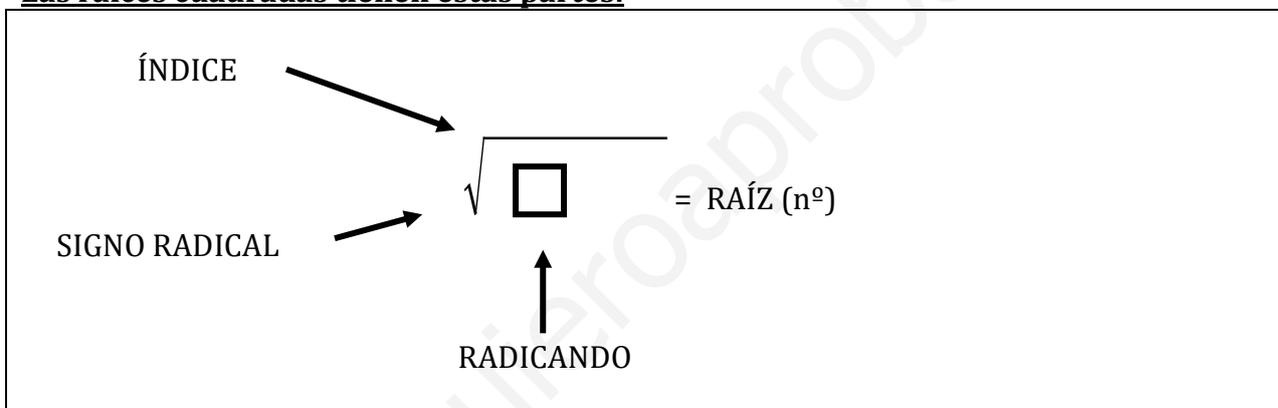
Ejemplo :

$$a^2 = 16 \quad a = \sqrt{16} = 4$$

En ocasiones, la **raíz cuadrada** sale **exacta** y ocurre cuando no hay resto, esto es, cuando elevamos al cuadrado a "a" y nos sale exactamente "b".

La mayoría de las veces, la raíz cuadrada de un n° no suele salir exacta ya que hay un resto, por lo que se considera una **raíz cuadrada entera**.

Las raíces cuadradas tienen estas partes:

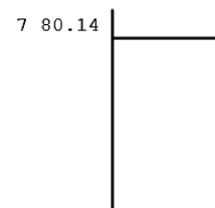


MÉTODO PARA REALIZAR RAÍCES CUADRADAS:

Se siguen una serie de pasos :

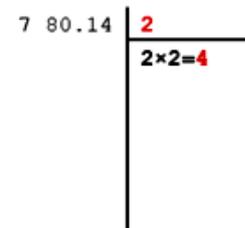
1º Anota el número del que deseas calcular la raíz cuadrada, separando los dígitos por pares, a partir del punto decimal:

Como ejemplo, vamos a calcular la raíz cuadrada de 780,14. Dibuja dos líneas como se muestra la foto y escribe "7 80. 14" a la izquierda. En la parte superior derecha, tendremos la raíz cuadrada de 780,14



2º Mira en el extremo izquierdo y encuentra el número mayor entero n, cuyo cuadrado sea inferior o igual a aquel par o cifra única. Coloca 'n' en el cuadrante superior derecho, y calcula el cuadrado de n en el cuadrante inferior derecho.

En nuestro ejemplo, que el par es 7, y $2 \times 2 \leq 7 < 3 \times 3$, entonces n será =2. Escribe un 2 en el cuadrante superior derecho. Éste será el primer dígito de la raíz cuadrada. Escribe a continuación $2 \times 2 = 4$ en el cuadrante inferior derecho, y tendremos ese número (4 en nuestro caso) para el próximo paso.



3º Resta el número que acabas de calcular en la parte izquierda. En nuestro ejemplo, resta 4 de la "pareja" "7", dándonos un 3 (para este paso se realiza el cuadrado del número de la parte superior derecha).

$$\begin{array}{r|l} 7 & 80.14 & 2 \\ -4 & & 2 \times 2 = 4 \\ \hline 3 & & \end{array}$$

4º Baja" el siguiente par, y lo colocas a la derecha del resultado de la sustracción que acabas de hacer. En nuestro caso el '80', bajándolo y poniéndolo al lado del 3 obtenido en el paso anterior. Multiplica por 2 el número que en ese momento tenemos en la parte superior derecha (un 2) y lo escribes en el cuadrante inferior derecho, añadiendo "_x_="

$$\begin{array}{r|l} 7 & 80.14 & 2 \\ -4 & & 2 \times 2 = 4 \\ \hline 3 & 80 & 4 _ \times _ = \end{array}$$

5º Encuentra la mayor cifra que pueda colocarse en los subrayados indicados en el párrafo anterior, de modo que el resultado de la multiplicación sea inferior o igual, al número que en estos momentos está en la parte izquierda (en el ejemplo un 380). En nuestro ejemplo, si queremos sustituir el subrayado por 8, 48 veces 8 es 384, que es superior a 380. Por lo tanto 8 es demasiado grande. Sin embargo eso no ocurre con el 7. Pon un 7 en cada uno de los dos subrayados, y escribiremos: 47 por 7 igual a 329, que es menor que 380. Escribe un 7 en la parte superior derecha. Este será el segundo dígito de la raíz cuadrada de 780,14

$$\begin{array}{r|l} 7 & 80.14 & 27 \\ -4 & & 2 \times 2 = 4 \\ \hline 3 & 80 & 47 \times 7 = 329 \end{array}$$

6º Resta el número que acabas de calcular (329) del número que hay en la parte izquierda (380). Se resta 329 de 380, lo que da 51.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 80.14 & 27 \\ -4 & & 2 \times 2 = 4 \\ \hline 3 & 80 & 47 \times 7 = 329 \\ -3 & 29 & \\ \hline & 51 & \end{array}$$

7º Repite el paso 4. Dado que ahora hemos encontrado el punto decimal en 780,14, hay que escribir un punto decimal en la raíz cuadrada, en la parte superior derecha (después del 27). "Baja" el siguiente par (14) en la parte izquierda, quedando 51 14. A continuación calculamos 2 veces el número en la parte superior derecha (27), convirtiéndolo en un 54, por lo que debemos escribir "54_x_" en el cuadrante inferior derecho

$$\begin{array}{r|l} 7 & 80.14 & 27. \\ -4 & & 2 \times 2 = 4 \\ \hline 3 & 80 & 47 \times 7 = 329 \\ -3 & 29 & 54 _ \times _ = \\ \hline & 51 & 14 \end{array}$$

8º Repite el paso 5 y 6. Encuentra la mayor cifra para sustituir en los subrayados, y haz la multiplicación. En nuestro ejemplo, 549 veces 9 es 4941, es decir, 549x9=4941, que es inferior o igual al número de la izquierda (5114). Escribiremos por tanto un 9 en la parte superior derecha, restando a continuación el resultado de la multiplicación (4941) del número de la izquierda (5114), obteniendo un resultado de 173.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 80.14 & 27.9 \\ -4 & & 2 \times 2 = 4 \\ \hline 3 & 80 & 47 \times 7 = 329 \\ -3 & 29 & 549 \times 9 = 4941 \\ \hline & 51 & 14 \\ -49 & 41 & \\ \hline & 1 & 73 \end{array}$$

9º Si deseas continuar calculando cifras, ve bajando pares de ceros en la parte izquierda y repitiendo los pasos 4, 5 y 6.

Ejemplos

1º Calcula con lápiz y papel:

a) $\sqrt{2916} =$

b) $\sqrt{93025} =$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2916} & 54 \\ -25 & 104 \cdot 4 = 416 \\ \hline & 416 \\ -416 & \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{93025} & 305 \\ -9 & 60 \cdot 0 = 0 \\ \hline & 030 \\ -0 & 605 \cdot 5 = 3025 \\ \hline & 3025 \\ -3025 & \\ \hline & 0 \end{array}$$

2º Calcula con lápiz y papel:

a) $\sqrt{529} = 23$

b) $\sqrt{15625} = 125$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{529} & 23 \\ -4 & 43 \cdot 3 = 129 \\ \hline & 129 \\ -129 & \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{15625} & 125 \\ -1 & 22 \cdot 2 = 44 \\ \hline & 056 \\ -44 & 245 \cdot 5 = 1225 \\ \hline & 1225 \\ -1225 & \\ \hline & 0 \end{array}$$

Ejercicios



1º Completa:

a) $3^2 = \underline{\quad\quad} \sqrt{9} = \underline{\quad\quad}$

e) $10^2 = \underline{\quad\quad} \sqrt{100} = \underline{\quad\quad}$

b) $4^2 = \underline{\quad\quad} \sqrt{16} = \underline{\quad\quad}$

f) $11^2 = \underline{\quad\quad} \sqrt{121} = \underline{\quad\quad}$

c) $5^2 = \underline{\quad\quad} \sqrt{25} = \underline{\quad\quad}$

g) $12^2 = \underline{\quad\quad} \sqrt{144} = \underline{\quad\quad}$

d) $9^2 = \underline{\quad\quad} \sqrt{81} = \underline{\quad\quad}$

h) $13^2 = \underline{\quad\quad} \sqrt{169} = \underline{\quad\quad}$

2º Averigua el valor de a como en el ejemplo:

$a^2 = 16 \quad a = \sqrt{16} = 4$

a) $a^2 = 36 \quad a = \sqrt{\quad\quad} = \quad\quad$

c) $a^2 = 100 \quad a = \sqrt{\quad\quad} = \quad\quad$

b) $a^2 = 81 \quad a = \sqrt{\quad\quad} = \quad\quad$

d) $a^2 = 121 \quad a = \sqrt{\quad\quad} = \quad\quad$

3º Completa las siguientes tablas

a)

Número							7			
Cuadrado perfecto	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

b)

Número	45	12	58	7	93	3	75	29
Raíz cuadrada entera								

4º Calcular las raíces:

1º $\sqrt{400}$

2º $\sqrt{196}$

3º $\sqrt{361}$

4º $\sqrt{441}$

5º $\sqrt{1764}$

6º $\sqrt{3136}$

7º $\sqrt{655}$

8º $\sqrt{835}$

9º $\sqrt{264}$

10º $\sqrt{535}$

11º $\sqrt{842}$

12º $\sqrt{937}$

13º $\sqrt{625}$

14º $\sqrt{1444}$

15º $\sqrt{2081}$

16º $\sqrt{1204}$

17º $\sqrt{12568}$

18º $\sqrt{6256}$

19º $\sqrt{3025}$

20º $\sqrt{12321}$

21º $\sqrt{94864}$

22º $\sqrt{3136}$

23º $\sqrt{2304}$

5º Calcula las raíces cuadradas de los números siguientes, con una cifra decimal.

a) 449

b) 97

c) 19

d) 605

6º Halla la raíz cuadrada con dos decimales de los siguientes números y comprueba el resultado con la calculadora:

a) 7,5

b) 13,87

c) 5,347

d) 47,5017

7º Realiza las siguientes operaciones

1) $(2^6 + 7^2 - 8^2) \cdot \sqrt{81}$

2) $\sqrt{49} + \sqrt{64} : \sqrt{16}$

3) $(9^2 + 5^3 - 2^5) : \sqrt{64} =$

4) $\sqrt{81} : (6^2 - 3^3) =$

5) $\sqrt{25} : (3^2 - 2^3) =$

6) $2 - 3 \cdot [4 + (3 - 5)^3] + \sqrt{64} =$

7) $4^2 - 2^2 + (3 - 4)^3 + \sqrt{16} =$

8) $(4 - 2) \cdot [2 + (2 - 5)^3] + \sqrt{36} =$

9) $3^2 - 2^2 + (2 - 3)^3 + \sqrt{100} =$

10) $2^0 + 4^2 : 4^0 - \sqrt{81} - 2^3 =$

11) $(\sqrt{49} + \sqrt{25}) : \sqrt{16}$

12) $\sqrt{81} \cdot \sqrt{9} + \sqrt{25}$

13) $\sqrt{10000} \cdot \sqrt{100} - \sqrt{1000000}$

14) $\sqrt{1000000} : \sqrt{100} + \sqrt{10000}$

15) $(2^3 \cdot 2^4) : 2^6 + 2^2 \cdot (2^5 : 2^4) + \sqrt{64} =$

16) $4^2 - 3^2 + (4 - 3)^2 + \sqrt{16} =$

17) $5 - 2^2 + (5 - 7)^3 + \sqrt{36} =$

18) $(2^3 \cdot 2^4) : 2^6 + 2^2 \cdot (2^5 : 2^4) + \sqrt{4} - 2^0 =$

19) $3^2 - 2^2 + (3 - 2)^2 + \sqrt{16} =$

20) $[\sqrt{81} - 4 \cdot 3] : 2^0 + 2 \cdot (-5) - 3^2 \cdot (-7) =$

21) $[\sqrt{64} - 4 \cdot 3] : 2^0 + 2 \cdot (-5) - 3^2 \cdot (-2) =$

8º Completa en tu cuaderno las siguientes expresiones con uno de los signos = o \neq :

a) $\sqrt{36+64}$ _____ $\cdot \sqrt{36} + \sqrt{64}$

e) $\sqrt{25+25}$ _____ $\cdot \sqrt{50}$

b) $\sqrt{36+64}$ _____ $\cdot \sqrt{100}$

f) $\sqrt{100-36}$ _____ $\cdot 8$

c) $\sqrt{100-64}$ _____ $\cdot \sqrt{100} + \sqrt{64}$

g) $\sqrt{100-64}$ _____ $\cdot 6$

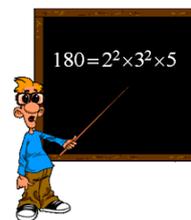
d) $\sqrt{25+25}$ _____ $\cdot 2\sqrt{25}$



Problemas

(Recuerda l $\text{Área}=\text{l}^2$)

- 1º En un estadio desfilan 400 gimnastas. En la formación hay tantos gimnastas por fila como por columna. ¿Cuántos hay en cada fila y en cada columna?
- 2º En un vivero se quieren plantar 529 en hileras formando un cuadrado. ¿ Cuántos cipreses hay que plantar en cada hilera?
- 3º Un terreno cuadrado tiene 900 m² de superficie. ¿Cuántos metros de tela metálica se necesita para cercarlo?
- 4º ¿ Cuántos metros de moldura se necesitan para bordear con ella el techo de una habitación de 25 m²?
- 5º Un tablero cuadrado tiene una superficie de 900m². Si se corta otro cuyo lado mide la mitad del lado anterior ¿cuál será la superficie del nuevo tablero?. ¿Se habrá reducido también a la mitad?
- 6º María tiene 300 azulejos cuadrados para hacer mosaicos. ¿Cuántos puede emplear como máximo para formar un cuadrado?. ¿Cuántos le sobran?
- 7º Marta quiere colocar 36 fotos cuadradas en filas y columnas de modo que formen un mural cuadrado. ¿Cuántas tiene que poner en cada columna?
- 8º Calcula los metros de alambrada que se necesitan para rodear cuatro veces un terreno cuadrado de 10000 m² de superficie.
- 9º Un tablero de 1,85 m² de madera tiene forma de cuadrado. Halla la medida del lado redondeando los centímetros.
- 10º Plantea un problema donde se muestre la interpretación geométrica de la raíz cuadrada del número 64
- 11º Una pared de un cuarto de baño es cuadrada y tiene en total 144 azulejos cuadrados. Si cada azulejo mide 25 cm, ¿cuánto mide de longitud la pared?
- 12º Los padres de David tienen una casa de campo con una parcela cuadrada de 10 000 m² de superficie. ¿Cuánto mide cada lado?
- 13º Un terreno cuadrado tiene de área 625 m². ¿Cuánto mide su perímetro?
- 14º Un parque cuadrado tiene una extensión de 8.100 metros cuadrados. Si para entrenarme doy 5 vueltas a su alrededor, ¿sabes cuántos metros recorro?
- 15º Halla los metros de cuerda que necesitan para rodear 7 veces un cuadrado de 289 metros cuadrados de área.
- 16º Manuel da todos los días 4 vueltas corriendo al estanque del parque, si sabemos que es cuadrado y que su área mide 169 m². ¿Cuántos metros corre todos los días Manuel?
- 17º Un cine tiene igual número de filas que de columnas. Venden todas las entradas para una sesión, obteniendo 675 €. Si han vendido cada entrada a 3 €, ¿cuántas filas tiene el cine?
- 18º Los padres de David tienen una casa de campo con una parcela cuadrada de 10 000 m² de superficie.
 - a)¿Cuánto mide cada lado?,
 - b)¿Si quieren vallarla cuántos metros de valla necesitan?



5º DIVISIBILIDAD

MÚLTIPLO DE UN NÚMERO: el resultado de multiplicar dicho número por cualquier otro

Ejemplo: Múltiplos de 7: $7 \Rightarrow 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, \dots$

Para saber si un número, A, es múltiplo de otro, B, se divide A entre B, si la división da exacta, sí es múltiplo.

DIVISOR DE UN NÚMERO: un número (a) es divisor de otro (b) cuando al dividirlo por él (b: a) la división es exacta. A los divisores también se les llama **FACTORES**.

Criterios de divisibilidad

Los siguientes criterios nos permiten averiguar si un número es divisible por otro de una forma sencilla, sin necesidad de realizar una división:

Nº	Criterio	Ejemplo
<u>2</u>	El número termina en cero o cifra par (e cero se considera par).	378: porque la última cifra (8) es par.
<u>3</u>	La suma de sus cifras es un múltiplo de 3	480: porque $4 + 8 + 0 = 12$ es múltiplo de 3.
<u>4</u>	El número formado por las dos últimas cifras es un múltiplo de 4 o cuando termina en doble cero.	7324: porque 24 es múltiplo de 4.
<u>5</u>	La última cifra es 0 ó 5.	485: porque acaba en 5.
<u>6</u>	El número es divisible por 2 y por 3.	24: Ver criterios anteriores.
<u>7</u>	Un número es divisible entre 7 cuando, a separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 2 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 7.	34349: separamos el 9 (3434'9) y lo doblamos (18), entonces $3434 - 18 = 3416$. Repetimos el proceso separando el 6 (341'6) y doblándolo (12) entonces $341 - 12 = 329$, y de nuevo, $32 \cdot 9, 9 \cdot 2 = 18$, entonces $32 - 18 = 14$; por lo tanto, 34349 es divisible entre 7 porque 14 es múltiplo de 7.
<u>11</u>	Sumando las cifras (del número) en posición impar por un lado y las de posición par por otro. Luego se resta el resultado de ambas sumas obtenidas. si el resultado es cero (0) o un múltiplo de 11, el número es divisible por éste. Si el número tiene dos cifras será múltiplo de 11 si esas dos cifras son iguales.	42702: $4 + 7 + 2 = 13 \cdot 2 + 0 = 2 \cdot 13 - 2 = 11 \rightarrow 42702$ es múltiplo de 11 66: porque las dos cifras son iguales. Entonces 66 es Múltiplo de 11

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS: Consiste en expresar el número en forma de producto pero con la condición de que los factores de éste sean primos, por lo que tenemos que ir probando (aplicando su correspondiente regla) la serie de los primeros números primos, sin contar el 1 (o sea, 2, 3, 5, 7, 11 ...).

Ejemplo: $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

Ejemplo 1: Descomponer en factores 180:

180 es divisible por 2, (lo colocamos a la derecha del segmento en la misma línea de 180) cuyo cociente es 90, que ponemos debajo de 180.

Reiteramos ahora con 90, que también es divisible por 2 (en la misma línea que 90 y a la derecha del segmento) y de cociente 45, que situamos debajo de 90.

Repetimos con 45 que no es divisible por 2 porque termina en 5, que no es 0 ni cifra par; si lo es por 3 porque la suma de sus cifras ($4 + 5 = 9$) es múltiplo de 3 que significa divisible por 3 y cuyo cociente es 15 y así sucesivamente.

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Ejemplo 2: Descomponer en factores 420:

420 es divisible por 2 (lo colocamos a la derecha del segmento) cuyo cociente es 210, que ubicamos debajo de 420.

Repetimos pero con 210 divisible por 2 (lado derecho del segmento) con 105 de cociente que ponemos debajo de 210.

Reiteramos con 105 que no es divisible por 2; probamos con 3 y vemos que es divisible (la suma de sus cifras $1 + 0 + 5 = 6$ múltiplo de 3) con cociente 35.

Seguimos con 35; pero ya no probamos con el 2, ya que anteriormente 105 no era divisible por 2. Tampoco es divisible por 3 y lo es por 5, cuyo cociente es 7 (número primo).

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.) de dos o más números es el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

Ejemplo: m.c.m. (36,28,21)

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$28 = 2^2 \cdot 7 \quad \Rightarrow \text{m.c.m.}(36,28,21) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$$

$$21 = 3 \cdot 7$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (m.c.d.) de dos o más números es el producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente.

Ejemplo: m.c.d. (8,12,28)

$$8 = 2^3$$

$$12 = 2^2 \cdot 3 \quad \Rightarrow \text{m.c.d.}(8,12,28) = 2^2 = 4$$

$$28 = 2^2 \cdot 7$$

6º Escribe los cuatro primeros múltiplos de cada número:

a) 16,,,,

b) 20,,,,

7º Identifica los números primos menores de 50 y explica porqué

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

8º Todos los números que no son primos reciben el nombre de compuestos y son el resultado del producto de los números primos. Descubre qué números primos se han multiplicado y cuántas veces para obtener los siguientes números compuestos:

Números	Resultan de multiplicar los primos
325	
1.450	
2.784	
20.490	

9º Descompón en factores primos:

1º 60

2º 90

3º 144

4º 540

5º 504

6º 540

7º 644

8º 657

9º 1935

10º 11550

11º 1 188

12º 78450

10º. Calcula :

a) m.c.m. (60, 90)

b) m.c.m. (81, 243)

c) m.c.m.(12, 18, 24)

d) m.c.d. (24, 36)

e) m.c.d. (132, 176, 220)

f) m.c.d.(32, 120, 160)

11º Completa la tabla

Números	Divisores	m.c.d.
28		
34		
145		
35		
80		

12º Calcula el m.c.m y m.c.d. de los siguientes números

1) (15, 16, 18)

2) (10, 15, 30)

3) (32, 40, 48)

4) (12, 120, 126)

5) (428 y 376)

6) (148 y 156)

7) (600 y 1 000)

8) (45,60 y 54)

9) (10, 20, 30,40)

10) (15, 18,30)

Problemas



- 1) En una casa utilizan para la cocina una bombona de butano que dura 8 días; otra bombona para una estufa, que dura 6 días, y otra para el agua caliente, que dura 10 días. ¿Cada cuántos días se acaban las tres bombonas al mismo tiempo?
- 2) Queremos distribuir 24 lápices en varias cajas, de modo que cada uno contenga el mismo número de lápices. ¿De cuántas formas podemos hacerlo?
- 3) María le dice a su amiga que su hermano le deja la bicicleta cada 10 días. Su amiga le contesta que tiene mucha suerte porque a ella le toca la bicicleta cada 18 días. Por suerte para las dos, el próximo domingo día 8 ambas coinciden en tener bicicleta y deciden hacer una excursión. Averigua cuántos días pasarán para que vuelvan a coincidir las dos con bicicleta.
- 4) La sirena de una fábrica suena cada 40 minutos; el timbre del IES suena cada 60 minutos y el silbido del tren se oye cada 50 minutos. Los tres sonidos coinciden a las 8 $\frac{1}{2}$ de la mañana. ¿Volverán a coincidir antes de las 15 horas?
- 5) El perímetro de la rueda delantera de un tractor mide 125 cm y el perímetro de la rueda trasera mide 200 cm. Señalamos con una tiza el punto que apoya en el suelo cada rueda, en un momento determinado. Hacemos unas marcas coincidentes con dichos puntos del suelo en las ruedas. Averigua la distancia que ha de recorrer dicho tractor para que las marcas de las ruedas coincidan de nuevo en el suelo.
- 6) Una señora debe pagar una letra por el televisor cada 3 meses; otra por el tresillo cada dos meses; otra por un préstamo cada 6 meses. En enero coinciden las tres. ¿En qué otros meses del año van a coincidir?
- 7) Un faro se enciende cada 12 segundos, otro cada 18 segundos y un tercero cada minuto. A las 6.30 de la tarde los tres coinciden. Averigua las veces que volverán a coincidir en los cinco minutos siguientes.
- 8) Un viajero va a Barcelona cada 18 días y otro cada 24 días. Hoy han estado los dos en Barcelona. ¿Dentro de cuántos días volverán a estar los dos a la vez en Barcelona?
- 9) ¿Cuál es el menor número que al dividirlo separadamente por 15, 20, 36 y 48 en cada caso dar de resto 9?
- 10) En una bodega hay 3 toneles de vino, cuyas capacidades son: 250 l, 360 l, y 540 l. Su contenido se quiere envasar en cierto número de garrafas iguales. Calcular las capacidades máximas de estas garrafas para que en ellas se pueden envasar el vino contenido en cada uno de los toneles, y el número de garrafas que se necesitan.
- 11) El suelo de una habitación, que se quiere embaldosar, tiene 5 m de largo y 3 m de ancho.
- 12) Calcula el lado y el número de la baldosas, tal que el número de baldosas que se coloque sea mínimo y que no sea necesario cortar ninguna de ellas.
- 13) Tres autobuses de distintas líneas salen de una estación: el primero cada 10 minutos, el segundo cada 12 minutos y el tercero cada 15 minutos. Si a las 8 de la mañana han salido los tres de la misma estación, ¿cuándo volverán a salir los tres al mismo tiempo?

6º LAS FRACCIONES



REDUCCIÓN A MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR:

Se calculan fracciones equivalentes a las dadas que tengan como denominador común el m.c.m. de los denominadores de las fracciones y por numerador el producto del numerador inicial por el resultado de dividir el denominador común entre cada denominador inicial.

Ejemplo: $\frac{4}{15}$ y $\frac{3}{20}$ m.c.m. $(15, 20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ $\frac{4}{15} = \frac{4 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{16}{60}$; $\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{9}{60}$

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES:

Si los denominadores son iguales, se deja el mismo denominador y se suman o restan los numeradores

Si los denominadores son distintos, se reducen a común denominador y se suman o restan las fracciones equivalentes obtenidas

PRODUCTO DE FRACCIONES

1º **Regla de los signos:** La misma que la de los números enteros.

2º La multiplicación de fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores, y por denominador, el producto de los denominadores

Ejemplo

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = -\frac{1}{10}$$

COCIENTE DE FRACCIONES

1º **Regla de los signos:** La misma que la de los números entero.

2º La división de fracciones es otra fracción que tiene por numerador el numerador de la primera multiplicado por el denominador de la segunda; y por denominador, el denominador de la primera multiplicado por el numerador de la segunda (o sea, como si se multiplicaran "en cruz").

Ejemplo:

$$\left(-\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{6}{7}\right) = +\frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7}{10}$$

POTENCIA DE FRACCIONES

1º **Regla de los signos:** La misma que la de los números enteros.

2º Para elevar una fracción a una potencia se eleva a dicha potencia tanto el numerador como el denominador.

Ejemplo: $\left(-\frac{3}{2}\right)^4 = +\frac{3^4}{2^4} = +\frac{81}{16}$

RAÍCES CUADRADAS DE FRACCIONES

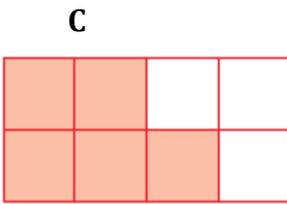
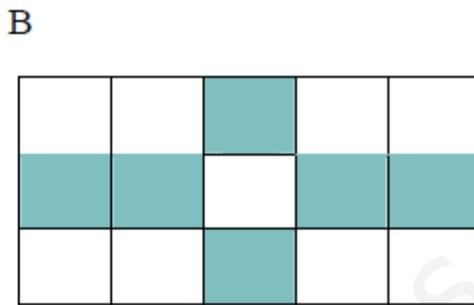
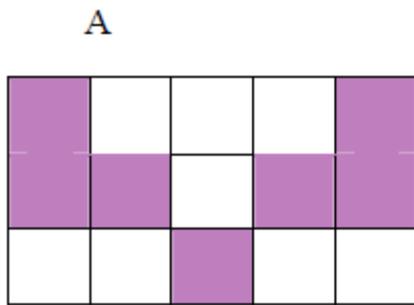
Para hallar la raíz cuadrada de una fracción se le halla la raíz cuadrada al numerador y la raíz

cuadrada al denominador. *Ejemplo:* $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7}$

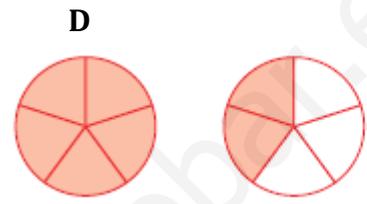
Ejercicios



1º Escribe en forma de fracción la parte de superficie que está coloreada en las figuras



Solución:



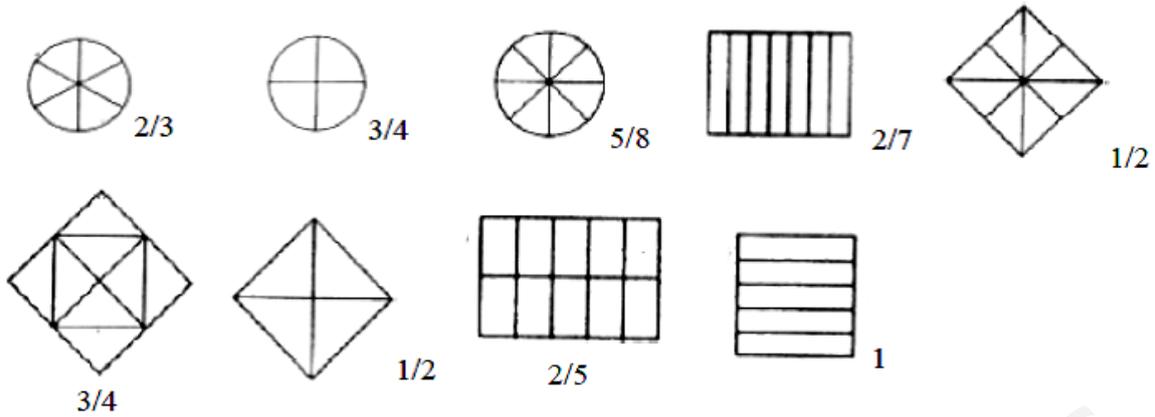
Solución:

2º Indica la fracción sombreada

The shapes are arranged in 6 rows and 5 columns:

- Row 1: Diamond (4 triangles, 2 shaded), Diamond (4 triangles, 2 shaded), Diamond (4 triangles, 2 shaded), Circle (3 sectors, 2 shaded), Rectangle (5 vertical bars, 4 shaded).
- Row 2: Rectangle (5 vertical bars, 4 shaded), Circle (8 sectors, 4 shaded), Rectangle (6 vertical bars, 4 shaded), Rectangle (6 vertical bars, 4 shaded), Rectangle (6 vertical bars, 4 shaded).
- Row 3: Triangle (3 triangles, 2 shaded), Triangle (3 triangles, 2 shaded), Circle (3 sectors, 2 shaded), Triangle (3 triangles, 2 shaded), Circle (8 sectors, 4 shaded).
- Row 4: Circle (10 sectors, 5 shaded), Triangle (3 triangles, 2 shaded), Triangle (3 triangles, 2 shaded), Triangle (3 triangles, 2 shaded), Circle (6 sectors, 3 shaded).
- Row 5: Circle (4 sectors, 2 shaded), Circle (8 sectors, 4 shaded), Rectangle (6 vertical bars, 4 shaded), Rectangle (6 vertical bars, 4 shaded), Rectangle (6 horizontal bars, 4 shaded).
- Row 6: Circle (6 sectors, 3 shaded), Circle (8 sectors, 4 shaded), Square (4 triangles, 2 shaded), Triangle (3 triangles, 2 shaded), Triangle (3 triangles, 2 shaded).

3º Sombrea la fracción indicada



4º Completa la tabla

Repartir en partes iguales	Entre	A cada uno le corresponden	Fracción del total
4 manzanas	8 personas	media manzana	
1 pizza	4 personas		
12 chocolates		4 chocolates	
	2 personas	1 plátano	
		6 dulces	1/3

5º Simplificar por el método de descomposición en factores primos las fracciones siguientes:

$$\frac{210}{924} ; \frac{7128}{7568} ; \frac{1176}{256} ; \frac{240}{1008} ; \frac{972}{6561} ; \frac{540}{3150} ; \frac{7128}{78408} ; \frac{543312}{122304}$$

6º Ordena las fracciones de mayor a menor: $\frac{3}{5}, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}$

7º. Comprueba si son equivalentes las siguientes fracciones:

a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{6}{9}$ b) $\frac{6}{12}$ y $\frac{9}{18}$ c) $\frac{2}{4}$ y $\frac{5}{6}$ d) $\frac{6}{4}, \frac{9}{6}$ y $\frac{6}{9}$

8º Ordena de menor a mayor.

a) $\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}$ b) $\frac{11}{5}, \frac{11}{10}, \frac{11}{7}$ c) $\frac{9}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{15}$ d) $-\frac{8}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{12}$ y $\frac{64}{24}$

9º Completa la siguiente tabla:

Operación	Denominador común	Fracciones reducidas a común denominador	Resultado
$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{5}{8} =$	m.c.m.(4,2,8) = 8	$\frac{6}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8} =$	$\frac{15}{8}$
$\frac{7}{6} - \frac{2}{15} =$			
$\frac{3}{5} + \frac{13}{20} + \frac{7}{10} =$			
$\frac{13}{12} - \frac{17}{18} - \frac{2}{6} =$			
$\frac{7}{9} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} =$			

10º Realiza las siguientes sumas y restas con distinto denominador y da el resultado en fracción irreducible:

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} =$

d) $-\frac{5}{12} - \frac{1}{3} =$

g) $\frac{4}{5} - \frac{2}{15} - \frac{5}{9} =$

b) $\frac{7}{6} - \frac{1}{15} =$

e) $\frac{3}{5} - \frac{13}{15} + \frac{4}{10} =$

h) $\frac{3}{5} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) =$

c) $\frac{7}{12} + \frac{7}{4} =$

f) $\frac{5}{6} + \frac{1}{12} - \frac{2}{3} =$

11º Calcula la fracción correspondiente:

a) 9/11 de 616

c) 2/3 de 630

e) 2/7 de 105

b) 5/9 de 2322

d) 4/5 de 125

12º Realizar las siguientes operaciones con fracciones (simplificando al máximo):

1) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} =$

8) $-\frac{9}{2} - \frac{7}{6} + \frac{3}{4} =$

15) $-\frac{1}{12} + \frac{17}{3} + \frac{15}{8} =$

2) $\frac{5}{6} + \frac{3}{2} + \frac{7}{9} =$

9) $\frac{17}{2} + \frac{2}{3} + \frac{23}{36} =$

16) $\frac{7}{4} - \frac{13}{12} - \frac{8}{3} =$

3) $\frac{9}{8} - \frac{7}{12} - \frac{11}{24} =$

10) $\frac{49}{2} - \frac{35}{6} - \frac{8}{3} =$

17) $\frac{13}{5} - \frac{11}{6} + \frac{9}{2} =$

4) $\frac{7}{5} + \frac{11}{6} - \frac{7}{10} =$

11) $\frac{7}{8} + \frac{13}{5} + \frac{21}{10} =$

18) $\frac{4}{9} + \frac{11}{2} - \frac{9}{7} =$

5) $-\frac{2}{7} - \frac{7}{3} - \frac{3}{14} =$

12) $-\frac{17}{8} - \frac{7}{3} + \frac{9}{4} =$

19) $-\frac{3}{4} - \frac{5}{9} + \frac{9}{8} =$

6) $\frac{6}{25} + \frac{7}{15} - \frac{11}{5} =$

13) $+\frac{21}{2} - \frac{17}{5} - \frac{9}{4} =$

20) $\frac{9}{5} + \frac{13}{10} - \frac{7}{15} =$

7) $\frac{3}{10} - \frac{11}{4} + \frac{5}{2} =$

14) $-\frac{7}{3} - \frac{11}{4} + \frac{5}{2} =$

21) $\frac{5}{3} - \frac{10}{4} + \frac{1}{2} =$

13º Realizar los siguientes productos (simplificando al máximo)

1) $\left(+\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) =$

6) $\left(+\frac{9}{26}\right) \cdot \left(-\frac{13}{4}\right) \cdot \left(+\frac{6}{5}\right) =$

2) $\left(+\frac{7}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) \cdot \left(+\frac{1}{7}\right) =$

7) $\left(+\frac{13}{2}\right) \cdot \left(-\frac{16}{7}\right) \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) =$

3) $\left(+\frac{9}{11}\right) \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \left(-\frac{11}{3}\right) =$

8) $\left(-\frac{4}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{15}\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) =$

4) $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) \cdot \left(+\frac{12}{2}\right) =$

9) $\left(+\frac{5}{33}\right) \cdot \left(+\frac{11}{3}\right) \cdot \left(+\frac{9}{4}\right) =$

5) $\left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(+\frac{9}{10}\right) \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) =$

10) $\left(+\frac{4}{3}\right) \cdot \left(+\frac{1}{9}\right) \cdot \left(+\frac{3}{5}\right) =$

14º Realizar los siguientes cocientes (simplificando al máximo):

$$\begin{array}{lll}
 1) \left(-\frac{5}{2}\right) : \left(+\frac{3}{4}\right) = \dots & 2) \left(-\frac{2}{7}\right) : \left(-\frac{3}{7}\right) = \dots & 3) \left(-\frac{11}{9}\right) : \left(-\frac{5}{3}\right) = \\
 4) \left(+\frac{8}{9}\right) : \left(-\frac{4}{3}\right) = \dots & 5) \left(\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{1}{6}\right) = \dots & 6) \left(-\frac{1}{12}\right) : \left(\frac{2}{9}\right) = \\
 7) \left(-\frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{9}{8}\right) = \dots & 8) \left(-\frac{4}{25}\right) : \left(+\frac{2}{75}\right) = \dots & 9) \left(-\frac{25}{16}\right) : \left(-\frac{55}{48}\right) = \\
 10) \left(+\frac{7}{12}\right) : \left(-\frac{21}{4}\right) = \dots & 11) \left(\frac{9}{32}\right) : \left(\frac{1}{6}\right) = \dots & 12) \left(+\frac{44}{7}\right) : \left(-\frac{11}{28}\right) = \\
 13) \left(+\frac{8}{9}\right) : \left(-\frac{27}{16}\right) = \dots & 14) \left(\frac{1}{25}\right) : \left(-\frac{35}{36}\right) = \dots & 15) \left(-\frac{8}{121}\right) : \left(+\frac{16}{144}\right) = \\
 16) \left(-\frac{2}{49}\right) : \left(-\frac{16}{81}\right) = \dots & 17) \left(+\frac{3}{23}\right) : \left(-\frac{9}{46}\right) = \dots & 18) \left(-\frac{2}{30}\right) : \left(-\frac{9}{50}\right) =
 \end{array}$$

15º Realizar las siguientes potencias:

$$\begin{array}{llll}
 1) \left(-\frac{7}{5}\right)^3 = \dots & 2) \left(-\frac{2}{5}\right)^4 = \dots & 3) \left(+\frac{7}{4}\right)^2 = \dots & 4) \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \dots \\
 5) \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \dots & 6) \left(+\frac{4}{3}\right)^2 = \dots & 7) \left(+\frac{1}{2}\right)^6 = \dots & 8) \left(-\frac{7}{3}\right)^4 = \dots \\
 9) \left(-\frac{5}{3}\right)^4 = \dots & 10) \left(-\frac{9}{8}\right)^3 = \dots & 11) \left(+\frac{1}{7}\right)^3 = \dots & 12) \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \dots \\
 13) \left(-\frac{8}{3}\right)^3 = \dots & 14) \left(+\frac{11}{3}\right)^2 = \dots & 15) \left(+\frac{2}{9}\right)^3 = \dots & 16) \left(+\frac{2}{7}\right)^5 = \dots \\
 17) \left(-\frac{2}{3}\right)^7 = \dots & 18) \left(-\frac{3}{4}\right)^5 = \dots & 19) \left(+\frac{3}{2}\right)^4 = \dots & 20) \left(-\frac{5}{8}\right)^4 = \dots
 \end{array}$$

16º Realizar las siguientes raíces:

$$\begin{array}{llllll}
 a) \sqrt{\frac{16}{25}} = & b) \sqrt{\frac{64}{36}} = & c) \sqrt{\frac{4}{3}} = & d) \sqrt{\frac{49}{4}} = & e) \sqrt{\frac{3}{16}} =
 \end{array}$$

17º Realiza las siguientes operaciones con fracciones:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{5}{4} \cdot \frac{10}{4} - \frac{2}{25} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = & 7) \frac{(-3)}{5} - \frac{7}{2} \cdot \frac{(-5)}{3} + \frac{4}{9} = \\
 2) \frac{5}{4} : \frac{10}{4} \cdot \frac{2}{25} : \frac{16}{9} \cdot \frac{3}{15} : \frac{1}{8} = & 8) \frac{(-4)}{3} + \frac{7}{12} - \frac{5}{4} = \\
 3) \left(-\frac{5}{3}\right) : \left(-\frac{35}{6}\right) \cdot \frac{5}{2} = & 9) \frac{(-4)}{3} : \frac{(-7)}{12} - \frac{5}{4} = \\
 4) \left(-\frac{5}{3}\right) : \left(-\frac{15}{6}\right) \cdot \frac{5}{4} = & 10) \frac{-1}{12} + \frac{15}{8} \cdot \frac{9}{4} - \frac{1}{2} : \frac{7}{18} = \\
 5) \frac{9}{8} - \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{6}{15} = & 11) \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \\
 6) \left(-\frac{5}{9}\right) : \left(-\frac{15}{6}\right) \cdot \frac{3}{2} = & 12) \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}\right) : \left(\frac{2}{3} : \frac{1}{5}\right) =
 \end{array}$$

$$13) \frac{3}{4} + \left(\frac{7}{3} - \frac{5}{6} \right) - \frac{1}{4}$$

$$14) \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{4} + \frac{1}{2}$$

$$15) \frac{11}{6} - 2 + \frac{1}{3} : \frac{2}{5}$$

$$16) \frac{1}{3} + \frac{7}{4} + \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3} \right)$$

$$17) \left(\frac{2}{12} \cdot \frac{6}{4} \right) : \left(\frac{3}{4} : \frac{3}{2} \right) =$$

$$18) \frac{5}{24} : \left(\frac{7}{42} + \frac{9}{14} \right)$$

$$19) \left(\frac{3}{10} + \frac{12}{4} \right) : \left(\frac{13}{9} - \frac{4}{8} \right) =$$

$$20) \left(\frac{3}{2} + 2 \right) \cdot \left(2 - \frac{12}{7} \right) =$$

Problemas

- 1) Alicia ha escrito los $\frac{4}{9}$ de un trabajo de 36 páginas. ¿Cuántas páginas ha escrito?
- 2) Compramos una garrafa de 5 litros de agua y gastamos tres litros y cuarto. ¿Cuánto le queda?
- 3) Un especialista en informática ha cobrado 403 euros por instalar una red de ordenadores. Ha dedicado 6 horas y $\frac{1}{5}$ de la siguiente. ¿Cuál es el precio de su hora de trabajo?
- 4) Una caja de tornillos pesa $\frac{3}{4}$ de kilo. Si tenemos almacenados, en total, 4 kilos y medio de tornillos, ¿cuántas cajas hay?
- 5) En clase de Lengua, nos recomiendan leer $\frac{3}{8}$ de las páginas de un libro. Adrián ha leído ya la mitad de dichas páginas. Si el libro tiene 224 páginas, ¿cuántas ha leído Adrián?
- 6) Los $\frac{3}{4}$ de los alumnos de un instituto van a él andando, $\frac{1}{5}$ en autobús y el resto en coche, ¿qué fracción representan? Si en el instituto hay 600 alumnos matriculados, ¿cuántos alumnos vienen en cada medio?
- 7) David tenía 50 euros y se ha gastado 20 euros. ¿Qué fracción le queda del dinero que tenía?
- 8) De un depósito de gasolina se sacan primero los $\frac{2}{5}$ de su capacidad y después se saca $\frac{1}{2}$ de su capacidad. ¿Qué fracción de combustible hemos sacado? ¿Qué fracción queda en el depósito?
- 9) Para hacer un disfraz se han utilizado los $\frac{3}{5}$ de una pieza de tela de 25 metros. Si el precio del metro de tela es de 3 euros, ¿cuánto ha costado la tela del disfraz?
- 10) Un muchacho toma $\frac{1}{4}$ de litro de leche para desayunar, $\frac{3}{5}$ de litro para merendar y $\frac{2}{5}$ de litro para cenar. ¿Cuánta leche ha tomado al cabo del día?
- 11) Resuelve el siguiente problema mediante figura. Juan da los $\frac{3}{4}$ de sus cromos a sus compañeros y aún le quedan 32 cromos. ¿Cuántos cromos tenía Juan al principio?
- 12) Al tostarse el café, éste pierde $\frac{1}{5}$ de su peso. Un comerciante tiene 80 kg de café verde. ¿Cuánto pesará este café después de tostarlo?
- 13) Para celebrar el cumpleaños de mi hermana hemos comprado una tarta de 1 kg y nos sobró un trozo de 300 gr. ¿Qué fracción de tarta consumimos en el cumpleaños?



- 14) Un depósito está lleno de agua. Se sacan los $\frac{3}{4}$ de su contenido y más tarde los $\frac{2}{3}$ de lo que quedaba, con lo que todavía quedan en el depósito 200 litros. Averigua la capacidad del depósito.
- 15) María leyó la semana pasada la mitad de un libro y esta semana la tercera parte, pero aún le faltan 30 páginas, ¿cuántas páginas tiene el libro?
- 16) En un pinar de 210 pinos se talaron sus $\frac{3}{5}$ partes, poco después hubo un incendio, en el que se quemaron los $\frac{5}{7}$ de los pinos que quedaban. ¿Cuántos pinos sobrevivieron?
- 17) Una caja contiene 24 bombones. Juan se come un tercio y Ana se come un cuarto de los que quedan. ¿Cuántos bombones quedan en la caja?
- 18) En una botella de un litro de leche queda un tercio. Le añadimos un medio y luego consumimos tres cuartos. ¿Qué fracción de litro queda de leche en la botella?
- 19) De un depósito de gasolina se sacan primero los $\frac{2}{5}$ de su capacidad y después se saca $\frac{1}{2}$ de su capacidad. ¿Qué fracción de combustible hemos sacado? ¿Qué fracción queda en el depósito?.
- 20) Juan y Pedro compiten en una carrera, Juan ha recorrido $\frac{5}{12}$ del trayecto y Pedro $\frac{3}{8}$. ¿Cuál de los dos va primero?.
- 21) Ana, María y Pedro compran un refresco cada uno. A los 10 minutos, le queda la mitad a Ana, los tres cuartos a María y un tercio a Pedro. Ordena, de menor a mayor a los tres amigos, según la cantidad que les queda.
- 22) En una botella de un litro vacía, echamos $\frac{2}{3}$ de agua y luego $\frac{1}{4}$. ¿Cuánto falta para llenarse?
- 23) Compramos una garrafa de 5 litros de agua y gastamos tres litros y cuarto. ¿Cuánto le queda?
- 24) Una ciudad tiene 30 000 habitantes; los $\frac{2}{8}$ tienen menos de 20 años, y de éstos los $\frac{4}{5}$ son estudiantes. ¿Cuántos estudiantes menores de 20 años tiene dicha ciudad?
- 25) El suelo de un almacén tiene 1 200 m² de superficie. Luis pinta un día $\frac{1}{4}$, y otro día, $\frac{1}{3}$; su compañero Juan pinta el resto. Si pagan a 2 € el metro cuadrado, ¿cuánto cobra cada uno?
- 26) En una clase de 30 alumnos, aprueban las Matemáticas los $\frac{2}{3}$, y $\frac{1}{4}$ de éstos obtienen sobresaliente. ¿Cuántos alumnos han obtenido sobresaliente?
- 27) Un poste de teléfonos tiene bajo tierra $\frac{1}{5}$ de su longitud. Si la longitud del poste sobre el suelo es de 4 m, ¿cuánto mide el poste en total?
- 28) Una familia gana 18 000 € al año. Gasta en comida $\frac{3}{10}$, en ropa $\frac{1}{8}$, en transporte $\frac{1}{12}$ y en otras cosas 3 000 €. ¿Cuánto ahorra al año?
- 29) Un libro tiene 240 páginas. El primer día leemos $\frac{1}{5}$; el segundo, $\frac{1}{6}$; el tercero, $\frac{1}{8}$. ¿Cuántas páginas quedan sin leer?
- 30) Calcula el tiempo transcurrido desde las nueve y media de la mañana hasta las doce y cuarto de la mañana. Utilizando fracciones
- 31) Un depósito de agua tiene 600 litros de capacidad y está lleno. Gastamos $\frac{1}{4}$ del total y luego $\frac{1}{3}$ del total. ¿Cuántos litros quedan en el depósito?



7º NÚMEROS DECIMALES



Cifras decimales

décima	↪	$10^{-1} = 0,1$
centésima	↪	$10^{-2} = 0,01$
milésima	↪	$10^{-3} = 0,001$
diezmilésima	↪	$10^{-4} = 0,0001$
cienmilésima	↪	$10^{-5} = 0,00001$
millonésima	↪	$10^{-6} = 0,000001$

Ejercicios

1º Escribe en milésimas estos decimales.

1 unidad =	
1 décima =	
1 centésima =	
1 décima =	
1 unidad =	
1 centésima =	

2º Escribe los siguientes números

Un entero y cuarenta y dos centésimas =	
Dos enteros y veintidós centésimas =	
Catorce enteros y tres centésimas =	
Trece enteros y siete décimas =	
Ocho enteros y cinco centésimas =	
Ciento siete enteros y seis décimas =	

3º Observa cómo se leen los decimales:

23.045,89 → veintitrés mil cuarenta y cinco unidades y ochenta y nueve centésimas.

12.340.029,7 → doce millones trescientas cuarenta mil veintinueve unidades y siete décimas.

Completa:

4.612,18 → cuatro _____ seiscientos _____ y _____

3.026,8 → tres _____ unidades y _____

4º Escribe con cifras los siguientes números:

a) Treinta y siete unidades y cincuenta y tres milésimas.

b) Dos mil dos unidades y doce centésimas.

c) Un millón ciento cuatro mil treinta y cinco unidades y cincuenta centésimas.

5º. Escribe con palabras los siguientes números decimales:

- a) 303'97
- b) 1.057'372
- c) 3.000.003'003

6º. Observa el número 12.345,6789. Indica qué cifra corresponde a las:

- a) *Unidades de millar*
- b) *Centenas*
- c) *Décimas*
- d) *Milésimas*

7º Indica los valores de la cifra 7 en los siguientes números:

- a) 475.702,07 →
- b) 7.895.074,007 →
- c) 4.0947.067,7 →

8º Completa la tabla

	Centenas	Decenas	Unidades	Décimas	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas
345,67							
86,0456							
7,254							
905,8							

9º Una décima es el resultado de dividir una unidad en diez partes iguales. Se representa 0,1 o 1/10. Dos, tres, cuatro, ..., décimas son el resultado de multiplicar dichas cifras por 0,1. Se representan por 0,2; 0,3; etc.

Escribe:

Seis décimas	Siete décimas	Ocho décimas	Nueve décimas

10º Una centésima es el resultado de dividir una unidad en cien partes iguales. Se representa 0,01 o 1/100. Dos, tres, cuatro, ..., centésimas son el resultado de multiplicar dichas cifras por 0,01. Se representan por 0,02; 0,03; etc.

Escribe:

Cinco centésimas	Siete centésimas	Ocho centésimas	Nueve centésimas

11º . Si 12,45 se lee 12 enteros y cuarenta y cinco centésimas. Escribe cómo se leen los números siguientes:

- a) 15,678 ; b) 20,0034 ; c) 345,05 ; d) 123,045

12º Escribir los siguientes números:

- 1) Trescientas veintitrés unidades, cuarenta y dos milésimas . _____
- 2) Ochenta y tres diez milésimas . _____
- 3) Un millón veintitrés mil unidades, seis cien milésimas. _____
- 4) Setecientos tres unidades, una centésima . _____
- 5) Tres mil doscientas trece unidades, seis centésimas. _____
- 6) Tres unidades dos mil cuarenta y nueve millonésimas . _____
- 7) Doscientas veintitrés unidades, catorce diez milésimas . _____
- 8) Un millón mil uno unidades, mil uno millonésimas. _____
- 9) Cuarenta y seis mil doscientas ocho millonésimas . _____
- 10) Siete unidades trescientas veinte mil cinco diez millonésimas. _____
- 11) Ocho unidades, ciento catorce cien milésimas. _____

13º Escribe números que tengan las cifras que se indican:

Tres cifras en la parte entera y dos cifras en la parte decimal	Cuatro cifras en la parte entera y tres cifras en la parte decimal	Una cifra en la parte entera y cuatro cifras en la parte decimal

14º Completa la tabla dando la aproximación del número 23'6195 utilizando los métodos indicados.

	A las milésimas	A las centésimas	A las décimas	A las unidades
Por truncamiento				
Por redondeo				

15º Completa la tabla redondeando según te piden en cada columna:

Medidas	Redondea a la unidad	Redondea a las décimas	Redondea a las centésimas
34,10356 km			
3,5002 dal			
0,9376 m ³			

16º Para ordenar números decimales tenemos que procurar que tengan igual número de cifras decimales, completando con ceros a la derecha de las cifras decimales, si es necesario.

Observa 3,14 ; 3,4 ; 3,007.

Completo, para que todos tengan tres cifras decimales: 3,140 ; 3,400 ; 3,007.

Observo que todos tienen igual la parte entera. Si tengo que ordenar de mayor a menor ahora es muy fácil. Ordénalos tú:

_____ > _____ > _____

17º. Ordena de menor a mayor (usa el símbolo \leq): 1,1 ; 1,09 ; 1,1 ; 1,71
_____ < _____ < _____ < _____

18º Ordena de mayor a menor:

3,1; 3,019; 3,2; 3,19; 3,023; 3,24

19º Escribe:

a) Tres números mayores que 0,1 y menores que 0,4:

b) Dos números comprendidos entre 1,456 y 1,457:

c) Cuatro números comprendidos entre -0,45 y -0,44:

20º Indica cuáles de las siguientes relaciones son ciertas:

a) $0,4 < 0,400$ b) $0,3 > 0,29$ c) $12,45 < 12,9$

21º Intercala un número decimal para que las desigualdades siguientes sean correctas:

a) $0,2 > \dots > 0,13$ b) $0,999 < \dots < 0,1$ c) $6,99 < \dots < 7$

22º Ordena de menor a mayor (" $<$ ") los siguientes números decimales:

a) 5'32, 5'032, 5'4, _____ < _____ < _____
b) -3'2, 7'12, -7'123, 7'112, 0'2, 0'1 _____ < _____ < _____ < _____ < _____
c) 2'235, 2'523, 2'352, _____ < _____ < _____
d) 3'352, 2'23, 2'3, -3'45, -3'6, -4'3 _____ < _____ < _____ < _____ < _____

23º Escribe tres números decimales ordenados entre:

a) 2'34 y 2'35
b) -0'275 y -0'274

24º. Realiza las sumas y restas de números decimales.

a) $32'35 - 0'89 =$
b) $81'002 - 45'09 =$
c) $4'53 + 0'089 + 3'4 =$
d) $4 - 2'95 =$
e) $78'089 + 0'067 + 2'765 + 1'89 =$

25º Realiza las multiplicaciones y divisiones de números decimales.

a) $24'5 \cdot 100 =$ g) $794'2 \cdot 0'01 =$
b) $235'45 : 100 =$ h) $0'0012 \cdot 100 =$
c) $34'25 \cdot 1000 =$ i) $3'1 : 0'001 =$
d) $493 : 1000 =$ j) $27'33 \cdot 0'1 =$
e) $0'045 \cdot 0'001 =$ k) $5 : 1000 =$
f) $30 : 10 =$
h) $1'84 : 0'01 =$

26º. Realiza las multiplicaciones y divisiones de números decimales.

- | | |
|--------------------------|-------------------|
| a) $24'5 \cdot 5,65 =$ | h) $7'2x0'0051$ |
| b) $34'25 \cdot 87'67 =$ | i) $2'34x0'33$ |
| c) $23'545 : 0'5 =$ | j) $7'24 : 0'028$ |
| d) $7'943 : 0'14 =$ | k) $0'054 : 0'25$ |
| e) $0'32x0'27$ | l) $315 : 0'005$ |
| f) $0'045x0'27$ | m) $5 : 0'02$ |
| g) $23'5x13'5$ | n) $0'14 : 12'8$ |

27º Realiza las siguientes operaciones combinadas:

- a) $4'56 + 3 \cdot (7'92 + 5'65) =$
b) $2'1 \cdot (0'5 + 1'2 \cdot 3 + 1'8 : 3) + 1'7 =$
c) $3'2 : 100 - 0'1082 =$

28º. Calcula y da el resultado redondeado a las décimas.

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| a) $254'05 + 107'3$ | c) $12'5 \cdot 157'15$ |
| b) $5.409'39 - 1.075'44$ | d) $2.002 : 4'27$ |

29º. Calcula "a mano":

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| a) $3,45 + 21,15 - 0,57$ | g) $0,35 : 10$ |
| b) $3,456 + 4,56 - 7,123$ | h) $3,4 : 100$ |
| c) $0,67 + 3 - 2,85$ | i) $4\ 678,46 - 3\ 777,79$ |
| d) $9 - 0,045 - 2,3$ | j) $035,34 \times 913$ |
| e) $3,56 \cdot 100$ | k) $67\ 319,45 : 48$ |
| f) $120 : 10$ | |

30º Comprueba si los resultados son correctos y coloca las comas en los decimales siguientes:

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| a) $4,12 \times 10 = 412$ | d) $10 : 8 = 125$ |
| b) $34,6 \times 3 = 1038$ | e) $34,56 : 100 = 03456$ |
| c) $50,2 \times 1,5 = 7530$ | f) $234,7 : 0,23 = 1020434783$ |

31º. Calcula "a mano"

- | | |
|---------------------------------|----------------------|
| a) $34,567 + 234,67 + 1,2609$ | k) $2,8 : 6,3$ |
| b) $5\ 678,78 + 234,6 + 67,601$ | l) $8 : 0,1$ |
| c) $56\ 823,51 - 48\ 987,777$ | m) $0,75 : 0,25$ |
| d) $21,578 - 9,6179$ | n) $5\ 280 : 1\ 000$ |
| e) $16,56 \times 10$ | ñ) $0,2 : 100$ |
| f) $5,23 \times 100$ | o) $5 : 100$ |
| g) $0,675 \times 100$ | p) $47\ 418,45 : 62$ |
| h) $489,35 \times 357$ | q) $567,12 : 4,8$ |
| i) $21,578 \times 9,08$ | r) $178,4 : 0,679$ |
| j) $24,78 \times 0,478$ | |

Problemas



- 1) Una población tiene 6 000 habitantes, de los que $\frac{3}{8}$ hombres menores de 50 años, y $\frac{1}{4}$, mujeres menores de 50 años. ¿Cuántos mayores de 50 años hay?
- 2) Un ciclista ha recorrido 30 km, lo que supone los $\frac{3}{5}$ del total de su itinerario. ¿Cuántos kilómetros piensa recorrer en total?
- 3) De un bidón de aceite se extraen primero, $\frac{2}{5}$ de su contenido y, después, un tercio de lo que queda. Si todavía hay 12 litros, ¿cuál es su capacidad?
- 4) Un lápiz tiene 12,58 cm. de largo. Si se quiere fabricar 300 lápices, ¿cuántos centímetros de material se necesitará?
- 5) Un comerciante ha adquirido por 627 € setenta y cinco CD de música. ¿A cuánto le ha salido cada disco compacto? Si quiere ganar en la venta 45 céntimos de euro por disco, ¿a cómo los venderá?
- 6) He comprado en la pescadería del mercado cinco truchas que han pesado 1,640 Kg. en total. ¿Cuánto pesa cada una?
- 7) Un kilogramo de filetes cuesta 11,45 €. ¿Cuánto pagaré por 1,5 kg? ¿Y por 850 gramos?
- 8) Un rollo de tela tiene una longitud de 30 m. ¿Cuántos vestidos se pueden confeccionar con esa tela si para cada uno se necesitan 2,8 m?
- 9) Una parcela rectangular mide 4,26 m de largo por 23,8 m de ancho. ¿Cuál es su valor si se vende a 52,5 €/m²?
- 10) Ana ha gastado 186 € en libros. Por ser la Semana del libro, le han descontado un 15% del total. ¿Cuánto pagará en caja?
- 11) El precio de venta al público de un televisor es de 725,75 euros. Para promocionar la marca se hace una rebaja del $\frac{3}{25}$ de su precio. ¿Cuál es su precio final?
- 12) Jaime ha de recorrer en bicicleta 35 km en 22 min. ¿Cuántos kilómetros recorrerá de media por minuto?
- 13) Manuel compra una camiseta que cuesta 7,80 € y unos pantalones que valen 28,90 € Si paga con un billete de 50 €, ¿cuánto le devolverán?
- 14) Si un kilo de café cuesta 5,74 €, ¿cuánto costarán 2,3 Kg.?
- 15) Si 0,1 litros de leche contiene 3,03 g de proteínas, ¿cuál será el contenido en proteínas de una botella de 1,5 litros?
- 16) Un coche consume 5,2 litros de gasolina por cada 100 km. Si el litro de gasolina cuesta 1,167 €, ¿cuánto costará la gasolina consumida por este vehículo en un viaje de 430 km?
- 17) Marisol compra en el mercado 0,635 Kg. de carne picada a 7,85 €/kg y 1,245 Kg. de ternera a 3,45 €/kg. Si para entrega un billete de 10 €, ¿cuánto dinero le devolverán?
- 18) Un paso normal de Javier mide 0,85 m ¿Cuántos pasos ha de dar para recorrer 1 500 m? ¿Cuántos metros recorre si da 90 pasos?
- 19) Luis ha recaudado 315 € vendiendo papeletas de una rifa a 2,50 € cada una. ¿Cuántas ha vendido?

- 20)** Calcula el perímetro de un hexágono de 4,3 cm. de lado.
- 21)** La amplitud de las pantallas de televisión se expresan en pulgadas y hace referencia a la medida de la diagonal de la pantalla. Si una pulgada equivale a 2,54 cm., ¿cuánto mide la diagonal de una pantalla de 21 pulgadas?
- 22)** Manuel compra una camiseta que cuesta 7,80 € y unos pantalones que valen 8,90 € Si paga con un billete de 50 € ¿cuánto le devuelven
- 23)** Si 1 metro de tela nos cuesta 4,73 euros y compramos 3,25 metros, ¿qué cantidad aproximada tendremos que pagar?
- 24)** Un alumno compra en una librería los siguientes artículos:
- 3 bolígrafos a 1,35 euros la unidad.
 - 2 lápices a 0,75 euros la unidad.
 - 1 cuaderno a 3,10 euros la unidad.
- Estimó que su compra valdría aproximadamente entre 8 y 9 euros. Explica cómo crees que hizo dicha estimación.
- 25)** Con el vino producido en una viña se han llenado 325 cajas de 12 botellas cada una. Si cada botella tiene una capacidad de 0,75 litros, ¿cuántos litros ha producido la viña? Si las botellas hubiesen sido de 0,5 litros, ¿cuántas botellas se hubieran llenado?
- 26)** Dos cuerdas juntas miden 32,4 metros. Si una mide 4,47 metros más que la otra, ¿cuánto mide cada una?
- 27)** Una jarra vacía pesa 0,64 kg y llena de agua pesa 1,728 kg. ¿Cuánto pesa el agua?
- 28)** Si un litro de gasoil cuesta 0,687 euros, ¿cuánto tendremos que pagar por 25 litros?
- 29)** Laura ha hecho hoy 43'5 kg de pasta y la quiere empaquetar en cajas de 0'250 kg. ¿Cuántas cajas necesita Laura?
- 30)** En una fábrica de refrescos se preparan 4138'2 litros de refresco de naranja y se envasan en botes de 0'33 l. ¿Cuántos botes se necesitan?
- 31)** María ha ido al banco a cambiar 45'50 € por dólares. Por cada euro le han dado 0'96 dólares. ¿Cuántos dólares tiene en total?
- 32)** Juan recibe 10 € de paga. Tenía de la semanas pasadas 23'57 €. Gasta 5'75 € en la cena del sábado. Cobra 7'50 € por cortar el césped al vecino y compra dos discos en las rebajas a 1'29 € cada uno. ¿Qué dinero le queda?
- 33)** Las estaturas en metros de 5 alumnos de la clase de 2.º A de un IES son: 1'57, 1'494, 1'496, 1'575 y 1'58. Ordénalos de más alto a más bajo.
- 34)** El perímetro de un triángulo equilátero mide 35,9 m. Calcula la longitud de cada lado redondeando el resultado a dos decimales.
- 35)** Un coche tiene un gasto medio de 5,7 litros de gasolina cada 100 km circulando por ciudad y carretera. Si el precio de la gasolina está a 0,92 €/L, ¿cuánto gastará en 535 km?
- 36)** Deseamos comprar una parcela de regadío que mide 45 m por 225 m. Si el metro cuadrado vale 0,6 €, ¿cuánto necesitamos para pagar la parcela?
- 37)** Un grifo llenó un depósito de 75 120 litros en 8 horas. ¿Cuántos litros arrojaba el grifo cada minuto?
- 38)** El lado de un hexágono regular mide 6,4 cm. ¿Cuánto mide el perímetro?

8º PROPORCIONALIDAD

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

8.1º DIRECTA

RAZÓN DE DOS NÚMEROS, a y b : Es el cociente indicado de los mismos: $\frac{a}{b}$

a : antecedente; b : consecuente

PROPORCIÓN: Es la igualdad de dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

a y d : extremos; b y c : medios

Ejemplo: $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$

PROPORCIÓN CONTINUA: aquella que tiene los medios iguales:

Ejemplos: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$; $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$

PROPIEDAD: "En toda proporción, el producto de extremos es igual al producto de medios"

Así en la proporción: $\frac{3}{4} = \frac{21}{28} \rightarrow 3 \cdot 28 = 84$; $4 \cdot 21 = 84$

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** cuando el cociente de las cantidades correspondientes de esas dos magnitudes es constante. Este cociente se llama **razón de proporcionalidad**.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = r$$

Para calcular **términos directamente proporcionales** simplemente hay que resolver la ecuación:

$$\frac{a_n}{b_n} = r$$

donde conocemos el valor de a_n o de b_n y de la razón de proporcionalidad, r .

Ejercicios

1º Razonar si están bien escritas las siguientes proporciones:

- 1) $\frac{2}{3} = \frac{34}{51}$ 2) $\frac{5}{3} = \frac{15}{12}$ 3) $\frac{4}{7} = \frac{7}{12}$ 4) $\frac{3}{11} = \frac{21}{77}$ 5) $\frac{4}{5} = \frac{2}{2'5}$
6) $\frac{7}{3} = \frac{21}{9}$ 7) $\frac{4}{9} = \frac{24}{54}$ 8) $\frac{2'5}{3'1} = \frac{7'5}{9'3}$ 9) $\frac{2}{3} = \frac{1}{1'5}$ 10) $\frac{3}{4} = \frac{2}{7}$
11) $\frac{4}{11} = \frac{20}{55}$ 2) $\frac{5}{7} = \frac{2}{3}$ 13) $\frac{1'5}{4} = \frac{3}{2}$ 14) $\frac{8}{3} = \frac{2}{4}$ 15) $\frac{1}{9} = \frac{5}{43}$
16) $\frac{2'5}{3} = \frac{15}{18}$ 17) $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ 18) $\frac{1'5}{2} = \frac{9}{6}$ 19) $\frac{8}{3} = \frac{4}{9}$ 20) $\frac{6}{5} = \frac{3}{2}$

9º Completa esta serie de razones iguales.

a) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15} = \text{---} = \text{---} = \text{---}$

c) $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \text{---} = \text{---} = \text{---}$

b) $\frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{12}{30} = \text{---} = \text{---} = \text{---}$

d) $\frac{3}{7} = \frac{9}{21} = \frac{27}{63} = \text{---} = \text{---} = \text{---}$

10º Completa la siguiente tabla que relaciona los intereses cobrados por un banco y el capital prestado

Capital	100		800	200
Interés	10	500		

11º Completa las siguientes tablas de proporcionalidad directa

a)

Magnitud A	2	5	9	17
Magnitud B	7			

Constante de proporcionalidad =

b)

Magnitud A	5	7	9	16
Magnitud B			4	

Constante de proporcionalidad =

c)

Magnitud A	2	3	6	11
Magnitud B				5

Constante de proporcionalidad =

d)

Magnitud A	3	4	10	13
Magnitud B		9		

12º Completa la siguiente tabla para que las magnitudes sean directamente proporcionales:

1	2	3	4	5
		24		

2	5	15	20	30
10				

Problemas

- El coche de mi padre consume 10 litros cada 100 km. Calcula la razón entre el número de litros consumidos y los kilómetros que se recorren.
- El precio de una llamada telefónica es de 3 céntimos el minuto. Halla la razón entre el precio de la llamada y el tiempo en segundos.
- Si en la receta de la tarta se necesitan 120 gr de chocolate para 6 personas, forma las proporciones correspondientes para 3, 12 y 18 personas.
- Un coche a velocidad constante emplea 5 minutos en dar 2 vueltas a un circuito, y 15 minutos en dar 6 vueltas. Indica la proporción que se forma.
- Siempre que compro dos chicles de fresa le llevo tres chicles de menta a mi madre. Si le llevo 24 chicles de menta, averigua cuántos chicles de fresa compré.



6. Marta encesta 6 de cada 190 tiros libres. Encuentra la razón entre el número de tiros libres y el número de aciertos. ¿Es la misma que entre el número de aciertos y el número de tiros?
7. Si 5 kg de naranjas cuestan 2 €, halla la razón entre el peso de las naranjas y su precio
8. Nuestros jugadores Juan y Luis, después de mucho entrenamiento y tirando los dos 3 tiros más consiguen ambos dos goles más. Calcula ahora las razones. ¿Cuál es el mejor?
9. Un equipo de fútbol tiene dos jugadores especializados en penaltis: Juan marca 8 goles de cada 10 tiros a puerta y Luis marca 11 goles de cada 13 tiros. Halla cuál de los dos tiene mejor razón
10. Según las estadísticas 2 de cada 3 personas tienen caries. Si son 360 las personas encuestadas, ¿cuántas tienen caries?
11. Se reparte una herencia entre 3 hermanos. El mayor recibe la mitad que el mediano y éste recibe el triple que el más pequeño. Escribe la razón entre cada dos hermanos.
12. En una clase de 1º de ESO hay 12 suspensos y 18 aprobados. ¿En qué razón están los aprobados y suspensos?
13. Por cada 6 niñas rubias hay 10 morenas. ¿Cuál es la razón de rubias a morenas?
14. En una empresa de autobuses hay 5 hombres por cada 4 mujeres. Si el total de hombres empleados es de 150, ¿cuántas mujeres trabajan allí? Una fuente da 54 litros de agua en 6 minutos. ¿Cuántos litros de agua dará en 20 minutos?
15. Por 12 litros de aceite hemos pagado 45 euros. ¿Cuánto costarán 35 litros?
16. Para descargar un camión de sacos de cemento, 8 obreros han empleado 6 horas. ¿Cuánto tiempo emplearán 12 obreros?
17. Para llenar una piscina se utiliza un grifo que arroja 300 litros de agua por minuto y tarda en llenar la piscina 6 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse la piscina con un grifo que arroje 450 litros por minuto
18. En 15 días un obrero gana 750 euros. ¿Cuánto ganará en 8 días?
19. Si 250 gramos de jamón cuestan 10 euros, ¿cuánto costarán 150 gramos?
20. Tres grifos iguales tardan en llenar un depósito 30 minutos. ¿Cuánto tardarán cinco grifos iguales a los anteriores?
21. Una fuente da 54 litros de agua en 6 minutos. ¿Cuántos litros de agua dará en 20 minutos?
22. Por 12 litros de aceite hemos pagado 45 euros. ¿Cuánto costarán 35 litros?
23. Para descargar un camión de sacos de cemento, 8 obreros han empleado 6 horas. ¿Cuánto tiempo emplearán 12 obreros?
24. Para llenar una piscina se utiliza un grifo que arroja 300 litros de agua por minuto y tarda en llenar la piscina 6 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse la piscina con un grifo que arroje 450 litros por minuto
25. En 15 días un obrero gana 750 euros. ¿Cuánto ganará en 8 días?
26. Si 250 gramos de jamón cuestan 10 euros, ¿cuánto costarán 150 gramos?
27. Tres grifos iguales tardan en llenar un depósito 30 minutos. ¿Cuánto tardarán cinco grifos iguales a los anteriores?

28. El precio de las copias, en papel, de un carrete de 36 fotografías es de 15 €. ¿Cuánto cuestan las copias de un carrete de 24 fotografías?. ¿Cuál es el precio por copia?
29. Una familia pagó 42 € por su consumo de luz durante el mes de enero. Si el consumo diario es siempre el mismo, ¿cuánto pagó en febrero?
30. Para hacer hamburguesas, un cocinero utiliza carne de vaca y carne de cerdo en la proporción 1 a 3.

- a) Completa la tabla, según la proporción del cocinero.
 b) ¿Cuánta carne de cerdo se necesita para mezclar con 3'175 kg de carne de vaca?
 c) ¿Cuánta carne de vaca necesita para mezclar con 6'750 kg de carne de cerdo?

Carne de vaca	Carne de cerdo
100 g	300 g
200 g	
300 g	
400 g	
500 g	

31. Un tren va a una velocidad de 120 km/h y tarda 2 horas en hacer un trayecto. ¿Cuánto tardará en hacer el mismo trayecto a 135 Km/h?
32. En una fábrica de coches se hacen 380 unidades cada 5 horas. ¿Cuántos coches se fabricaran en 12 horas, manteniendo el mismo ritmo?
33. Un pintor cobra 425 euros por cada 5 días de trabajo. ¿Cuánto cobrará por 7 días?
34. De un manantial hemos recogido 200 litros de agua en 4 minutos. ¿Cuántos litros obtendremos en 7 minutos?.
35. Si el kg de naranjas cuesta 1,5 €, ¿cuánto costarán 5 kg? ¿Qué peso de naranjas nos darán por 6 €?
36. Con 200 kg de harina se elaboran 250 kg de pan. ¿Cuántos kg de harina se necesitan para hacer un pan de 2 kg? ¿Cuántos panecillos de 125 g se podrán hacer con 500 kg de harina?
37. Un comerciante ha pagado 108 € por el alumbrado de la tienda durante 3 horas diarias. ¿Cuánto deberá pagar si quiere alumbrarla durante 5 horas al día?
38. Un rectángulo tiene 12 m de base y 7 m de altura. Otro rectángulo con la misma área tiene 5 m de base. ¿Cuánto tiene de altura?
39. En un campamento con 45 estudiantes, compran para desayunar un bollo para cada uno y pagan 32,4 €. Al aumentar en 32 estudiantes el campamento, ¿cuánto pagarán por el total de bollos?
40. Cinco agricultores recogen una cosecha de peras en 4 horas. ¿Cuánto tardará un solo agricultor en recoger la cosecha?
41. Un sastre necesita 20,7 m de tela para hacer 3 trajes. ¿Cuántos metros necesitará para hacer 14 trajes?
42. Una persona escribe en un ordenador 2 500 caracteres en 20 minutos. ¿Cuántos caracteres escribirá en 50 minutos?
43. Tres camiones cisterna tardan 12 días en transportar el agua de un depósito. ¿Cuánto tardarán 9 camiones iguales?

8.2º INVERSA

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando el producto de las cantidades correspondientes a cada magnitud es constante. Este producto se llama **constante de proporcionalidad k**.

$$aa' = bb' = cc' = \dots = k$$

Ejercicios

1º Indica si las tablas de magnitudes son directa o inversamente proporcionales. A continuación, escribe las constantes de proporcionalidad de las que sí lo son.

Magnitud A	15	18	23	30	44
Magnitud B	6	5	4	3	2
Magnitud C	20	30	40	60	70
Magnitud D	21	14	10,5	7	6
Magnitud E	72	8	9	4	6
Magnitud F	2	18	16	36	24

2º Calcula los términos desconocidos de la siguiente tabla, sabiendo que las dos magnitudes son inversamente proporcionales?

Magnitud 1	8	20	c	d	25
Magnitud 2	a'	18	24	10	e'

3º Completa las casillas vacías con los términos que faltan para que cada pareja de magnitudes sea inversamente proporcional. Escribe también cuál es la constante de proporcionalidad.

Magnitud 1			15	21	40	Constante de proporcionalidad <input type="text"/>
Magnitud 2	420	84		40		
Magnitud 3	72		9	18		Constante de proporcionalidad <input type="text"/>
Magnitud 4		18	8		24	
Magnitud 5	20	63	14		12	Constante de proporcionalidad <input type="text"/>
Magnitud 6			18	8		

4º De las siguientes tablas, determina cuál o cuáles representan algún tipo de proporcionalidad (directa o inversa). Justifica tu respuesta.

a)

x	5	10	15	20	25
y	1	2	3	4	5

c)

x	1	4	5	10	20
y	20	5	4	2	1

b)

x	2	3	4	3	2
y	1	2	3	4	5

d)

x	18	15	13	10	9
y	20	15	14	2	1

5º Completa las siguientes tablas e indica, en cada caso, si los pares de valores son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o no guardan ninguna relación de proporcionalidad

A	3	5	7	8		12
B	9	15	21		30	

M	3	4	9	15		25
N	2	3	8		20	

K	2	3	4	5		10
L	30	20	15		10	

6º Razona en qué casos las magnitudes son directamente proporcionales.

- Cantidad de limones en kilogramos y precio por kilogramo.
- Distancia entre dos ciudades y tiempo que se tarda en llegar de una a otra.
- Números de asientos vacíos en el cine y personas que asisten a una sesión.
- La edad de una persona y el número de hermanos que tiene.
- La velocidad de un móvil y el espacio que recorre en un tiempo determinado
- La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en llegar de una ciudad A, a otra B.

7º Indica si las siguientes magnitudes son directa o inversamente proporcionales

VELOCIDAD DE UN TREN (km/h)	50	100	150
TIEMPO QUE DURA EL VIAJE (h)	6	3	2

Problemas

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al aumentar una, disminuye la otra en la misma proporción .

Ejemplo:

Tres pintores tardan 10 días en pintar una tapia. ¿Cuánto tardarán seis pintores en hacer el mismo trabajo? . Al aumentar el número de pintores disminuye el tiempo que se tarda en pintar la tapia, como el número de pintores se multiplica por 2, el número de días que se emplean en pintar se divide por 2. Así tardarán 5 días.

Regla de tres simple inversa

Dadas dos magnitudes, se conocen la equivalencia entre un valor de una y el valor de la otra. Entonces para cada nuevo valor que se da a una magnitud calculamos el valor proporcional inverso de la segunda magnitud

Magnitud A Magnitud B

$$\left. \begin{array}{l} a \longrightarrow b \\ c \longrightarrow x \end{array} \right\} \frac{a}{c} = \frac{x}{b} \quad x = \frac{a \cdot b}{c}$$

Ejemplo:

En una granja avícola hay 300 gallinas que se comen un camión de grano en 20 días. Si se compran 100 gallinas más ¿En cuanto tiempo comerán la misma cantidad de grano?

Gallinas	Días
300	→ 20
400	→ x

$$\frac{300}{400} = \frac{x}{20} \quad x = \frac{20 \cdot 300}{400} = 15$$

1º Una cuadrilla de 20 obreros hace un trabajo en 30 días. ¿De cuántos obreros se compondrá la cuadrilla que haga el mismo trabajo en 24 días?

2º Una nave espacial almacena alimentos para 8 astronautas y para 15 días. Si en la nave viajan 6 astronautas, ¿para cuántos días tienen alimentos?

3º Juan tarda 25 minutos desde su casa a la casa de un amigo en bicicleta, con una velocidad de 21 km/h. ¿Qué tiempo tardará andando si recorre 1 km en 10 minutos? Expresa el resultado en horas, minutos y segundos.

4º Una piscina se llena en 12 horas empleando un grifo que arroja 180 l de agua por minuto. ¿Cuánto tiempo tardaría en llenarse la piscina si el grifo arrojara 360 l por minuto?

5º Para envasar cierta cantidad de vino se necesitan 8 barriles de 200 l de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de vino empleando 32 barriles. ¿Cuál deberá ser la capacidad de cada uno de estos barriles?

6º Dí en qué casos son magnitudes directamente o inversamente proporcionales:

- a) Altura de un árbol y su sombra.
- b) Número de obreros y tiempo que tardan en hacer una valla.
- c) Espacio recorrido por un coche y tiempo empleado en recorrerlo
- d) Número de grifos de una bañera y tiempo que tarda en llenarse

7º Un barco lleva víveres para alimentar durante 42 días a su tripulación, formada por 60 hombres. Si acogen a 10 hombres más de un barco averiado, ¿cuántos días durarán los víveres?

8º Se ha excavado la mitad de un foso en 36 días con 120 obreros. Habiéndose aumentado éstos en 40 obreros, ¿en cuántos días acabarán el trabajo?

9º Si 46 hombres pueden pintar un depósito en 36 días. ¿Cuántos días tardarán en realizar el mismo trabajo 72 hombres?

10º En una excursión, 6 amigos llevan alimentos para 12 días, pero se encuentran con dos amigos que deciden unirse al grupo. ¿Para cuántos días tendrán alimentos?

11º Tres camiones cisterna tardan 12 días en transportar el agua de un depósito. ¿Cuánto tardarán 9 camiones iguales?

12º Media docena de estudiantes de 1.º ESO tardan 15 horas en maquetar la revista del centro. ¿Cuánto tardarán 4 estudiantes en hacer el mismo trabajo si todos trabajan por igual?



8.3º PORCENTAJES



Los **porcentajes** expresan la razón entre dos magnitudes directamente proporcionales e indican la cantidad que corresponde a una de ellas cuando la otra es de exactamente 100. Se calcula:

$$x \% \text{ de } M = \frac{x \cdot M}{100}$$

Ejercicios

1º Calcula los porcentajes de aprobados y ordénalos de mayor a menor.

LENGUA Y LITERATURA Aprobados 13 de cada 20 <input type="text"/> %	MATEMÁTICAS Aprobados 7 de cada 10 <input type="text"/> %	CIENCIAS SOCIALES Aprobados 4 de cada 5 <input type="text"/> %
TECNOLOGÍA Aprobados 7 de cada 8 <input type="text"/> %	FRANCÉS Aprobados 9 de cada 12 <input type="text"/> %	FÍSICA Y QUÍMICA Aprobados 20 de cada 32 <input type="text"/> %

% > % > % > % > % > %



El porcentaje de batido que ha bebido Juan es:

%

El porcentaje de batido que ha bebido Luis es:

%

El porcentaje de batido que ha bebido Diego es:

%

Por tanto, ha bebido más cantidad , con un % de batido

2º Estos son, de izquierda a derecha, Juan, Luis y Diego. Completa las casillas y averigua quién ha bebido más batido de los tres:

3º Expresa cada porcentaje en forma de fracción:

- a) 25%
- b) 10 %
- c) 30%
- d) 60%

4º Calcula los siguientes porcentajes:

- a) 20 % de 700
- b) 50 % de 370
- c) 70 % de 280
- d) 40 % de 160

- e) 18 % de 450
- f) 32 % de 1350
- g) 80 % de 525
- h) 120 % de 85

5º Encuentra la razón y el número decimal equivalentes a cada uno de los siguientes porcentajes.

- | | | |
|----------|---------|-----------|
| a) 70% | e) 80 % | i) 4 % |
| b) 95% | f) 45 % | j) 0,01 % |
| c) 1% | g) 20 % | k) 75 % |
| d) 0,09% | h) 10% | l) 40 % |

Problemas



1. En una industria el jefe de producción ha comprobado que el 0,1% de las piezas fabricadas es defectuosa. Averigua cuántas piezas saldrán defectuosas de un lote de 3000 piezas.
2. Al hacer una encuesta entre las personas de una población de 25000 habitantes se ha encontrado que de ellas, 1000 poseen un coche. ¿Cuál es el tanto por ciento de personas que no tienen coche?
3. Al examinar las piezas defectuosas en la producción de un día, se han encontrado 16, lo cual supone el 1% de la producción total. ¿Cuántas piezas se han fabricado ese día?
4. Compré por valor de 12 €; vendí ganando el 5% sobre el precio de compra. ¿En cuánto vendí?
5. Compré en 36 €, vendí en 45 €. ¿Cuál fue el % de ganancia?
6. Un comerciante compra cierta cantidad de azúcar a 5200 €. Si experimenta una subida de un 15 %, ¿en cuánto debe vender para no perder dinero?
7. Un agricultor revende una cosechadora en 3000 €, ganando el 15 %. ¿En cuánto la compró?
8. A un conductor le han puesto una multa de 90 € por exceso de velocidad y por pagarla fuera de plazo le han aplicado un recargo del 20 %. ¿Cuánto tendrá que pagar?
9. Aproximadamente el 35 % de un yogur de fruta de 125 gramos corresponde a la fruta. ¿Cuántos gramos de fruta contiene un yogur?
10. Luis tiene ahorrados 40 € y se gasta el 35% de sus ahorros en un regalo. ¿Cuánto dinero le queda?
11. En una población costera de 25000 habitantes, el 7 % son extranjeros. ¿Cuántos habitantes extranjeros viven allí?
12. En una de las casetas de la Feria del Libro de una ciudad se han vendido en un día 312 ejemplares, que equivalen al 20 % de los libros. Calcula el número total de libros que tiene la caseta.
13. En una caja de galletas, la etiqueta anuncia que contiene un 25 % más de lo habitual. Si la caja contenía 24 galletas, ¿cuántas contiene el nuevo envase?
14. Laura ha comprado una camisa que cuesta 18 euros. Al ir a pagar le hacen un 25 % de descuento.
 - a) ¿Cuánto dinero le descuentan?
 - b) ¿Cuánto le cuesta la camisa?
15. La cría de la jirafa ha crecido 10 cm en el último mes, mientras que la cría del ratón ha crecido 4 mm. , La jirafa medía 2,13 m, y el ratón 80 mm. ¿Cuál ha crecido más en el último mes?
16. Un comerciante ha vendido 450 kg de naranjas de una partida de 600 kg. ¿Qué porcentaje del total de la partida ha vendido? ¿Qué porcentaje le falta por vender?
17. ¿A cuánto habrá que vender el kilogramo de naranjas para ganar el 10% del precio de compra si éste es de 3,5 euros por kilogramo?
18. .Sobre el precio inicial de un CD de música, que es de 17,25 euros, conseguimos un descuento del 20%. ¿Cuánto nos costará el CD?

19. En un cine que tiene 500 localidades hay ocupadas 365 butacas. ¿Qué porcentaje de las butacas están ocupadas?
20. El precio de un televisor ha subido un 25% con relación al del año pasado. ¿Cuál es su precio actual si el año pasado era de 510,8 euros?
21. ¿Cuánto hemos de pagar por 30 metros de tela a 4,4 euros el metro, si conseguimos una rebaja del 5% de su precio?
22. Un comerciante ha vendido 450 kg de naranjas de una partida de 600 kg. ¿Qué porcentaje del total de la partida ha vendido? ¿Qué porcentaje le falta por vender?
23. ¿A cuánto habrá que vender el kilogramo de naranjas para ganar el 10% del precio de compra si éste es de 3,5 euros por kilogramo?
24. 17.-En la compra de un libro me hacen el 15% de descuento sobre el precio inicial. Si este es de 9,60 euros% ¿cuánto debo pagar por el libro?
25. El 25% de las personas de una población son niños en edad escolar. Si la población es de 3880 personas, averigua cuantos niños hay en edad escolar.

26. ¿Cuál es el precio de estos libros?

Para calcularlo, debes tener en cuenta que a su precio antiguo debes aumentarle un 16% de IVA, y disminuirle un 5% por el descuento que se hace en esta tienda a los libros. Se trata de un caso de porcentajes encadenados



27. Me gustaría regalar un discman, y tengo tres ofertas entre las que elegir. ¿Me ayudas a decidir cuál es el mejor precio?

TIENDA A	TIENDA B	TIENDA C
82 € + IVA (16%)	108 € (IVA incluido)	95 € + IVA (16%)
Precio a pagar: <input type="text"/> €	Precio a pagar: <input type="text"/> €	Precio a pagar: <input type="text"/> €

28. Por un televisor nos han descontado 54,09 €, que supone un 15% del precio inicial. ¿Cuál era el precio inicial del televisor?
29. Inés quiere comprar a plazos un ordenador que cuesta 1 200 €. Por pagarlo a plazos, le suben un 12%. ¿Cuánto pagará en total?
30. Por un aparato de radio pagamos 7,65 €. Si nos han hecho un 15% de descuento, ¿cuál era el precio inicial de la radio?
31. En las rebajas de temporada, le aplican un descuento del 20% a un abrigo que costaba 350 €. Calcula mentalmente cuánto descuentan al precio del abrigo.
32. Un libro que costaba 30 € ha subido un 10%. ¿Cuánto ha subido su precio?
33. Un coche que costó 18 000 € ha perdido el 50% de su valor. ¿Cuánto ha perdido?
34. De la producción de 2 000 kg de patatas se ha perdido el 25%. ¿Cuántos kilos se han perdido?
35. Hemos pagado a 11,18 € el kilogramo de carne, que ha subido un 4%. ¿A cuánto estaba el kilogramo antes de la subida?
36. Por un kilogramo de harina hemos pagado 0,78€. Si nos ha costado la harina un 4% más cara que el año pasado, ¿a cuánto estaba el kilo de harina el año pasado?
37. El año pasado pagábamos el kilo de pan a 2,4€. ¿Qué porcentaje ha subido si ahora lo pagamos a 2,52€?

9º EXPRESIONES ALGEBRAICAS

INTRODUCCIÓN

En Matemáticas es frecuente utilizar expresiones que combine números y letras o solamente letras. Esto lo hacemos cuando, como en el caso anterior, expresamos relaciones que se dan para todos los números. También cuando desconocemos el valor de algún dato lo representamos con una letra hasta que lo hallamos. Y también cuando no conocemos el valor numérico de algún dato y hemos de escribir una expresión en la que interviene aunque no se trate de hallar su valor.

Las expresiones que resultan de combinar números y letras relacionándolos con las operaciones habituales se llaman **expresiones algebraicas**. La parte de las Matemáticas que utiliza las expresiones algebraicas se llama **Álgebra**.

9.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Muchas expresiones algebraicas que utilizaremos resultan de una “traducción” del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico. Fíjate en los ejemplos y observa que a los números cuyo valor desconocemos unas veces les hemos dado el nombre de una letra y otras veces el de otra.

(El signo \cdot entre número y letra o entre dos letras no es necesario escribirlo y lo sobreentenderemos)

. El doble de un número	$2n$
. La mitad de un número	$\frac{x}{2}$
. El triple de un número menos dos	$3y - 2$
. El doble del producto de dos números	$2ab$
. La mitad del cuadrado de un número	$\frac{t^2}{2}$
. La mitad de un número más su triple	$\frac{z}{2} + 3z$

Ejercicios

1. “Traduce” cada expresión a lenguaje algebraico.

. El triple de un número	
. El doble de un número menos su mitad	
. El cuadrado de un número más su triple	
. La mitad más la tercera parte más la cuarta parte de un número	
. La mitad de un número menos el propio número	
. El doble de un número más el triple de otro número	



2. Llamando x a un número natural cualquiera, escribe la expresión algebraica que resulta de traducir cada uno de los siguientes enunciados:

. Un número 5 unidades mayor	
. Un número 3 unidades menor	
. El número natural siguiente	
. El número natural anterior	
. El doble del número	
. El triple del número	
. El doble del número más cuatro	
. El número más su anterior	
. La suma de los dos números siguientes a	
. La mitad del número más 1	
. El cuadrado del número menos su mitad	

3.- Expresa de forma algebraica los siguientes enunciados matemáticos:

- El triple de sumar siete a un número, n .
- El número siguiente al número natural x .
- El doble de restar quince a un número, n .
- Los $\frac{3}{5}$ de un número x al que se le quitan 6 unidades

4. Si x es el valor de un número cualquiera, escribe en lenguaje algebraico:

- La mitad de un número.
- El doble de un número más tres unidades
- El triple de un número menos 5 unidades
- El cuadrado de un número.
- El cubo de un número.
- Un número más 5 es igual a 8.
- La diferencia de un número y 3 es igual a 10.
- La mitad de un número vale 14.
- La suma de un número más su mitad es igual a 8.
- La suma de la mitad de un número con su tercera parte e
- Los $\frac{2}{3}$ de un número.
- El cuádruplo de un número más 8.

9.2 VALOR NÚMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Si en una expresión algebraica sustituimos las letras por valores concretos y hacemos las operaciones correspondientes obtendremos un resultado y será el **valor numérico** de la expresión para esos valores de las letras. Naturalmente, una expresión algebraica tendrá tantos posibles valores numéricos como valores podamos dar a las letras. Fíjate en el siguiente ejemplo:

Ejemplo- Hallar el valor numérico de $2x^2 + 5$ para $x = 1$ y para $x = -3$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1^2 + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$\text{Para } x = -3 \Rightarrow 2 \cdot (-3)^2 + 5 = 2 \cdot 9 + 5 = 23$$

Ejercicios

1º Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores que se indican

$3x^2 - 2$	para $x = 3$	
$10 - 5x^2$	para $x = 5$	
$\frac{3x}{4} + 2$	para $x = 8$	
$\frac{x^2}{5} + 3$	para $x = 5$	

2º Para la expresión: $a^3 - 3b^2$, calcular el valor numérico para los números $a=4$ y $b= 2$,

3º Calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes, considerando:

Expresión algebraica	Reemplazar : $a = 2; b = 5; c = -3; d = -1; f = 0$	Resultado
$5a^2 - 2bc - 3d$		
$4ab - 3bc - 15d$		
$6a^3f$		
$2a^2 - b^3 - c^3 - d^5$		
$3(a - b) + 2(c - d)$		
$\frac{c}{3} + \frac{b}{5} - \frac{a}{2}$		
$(b + c)^2$		

4º Calcular el valor numérico de la expresión algebraica $a^2 - 2ax + 4$ en los casos:

a) $a = 2; x = 3$

b) $a = -2; x = 1$

5º Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor que se indica:

a) $5x^3 - 9x + 85$ para $x = 2$

b) $7x^3 + 23x^2 - 55$ para $x = -3$

6º Halla mentalmente el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores que se indican:

a) $3x - 7$ para $x = 5$

c) $2m$ para $m = 4,5$

b) $-5y + 12$ para $y = -1$

d) $5z + 4$ para $z = -3$

9.3 MONOMIOS

Son las expresiones algebraicas más simples. Un monomio es el producto de un número por una o varias letras. El número es el **coeficiente** y las letras forman la **parte literal**.

Ejemplos: $5x^2$ $\frac{3}{4}a^2b$ tvz^3

En el primero el coeficiente es 5 y la parte literal x^2 . En el segundo el coeficiente es $\frac{3}{4}$ y la parte literal a^2b . En el tercero el coeficiente es 1 y la parte literal tvz^3 .

Se llama **grado** de un monomio a la suma de los exponentes de sus letras:

$4x^2$ es de grado 2; $3ab^2$ es de grado 3; 7 es de grado 0

Ejercicios

1º Completa la siguiente tabla

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$8x^2$			
$5ab^4c^2$			
x^2y			
$\frac{3}{4}p^2qr$			
$\frac{5}{7}$			

2º Completa la tabla indicando el coeficiente, la parte literal y el grado de cada monomio:

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO
$-\frac{2}{3}x^2y^2$			
$7ax^3$			
x^3y			

MONOMIOS SEMEJANTES

Dos monomios son semejantes si tienen la misma parte literal

Ejemplos

$3x^2$ y $\frac{2}{5}x^2$ son semejantes;

$2a^2$ y $2a$ no son semejantes
 $6t^2a$ y $8ta^2$ no son semejantes;

$5t$ y $8t$ son semejantes;

Ejercicios

1º.- Escribe 5 parejas de monomios semejantes

2º Indica si son o no semejantes

1) $2ax^4y^3$; $-3ax^4y^3$;

4) bx^4 ; $2bx^4$; $2ax^4y^3$;

2) ax^3y^4 ; $5ax^4y^3$

5) $3ax^4y^3$; $8ax^4y^3$

3) axy^3 ; $3a^2xy^3$

6) x^3y^4t ; $2x^4y^3t$

SUMA/RESTA DE MONOMIOS

La suma/resta de dos monomios semejantes es otro monomio semejante que tiene por coeficiente la suma/resta de los coeficientes.

Ejemplos

a) $5x + 2x = 7x$

c) $-3x^2 - 2x^2 = -5x^2$

b) $4a + 5a = 9a$

d) $8z^3 - 9z^3 = -z^3$

La suma/resta de dos monomios no semejantes no es un monomio y la dejaremos indicada.

$3x^3 + 5x$

$4z - 8t^2$

La suma/resta de monomios semejantes permite a veces "reducir" expresiones algebraicas operando dentro de ella los monomios que sean semejantes.

Ejemplos

a) $3x^2 + 5x - 2x^2 - 9x = x^2 - 4x$

b) $2a + 5a - 9a + 8x^2 - 5x^2 = -2a + 3x^2$

Ejercicios

1º Opera y reduce

1) $8x - 6x + 3x - 5x + 4 - x =$

2) $4,5a - 7b - 1,4b + 0,6a + 5,3b + b =$

3) $\frac{3}{5}m^2 - 2mn + \frac{1}{10}m^2 - \frac{1}{3}mn + 2mn - 2m^2 =$

4) $\frac{2}{5}x^2y + 31 + \frac{3}{8}xy^2 - \frac{3}{5}y^3 - \frac{2}{5}x^2y - \frac{1}{5}xy^2 + \frac{1}{4}y^3 - 6 =$

2º Opera y reduce:

a) $2a + 8a - 6a - 3a + 6a =$

b) $9b + 7a - 6b - 3a - 2a - 2b =$

c) $9x^3 - 7xy^2 - 4x^3 - 5x^3 + 5xy^2 =$

d) $3x - 2x + 5x - 9x + 8x - 4x =$

e) $2xy + 5x - 4xy + 6x + 6xy =$

f) $2abc + 2a + 2b + 2c + 2abc + 2a - 3b - 4c =$

g) $7xyz + 2xy + 3xyz - 2xz + 3xy - 4xz =$

3º Reduce cuando sea posible

a) $3x^2 + 2x^2 =$

b) $6x - 9x =$

c) $9x + 12x =$

d) $-5x^2 + 9x^2 =$

e) $-8x - 4x =$

f) $5x + 2x^2 =$

g) $x - 8x - 4x + x =$

h) $9x^3 - 5x^3 =$

i) $8x^2 - 3x^3 =$

4º Reduce las siguientes expresiones

a) $2x^2 - 3x + 4x - 9x^2 =$

b) $5x^3 - 7x + 2x - 9x^2 + 2x^3 - 5x^2 =$

c) $3x^2 - 1 - 2x^2 - x^2 =$

d) $5x^4 - 3x - 5x^4 + 3x =$

e) $2x^2 - 3x + 6x - 4x^2 + 3x =$

f) $4x^3 - 3x + 4x - 5x^2 + 3x^3 - 2x^2 =$

g) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 9x^3 + 4x^3 - 3x + 5x^2 =$

h) $4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 9x^2 + 2x^3 - 5x^4 =$

PRODUCTO DE MONOMIOS

El producto de dos monomios –sean o no semejantes- es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y de parte literal el producto de las partes literales. (*Recuerda el producto de potencias de la misma base*).

Ejemplos

$$a) 3x^2 \cdot 5x^3 = 15x^5$$

$$b) \frac{3}{4}x \cdot 2x^5 = \frac{6}{4}x^6$$

$$c) 4x \cdot -2x^5 = -8x^6$$

$$d) \frac{2}{5}x^5 \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}x^5$$

Ejercicios

1º Calcula el resultado

$$a) 3x \cdot 2x =$$

$$b) 2x^2 \cdot 3x =$$

$$c) 3x^3 \cdot 5x^2 =$$

$$d) 5x^4 \cdot 4x^3 =$$

$$e) 2x^7 \cdot 4 =$$

$$f) 8x \cdot 3x^5 =$$

$$g) x \cdot 6 =$$

$$h) \frac{3}{2}x^3 \cdot 5x^2 =$$

$$i) \frac{4}{3}x \cdot \frac{2}{5}x^4 =$$

$$j) 5x \cdot \frac{2}{7} =$$

2º Opera y reduce:

$$a) (-2x^2) \cdot (-4y) =$$

$$b) (6x^2y) \cdot (-xy) =$$

$$c) \left(\frac{2}{5}x^2\right) \cdot (5x) =$$

$$a) (2a) \cdot (6b) =$$

$$b) (4y^2x) \cdot (-2yx^3) =$$

$$c) \left(\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot \left(\frac{2}{5}ab^3\right) =$$

3º Opera y reduce:

$$a) (-4a^5b^4) \cdot (12ab^2) =$$

$$b) (6m^5n^3p^4) \cdot (5mnp^2) =$$

$$c) (4x^3y^2z^4) \cdot (3x^2yz^2) =$$

$$d) \left(\frac{3}{4}a^4b\right) \cdot \left(\frac{2}{3}ab^3\right) =$$

$$e) \left(\frac{2}{5}x^4y^y\right) \cdot \left(\frac{2}{3}xy^3\right) =$$

COCIENTE DE MONOMIOS

Para que el cociente de dos monomios sea un monomio el grado del monomio dividiendo ha de ser igual o mayor que el del divisor. En caso contrario, el resultado es una fracción algebraica que las estudiarás en cursos próximos.

En el primer caso, el cociente de dos monomios es otro monomio que tiene de coeficiente el cociente de los coeficientes y la parte literal es el cociente de las partes literales. (*Recuerda el cociente de potencias de la misma base*).

Ejemplos

$$1) 12x^8 : 3x^5 = 4x^3$$

$$2) \frac{8x^3}{2x} = 4x^2$$

$$3) 7x^5 : 3x = \frac{7}{3}x^4$$

$$4) \frac{9x^8}{7x^2} = \frac{9}{7}x^6$$

$$5) 8x^2 : 2x^5 = \text{fracción algebraica}$$

$$6) \frac{7x}{8x^3} = \text{fracción algebraica}$$

Ejercicios

1º Calcula el resultado

1) $15x^5 : 3x^2 =$

2) $20x^6 : 4x^2 =$

3) $12x^6 : 3x^2 =$

4) $18x^5 : 6x^2 =$

5) $\frac{30x^8}{5x} =$

6) $10x^4 : 2x^2 =$

7) $10x : 2 =$

8) $5x^3 : 2x =$

9) $13x^3 : 2x =$

10) $\frac{12x^4}{3x} =$

11) $\frac{5x}{x^2} =$

12) $12x : 3x^2 =$

13) $\frac{60x^8}{6x^2} =$

Ejercicios del tema

1º.- Calcula el resultado de las siguientes operaciones con monomios

1. $3x + 2x =$

2. $4x + x =$

3. $5x + 6x =$

4. $8x + 9x =$

5. $3x^2 + 2x^2 =$

6. $5x^2 + 4x^2 =$

7. $6x + 2x + 5x =$

8. $3x + 2x + x =$

9. $4x + 8x + 2x =$

10. $6x - 3x =$

11. $8x - 5x =$

12. $11x - x =$

13. $5x - 8x =$

14. $9x - 6x =$

15. $3x - 5x =$

16. $4x^2 - 9x^2 =$

17. $7x^2 - 10x^2 =$

18. $x^2 - 5x^2 =$

19. $3x + 6x - 4x =$

20. $2x - 5x - 4x =$

21. $x - 3x - 4x =$

22. $2x^2 \cdot 5x^3 =$

23. $3x \cdot 4x^2 =$

24. $5x \cdot 3x^4 =$

25. $4a^2 \cdot 5a^3 =$

26. $3a^4 \cdot 6a^2 =$

27. $2b^6 \cdot 3b^4 =$

28. $12x^4 : 3x =$

29. $4x^2 \cdot 2x^3 =$

30. $4a^4 \cdot 2a^2 =$

31. $2a^4 : 3a =$

32. $6x^2 \cdot 4x^4 =$

33. $20x^8 : 2x^6 =$

34. $16x^7 : 8x^5 =$

35. $6a^6 : 2a^2 =$

36. $8b^5 : 4b =$

37. $10c^8 : 5c^5 =$

38. $4x + 7x =$

39. $9x + x =$

40. $2x + 7x =$

41. $4x + 10x =$

42. $12x^2 + 4x^2 =$

43. $4x^2 + 5x^2 =$

44. $9x + 3x + 6x =$

45. $x + 5x + 5x =$

46. $3x + 5x + 6x =$

47. $7x - 3x =$

48. $9x - 4x =$

49. $10x - x =$

50. $5x - 9x =$

51. $12x - 4x =$

52. $3x - 7x =$

53. $8x^2 - 12x^2 =$

54. $7x^2 - 14x^2 =$

55. $x^2 - 7x^2 =$

56. $4x + 5x - 6x =$

57. $2x - 7x - 9x =$

58. $x - 2x - 5x =$

59. $4x^2 \cdot 5x^3 =$

60. $2x \cdot 6x^2 =$

61. $3x \cdot 3x^5 =$

62. $2a^2 \cdot 6a^3 =$

63. $4a^3 \cdot 2a^6 =$

64. $5b^6 \cdot 5b^4 =$

65. $12x^6 : 3x^2 =$

66. $24x^8 : 2x^6 =$

67. $16x^7 : 4x^5 =$

68. $16a^6 : 2a =$

69. $8b^5 : 4b =$

70. $20c^8 : 5c^5 =$

71. $12x^3 : 3x^8 =$

72. $2x^5 : 2x^5 =$

73. $3x^3 : 3x^2 =$

74. $2 + 5x - 4x + 7 =$

75. $4x^2 - 5x + x + 3x^2 =$

76. $8 - 5x - 4 - 6x + 6 =$

77. $4x^3 + 8x^2 + 2x + 5x - 2x^2 =$

78. $5x - 4 + 7x - x - 5 =$

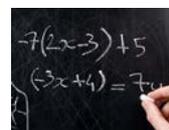
79. $7x - 3x + 4x - 5x =$

80. $-5x + 8 - 6x - 9 =$

81. $5x^3 - 4x^2 + 6x^2 - 8x^3 =$

4a2 . 5

9.4 ECUACIONES DE 1^{ER} GRADO



Procedimiento

1. Se reducen términos semejantes
2. Se hace la transposición de términos, los que contengan la incógnita se ubican en el miembro izquierdo, y los que carezcan de ella en el derecho
3. Se reducen términos semejantes
4. Se despeja la incógnita, dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita, y se simplifica.

1º Resuelve las siguientes ecuaciones, aplicando la regla de la suma y la del producto:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1) $x + 5 = 8$; | 6) $4 + 2x = -3x + 1$; |
| 2) $2x - 3 = x + 1$; | 7) $x + 7 = 12$; |
| 3) $x - 4 = -x + 6$; | 8) $15 - x = 12$; |
| 4) $5x - 10 = 0$; | 9) $2x - 3 = 11$; |
| 5) $4x + 4 = 2x - 8$; | 10) $3 = 8 - 5x$ |

Para resolver ecuaciones de primer grado con paréntesis.

Ejemplo: $7 \cdot (x + 1) - 4 \cdot (x + 3) = x - 9$

1. Quitar paréntesis realizando las operaciones correspondientes:

$$7x + 7 - 4x - 12 = x - 9$$

2. Agrupar los términos con la x en un miembro de la ecuación y los términos sin la x en el otro (recuerda que al pasar un término de un miembro a otro de la ecuación cambia su signo):

$$7x - 4x - x = -9 - 7 + 12$$

3. Operar:

$$2x = -4$$

4. Despejar la x :

$$x = \frac{-4}{2} = -2$$

5. Comprobar la solución: para lo que se sustituye el valor obtenido en la ecuación de partida:

$$7 \cdot (-2 + 1) - 4 \cdot (-2 + 3) = -2 - 9 \Rightarrow 7 \cdot (-1) - 4 \cdot (1) = -11 \Rightarrow -11 = -11$$

2º Resuelve las siguientes ecuaciones:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. $5x - 4(2x + 3) = 2x - 17$ | 12. $2x - 6 = 4x + 14$ |
| 2. $4x + 5 - 7x = 2(3x - 6) - 1$ | 13. $x + 3(x - 8) = 3(x - 1)$ |
| 3. $3x + (x + 5) = 5x - (3 + 2x)$ | 14. $x - 9 = 15 + 2(x + 3)$ |
| 4. $5(x + 3) = 4(x - 2)$ | 15. $x - (2x + 5) = 3(x - 1)$ |
| 5. $7x - 4(2x - 5) = 3(5x - 2) - 6$ | 16. $3(4 - x) = x - 2(1 + x)$ |
| 6. $4 - 5(2x + 1) = -3(4x - 5)$ | 17. $2(1 - 3x) = x$ |
| 7. $x + 4 = 3(x + 12)$ | 18. $2(x - 5) = 3(x + 1) - 3$ |
| 8. $5(x - 2) = 3(x - 1) + 1$ | 19. $4(x - 1) - 3 = 5x - 2(x + 3) - 3$ |
| 9. $(x - 1) = 4(x + 1) - 8$ | 20. $9x + 3(x - 1) = 5 - 2(3x + 1) + 12$ |
| 10. $2(x - 1) + x + 3 = 5(x + 1)$ | 21. $7x + 8 = 2x + 4(x + 1) + 5$ |
| 11. $5(x - 1) - 6x = 3x - 9$ | 22. $3x - 2(x + 1) + 9 = 5x - 3(x - 1)$ |

$$23. 4(x-2) + 6x - 9 = 5(x-1) - 3(x+2) + 10$$

$$24. 7x + 4 - 2(x-5) = 9(x-2) + 8$$

$$25. 2x - 3(x-1) + 5 = x - 6$$

$$26. x - 2(x-1) = 4x - 6(x-1) - 5$$

$$27. 3x - (x-4) + 1 = 4x + 13$$

$$28. 2(x+3) - 5x + 2 = 6 - 5x$$

$$29. 3x + 1 = 4(x-2) + 12$$

$$30. 4x + 2(x-1) = 5x + 3(x+2) - 24$$

$$31. 7 - (x-1) + 3 = 2(x+1)$$

$$32. 8x + 3 = 2x - 4(x+1) - 3$$

$$33. x + (3x+1) + 20 = 11 + 2x$$

$$34. 5x - 2(x+3) + 1 = 4 - 3(x-2) - 3$$

$$35. 6 - 2(x-3) = 3(x-1)$$

$$36. 8x + 2 - 3(x-4) = 5x + 2 + 4(x+2)$$

$$37. 2x + 3(x+2) = 4x + 3$$

$$38. 5(x+2) - 1 = 5x - 2(x+1) + 9$$

$$39. 7x + 1 = 6x + 3(x-1) + 4(x-2)$$

$$40. 8x + 2 - 3x - 10 = 7x + 4 - 3(x-1) - 8$$

3º Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$1) 12 = \frac{3x}{10} + 2$$

$$2) \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 6$$

$$3) 1 - \frac{x}{2} = \frac{3}{4}$$

$$4) \frac{2x}{3} + \frac{5}{4} + \frac{x}{6} - 7 = 0$$

$$5) \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 5$$

$$6) \frac{x}{3} - \frac{1}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = \frac{x}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{x}{6}$$

$$7) \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} + \frac{5}{6}x = 3$$

$$8) \frac{3}{4}x + 2 = \frac{5}{6}x + 1$$

$$9) \frac{x}{2} + 6 - \frac{x}{4} = \frac{2x}{5} + 3$$

$$10) \frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 15$$

$$11) \frac{5}{6}x - \frac{x}{18} - \frac{3}{4}x = \frac{7}{12} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{3}$$

$$12) \frac{3}{8}x + 2 - \frac{4}{5}x = 1 + \frac{3}{10}x + \frac{3}{2}$$

$$13) \frac{3x-7}{12} = \frac{2x-3}{6} - \frac{x-1}{8}$$

$$14) \frac{x+3}{2} - \frac{x-2}{3} = \frac{x-5}{2} + 5$$

$$15) 3(2-x) - \frac{x+3}{2} = 5x + \frac{x}{2}$$

$$16) \frac{3 \cdot (x-2)}{5} - 2x = 8 - \frac{x}{3}$$

$$17) \frac{x-6}{3} - 2x + \frac{x-2}{4} = 1 - \frac{x-3}{6}$$

$$18) \frac{3x-4}{2} + \frac{x-8}{5} = 20 - \frac{2x}{7}$$

$$19) \frac{37}{6} = \frac{2x+1}{6} + \frac{2x-4}{5} - \frac{20-x}{4}$$

$$20) \frac{6-5x}{30} = \frac{x}{6} - \frac{2x-1}{6}$$

$$21) \frac{x-3}{2} = 8 - x - \frac{2x-16}{7}$$

$$22) \frac{5x+7}{2} - \frac{2x+4}{3} = \frac{3x+9}{4} + 5$$

$$23) \frac{4x+5}{8} - \frac{8x-3}{6} + \frac{5-3x}{3} = \frac{3+5x}{2} + \frac{3}{4}$$

$$24) \frac{x+3}{4} - \frac{x-4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{x+1}{4} + \frac{2x+1}{9}$$

$$25) \frac{3x-5}{2} - 1 - \frac{2x-1}{3} + \frac{x+3}{4} = \frac{5x-1}{8}$$

$$26) \frac{3x-8}{5} - \frac{x-1}{4} + \frac{7-x}{3} = \frac{4-x}{3} - \frac{8x-5}{10}$$

$$27) \frac{3x-1}{5} - \frac{x+2}{15} = \frac{1}{3} + x$$

$$28) \frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = x - 2$$

$$29) \frac{10x+3}{3} + \frac{3x-1}{5} = x - 2$$

$$30) \frac{x-2}{3} - \frac{12-x}{2} = \frac{5x-36}{4} - 1$$

$$31) \frac{4x}{3} - \frac{2x-5}{2} = \frac{3x}{4}$$

$$32) 2x - \frac{4x-3}{2} - 5 = \frac{6x+1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$33) \frac{5x-3}{4} - 3x = \frac{1}{2} - \frac{4x+8}{8}$$

Problemas



1. Al restar 25 unidades al triple de un número, la diferencia es 110. Halla el número
2. Halla los números que suman 85, sabiendo que uno es el cuádruple del otro.
3. Luis tiene 14 años y su hermana Paula 18. ¿Cuántos años tienen que pasar para que la suma de sus edades sea 50?
4. Pedro tendrá dentro de 4 años tres veces la edad que tenía hace 20 años. ¿Qué edad tiene Pedro en la actualidad?
5. 3 camisas y 2 pantalones cuestan 126 €. Cada pantalón cuesta el doble que cada camisa. ¿Cuál es el precio de cada prenda?
6. La suma de un número y su doble es 18. ¿De qué número se trata?
7. Averigua un número x , tal que la suma de ese número más su triple sea igual a 84
8. El doble de la suma de un número más 5 es igual a 22. ¿De qué número se trata?
9. La suma del doble de un número más 6 es igual a 22. ¿Cuál es el número?
10. Dos depósitos de la misma capacidad están llenos de gasóleo. Si de uno se sacan 200 litros y del otro 300 litros, en el primero queda el doble de gasóleo que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de cada recipiente?
11. ¿Qué edad tiene María si dentro de 5 años tendrá el doble de la edad que tiene actualmente?
12. La suma de dos segmentos rectilíneos es 126 mm. Uno de ellos es duplo del otro. Calcula la longitud de cada segmento.
13. Una camiseta cuesta 7 € más que un pantalón. El precio de las dos prendas juntas es de 67 €. ¿Cuál es el precio de cada una?
14. Por 2 lapiceros y 3 gomas se pagan 2,40 €. Si cada goma cuesta 45 céntimos menos que 1 lápiz, ¿cuánto cuesta 1 lápiz?
15. Se quieren repartir 30 kg de patatas en tres sacos de manera que el primero pese el doble que el segundo y el tercero lo mismo que los otros dos juntos. ¿Cuánto debe pesar cada saco?
16. Un rectángulo tiene un perímetro de 24 cm y su base mide el doble que su altura. Calcula su área
17. Pedro tiene 36 billetes de 5 y de 10 €. El número de billetes de 5 € es doble que el de 10 €. ¿Cuánto dinero tiene?
18. Juan tiene el doble de años que su hija y entre los dos suman 87 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?
19. Preguntando a un padre por la edad de su hija, respondió: “Tres veces la edad de mí hija Elena menos seis años es mi edad “. Calcula la edad de la hija sabiendo que la edad del padre es 39 años.
20. En un hotel hay habitaciones dobles y sencillas. Tiene en total 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?
21. Cada lápiz cuesta 65 céntimos y cada goma 55 céntimos. Un paquete que contiene el triple de lápices que de gomas cuesta 10€. ¿Cuántos lápices y cuántas gomas hay en el paquete?

22. Juan, Jaime y Cayetana juntan sus cromos. Juan aporta trece cromos más que Jaime y este dos más que Cayetana. ¿Cuántos cromos tenía cada uno de ellos sabiendo que en total tienen 227?
23. Elena y Daniel tienen la misma edad y Javier tiene dos años más que Elena. Entre los tres suman 26 años. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?
24. Calcula tres números que verifiquen lo siguiente: suman 148, el segundo es tres unidades mayor que el doble del primero y el tercero es 17 unidades mayor que el segundo.
25. De un depósito lleno de gasolina se saca la mitad del contenido; después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.
26. Halla dos números pares consecutivos cuya suma sea 214.
27. Un librero vende 84 libros a dos precios distintos: unos a 450 ptas y otros a 360 ptas, obteniendo de la venta 31050 ptas. ¿Cuántos libros vendió de cada clase?
28. Javier y Esther fueron de visita a la granja de su abuelo. Durante su estancia vieron un corral con conejos y gallinas. Javier dijo haber contado 61 animales y Esther 196 patas. Determina el nº de conejos y gallinas.
29. Un grupo de amigos están jugando a los chinos con monedas de 5 y 25 ptas. Al abrir las manos cuentan 8 monedas con un valor de 240 ptas. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?
30. El triple de un número es 60. ¿cuál es ese número?
31. El doble de un número más su mitad es 10. ¿Cuál es ese número?
32. La suma de dos números consecutivos es 27. ¿cuáles son esos números?
33. El perímetro de un cuadrado es 24 cm. ¿Cuánto mide su lado?
34. Pedro tiene el doble de edad que Juan y entre los dos suman 45 años. ¿Qué edad tiene cada uno?
35. Dos amigas se reparten 80 euros, pero una de ellas recibe 10€ más que la otra. ¿Cuánto recibe cada una de ellas?
36. La base de un rectángulo es triple que su altura. Si su perímetro mide 96 cm. ¿Cuánto mide cada lado?
37. En un circo se vendieron 4.955 entradas. Las entradas vendidas para niños fueron el cuádruple que las vendidas para adultos. ¿Cuántas entradas de cada clase se vendieron?
38. En un garaje hay motocicletas y coches, con un total de 360 ruedas. Calcula cuántos vehículos hay de cada clase, sabiendo que el número de coches es cuatro veces el de motocicletas.
39. En un jardín, entre sauces, palmeras y pinos hay 91 árboles. Si el número de palmeras es el doble que el de sauces y el de pinos el doble que el de palmeras, ¿cuántos árboles hay de cada clase?
40. Sara tiene el doble de dinero que su primo Alfonso. Si entre los dos tienen 24,6 €, ¿cuánto dinero tiene cada uno?
41. Juan tiene 12 € más que su prima Ana. Si entre los dos tienen 63 €, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

10º EL SISTEMAMÉTRICO DECIMAL



MAGNITUD: Es toda propiedad o cualidad que tienen los cuerpos u objetos y que es susceptible de ser medida, es decir, que se puede medir o cuantificar.

- Hay **magnitudes fundamentales**, como son la longitud, la masa, el tiempo, la temperatura, la intensidad lumínica y la intensidad eléctrica.
- Hay **magnitudes derivadas**, o compuestas de varias de las fundamentales, es decir, las que se deducen de las fundamentales mediante fórmulas o cálculos indirectos, como son la velocidad, la fuerza, la superficie, el volumen, etc. ...

UNIDADES FUNDAMENTALES ADOPTADAS POR EL SISTEMA INTERNACIONAL (S.I).

Magnitud	Nombre	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Temperatura	Kelvin	K
Intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
Intensidad lumínica	candela	cd

Cada país, y dentro de cada país, cada región tenía sus propios sistemas de medida, y éstos variaban de unos a otros, lo cual era un serio inconveniente, no solo para el comercio, sino también para la transmisión de información técnica o científica precisa, de ahí la necesidad de una unificación en las medidas (Creación de unos patrones estándar de medida).

Surge así el Sistema Métrico Decimal, que recibe éste nombre porque:

- ✎ **Sistema:** Conjunto de reglas o principios sobre una materia relacionados entre sí.
- ✎ **Métrico:** Relativo al metro o al conjunto de medidas derivadas del mismo.
- ✎ **Decimal:** Cada una de las diez partes en que se divide una cantidad.

Las unidades son múltiplos o divisores de diez con respecto a la unidad principal.

Todas las unidades fundamentales y derivadas tienen múltiplos y submúltiplos o divisores que van de diez en diez unidades, así tenemos:

MÚLTIPLOS						Uni- dad	SUBMÚLTIPLOS Divisores.					
Tera	Giga	Mega	Kilo	Hecto	Deca		1	deci	centi	mili	micra	nano
T	G	M	k	h	da		d	c	m	μ	η	ρ
10 ¹²	10 ⁹	10 ⁶	10 ³	10 ²	10		10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁶	10 ⁻⁹	10 ⁻¹²

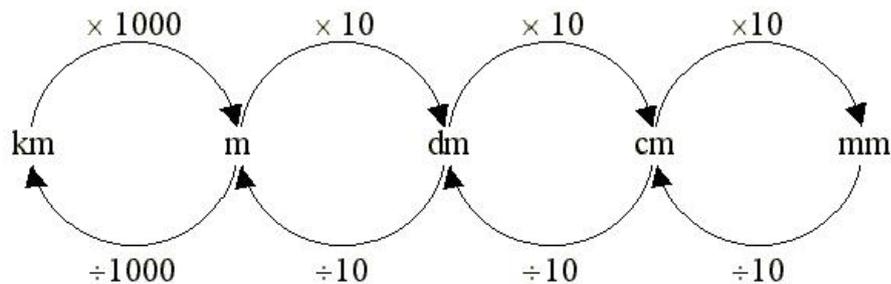
Tablas de las magnitudes fundamentales, LONGITUD , MASA. Y CAPACIDAD

UNIDADES DE LONGITUD										
Nombre	Kilómetro	hectómetro	decámetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro	micrómetro	nanómetro	picómetro
Símbolo	km	hm	dam	m	dm	cm	mm	μm	nm	pm
Equivalencia	10 ³ m	10 ² m	10 m		10 ⁻¹ m	10 ⁻² m	10 ⁻³ m	10 ⁻⁶ m	10 ⁻⁹ m	10 ⁻¹² m

UNIDADES DE MASA										
Nombre	Kilogramo	hectogramo	decagramo	gramo	decigramo	centigramo	miligramo	microgramo	nanogramo	picogramo
Símbolo	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg	μg	ng	pg
Equivalencia	10 ³ g	10 ² g	10 g		10 ⁻¹ g	10 ⁻² g	10 ⁻³ g	10 ⁻⁶ g	10 ⁻⁹ g	10 ⁻¹² g

UNIDADES DE CAPACIDAD							
Nombre	Kilolitro	hectolitro	decalitro	litro	decilitro	centilitro	mililitro
Símbolo	kL	hL	daL	L	dL	cL	mL
Equivalencia	10 ³ L	10 ² L	10 L		10 ⁻¹ L	10 ⁻² L	10 ⁻³ L

Multiplicar para cambiar las unidades más grandes a las unidades más pequeñas.



Dividir para cambiar las unidades más pequeñas a las unidades más grandes.

UNIDADES DE SUPERFICIE Y VOLUMEN

Las **superficies**, su cálculo, son el resultado del producto de dos dimensiones lineales, en general largo y ancho. De ahí que sus unidades vengan determinadas por ambas, así $m \times m = m^2$.

Los **volúmenes** son el resultado del producto de tres dimensiones, así $m \times m \times m = m^3$.

Las unidades, en lugar de ir de diez en diez, van de cien en cien y de mil en mil, respectivamente.

UNIDADES DE SUPERFICIE							
Nombre	Kilómetro cuadrado	Hectómetro cuadrado	decámetro cuadrado	metro cuadrado	decímetro cuadrado	centímetro cuadrado	milímetro cuadrado
Símbolo	km²	hm ²	dam ²	m ² .	dm ²	cm ²	mm ²
Equivalencia	10 ⁶ m ²	10 ⁴ m ²	10 ² m ²	1	10 ⁻² m ²	10 ⁻⁴ m ²	10 ⁻⁶ m ²
		ha	a	ca			
		Hectárea	área	centiárea			

UNIDADES AGRARIAS

UNIDADES DE VOLUMEN							
Nombre	Kilómetro cúbico	Hectómetro cúbico	decámetro cúbico	metro cúbico	decímetro cúbico	centímetro cúbico	milímetro cúbico
Símbolo	km³	hm ³	dam ³	m ³ .	dm ³	cm ³	mm ³
Equivalencia	10 ⁹ m ³	10 ⁶ m ³	10 ³ m ³	1	10 ⁻³ m ³	10 ⁻⁶ m ³	10 ⁻⁹ m ³
				kL	L	mL	
				Kilolitro	Litro	Mililitro	

UNIDADES DE CAPACIDAD

Ejercicios



1 Expresa en metros:

- a) 3 km 5 hm 7 dam
b) 7 m 4 cm 3 mm
c) 25.56 dam + 526.9 dm
d) 53 600 mm + 9 830 cm
e) 1.83 hm + 9.7 dam + 3 700 cm
f) 5 km 6 hm 7 dam 3m 7 cm

2 Expresa en litros:

- a) 3 kl 5 hl 7 dal
b) 7 l 4 cl 3 ml
c) 25.56 dal + 526.9 dl
d) 53 600 ml + 9 830 cl
e) .
f) 1.83 hl + 9.7 dal + 3 700 cl
g) 2 d l 5 cl 6 ml

3 Expresa en gramos:

- a) 5 kg 3 hg 4 g
b) 4 hg 8 dag 2 g 5 dg
c) 2 dag 3 g 8 dg 7 cg
d) 35 dg 480 cg 2 600 mg

4 Pasa a decímetros cuadrados:

- a) 0.027 dam²
b) 0.35 m²
c) 438 cm²
d) 90 000 mm²

5 Expresa en metros cuadrados:

- a) 5 hm² 24 dam² 60 dm² 72 cm²
b) 0.00351 km² + 4700 cm²
c) 0.058 hm² – 3.321 m²

6 Expresa en hectáreas:

- a) 431 943 a
b) 586 500 m²
c) 0.325 km²
d) 7 km² 31 hm² 50 dam²
e) 51 m² 33 dm² 70 cm²

7 Pasa a metros cúbicos:

- a) 0.000005 hm³
b) 52 dam³
c) 749 dm³
d) 450 000 cm³

8 Pasa a centímetros cúbicos:

- a) 5.22 dm³
b) 6 500 mm³
c) 3.7 dl
d) 25 cl

9 Expresa en litros:

- a) 13.2 m³
b) 0.05 m³
c) 3.9 dm³
d) 7 700 cm³

10 En los ejercicios siguientes realizar las sumas que se indican dando el resultado en la unidad indicada:

1º) 0,35 km + 2,8 hm + 14,74 dam + 25,43 m + 537 dm + 284,3 cm = Dar el resultado en metros.

2º) 4,57 L + 0,0235 kL. + 123,45 dL = Dar el resultado en cl.

3º) 34,6 dag + 0,005 kg + 12,34 hg + 2735 cg = Dar el resultado en g

4º) 2357,7 daL + 0,078 kL + 235 L + 1230 dL = Dar el resultado en kL

- 11** La distancia entre la Luna y la Tierra es de 384.403 kilómetros. ¿Cuántos metros nos separan de la Luna? ¿Cuántos centímetros nos separan?
- 12** Ana y Jacobo suelen salir mucho al campo de excursión. De vez en cuando, encuentran animalillos que necesitan de su ayuda porque se les ha roto una pata o se han herido con una rama. Ellos llevan fichas en las que anotan los datos de todos los animales a los que ayudan. Como unas veces atienden animales muy pequeños y otras a animales mayores, Ana y Jacobo tienen un modelo de ficha en la que apuntan la longitud de cada animal en todas las unidades posibles.
- 13** Este es un modelo de ficha, complétala tu.

	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Gorrión		0,0015				15	
Culebra			0,092				920
Pato	0,0006			0,6			

- 14** ¿Cuántos vasos de un centilitro hay en un litro de agua (H₂O)?.
- 15** ¿Cuántos litros de agua (H₂O) hay en una bañera cuya capacidad es de 20 daL?.
- 16** ¿Cuánta arena puedes meter en una botella de un litro de capacidad?.
- 17** ¿Cuántos decilitros hay en 725 kL de arena?.
- 18** Otras de las fichas de Ana y Jacobo es la siguiente, complétala también:

	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Ciervo	250						
Paloma			25				
Conejo					2500		

- 19** Realiza las siguientes transformaciones:

- | | |
|--|--|
| a) Pasar 2850 dm ² a m ² . | m) Pasar 3.5 m ³ a dm ³ . |
| b) Pasar 3.4 hm ² a dam ² . | n) Pasar 248 cc. a dm ³ . |
| c) Pasar 0.005 km ² a m ² . | o) Pasar 2.5 dm ³ a m ³ . |
| d) Pasar 51.5 cm ² a dm ² . | p) Pasar 0.2 m ³ a cc. |
| e) Pasar 80000 m ² a km ² . | q) Pasar 3.27 m ³ a litros. |
| f) Pasar 5.2 m ² a mm ² . | r) Pasar 82.3 dm ³ a litros. |
| g) Pasar 5 km ² 27 hm ² a m ² . | s) Pasar 4300 cc. a litros. |
| h) Pasar 80 cm ² 270 dm ² a m ² . | t) Pasar 2.4 · 10 ⁷ mm ³ a litros. |
| i) Pasar 1 cm ³ a mm ³ . | u) Pasar 450 hl a m ³ . |
| j) Pasar 1 mm ³ a dm ³ . | v) Pasar 270 dl. a dm ³ . |
| k) Pasar 1 m ³ a mm ³ . | w) Pasar 8542 cc. a daL. |
| l) Pasar 10000 dm ³ a m ³ . | x) Pasar 2340 cl a dm ³ . |

- 20** Ordena de mayor a menor los siguientes volúmenes:

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| a) 26.050,7 m ³ | b) 2,5 dam ³ | c) 30.000 dm ³ |
| d) 0,026 hm ³ | e) 0,0000205 m ³ | f) 38.000.000 cm ³ |

- 21** Ordena de mayor a menor las siguientes superficies:

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| a) 3140,7 m ² . | b) 320.000 cm ² . | c) 0,031 km ² . |
| d) 367,8 dam ² . | e) 3,25 hm ² . | f) 3.500.000 mm ² . |

- 39 Se sabe que el relleno de alquitrán de una carretera sale a 7 € el dm^2 . Sabiendo que la superficie de la misma es de $0'00104 \text{ km}^2$; $0'00132 \text{ ha}$; $3'27 \text{ dam}^2$; $202'11 \text{ ca}$; $0'0159 \text{ hm}^2$ y 361000 cm^2 ¿Cuánto ha costado ?
- 40 Se trata de pintar las paredes de la escalera de un edificio costando a 2 € la ca . Sabiendo que la extensión total viene dada por $0'00000102 \text{ mam}^2$; 232000 dm^2 ; $0'00012 \text{ ha}$; $1'30 \text{ dam}^2$, $304'722 \text{ m}^2$; 4030000 cm^2 ; $0'0216 \text{ hm}^2$; 2507000 mm^2 , ¿cuánto costará pintarla ?
- 41 La extensión de una finca es $0'273 \text{ hm}^2$; $0'000163 \text{ km}^2$; $0'0901 \text{ a}$; 4021 m^2 , $0'000322 \text{ ha}$; $20'41 \text{ ca}$; $941'7014 \text{ dam}^2$ y 3272000 dm^2 . Existe un comprador que paga a 4 € el m^2 . Por otro lado, se quieren invertir 720.000 € . Se desea saber si, vendiendo la finca, habría dinero para pagar la inversión. ¿Cuánto faltaría o sobraría ?
- 42 La producción al año en una bodega, de una determinada clase de vino, ha sido de $0'841 \text{ mal}$; $10'23 \text{ m}^3$; $0'048036 \text{ hm}^3$; $6402'16 \text{ cm}^3$; $0'063504 \text{ dam}^3$; $21'3874 \text{ hl}$. El litro de vino embotellado se piensa vender a 8 € ¿Cuánto se recaudará ?
- 43 La cotización de mercancías por derecho de almacenaje es de 2 € el kg . En un almacén se han depositado: $2'784 \text{ t}$; $8752'10 \text{ hg}$; $0'008127 \text{ mag}$; 47500 cg y $58'41 \text{ dag}$. ¿Cuánto se ha recaudado?
- 44 Se va a realizar una mezcla de vinos de calidad parecida para elaborar un tipo determinado que va a venderse a 5 € el litro. La cantidad procedente de los diversos depósitos es la siguiente: $0'000000000154 \text{ mam}^3$; $0'0004 \text{ hm}^3$; $17'83 \text{ mal}$; 490000 cm^3 y $8100'49 \text{ dal}$. ¿Cuánto se va a recaudar?
- 45 Se desea arreglar un parque cuya extensión es de $4'61 \text{ ha}$; 3217200 cm^2 ; $0'00046 \text{ km}^2$; $0'00251 \text{ hm}^2$; $54'36 \text{ a}$. Entre gastos de semillas, hierbas, flores, personal etc... se calcula que sale a 3 € el a . ¿Cuánto costará arreglarlo?
- 46 Se vende a 32 € el hl . de un refresco. La producción mensual ha sido de $0'0043 \text{ hm}^3$; $0'814 \text{ dam}^3$; $230'14 \text{ mal}$; $0'00000053 \text{ km}^3$; $482'254 \text{ dal}$. ¿Cuánto se recaudará en ese mes si vendemos toda la producción
- 47 Los sobrantes de cable de alta tensión son comprados a 2 € el m . De diversas instalaciones se han recogido $0'341 \text{ km}$; $5'8762 \text{ dam}$; $172'901 \text{ m}$; 83200 mm y $0'0051 \text{ mam}$. ¿Cuánto se ha recaudado?
- 48 Es necesario cubrir con una lona determinados cultivos para preservarlos de las inclemencias del tiempo. El precio de la lona es de 20 € el m^2 . y los cultivos tienen una extensión de $0'0037 \text{ km}^2$; $41'906 \text{ a}$; 1683000 mm^2 ; $532'75 \text{ ca}$ y $0'06123 \text{ ha}$. ¿Cuánto nos costará proteger los cultivos?
- 49 En la bodega de un barco se han cargado $5832'18 \text{ dag}$; $625'362 \text{ hg}$; $83'03 \text{ mag}$; $282'64 \text{ g}$ y $0'00321 \text{ t}$ El precio, por kg , de transporte es de 3 € . ¿Cuánto se ha pagado por la carga?
- 50 La demanda de un determinado tipo de vino es de 77480000 hl . Se ha calculado que la cosecha va a ser de $0'0032 \text{ km}^3$; $0'000000175 \text{ mam}^3$; $816'372 \text{ mal}$; $5321'6 \text{ dl}$ y 256000 cm^3 . ¿Se cubrirá la demanda?. ¿Cuánto faltará o sobraré?
- 51 Me cobran por un terreno a 21 € la ha y dispongo de 12000 € . El terreno tiene una extensión de $0'038257 \text{ mam}^2$; $1'36 \text{ km}^2$; $45'24 \text{ a}$; $10'67 \text{ dam}^2$; $57'44 \text{ ha}$ y 18300 dm^2 . ¿Tendré bastante dinero?. ¿Cuánto me sobraré o faltará?
- 52 La medida del paso de María es de 64 cm . ¿Cuántos pasos deberá dar para ir al colegio desde su casa, que está a 1 km , 2 hm , 7 dam y 5 m ?
- 53 Ordena de mayor a menor las siguientes longitudes:



Ejercicios de medida de tiempo

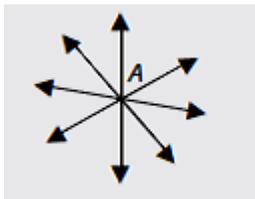
- 1) Jaime trabajó 3 horas y cuarto por la mañana, y por la tarde 2 horas y media. ¿Cuánto trabajó más por la mañana que por la tarde?
- 2) Un tren que tenía prevista la llegada a las 17 h 45 min, llegó a las 5 y media de la tarde. ¿Cuántos minutos se ha adelantado?
- 3) Un avión despegó a las 12 h 35 min y aterrizó a las 15 h y 25 min. ¿Cuánto duró el vuelo?
- 4) Elena entra en el colegio a las 8 h y 45 min, y sale a las 4 y media de la tarde.
 - a) ¿Cuánto tiempo pasa en el colegio cada día?
 - b) Si pasa 20 min en el recreo, 50 min para comer y 15 min en los cambios de clase, ¿durante cuánto tiempo está en clase?
- 5) En el colegio empezamos las clases a las 9 de la mañana. Cada día tenemos 8 clases distintas y dos recreos, uno de 20 min y otro de 50 min. Salimos a las cinco menos veinte de la tarde. Todas las clases duran lo mismo excepto la última que es 10 min más corta. ¿Cuánto dura cada clase?
- 6) Cada día un atleta se entrena 3 h y 45 min. ¿Cuánto tiempo ha empleado al cabo de 15 días?
- 7) Raquel va a viajar en avión, siendo su hora de salida a las 15 h 50 min. Si el vuelo se retrasa 1 h y cuarto, ¿A qué hora despegará el avión? Si el vuelo tiene una duración de 2h 25 min y se tarda 20 min en recoger el equipaje, ¿a qué hora nos iremos del aeropuerto?
- 8) María ha estudiado 3 h y 50 s. Tenía previsto estudiar durante 1 h y media, ¿Cuánto tiempo ha invertido de más en el estudio?
- 9) Un autobús urbano sale a prestar servicio a las 7h, 15 min, 17s de la mañana y termina a las 11h y 41 min de la noche. Ha realizado siete veces el recorrido completo (ida y vuelta). ¿Cuánto tiempo durará el recorrido de ida o vuelta?
- 10) Esta tarde, hemos empezado el control a las 2h 35min. Si tenemos 1h 50min para hacerlo, pero nos hemos retrasado 10 min al principio, ¿a qué hora terminaremos?
- 11) Hemos empezado el taller a las 1h y 35min de la tarde. Si tenemos 40min para hacerlo, ¿a qué hora terminaremos?
- 12) Ayer por la tarde, empecé a estudiar a las 6h 22min y terminé a las 8h 10min. ¿Cuánto tiempo estuve estudiando, si paré 15 min para merendar?
- 13) Entramos en el colegio a las 9 h de la mañana y salimos a las 4h y 40 min de la tarde. Tenemos un recreo de 20 min y la comida dura 50 min. Si la última clase dura 10 min menos que las demás y en total tenemos cada día 8 clases distintas, ¿cuántos minutos dura cada clase?
- 14) Un velero sale a las 07:45 y regresa a las 20:16 ¿Cuánto tiempo estuvo en el mar?
- 15) Una impresora saca 14 folios por minuto ¿Cuánto tiempo ha estado funcionando si ha editado 644 folios?
- 16) Un ciclista sale de paseo a las siete y diez de la mañana y regresa a las once y veinte. Expresa el tiempo que duró su paseo de modo complejo.
- 17) Un reloj marca en estos momentos las seis y media de la mañana ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que marque las cinco y cuarto de la tarde?
- 18) Adolfo llegó a las 7:10; Pedro había llegado 15 minutos antes; Remedios, 10 minutos después de Pedro y Sara 5 minutos antes que Remedios. ¿A qué hora llegó cada uno?
- 19) El señor Gómez fabrica velas de 16 cm de largo, por si se va la luz. Las velas se consumen 3,2 cm cada hora que están encendidas. ¿Cuántas horas dura una vela?
- 20) Esther, Bea y Marta han realizado una carrera de 200 m. Esther ha tardado un minuto y medio, Bea un minuto y 25 segundos y Marta ha empleado 96 segundos. Expresa en segundos los tiempos de cada una e indica el orden de llegada a la meta.
- 21) Un ciclista comienza una etapa contrarreloj; sale a las 11 h 40 min y 42 s y llega a la meta transcurridos 35 min y 20 s. ¿A qué hora llegó a la meta?
- 22) Si el precio de 1 minuto es de 0,03 € calcula lo que cuesta cada una de estas llamadas telefónicas

Comienzo	Término	duración
17:17	17:22	
21:55	22:05	
- 23) En una competición de natación femenina, la ganadora hizo un tiempo de 1 min 50 s. La que quedó en segundo lugar tardó 2 min 3 s. ¿Cuántos segundos transcurrieron entre la llegada de la primera y de la segunda?
- 24) Leyre ha comprado una cinta de vídeo de tres horas de duración. En ella quiere grabar dos películas. La primera dura 1 h 38 min y la segunda 1 h 26 min. ¿Caben las dos películas en la cinta que compró? ¿Cuánto tiempo sobra o falta?
- 25) Expresa en segundos:
 - a. 1 hora 7 minutos 46 segundos
 - b. 4 horas 45 minutos 51 segundos
- 26) El paseo de Laura en bicicleta ha durado 7.950 segundos. Expresa esa cantidad en horas, minutos y segundos.
- 27) Una atleta se entrena tres días a la semana. El primer día se entrena durante 2 horas 20 minutos 20 segundos; el segundo día dura el entrenamiento 1 hora 56 minutos 30 segundos, y el tercer día dura 2 horas 15 minutos 40 segundos. ¿Cuánto tiempo dedica la atleta a entrenarse cada semana?
- 28) Una persona salió de viaje a las 11 h 30 min y llegó a su destino a las 14 h 10 min. ¿Cuánto tiempo duró el viaje?

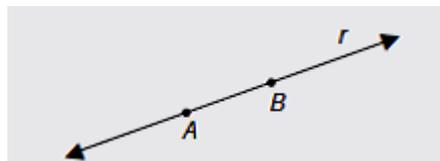
11º ELEMENTOS GEOMÉTRICOS. Rectas y ángulos

11.1 RECTA

- Una recta es una línea continua formada por infinitos puntos que no tiene principio ni fin.
- Para denominar una recta se suelen utilizar letras minúsculas.



Por un punto pasan infinitas rectas



Por dos puntos pasa una sola recta

INSTRUCCIONES PARA TRAZAR RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

- 1.º Se trazan varias rectas paralelas entre sí.
- 2.º Se gira la escuadra para que apoye el otro cateto sobre el cartabón.
- 3.º Por último, se trazan las rectas perpendiculares a las anteriores.

Ejercicios

1º Dibuja dos rectas, m y n, que sean:

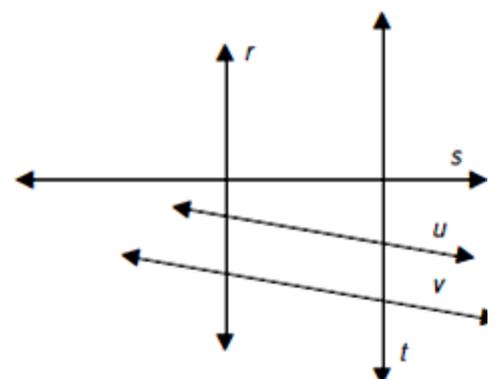
- Paralelas horizontalmente.
- Secantes.
- Paralelas verticalmente.
- Perpendiculares.

2º Dibuja una recta cualquiera m y traza.

- Dos rectas perpendiculares a m.
- Dos rectas secantes a m. perpendicular.
- Dos rectas paralelas a m.
- Una recta paralela a m y otra

3º Observa el siguiente grupo de rectas y responde.

- r y t son rectas
- r y s son rectas .
- t y s son rectas .
- r y u son rectas
- r y v son rectas .
- u y v son rectas .
- t y u son rectas .
- t y v son rectas
- Si prolongásemos la recta u, s y u serían rectas:



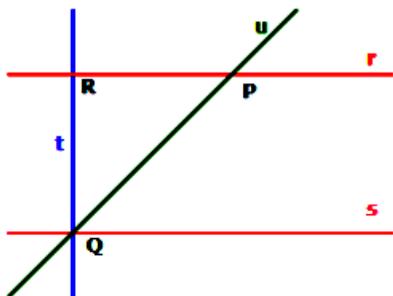
4º Dibuja una recta cualquiera m y traza.

- a) Dos rectas perpendiculares a m.
- b) Dos rectas secantes a m. perpendicular

- c) Dos rectas paralelas a m.
- d) Una recta paralela a m y otra perpendicular

5º Elige verdadero o falso

a)



- 1 r y s son paralelas. V F
- 2 R pertenece a s. V F
- 3 El segmento PQ está contenido en u. V F
- 4 r y t son secantes. V F
- 5 P, Q y R están alineados. V F

b)

- 1 Una recta pasa por 2 puntos cualesquiera del plano. V F
- 2 El plano tiene límites. V F
- 3 Dos rectas distintas pueden cortarse en 3 puntos. V F
- 4 Si 2 rectas tienen 3 puntos en común, entonces son iguales. V F
- 5 Si 3 puntos están en línea, entonces pertenecen a la misma recta. V F
- 6 Un segmento es la unión de 2 semirrectas. V F

6º Dado el plano siguiente. Responde:

- a) Calles paralelas a la calle Arco Iris
- b) Calles perpendiculares a la calle Arco Iris
- c) Calles secantes a la calle Arco Iris
- d) ¿Cómo son entre sí las calles Añil y Verde?



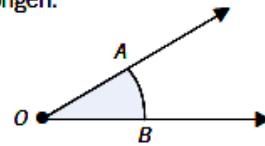
7º Dibuja tres puntos A, B y C que no estén en línea recta, y las rectas que pasan por cada dos de ellos:

- a) ¿Cuántas rectas hay?
- b) ¿Cómo son las rectas, secantes o paralelas?

11.2 Ángulos

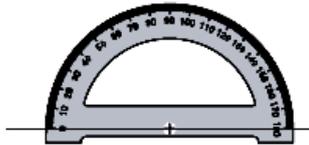
ÁNGULO

- Un **ángulo** es la región que forman dos semirrectas que tienen el mismo origen.
- En un ángulo distinguimos:
 - **Vértice O:** origen de las semirrectas.
 - **Lados A y B:** bordes del ángulo, semirrectas.
 - **Amplitud:** abertura del ángulo.

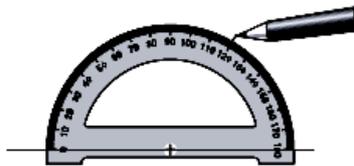


TRANSPORTADOR DE ÁNGULOS

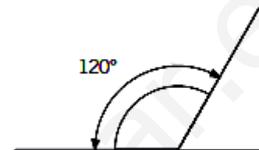
- Para **medir ángulos** utilizamos el transportador de ángulos.
- Es un instrumento de plástico transparente de forma semicircular, dividido en 180 partes iguales.
- Cada parte corresponde a una **unidad** de medida de ángulos: el **grado** (1°).
- Para medir ángulos seguimos estos pasos.



1.º Se coloca el transportador de forma que su centro coincida con el vértice del ángulo; y el eje, con un lado del ángulo previamente trazado.



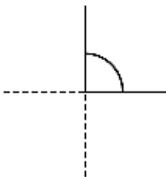
2.º A continuación se busca en el transportador el valor del ángulo en cuestión y se marca un trazo en el papel cerca del transportador.



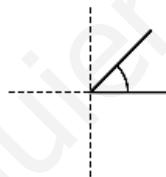
3.º Finalmente se quita el transportador y se une el vértice del ángulo con la marca efectuada.

TIPOS DE ÁNGULOS SEGUN SU ABERTURA

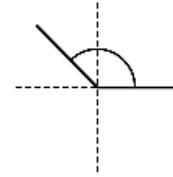
Rectos: 90°



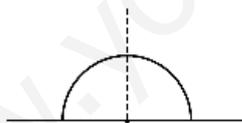
Agudos: menos de 90°



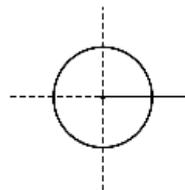
Obtuseos: más de 90°



Llanos: 180° (2 rectos)

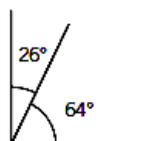


Completos: 360° (4 rectos)



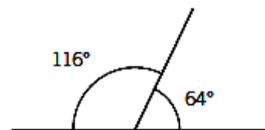
TIPOS DE ÁNGULOS SEGUN SU POSICIÓN

Complementarios: suman 90° .



$$90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$$

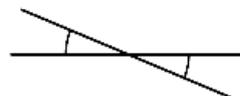
Suplementarios: suman 180° .



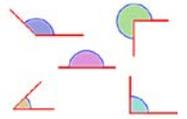
Consecutivos: vértice y lado en común.



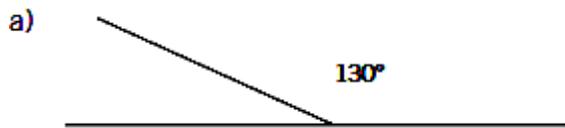
Opuestos por el vértice: vértice común.



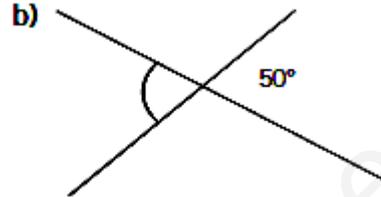
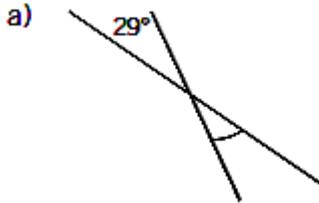
Ejercicios



1º Halla la abertura del ángulo que falta. Di de qué tipo de ángulos se trata.



2º Determina la abertura del ángulo que falta. Di de qué tipo de ángulos se trata.



3º Completa la siguiente tabla

ÁNGULO	35°	89°	25°	45°	60°
COMPLEMENTARIO	55°				
SUPLEMENTARIO					

4º Utilizando tu transportador, dibuja.

a) Un ángulo completo (360°)

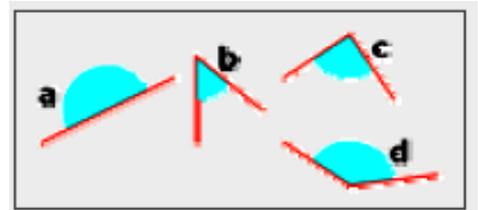
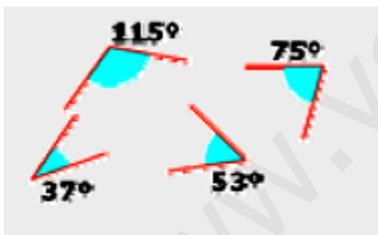
b) Dos ángulos consecutivos de 45°

c) Dos ángulos consecutivos de 20° y 30°

d) Dos ángulos consecutivos de 90°

¿Qué observas? ¿Qué observas?

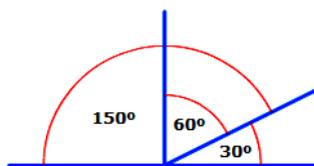
5º Indica sobre la figura si estos ángulos son agudos, rectos, obtusos o llanos.



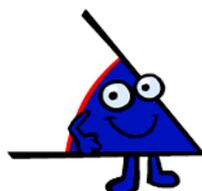
11º Indica cuáles de los ángulos que aparecen en la figura son complementarios y cuáles suplementarios.

6º Clasifica los ángulos de 0°, 45°, 90°, 135°, 180° y 225° según su amplitud y según su comparación con los ángulos agudo y llano.

7º



OBSERVA EL DIBUJO.



Completa los ángulos que faltan.

A	C	S
30°		
80°		
	85°	
	80°	
		135°
		120°
	1°	
50°		

A - Ángulo

C - Complementario

S - Suplementario

8º Dado un ángulo de amplitud 37° ¿cuál es la amplitud de su complementario? ¿Y la de su suplementario?

9º



Coloca cada ángulo en el lugar que corresponda.

Ángulos : tienen el vértice y un lado común.

Ángulos : tienen el vértice y un lado común y los lados restantes situados en prolongación uno del otro.

Ángulo : tiene uno de sus lados como prolongación del otro.

Ángulo : es la mitad de un llano. Mide 90° .

Ángulo : mide menos que un recto.

Ángulo : mide más que un recto.

Ángulos : los que sumados, puestos consecutivamente, miden un recto.

Ángulos : los que sumados dan como resultado un ángulo llano (180°); es decir, que puestos consecutivamente son adyacentes.

consecutivos

complementarios

suplementarios

recto

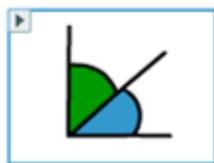
llano

adyacentes

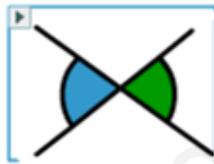
obtuso

agudo

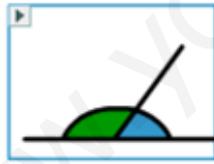
10º Empareja



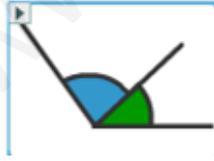
Opuestos por el vértice



Complementarios

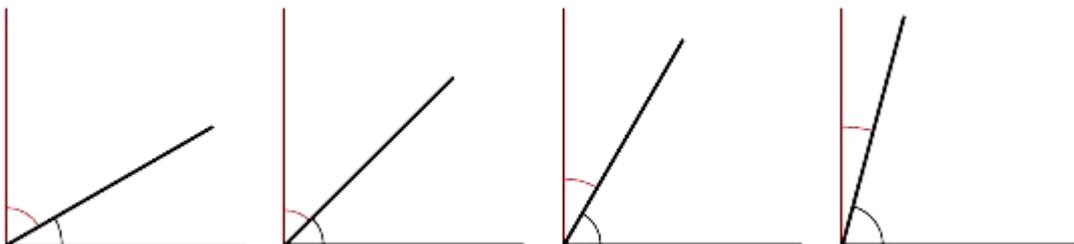


Consecutivos

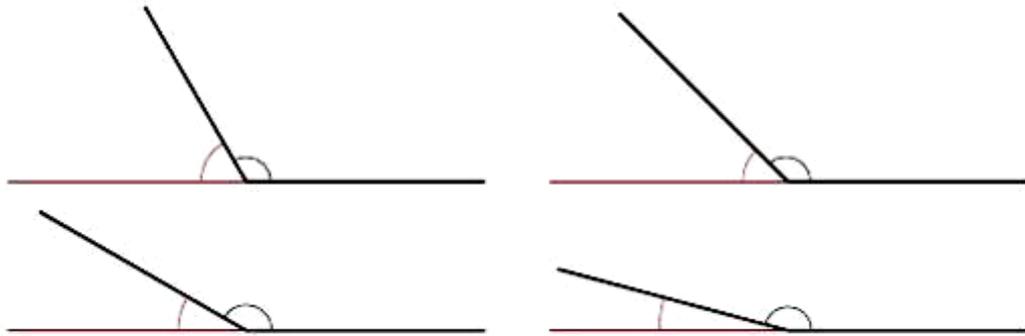


Suplementarios

11º Mide el con transportador de ángulos el valor de cada ángulo y su complementario



12º Mide el con transportador de ángulos el valor de cada ángulo y su suplementario



13º Dibuja:

- a) Dos ángulos consecutivos de 30° y 45° respectivamente.
- b) Dos ángulos adyacentes de 120° y 60° respectivamente.

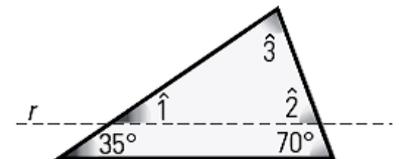
14º.- Clasifica los siguientes ángulos según su abertura. Dibújalos.

- a) $A = 55^\circ$ b) $S = 180^\circ$ c) $E = 90^\circ$ d) $Y = 135^\circ$

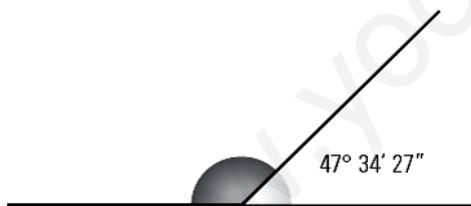
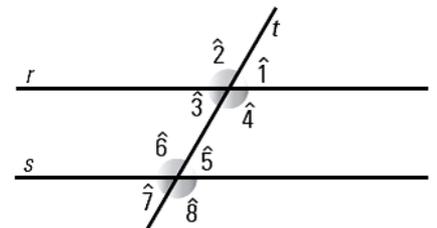
15º - Calcula, nombra y realiza el dibujo de:

- a) El ángulo complementario de 38° .
- b) El ángulo suplementario de 50° .

16º En el siguiente triángulo hemos dibujado una recta paralela a uno de los lados. Halla la medida de los ángulos 1,2,3



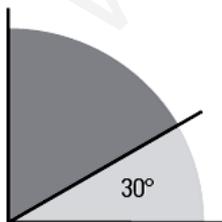
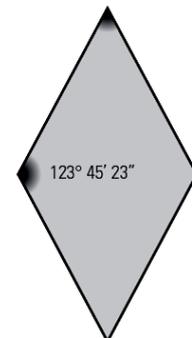
17º En el siguiente dibujo tenemos dos rectas paralelas cortadas por una secante. Si el ángulo 1 mide 60° , halla el valor del resto de los ángulos.



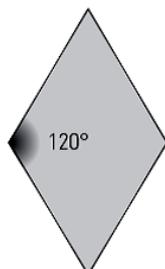
18º En el siguiente dibujo, ¿cuánto vale el ángulo coloreado?

pintado en el siguiente rombo?

19º ¿Cuánto mide el ángulo

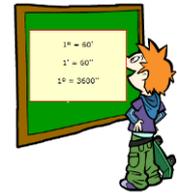


20º En el siguiente dibujo, calcula mentalmente cuánto vale el ángulo coloreado



21º Si un ángulo obtuso de un rombo mide 120° , calcula mentalmente cuánto mide el ángulo contiguo

Ejercicios del sistema sexagesimal



1) Expresar en complejo

1º 12 413 segundos

2 º 8 179''

3º 7 950 segundos

4º 7520''

5º 2.32 grados

6º 2345'

2) Expresar en incomplejo de segundos.

1º 3° 26' 53''

2º 12° 30' 42''

3º 2 ° 48'30 ''

4º 5° 12' 34''

5º 13° 30' 22''

6º 4 ° 25'20 ''

3) Pasar a segundos 3 h 36 min 42 s.

4) Realiza las siguientes sumas:

1º 68° 35' 42'' + 58° 46' 39''

2º 5° 48' 50'' + 6 ° 45' 30 ''+ 7° 58' 13''

3º 6° 13' 45'' + 7° 12' 43'' + 6° 33' 50''

5) Calcula la siguiente diferencia:: 6° 13' 24'' – 2° 24' 36''

6) Realiza los productos:

1º (132° 26' 33'') × 5

2º (15 ° 13 ' 42'') × 7

3º (128° 42' 36'') × 3

7) Efectúa los cocientes:

1º (132° 26' 33'') : 3

2º (226° 40' 36'') : 6

8) Halla el ángulo complementario y el suplementario de 38° 36' 43''

9) Halla el ángulo complementario y el suplementario de 25° 38' 40''

10) Realiza la siguiente operación:

a) 128° 28' 23'' + 91° 32' 49''

b) 330° 32' 43'' – 83° 56' 47''

c) 31° 38' 9'' : 7

d) 117° 15' 34'' : 8

e) 27° 31' 15'' +43° 42' 57''

f) 163° 15' 43'' - 96° 37' 51''

g) (37° 42' 19'') × 4

h) (143° 11' 56'') : 11

11) Completa la tabla escribiendo el resultado en segundos

30°30'30''	109830
27°55'	
44°26'40''	
13°41'15''	
55°33'20''	
69°27'5''	

12) Completa la tabla

	ÁNGULO COMPLEMENTARIO			ÁNGULO SUPLEMENTARIO		
	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
30° 20' 40"	59	39	20	149	39	20
15° 12' 11"						
59° 5' 49"						
65° 33' 43"						
3° 20' 4"						

13) Efectúa las siguientes operaciones

- | | |
|----------------------------------|---|
| a) $23^\circ 35' + 48^\circ 22'$ | b) $31^\circ 40' + 23^\circ 20'$ |
| c) $31^\circ 42' + 23^\circ 25'$ | d) $87^\circ 58' - 36^\circ 25'$ |
| e) $87^\circ - 36^\circ 20'$ | f) $87^\circ 10' - 36^\circ 20'$ |
| g) $(20^\circ 10') \times 3$ | h) $(20^\circ 20') \times 3$ |
| i) $(42^\circ 36') : 3$ | j) $91^\circ : 3$ |
| k) $(91^\circ 30') : 3$ | l) $47^\circ 25' + 56^\circ 11' + 17^\circ 49'$ |
| m) $37^\circ 53' - 29^\circ 49'$ | n) $68^\circ 42' + 11^\circ 3' + 43^\circ 39'$ |
| o) $52^\circ 41' - 36^\circ 55'$ | p) $(38^\circ 43') \times 8$ |
| q) $(24^\circ 55') \times 10$ | r) $(27^\circ 42') \times 5$ |
| s) $(76^\circ 39') : 5$ | t) $(89^\circ 21') : 2$ |

14) Halla el complementario de:

- a) $45^\circ 13'$ b) $70^\circ 52'$

15) Halla el suplementario de:

- a) $93^\circ 15'$ b) $15^\circ 02'$

16) Dados los ángulos $C^\wedge = 60^\circ 50' 25''$ y $D^\wedge = 45^\circ 20' 55''$, realiza las operaciones:

- a) $C^\wedge + D^\wedge$ b) $C^\wedge - D^\wedge$

17) La medida del ángulo A^\wedge es $50^\circ 40' 35''$.

- a) Calcula la medida del ángulo complementario de A^\wedge
 b) Calcula la medida del ángulo suplementario de A^\wedge

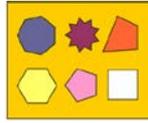
18) Dados los ángulos $A = 56^\circ 32' 38''$ y $B = 118^\circ 5' 19''$, calcula:

- a) El ángulo complementario de A.
 b) El ángulo suplementario de B.
 c) El ángulo complementario de $B - A$.
 d) El ángulo suplementario de $A + B$.

19) Si un triángulo es isósceles y el ángulo desigual mide $45^\circ 23'$, ¿cuánto mide cada uno de los otros dos ángulos?

20) Un ángulo de un triángulo mide $44^\circ 44' 44''$ y otro, mide $55^\circ 55' 55''$. ¿Cuánto mide el tercer ángulo?

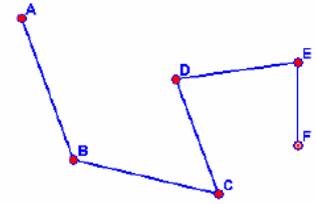
12º POLÍGONOS



12. 1. Líneas poligonales

Definición y tipos. Polígonos

Una línea poligonal es un conjunto de segmentos concatenados, (cada uno empieza donde acaba el anterior), y pueden ser: abiertas o cerradas.



Línea poligonal abierta

Elementos

Lados

Son los segmentos que lo limitan.

Vértices

Son los puntos donde concurren dos lados.

Ángulos interiores de un polígono

Son los determinados por dos lados consecutivos.

Suma de ángulos interiores de un polígono

Si n es el número de lados de un polígono:

Suma de ángulos de un polígono = $(n - 2) \cdot 180^\circ$

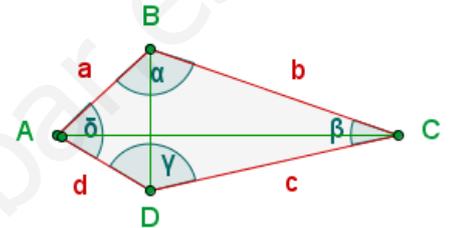
Diagonal

Son los segmentos que determinan dos vértices no consecutivos

Número de diagonales de un polígono

Si n es el número de lados de un polígono:

Número de diagonales = $n \cdot (n - 3) : 2$



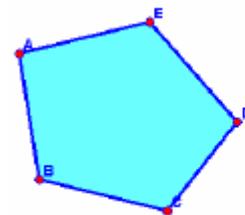
La **superficie** contenida por una línea poligonal cerrada se llama **polígono**

Los polígonos pueden ser:

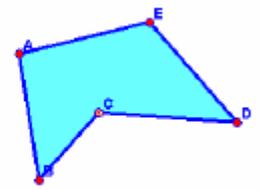
- Convexos: todos sus ángulos interiores son menores de 180° .

- Cóncavos: algunos de sus ángulos interiores son mayores de 180° .

Como podrás ver más adelante en este tema, también se clasifican en: regulares e irregulares y según su número de lados.

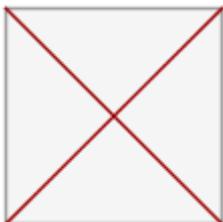


Polígono convexo



Polígono cóncavo

Ejemplos



$$4 \cdot (4 - 3) : 2 = 2$$

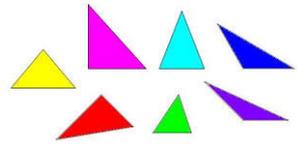


$$5 \cdot (5 - 3) : 2 = 5$$



$$6 \cdot (6 - 3) : 2 = 9$$

12.2. Triángulos



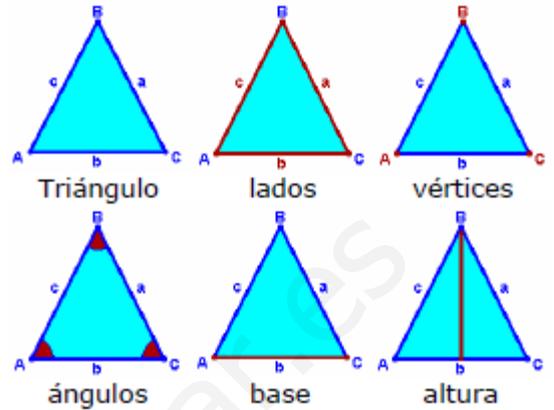
Elementos y clasificación

Un triángulo es un polígono de tres lados. Sus elementos característicos son: lados, base, altura, vértices y ángulos.

Los triángulos se pueden clasificar:

Según sus ángulos en:

- Acutángulos: los tres ángulos agudos.
- Rectángulos: un ángulo recto y dos agudos.
- Obtusángulos: un ángulo obtuso y dos agudos.



Según sus lados se clasifican en:

- Equiláteros: los tres lados iguales.
- Isósceles: dos lados iguales y uno distinto.
- Escalenos: los tres lados distintos.

Según sus ángulos se clasifican en:

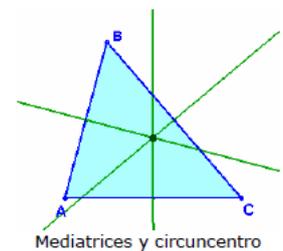
- Equiláteros: los tres lados iguales.
- Isósceles: dos lados iguales y uno distinto.
- Escalenos: los tres lados distintos.

Un triángulo es un polígono de tres lados.

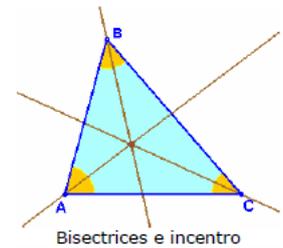
Rectas y puntos notables

En un triángulo se definen cuatro tipos de rectas denominadas, genéricamente, rectas notables. Esas rectas son:

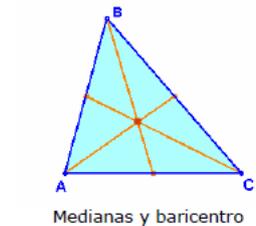
• **Mediatrices:** rectas perpendiculares a cada uno de los lados por su punto medio.



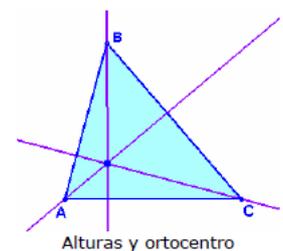
• **Bisectrices:** rectas que dividen a cada uno de los ángulos en dos ángulos iguales.



• **Medianas:** son los segmentos que van de cada vértice al punto medio del lado opuesto.



• **Alturas:** rectas perpendiculares a cada uno de los lados que pasan por el vértice opuesto.



En un triángulo tendremos tres rectas de cada tipo.

Los puntos de intersección de dichas rectas se denominan **puntos notables** y son:

- **Circuncentro:** punto de intersección de las tres mediatrices.
- **Incentro:** punto de intersección de las tres bisectrices.
- **Baricentro:** punto de intersección de las tres medianas.
- **Ortcentro:** punto de intersección de las tres alturas.

¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?

Como puedes apreciar en el dibujo

A + B + C = 180°

12.3. Cuadriláteros

Elementos y clasificación

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Sus elementos característicos son: lados, vértices, ángulos y diagonales.



Los **cuadriláteros** se pueden clasificar según el paralelismo entre sus lados en:

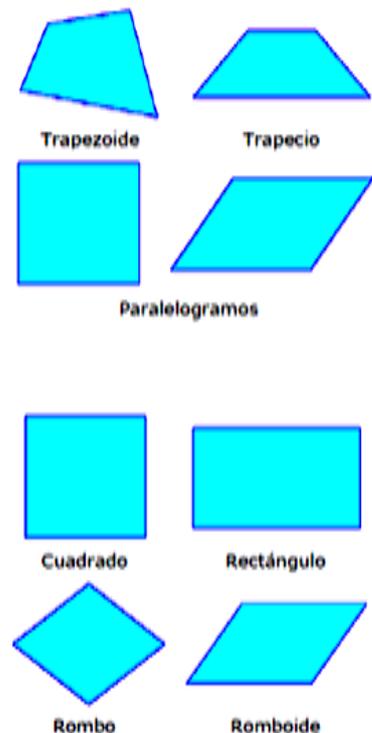
- Trapezoides: no tiene lados paralelos.
- Trapecios: tiene dos lados paralelos.
- Paralelogramos: los lados opuestos son paralelos.

Paralelogramos

Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos siempre son paralelos, tal como se mostraba en el apartado anterior.

Los paralelogramos se pueden clasificar atendiendo a sus ángulos y a sus lados en:

- Cuadrados: sus cuatro lados son iguales y sus cuatro ángulos también.
- Rectángulos: sus lados opuestos son iguales y sus cuatro ángulos son iguales.
- Rombos: sus cuatro lados son iguales y sus ángulos opuestos son iguales.
- Romboides: sus lados opuestos son iguales y sus ángulos opuestos son iguales.



Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.
Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos

¿Cuánto suman los ángulos interiores de un cuadrilátero?

La diagonal lo divide en dos triángulos, la suma de los ángulos del cuadrilátero es:

180° + 180° = 360°

12.4. Polígonos regulares

Elementos.

Sus elementos característicos son:

Lado: cada uno de los segmentos de la línea poligonal cerrada.

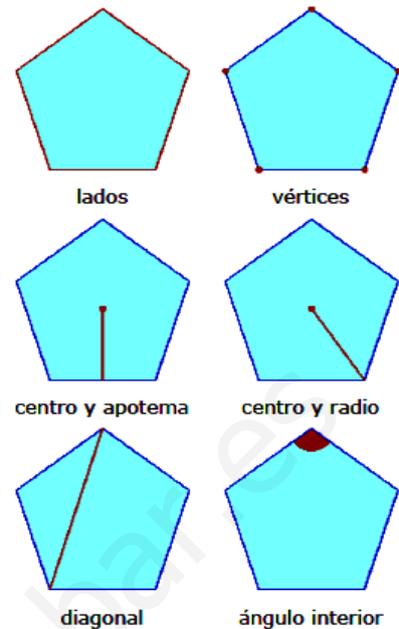
Vértice: cada uno de los puntos comunes a dos lados consecutivos.

Centro: punto que equidista de todos los vértices.

Apotema: segmento que une el centro del polígono con el punto medio de cada lado.

Radio: segmento que une el centro del polígono con cada uno de los vértices.

Diagonal: segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos.



Ángulos

Ángulo central de un polígono regular

Es el formado por dos radios consecutivos.

Si n es el número de lados de un polígono:

$$\text{Ángulo central} = 360^\circ : n$$

$$\text{Ángulo central del pentágono regular} = 360^\circ : 5 = 72^\circ$$

Ángulo interior de un polígono regular

Es el formado por dos lados consecutivos.

$$\text{Ángulo interior} = 180^\circ - \text{Ángulo central}$$

$$\text{Ángulo interior del pentágono regular} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

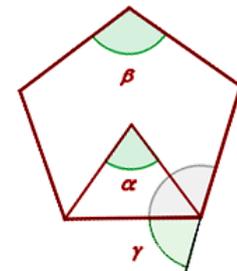
Ángulo exterior de un polígono regular

Es el formado por un lado y la prolongación de un lado consecutivo.

Los ángulos exteriores e interiores son suplementarios, es decir, que suman 180° .

$$\text{Ángulo exterior} = \text{Ángulo central}$$

$$\text{Ángulo exterior del pentágono regular} = 72^\circ$$



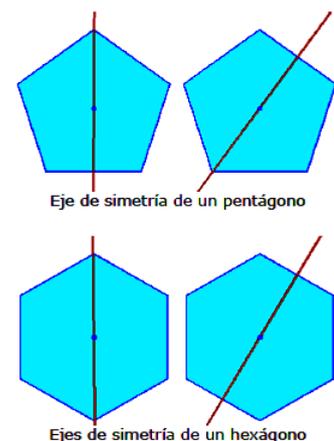
Ejes de simetría

Una línea que cruza una figura geométrica es un **eje de simetría** si la divide en dos partes de manera que si doblamos por dicho eje una de esas partes se superpone coincidiendo totalmente con la otra.

Observa las similitudes y diferencias, respecto a los ejes de simetría, que muestran los polígonos según tengan un número par o impar de lados.

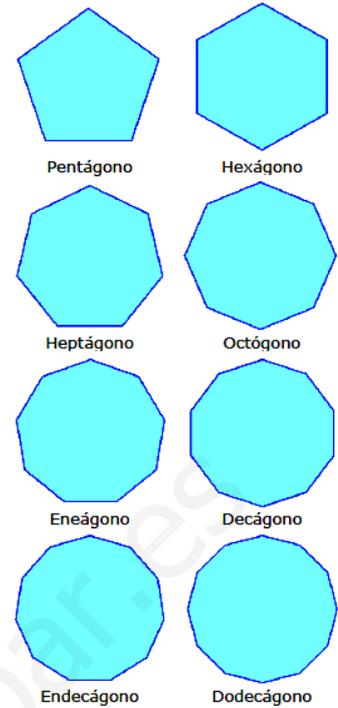
Un eje de simetría de un polígono regular con un número impar de lados pasa por cada uno de los vértices y por el punto medio del vértice opuesto.

Un polígono regular con un número par de lados tiene dos tipos de ejes de simetría, uno une dos vértices opuestos y otro, une los puntos medios de dos lados opuesto



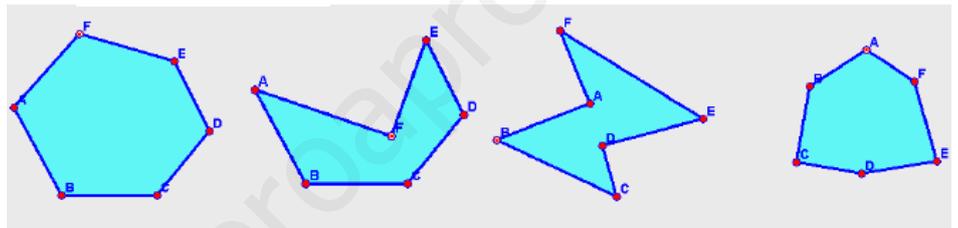
Clasificación de los polígonos regulares por el número de lados

- De tres lados: **triángulo equilátero**.
- De cuatro lados: **cuadrado**.
- De cinco lados: **pentágono**.
- De seis lados: **hexágono**.
- De siete lados: **heptágono**.
- De ocho lados: **octógono**.
- De nueve lados: **eneágono**.
- De diez lados: **decágono**.
- De once lados: **endecágono**.
- De doce lados: **dodecágono**.
- De trece o más lados: no se le da ningún nombre, se habla de polígono regular de 13, 14, ..., lados.

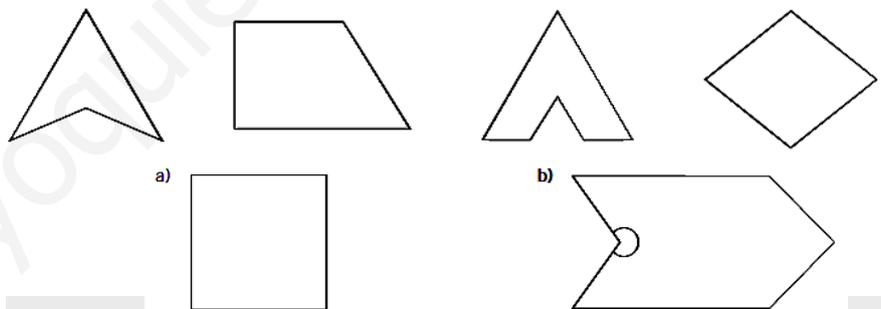


Ejercicios

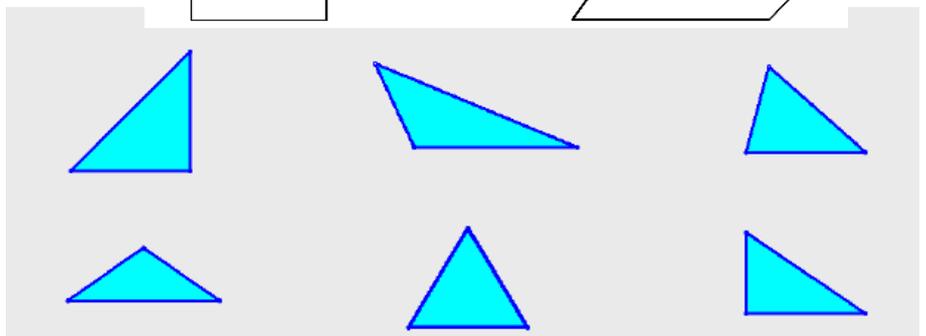
1º Indica si los siguientes polígonos son cóncavos o convexos



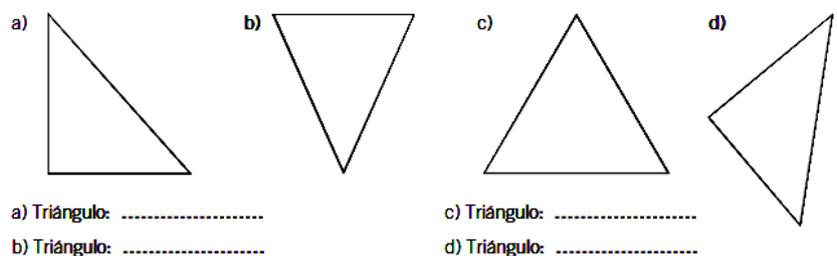
2º Clasifica los siguientes polígonos en cóncavos o convexos



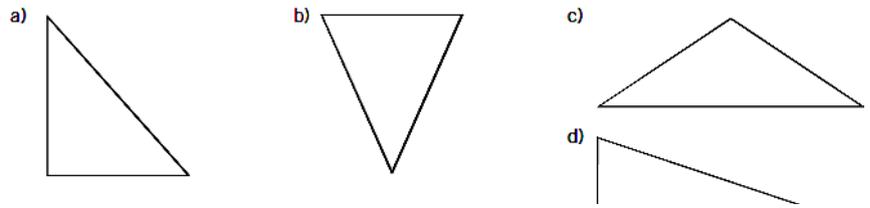
3º Clasifica los siguientes triángulos según sus ángulos y sus lados



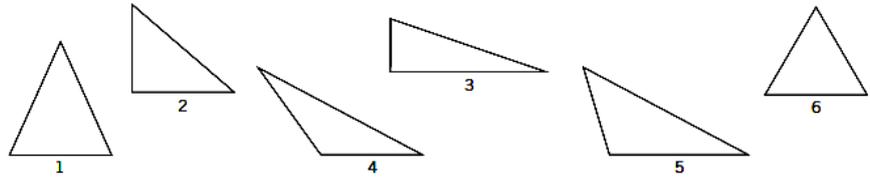
4º Mide con tu regla y clasifica los siguientes triángulos según sus lados



5º Utilizando el transportador clasifica estos triángulos según sus ángulos



6º Clasifica según sus ángulos y sus lados los siguientes triángulos

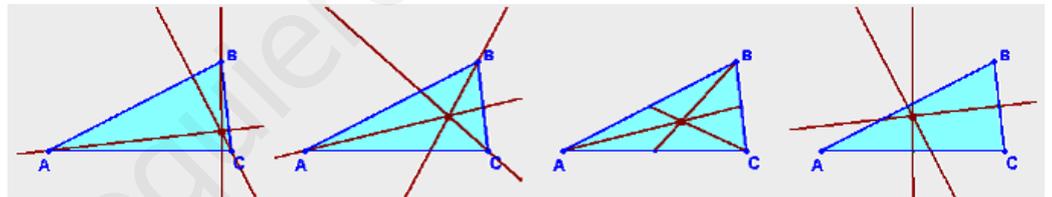


	EQUILÁTERO	ISÓSCELES	ESCALENO	ACUTÁNGULO	RECTÁNGULO	OBTUSÁNGULO
Triángulo 1						
Triángulo 2						
Triángulo 3						
Triángulo 4						
Triángulo 5						
Triángulo 6						

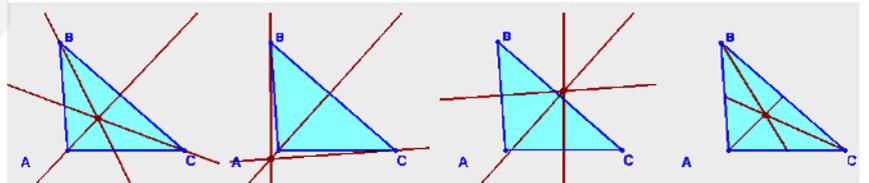
7º Completa la siguiente tabla indicando en las casillas en blanco SI o NO, según sea o no posible que un triángulo pueda, a la vez, de los tipos que indica la fila y la columna:

	Equilátero	Isósceles	Escaleno
Acutángulo			
Rectángulo			
Obtusángulo			

8º Indica las rectas notables y el nombre de los puntos donde se cortan

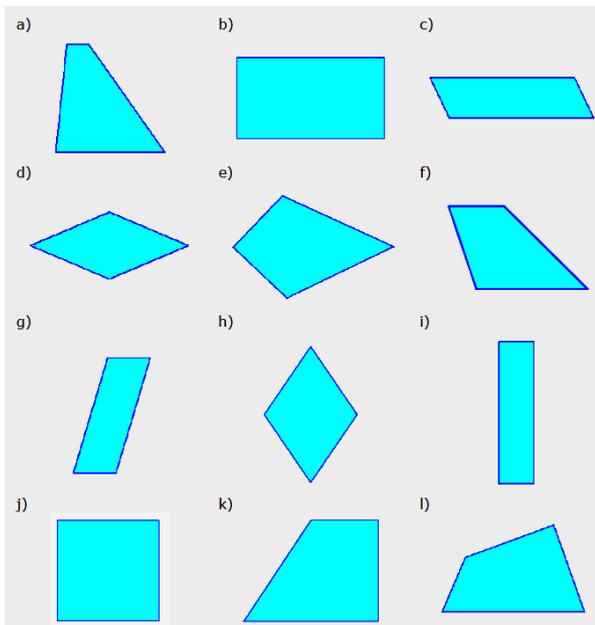


9º Indica las rectas notables y el nombre de los puntos donde se cortan



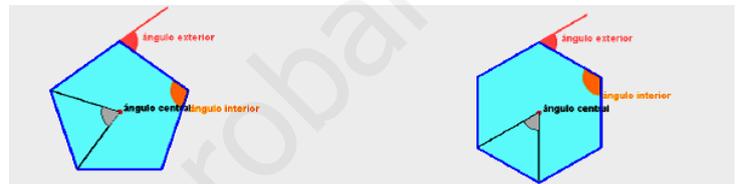
10º Completa la siguiente tabla:

	SEMEJANZAS	DIFERENCIAS
Un paralelogramo y un trapecio		
Un trapecio y un trapezoide		
Un paralelogramo y un trapezoide		

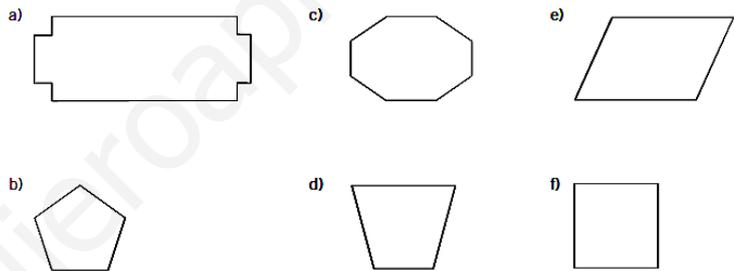


11º Clasifica los siguientes cuadriláteros

12º Calcula el valor de los ángulos central, interior y exterior en un pentágono regular y en un hexágono regular:



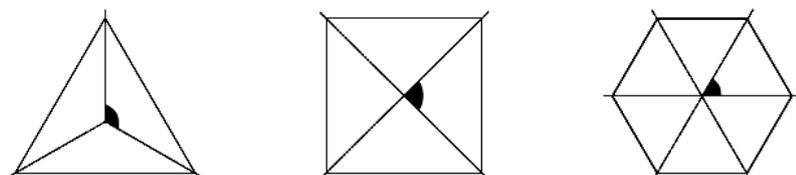
13º Indica cuales de los siguientes polígonos son regulares y nómbralos



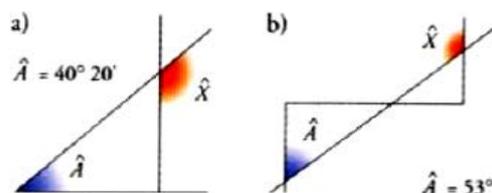
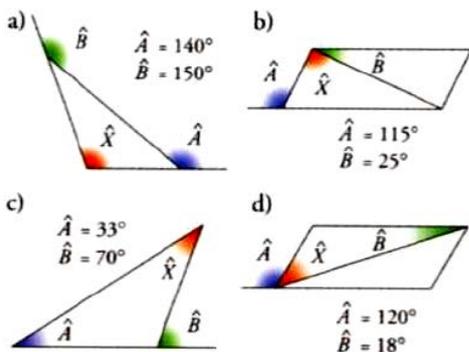
14º Completa la tabla

POLÍGONO	NOMBRE	EJES DE SIMETRÍA	RADIOS	APOTEMAS

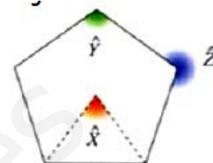
16º Calcula el ángulo central de los siguientes polígonos



17º Calcula el ángulo X en cada caso



18º Calcula la medida de X en cada caso



19º Calcula los ángulos de este pentágono regular

20º Calcula cuántas diagonales tiene un triángulo. Explica el resultado

21º Calcula cuántas diagonales tiene un dodecágono. ¿Cuánto suman sus ángulos interiores?

22º Calcula cuántas diagonales tiene un heptágono regular. ¿Cuánto suman sus ángulos interiores? ¿Y uno de ellos?

23º En un decágono regular, calcula:

- El número de diagonales;
- La suma de los ángulos interiores;
- La abertura de un ángulo interior;
- Cuánto mide su ángulo central

24º ¿Sabrías explicar por qué en un polígono irregular no se puede aplicar la fórmula para calcular el ángulo central?

25º En un octógono, calcula:

- El número de diagonales;
- La suma de los ángulos interiores;
- La abertura de un ángulo interior;
- Cuánto mide su ángulo central.

26º En el problema anterior, ¿se puede calcular el apartado c) o tienes que especificar alguna condición?

27º Dibuja un polígono cóncavo de 4 lados:

- ¿Qué nombre recibe según el número de lados?
- Señala sus ángulos.
- ¿Cuánto suman?
- ¿Se puede calcular el ángulo central?

28º ¿Cuántas diagonales tiene un triángulo? ¿Por qué?

29º Completa las siguientes frases:

El triángulo tiene _____ medianas, que se cortan en un punto llamado _____

El triángulo tiene _____ alturas, que se cortan en un punto llamado _____

El triángulo tiene _____ mediatrices, que se cortan en un punto llamado _____

30º Completa las siguientes frases:

El baricentro es el punto donde se cortan las _____

El _____ es el punto donde se cortan las alturas

El _____ es el punto donde se cortan las mediatrices

31º En un cuadrilátero conocemos tres ángulos que miden 80° , 70° y 75° , respectivamente. Calcula el cuarto ángulo.

32º Si el número de diagonales que pueden trazarse desde un vértice de un polígono es igual a la suma de los ángulos interiores dividido por 240, ¿de qué polígono se trata?

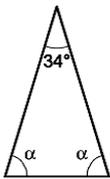
33º Un cuadrilátero tiene ángulos iguales dos a dos. Si dos de ellos miden 45° cada uno, ¿cuánto miden los otros dos?

34º En un cuadrilátero $ABCD$ se sabe que los ángulos miden $\hat{A} = 75^\circ$, $\hat{B} = 90^\circ 35'$ y $\hat{C} = 40^\circ 50'$. Calcula el ángulo \hat{D} .

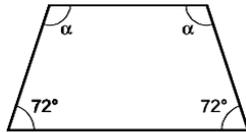
35º En un cuadrilátero $ABCD$ se tiene el valor de los ángulos $\hat{B} = 45^\circ 35'$, $\hat{C} = 80^\circ 46'$ y $\hat{D} = 120^\circ$. Calcula el ángulo \hat{A} . ¿Qué clase de cuadrilátero es?

36º En los siguientes polígonos, halla la medida del ángulo α

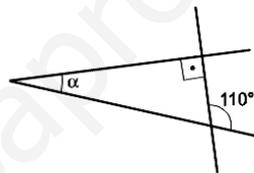
a)



b)



c)

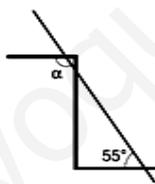


37º En los siguientes polígonos, halla la medida del ángulo α

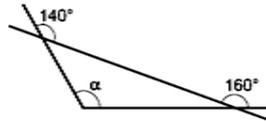
a)



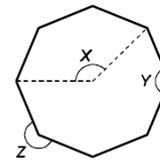
b)



c)

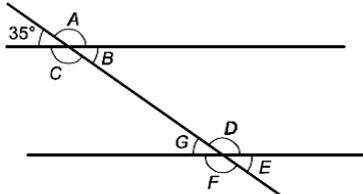


38º Calcula el valor de los ángulos X , Y y Z

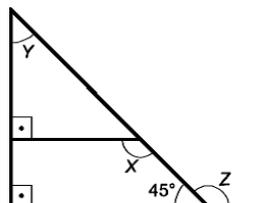


39º Calcula en cada caso la medida del ángulo desconocido

a)



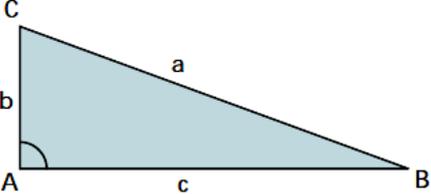
b)



12.5 Teorema de Pitágoras

TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$a^2 = b^2 + c^2$

De esta fórmula se obtienen las siguientes:

$a = \sqrt{b^2 + c^2}$

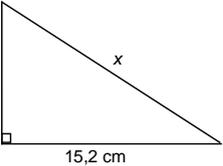
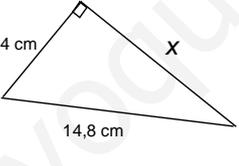
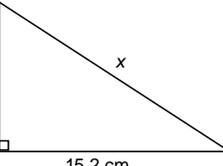
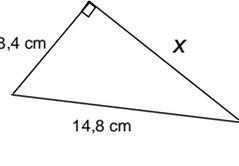
$b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Ejercicios



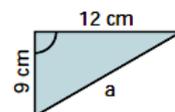
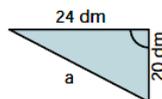
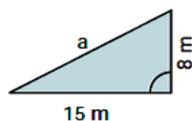
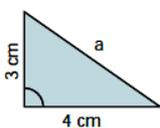
1º Halla el valor de x en los triángulos siguientes

<p>a)</p> 	<p>b)</p> 	<p>c)</p> 	<p>d)</p> 
--	--	---	--

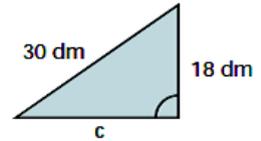
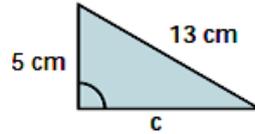
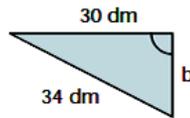
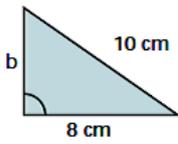
2º Comprueba el teorema de Pitágoras en los siguientes triángulos rectángulos

HIPOTENUSA <i>a</i>	CATETO MAYOR <i>b</i>	CATETO MENOR <i>c</i>	$a^2 = b^2 + c^2$
5	4	3	
26	24	10	
13	12	5	
2	1	1	
17	15	8	

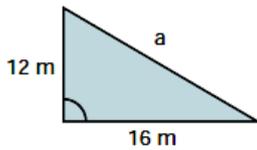
3º Calcula el valor de la hipotenusa en los siguientes casos:



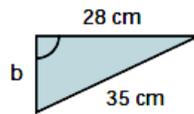
4º Calcula el cateto que falta



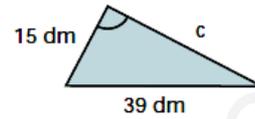
5º Calcula en cada triángulo rectángulo el lado que falta



a =

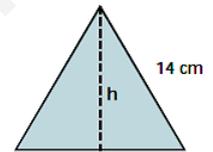


b =

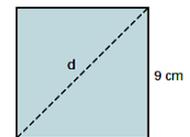


c =

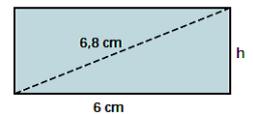
6º Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 14 cm



7º Calcula la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 9 cm

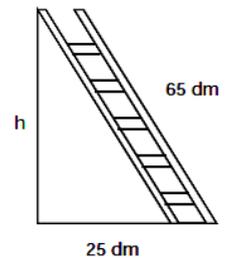


8º Calcula la altura de este rectángulo.



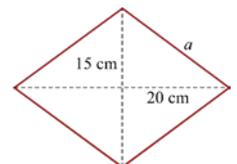
9º Calcula el área de un triángulo equilátero de 8 cm de lado.

10º Una escalera de 65 dm de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 25 dm de la pared. ¿A qué altura se apoya la parte superior de la escalera en la pared?

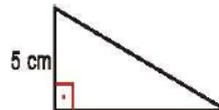
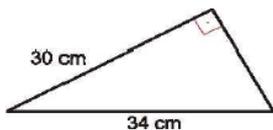


11º Calcula lo que mide el lado de un cuadrado cuya diagonal vale 12 cm.

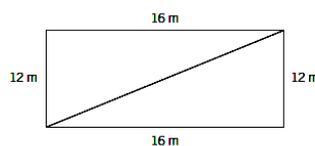
12º Calcula la medida del lado a (expresa el resultado con una cifra decimal):



13º Calcula el lado que falta encada caso



14º Calcula la diagonal



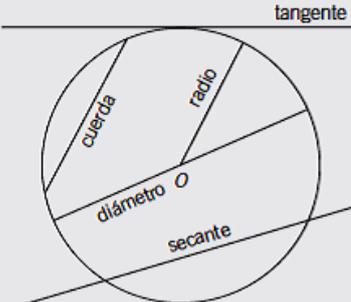
13º LA CIRCUNFERENCIA



CIRCUNFERENCIA
La **circunferencia** es una línea curva cerrada y plana cuyos puntos están a la misma distancia del centro.

CÍRCULO
El **círculo** es la figura plana formada por la circunferencia y su interior.

RECTAS DE LA CIRCUNFERENCIA



Centro, O: punto del cual equidistan todos los puntos de la circunferencia.

Radio: recta que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de la misma.

Diámetro: recta que pasa por el centro y divide a la circunferencia en dos partes (semicircunferencias).

Cuerda: segmento que toca a dos puntos de la circunferencia.

Secante: recta que corta en dos puntos a la circunferencia.

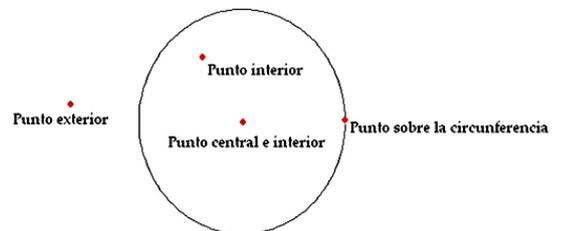
Tangente: recta que toca a la circunferencia en un punto.

Posiciones relativas

La circunferencia y un punto

Un punto en el plano puede ser:

- **Exterior a la circunferencia**, si la distancia del centro al punto es mayor que la longitud del radio.
- **Pertenciente a la circunferencia**, si la distancia del centro al punto es igual a la longitud del radio.
- **Interior a la circunferencia**, si la distancia del centro al punto es menor a la longitud del radio.

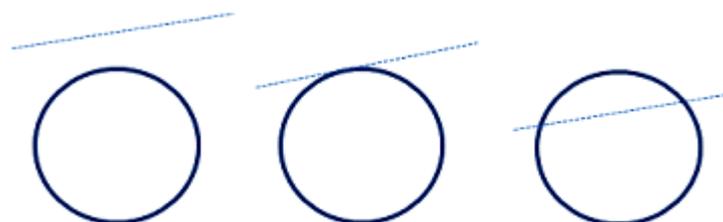


La circunferencia y la recta

Una recta, respecto de una circunferencia, puede ser:

- **Exterior**, si no tienen ningún punto en común con ella y la distancia del centro a la recta es mayor que la longitud del radio.
- **Tangente**, si la toca en un punto (el punto de tangencia) y la distancia del centro a la recta es igual a la longitud del radio. Una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que une el punto de tangencia con el centro.
- **Secante**, si tiene dos puntos comunes, es decir, si la corta en dos puntos distintos y la distancia del centro a la recta es menor a la longitud del radio.

Cuerda que pasa por el centro de la circunferencia



Exterior

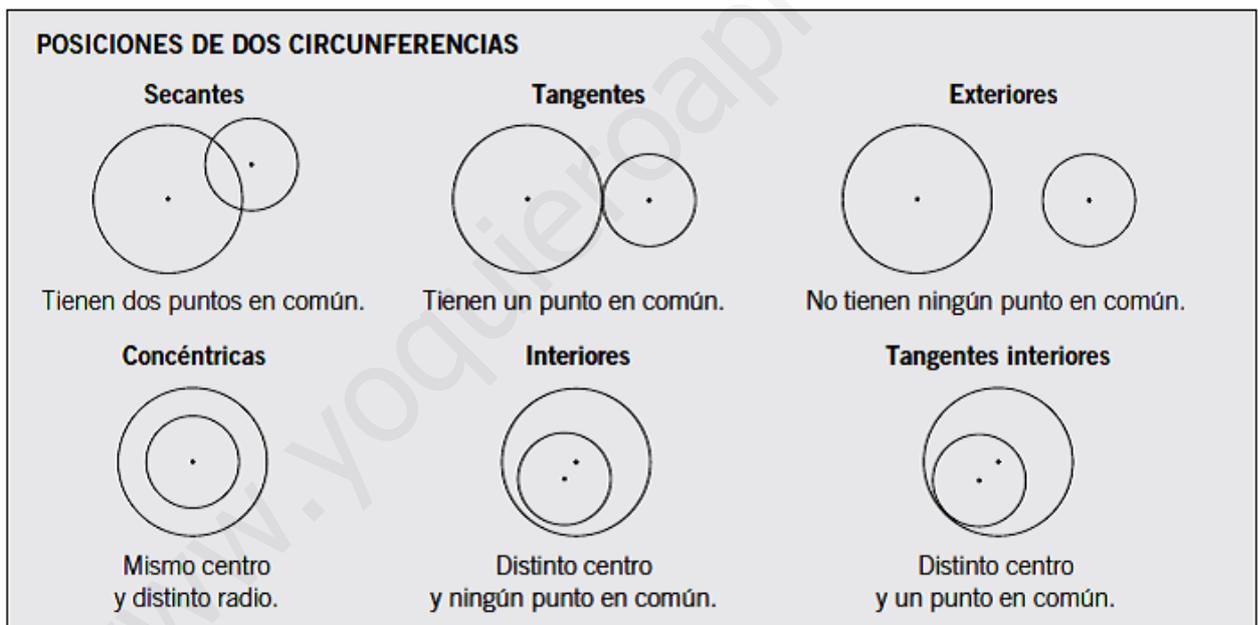
Tangente

Secante

Dos circunferencias

Dos circunferencias, en función de sus posiciones relativas, se denominan:

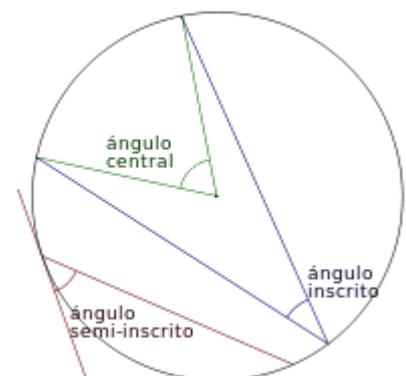
- **Secantes**, si se cortan en dos puntos distintos y la distancia entre sus centros es menor a la suma de sus radios.
- **Tangentes exteriormente**, si tienen un punto común y todos los demás puntos de una son exteriores a la otra.
- **Exteriores**, si no tienen puntos comunes y la distancia que hay entre sus centros es mayor que la suma de sus radios..
- **Interiores concéntricas**, si tienen el mismo centro (la distancia entre sus centros es 0) y distinto radio. Forman una figura conocida como corona circular o anillo. Una de ellas tiene que tener mayor radio que la otra.
- **Interiores excéntricas**, si no tienen ningún punto común y la distancia entre sus centros es mayor que 0 y menor que el valor absoluto de la diferencia de sus radios. Una de ellas tiene que tener mayor radio que la otra.
- **Tangentes interiormente**, si tienen un punto común y todos los demás puntos de una de ellas son interiores a la otra exclusivamente. La distancia que hay entre sus centros es igual al valor absoluto de la diferencia de sus radios. Una de ellas tiene que tener mayor radio que la otra.



Ángulos en una circunferencia

Un ángulo, respecto de una circunferencia, pueden ser:

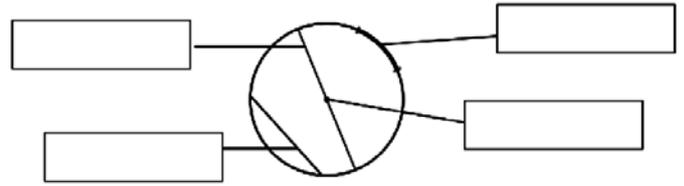
- **Ángulo central**, si tiene su vértice en el centro de esta. Sus lados contienen a dos radios..
- **Ángulo inscrito**, si su vértice es un punto de la circunferencia y sus lados contienen dos cuerdas
- **Ángulo semi-inscrito**, si su vértice es un punto de la circunferencia y sus lados contienen una cuerda y una recta tangente a la circunferencia. El vértice es el punto de tangencia.



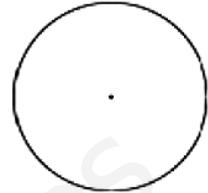


Ejercicios

1) Escribe el nombre en cada recuadro



- 2) Una cuerda divide a una circunferencia en dos arcos iguales. ¿Cómo se llama la cuerda? ¿Y cada uno de los arcos?
- 3) Dada la siguiente circunferencia dibuja en ella tres rectas: Una tangente, otra secante y otra exterior



4) Relaciona las dos columnas de la tabla

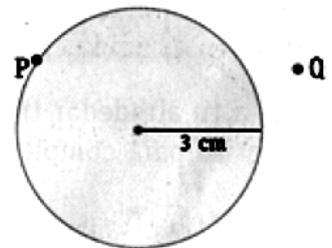
Posición de una circunferencia respecto a la otra	Puntos que tienen en común las dos circunferencias
Exterior	Dos puntos en común
Tangente	Un punto en común
Secante	Ningún punto en común

5) Etiqueta esto dibujos



6) Dada la circunferencia de la figura:

- a) Traza una recta tangente a la circunferencia que pase por el punto P.
- b) Por el punto Q, traza una recta exterior a la circunferencia.
- c) ¿Qué posición tiene la recta que pasa por P y Q respecto a la circunferencia?



7) Una circunferencia tiene de radio 3 cm. Indica la posición relativa de una recta que se encuentra situada a:

- a) 5 cm del centro de la circunferencia.
- b) 2 cm del centro de la circunferencia
- c) 3 cm del centro de la circunferencia

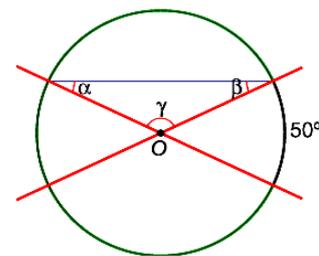
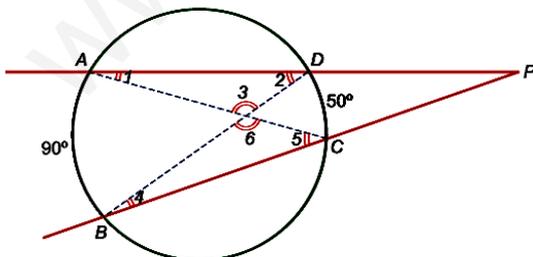
8) Los radios de dos circunferencias miden 6 y 10 cm respectivamente. Indica su posición relativa si la distancia entre sus centros es:

- a) de 15 cm
- b) de 3 cm
- c) de 16 cm

9) Dos circunferencias tienen de radios 3 y 5 cm respectivamente. Indica su posición relativa si la distancia entre sus centros es:

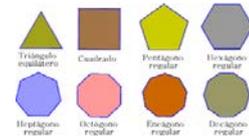
- a) de 12 cm
- b) de 8 cm
- c) de 2 cm

- 10) Dos circunferencias tienen de radios 1 y 4 cm respectivamente. Indica su posición relativa si la distancia entre sus centros es:
- de 2 cm
 - de 4 cm
- 11) Una casa de campo está en el centro de un terreno circular de 72 m de radio. Se quiere construir una carretera que pase a 35 m de la puerta del terreno. ¿A qué distancia de la casa pasará la carretera?
- 12) Dibuja dos circunferencias tangentes interiores y una recta tangente a ambas.
- 13) Dibuja una circunferencia de radio 5 cm y señala sobre ella un diámetro, un radio, una cuerda y su arco correspondiente.
- 14) Dibuja dos circunferencias tangentes exteriores y una recta tangente a ambas.
- 15) Dos circunferencias concéntricas tienen 4 cm y 7 cm de radio. ¿Cuánto mide la anchura de la corona circular?
- 16) Sobre un círculo de 5 cm de radio, dibuja un sector circular, un segmento circular y una zona circular.
- 17) Dibuja dos circunferencias concéntricas de radios 5 y 2 cm respectivamente. Dibuja sobre ellas un trapecio circular.
- 18) Calcula el valor de los ángulos centrales de una circunferencia cuando se divide en:
- 6 partes iguales
 - 4 partes iguales
 - 5 partes iguales
- 19) Una circunferencia se ha dividido en 9 partes iguales. ¿Cuánto mide cada ángulo central?
- 20) El ángulo central de una circunferencia mide 120° . ¿En cuántas partes iguales se ha dividido la circunferencia?
- 21) Una circunferencia se ha dividido en 3 ángulos centrales. Dos de ellos miden 75° y 135° respectivamente. ¿Cuánto medirá el tercero?
- 22) Una circunferencia se ha dividido en 4 ángulos centrales. Tres de ellos miden 120° , 30° y 60° respectivamente. ¿Cuánto medirá el cuarto?
- 23) Calcula los ángulos α , β y γ de la siguiente figura

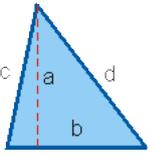
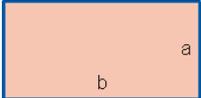
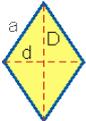
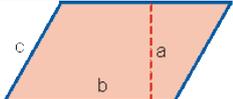
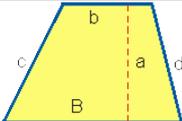
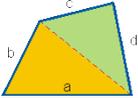
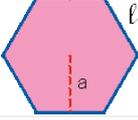
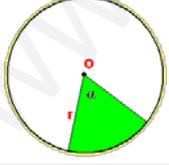
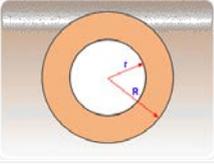
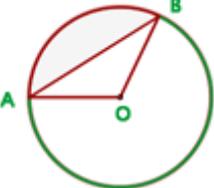


- 24) Halla el valor de los 6 ángulos señalados:

14º LONGITUDES Y ÁREAS

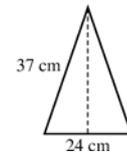
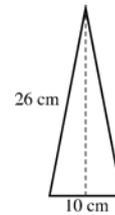


Perímetros y áreas de los polígonos

Nombre	Dibujo	Perímetro	Área
Triángulo		P = Suma de los lados $P = b + c + d$	$A = \frac{b \cdot a}{2}$ $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ p = semiperímetro
Cuadrado		$P = 4 \cdot a$	$A = a^2$
Rectángulo		$P = 2(b + a)$	$A = b \cdot a$
Rombo		$P = 4 \cdot a$	$A = \frac{D \cdot d}{2}$
Romboide		$P = 2(b + c)$	$A = b \cdot a$
Trapezio		$P = B + c + b + d$	$A = \frac{B+b}{2} \cdot a$
Trapezoide		$P = a + b + c + d$	A = Suma de las áreas de los dos triángulos
Polígono regular		$P = n \ell$	$A = \frac{1}{2} P \cdot a$
Circulo		$P = 2\pi r = d\pi$	$A = \pi r^2$
Sector circular		$R = 2\pi r \frac{\alpha}{360^\circ} + 2r$	$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$
Corona circular		$P = 2\pi \cdot (R + r)$	$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$
Segmento circular		$P = 2\pi r \frac{\alpha}{360^\circ} + \text{cuerda}$	A = Area sector - Area triángulo AOB

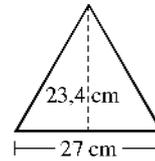
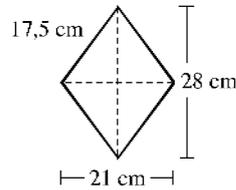
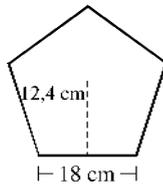
Ejercicios

1) Calcula la altura en los siguientes triángulos

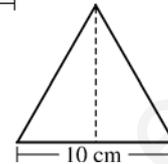


isósceles:

2) Calcula el perímetro y el área de estas figuras:



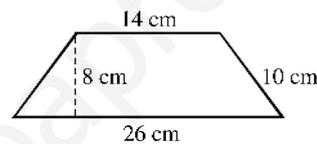
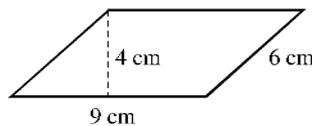
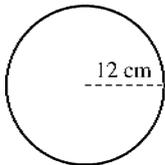
3) Calcula la altura y el área de este triángulo equilátero:



4) La diagonal de una piscina rectangular mide 25 m y el 15 m. Calcula su perímetro y la superficie que ocupa.

ancho es de

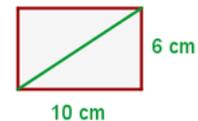
5) Calcula el área y el perímetro de estas figuras:



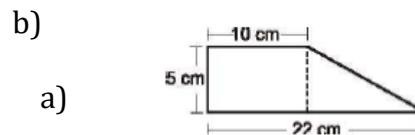
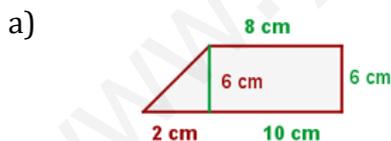
6) Hallar la diagonal, el perímetro y el área del cuadrado:



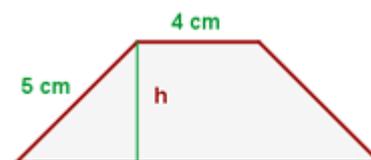
7) Hallar la diagonal, el perímetro y el área del rectángulo:



8) Hallar el perímetro y el área :

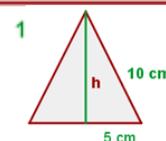


9) Hallar el perímetro y el área del trapecio



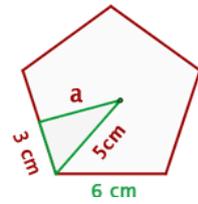
isósceles:

10) Hallar el perímetro y el área del triángulo

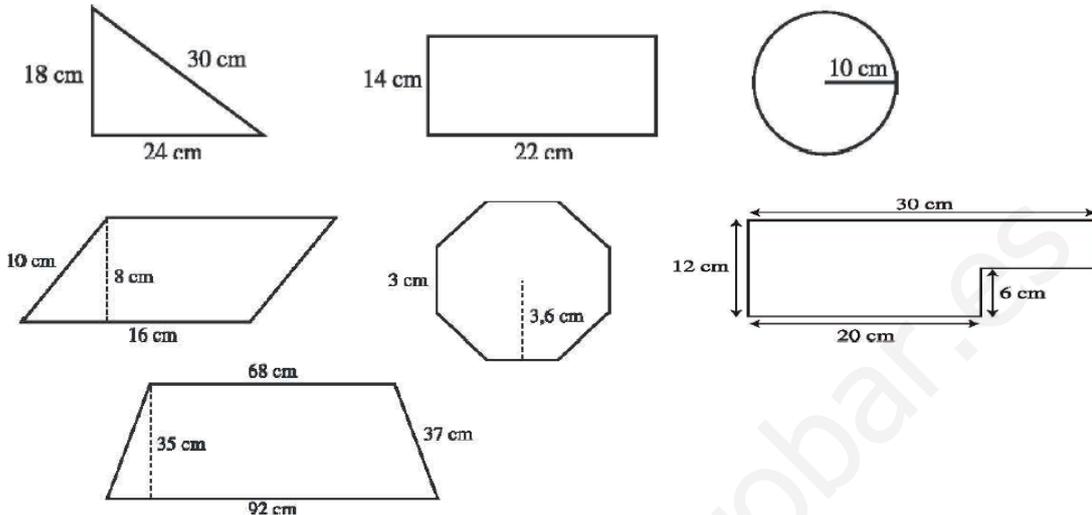


equilátero:

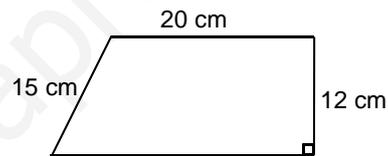
11) Hallar el perímetro y el área del pentágono regular :



12) Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras



13) Calcula la superficie del trapecio



siguiente:

14) Halla la longitud de las circunferencias de

radios:

- a. 5 m
- b. 31,42 cm
- c. 215,3 mm

- d. 62,74 km
- e. 1004,03 m

15) Halla el área de un hexágono regular de 12 cm de lado.

16) El perímetro de un trapecio isósceles es de 110 m, las bases miden 40 y 30 m respectivamente. Calcular los lados no paralelos y el área.

17) Sobre un círculo de 4 cm de radio se traza un ángulo central de 60° . Hallar el área del segmento circular comprendido entre la cuerda que une los extremos de los dos radios y su arco correspondiente.

18) Halla la longitud de las circunferencias de las monedas de 1 y 0,10 € que tienen diámetros de 23,25 mm y 19,75 mm, respectivamente.

19) La longitud de una circunferencia es igual a 53,72 cm. ¿Cuánto mide su radio?

20) La rueda de una bicicleta tiene 66 cm de diámetro. ¿Cuántas vueltas tiene que dar para recorrer un km?

21) La rotonda de una carretera tiene un jardín de $706,5 \text{ m}^2$ de área. Encuentra el radio del jardín.

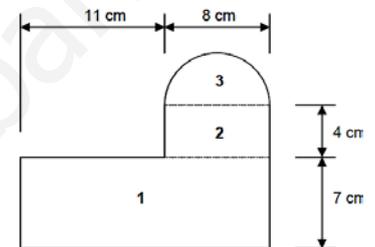
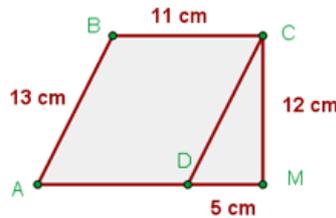
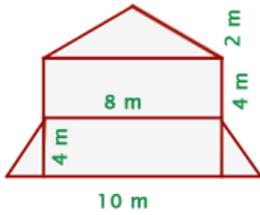
22) En una circunferencia de radio 3 cm, calcula la longitud de un arco cuyo ángulo central correspondiente mide:

a. 60°

b. 30°

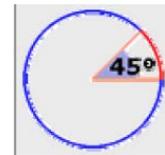
c. 180°

- 23) Hallar el área de un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados miden 10 cm cada uno.
- 24) El área de un trapecio es 120 m^2 , la altura 8 m, y la base menor mide 10 m. ¿Cuánto mide la otra base?
- 25) Calcular el área de un paralelogramo cuya altura mide 2 cm y su base mide 3 veces más que su altura.
- 26) Calcula el área de un rombo cuya diagonal mayor mide 10 cm y cuya diagonal menor es la mitad de la mayor.
- 27) Hallar el perímetro y el área de las figuras:

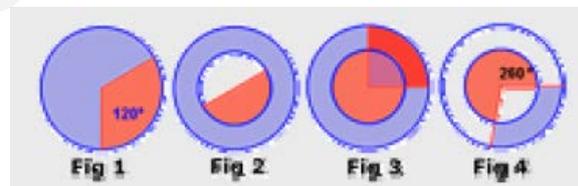


- 28) Hallar el área y el perímetro de la siguiente figura

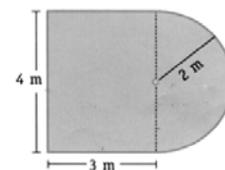
- 29) Calcula el perímetro y área del sector dibujado



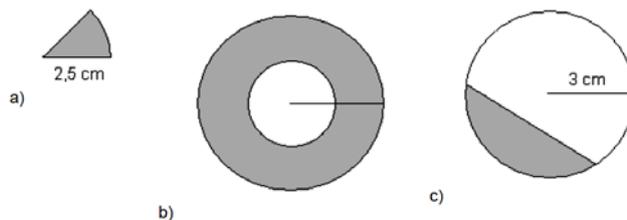
- 30) Si el radio de todas las circunferencias es 2 cm Hallar el área de las



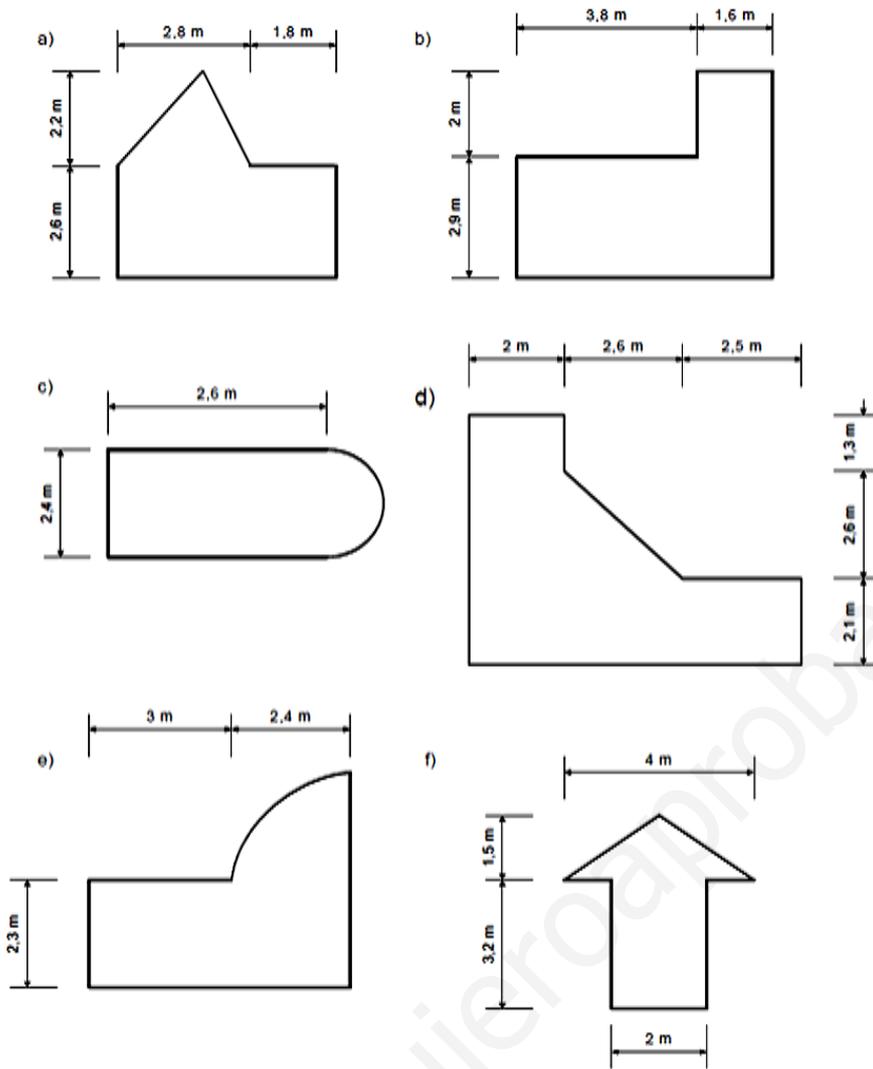
- 31) Calcula el área y el perímetro de:



- 32) Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras

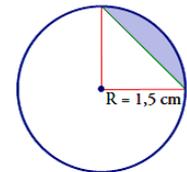


- 33) Calcula el área de las siguientes figuras compuestas



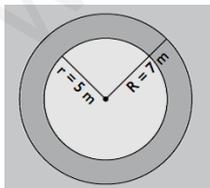
34) Calcula el área de una cometa de diagonales 9 y 10 cm

35) Calcula el área sombreada

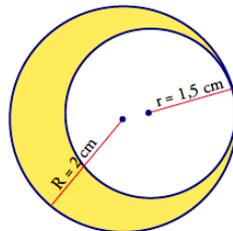


36) Calcular el área y el perímetro de las regiones sombreadas:

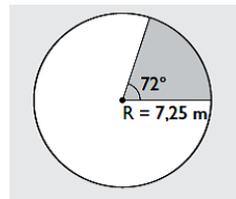
a)



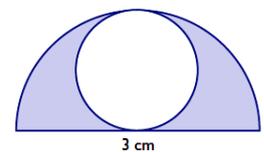
b)



c)



d)



Problemas

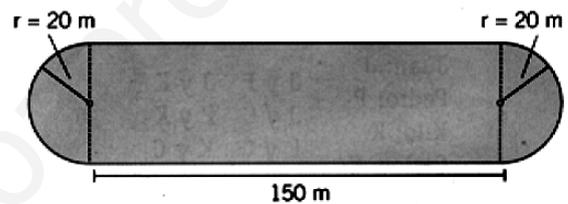
1) ¿Cuántos árboles podremos plantar en un terreno con forma de paralelogramo de 30 m de ancho y 32 de largo si cada planta necesita



para su buen desarrollo 4 m^2 ?

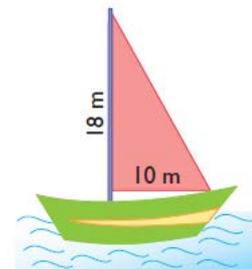
- 2) ¿Qué superficie tendrá un jardín con forma de paralelogramo que tiene 2 hm , 7 dam y 5 m de largo y 9 dam y 5 m de ancho?
- 3) Sobre un círculo de 4 cm de radio se traza un ángulo central de 60° . Hallar el área del segmento circular comprendido entre la cuerda que une los extremos de los dos radios y su arco correspondiente.
- 4) Queremos vallar una finca cuadrada de 1000 m de lado. ¿Cuántos metros de alambrada necesitamos?
- 5) Cuántas baldosas hay en un salón de base cuadrada de 6 m de longitud si cada baldosa es cuadrada y mide 20 cm de lado?
- 6) ¿Cuánto costará empapelar una pared cuadrada de $3,5 \text{ m}$ de lado con un papel que cuesta 4 € el metro cuadrado?
- 7) Una habitación cuadrada tiene una superficie de 25 m^2 . Se quiere poner una cenefa alrededor que cuesta 2 € el metro. ¿Cuánto nos costará la cenefa?
- 8) Mide los bordes de la hoja que estás leyendo y calcula su área
- 9) Calcula el valor de un terreno de forma rectangular cuyas dimensiones son 275 m por 136 m , al precio de 72 € el m^2 .

- 10) Cuántas vueltas hay que darle a la pista para recorrer un kilómetro



- 11) Las ruedas delanteras de un tractor miden 70 cm de diámetro, y las traseras, $1,5 \text{ m}$. Si el tractor recorre 25 km , ¿cuántas vueltas habrán dado las ruedas delanteras?, ¿y las traseras?

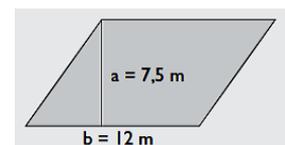
- 12) La vela de un barco es de lona y tiene forma de triángulo rectángulo; sus catetos miden 10 m y 18 m . El metro cuadrado de lona vale $18,5 \text{ €}$. ¿Cuánto cuesta la lona para hacer la vela



- 13) Una mesa tiene forma de hexágono regular cuyo lado mide $1,2 \text{ m}$, y tiene una sola pata. La madera de la pata cuesta 35 € , y el metro cuadrado de la madera para construir la parte hexagonal, 54 € . ¿Cuánto cuesta la madera para hacer la mesa?

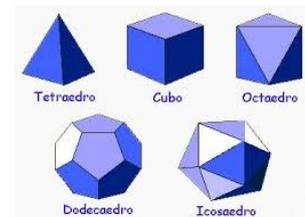
- 14) El hilo de cobre de una bobina de $3,5 \text{ cm}$ de radio tiene 50 vueltas. Si el metro de hilo cuesta $1,7 \text{ €}$, ¿cuánto cuesta el hilo?

- 15) Un jardín tiene forma de romboide, cuya base mide 12 m y cuya altura mide $7,5 \text{ m}$. Queremos ponerle césped, que cuesta a $48,5 \text{ €/m}^2$. ¿Cuánto tenemos que pagar?



15º CUERPOS GEOMÉTRICOS.

VOLÚMENES



Se suele llamar **SÓLIDO O CUERPO** a todo lo que ocupe un lugar en el espacio, y a esta ocupación (extensión) se le llama **VOLUMEN**.

Los principales cuerpos son :

- Los poliedros y
- Los cuerpos de revolución (“redondos”).

15.1 POLIEDROS

Son los cuerpos limitados por polígonos planos, no pudiendo tener menos de cuatro caras.

Elementos

- **Caras:** Son los polígonos que limitan los poliedros.

- **Aristas:** Son los lados de sus caras (“los bordes”).

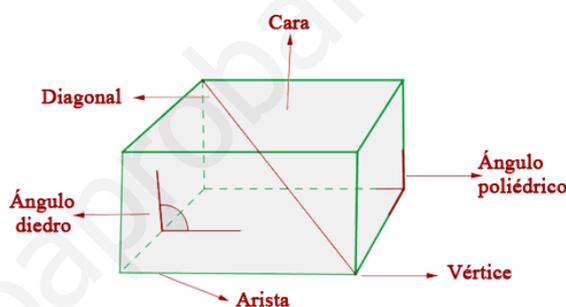
El número de aristas de un poliedro puede hallarse de dos maneras:

- a) Sumando el número de caras con el de vértices y restándole 2
(**Teorema de Euler**):

$$A = C + V - 2$$

- b) Multiplicando el número de caras por el de lados de cada una y dividiendo por 2:

$$A = \frac{C \cdot l}{2}$$



- **Vértices:** Son los extremos de las aristas.

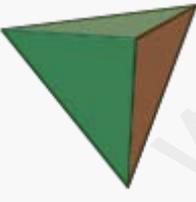
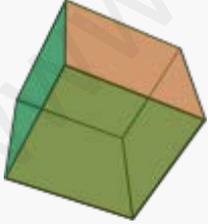
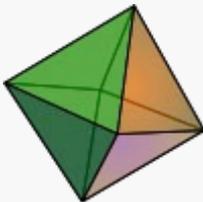
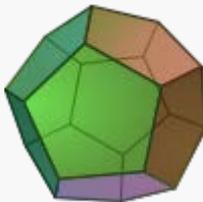
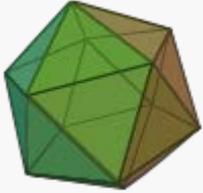
- **Diagonales:** Segmentos que unen vértices opuestos (no situados en la misma cara).

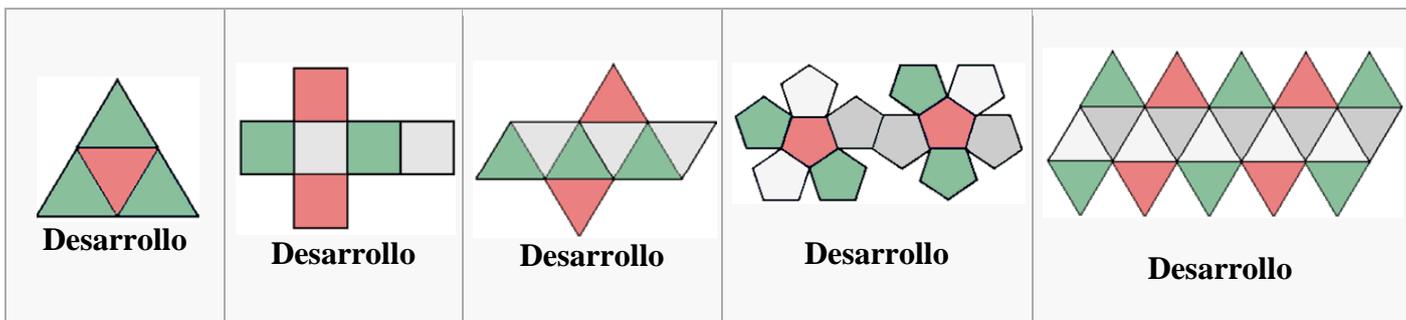
- **Plano diagonal:** Es el que pasa por tres vértices de un poliedro que no estén en la misma cara.

15.2 POLIEDROS REGULARES

Son aquellos poliedros cuyas caras son polígonos regulares.

Existen cinco tipos de poliedros regulares

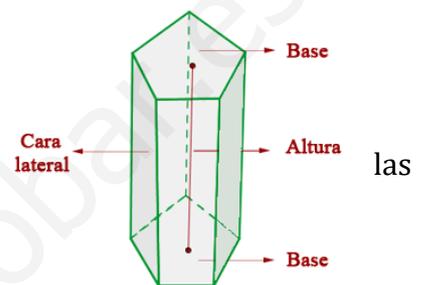
				
Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Tiene cuatro caras que son triángulos equiláteros	Tiene 6 caras que son cuadrados	Tiene ocho caras que son triángulos equiláteros	Tiene doce caras que son pentágonos regulares	Tiene veinte caras que son triángulos equiláteros



12.3 Prismas

Son poliedros que tienen:

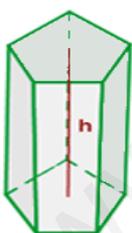
- Dos caras paralelas; que son polígonos y se llaman bases
- El resto de las caras que son paralelogramos y son caras laterales.



Clases de prismas:

- **Prismas regulares:** sus bases son polígonos regulares.
- **Prismas irregulares:** sus bases son polígonos irregulares.
- **Prisma recto:** cuando las caras laterales son perpendiculares a la base, son cuadrados o rectángulos.
- **Prisma oblicuo:** las caras laterales no son perpendiculares a las bases, las caras laterales son rombos o romboides.
- **Paralelepípedo:** es un prisma de seis caras todas ellas paralelogramos.

Área y volumen del prisma



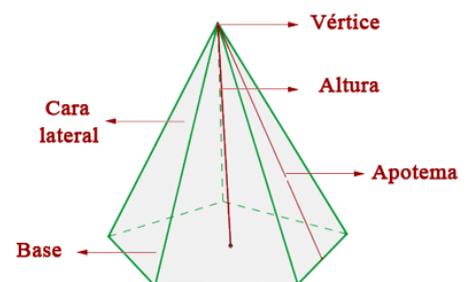
$$\text{Área lateral} = \text{Perímetro base} \cdot \text{Altura}$$

$$\text{Área Total} = \text{Área lateral} + 2 \cdot \text{Área base}$$

$$\text{Volumen} = \text{Área base} \cdot \text{altura}$$

15.4 Pirámides

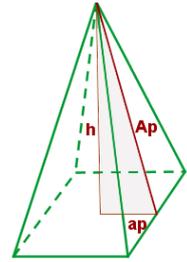
Una pirámide es un poliedro, cuya base es un polígono cualquiera y cuyas caras laterales son triángulos con un vértice común, que es el vértice de la pirámide.



Cálculo de la apotema lateral de una pirámide

Calculamos la apotema lateral de la pirámide, conociendo la altura y la apotema de la base, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo sombreado:

$$Ap^2 = h^2 + ap^2 \quad Ap = \sqrt{h^2 + ap^2}$$



Área y volumen de la pirámide

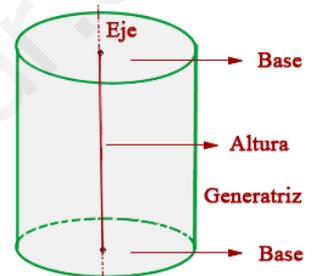
Área lateral = (Perímetro base · Apotema) / 2

Área Total = Área lateral + Área base

Volumen = (Área base · altura) / 3

15.5 Cilindro

Es el cuerpo engendrado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.

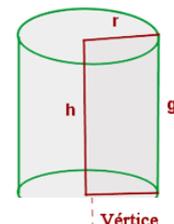


Área y volumen del cilindro

Área lateral = 2 · π · r · h

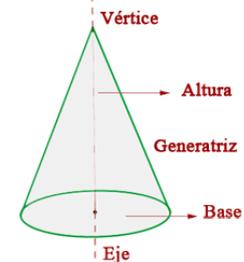
Área Total = Área lateral + 2 · Área base

Volumen = Área base · altura



15.6 Cono

Es el cuerpo de revolución obtenido al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

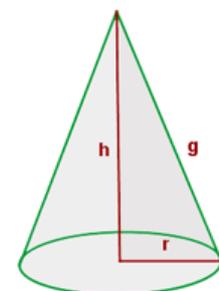


Área y volumen del cono

Área lateral = π · r · g

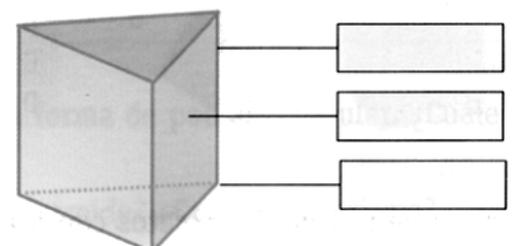
Área Total = Área lateral + Área base

Volumen = (Área base · altura) / 3



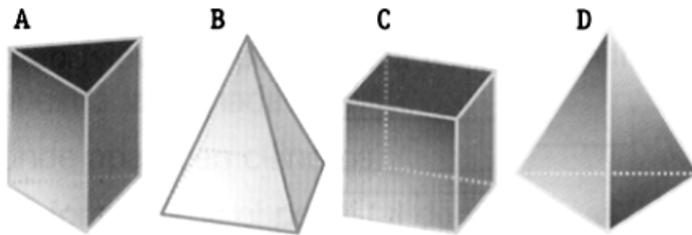
EJERCICIOS

1º Observa este poliedro y contesta.
a) ¿Cuántas caras tiene?



- b) ¿Qué polígonos forman sus caras?
- c) ¿Cuántas aristas tiene?
- d) ¿Cuántos vértices tiene?

2º Observa las figuras y completa la tabla



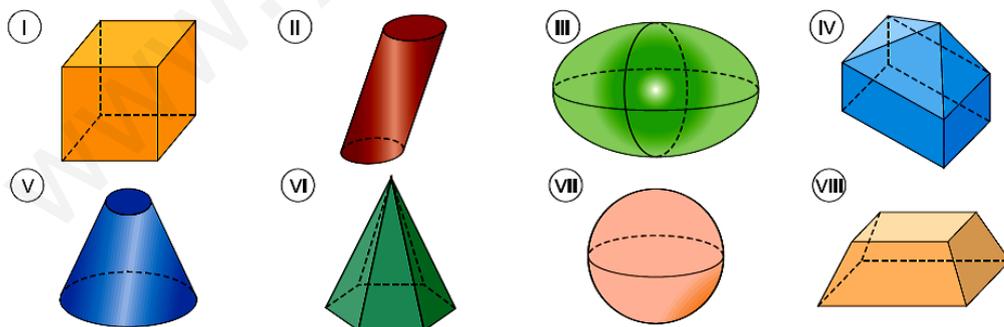
	Polígono de la base	Polígono de las caras laterales	Nombre del cuerpo
A			
B			
C			
D			

3º Completa la tabla

Polígono regular	Tetraedro				Dodecaedro
Sus caras son:				cuadrados	
Número de caras		8	20		

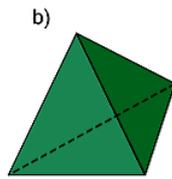
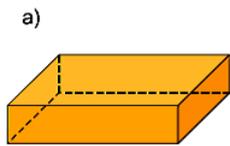
4º

a) De los siguientes cuerpos geométricos, di cuáles son poliedros y cuáles no. Razona tu respuesta

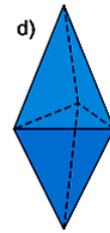
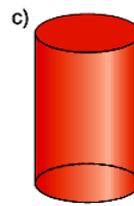


b) ¿Cuál es la relación llamada fórmula de Euler que hay entre el número de caras, de vértices y de aristas en un poliedro simple?

5º Indica, razonando tu respuesta, si las siguientes figuras son poliedros regulares o no:



(4 triángulos equiláteros)

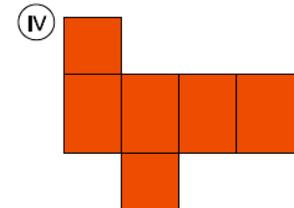
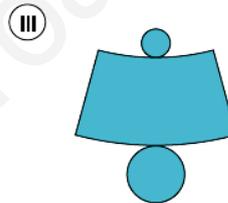
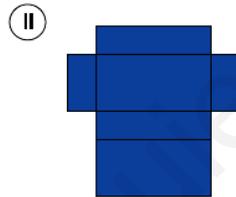
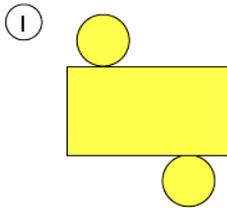
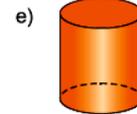
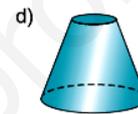
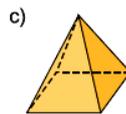
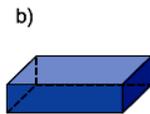
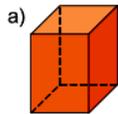


(6 triángulos equiláteros)

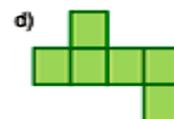
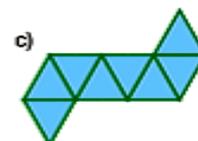
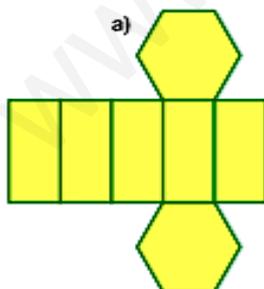
6º Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En las que sean falsas, explica por qué:

- a) Un cilindro es un poliedro.
- b) En cada vértice de un poliedro concurren al menos tres caras.
- c) Una pirámide de base pentagonal es un poliedro.
- d) Un poliedro tiene al menos diez aristas.
- e) Una pirámide de base cuadrada es un poliedro regular.

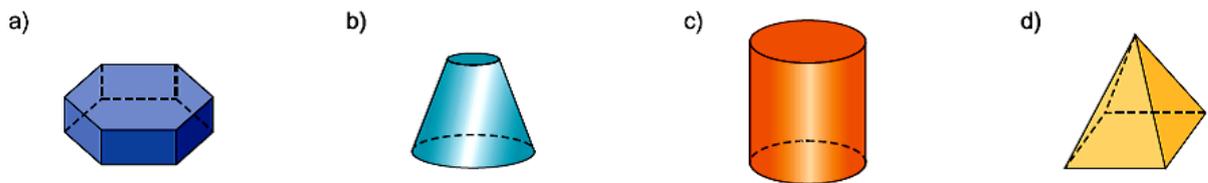
7º Indica cuál de las siguientes figuras se corresponde con cada uno de estos desarrollos planos y dibuja el desarrollo plano que falta:



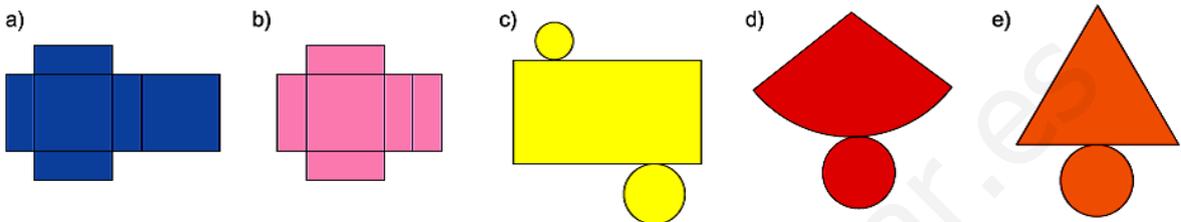
8º De los siguientes desarrollos planos, indica cuáles corresponderían a prismas y cuáles no. En los que no, explica el porqué:



9º Dibuja el desarrollo plano de cada una de estas figuras:



10º Indica, para cada una de estas figuras, si puede corresponder a un poliedro, a un cuerpo de revolución o a ninguno de ellos:



11º Hallar el área lateral, el área total y el volumen de:

12º Halla el área de la base, el área lateral, el área total y el volumen de un cubo de 10 cm de lado

13º Halla el área total y el volumen de un prisma de base pentagonal (4 m de lado y 3 de apotema) y 10 m de altura.

14º Halla el área de la base, el área lateral, el área total y el volumen de un prisma de base hexagonal (10 cm de lado de la base) y 25 cm de altura.

15º Halla el área de la base, el área lateral, el área total y el volumen del siguiente prisma cuyas bases son triángulos equiláteros

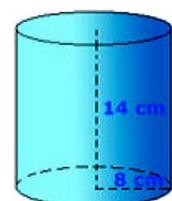
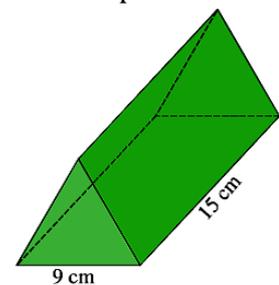
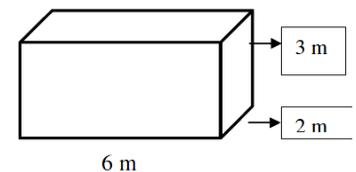
16º Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2,5 m de alto.

- Calcula la capacidad de la piscina en litros
- Si pintamos las paredes y el suelo de la piscina y nos cuesta 0,5 euros el m² ¿Cuánto nos cuesta pintar la piscina?

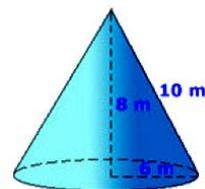
17º En un prisma regular de base cuadrada de 8 cm de lado de la base y 10 cm de altura, calcular:

- Diagonal de la base.
- Diagonal del prisma.
- Volumen del prisma.
- Superficie total.

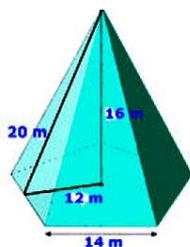
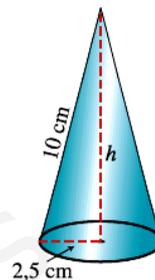
18º Halla el área de la base, el área lateral, el área total y el volumen del siguiente cilindro: ¿Cuántos litros de agua cabrán en un depósito igual que este cilindro?



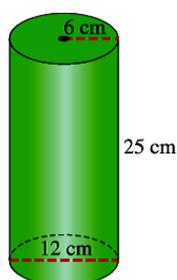
19º Halla el área de la base, el área lateral, el área total y el volumen del siguiente cono:



20º Halla el área de la base, el área lateral, el área total y el volumen de un cono cuya generatriz mide 10 cm y el radio de su base es de 2,5 cm.



21º Halla el área lateral, el área total y el volumen de la siguiente pirámide:

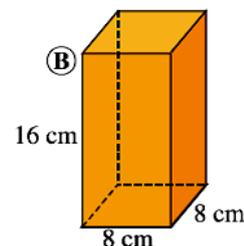
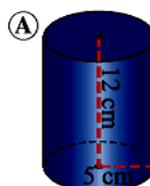


22º ¿Cuál es el precio de un cajón de embalaje de 80 cm x 50 cm x 70 cm si la madera cuesta a razón de 16 euros/m²?

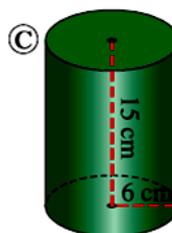
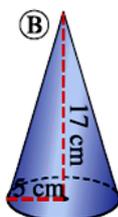
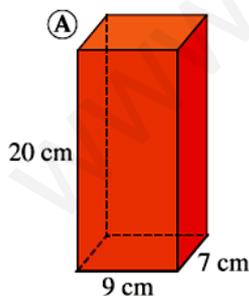


23º Halla el área lateral, el área total y el volumen

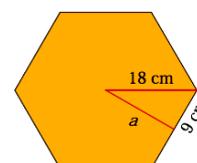
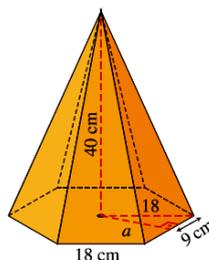
24º Halla el área lateral, el área total y el volumen



25º Halla el área lateral, el área total y el volumen

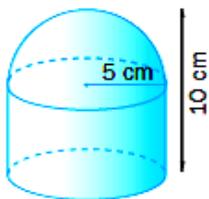


26º Calcula el volumen de una pirámide regular cuya base es un hexágono de 18 cm de lado y su altura es de 40 cm.

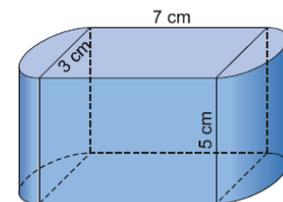


- 27º ¿Qué cantidad de chapa se necesita para construir un depósito cilíndrico cerrado por ambas bases que tenga 0'6 m de radio y 1'8 m de altura?
- 28º Se han de impermeabilizar el suelo y las paredes interiores de un aljibe circular abierto por arriba. El radio de su base mide 4 m y la altura 5 m. Si cuesta 18 € impermeabilizar 1 m², ¿cuál es el coste de toda la obra?
- 29º - Las paredes de un pozo de 12 m de profundidad y 1'6 m de diámetro han sido arregladas a razón de 40 € el metro cuadrado. ¿Por cuánto ha salido la obra?
- 30º Una verja se compone de 20 barrotes de hierro de 2'5 metros de altura y 1'5 cm de diámetro. Hay que darles una mano de minio a razón de 24 €/m². ¿A cuánto sale todo?
- 31º Una torre acaba en forma de cono, cuyo diámetro es de 4 m y su altura de 7 m. Se quiere forrar de pizarra dicho cono. Si el precio de la pizarra está a 84 €/m² ¿cuál es el precio?
- 32º Halla el área total y el volumen de un cono que mide 15 cm de alto y su generatriz mide 17 cm.

33º Halla el área lateral, el área total y el volumen de las siguientes figuras



34º Hallar el volumen del siguiente cuerpo



35º Hallar el volumen del siguiente cuerpo



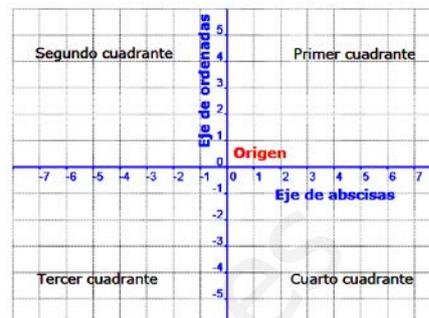
16º TABLAS Y GRÁFICAS

Sistema de ejes coordenados

Ejes cartesianos

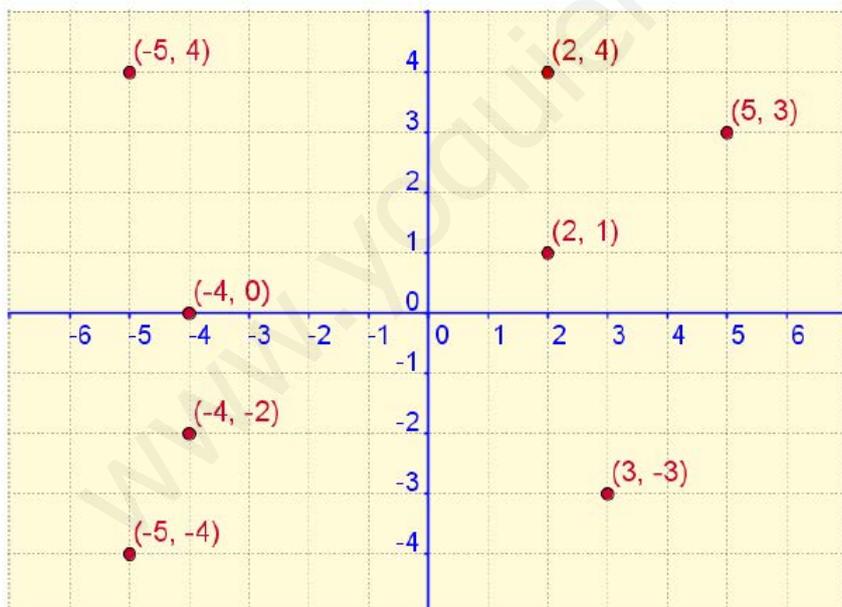
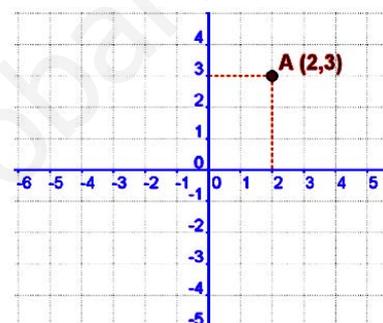
Un sistema de ejes coordenados (o cartesianos) está formado por dos ejes numéricos perpendiculares, uno horizontal, llamado de **abscisas** y otro vertical o de **ordenadas**.

Ambos ejes se cortan en un punto llamado **origen** o **centro de coordenadas**



Coordenadas de un punto

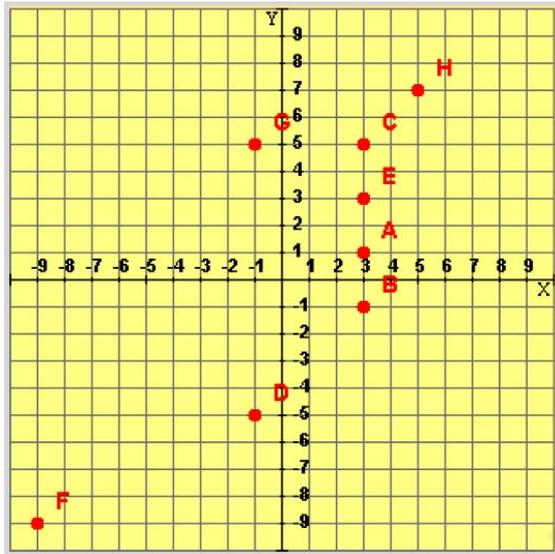
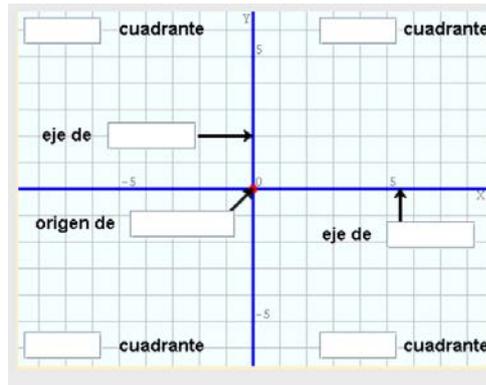
- La primera coordenada o **abscisa** de un punto nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje vertical.
- La segunda coordenada u **ordenada** indica la distancia a la que se encuentra el punto del eje horizontal.



En la imagen de este apartado aparecen varios puntos en el plano y unos ejes cartesianos donde se visualizan las coordenadas cartesianas de cada punto. Observa que las coordenadas de un punto son un **par ordenado** de valores.

Ejercicios

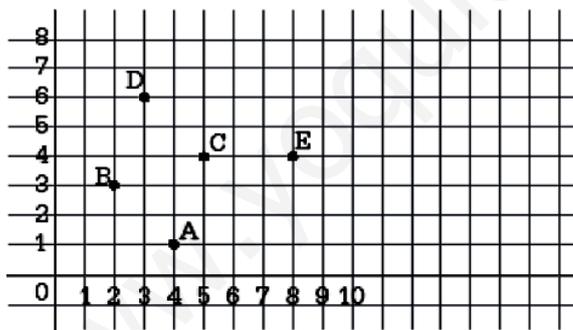
1) Completa



2) Completa la siguiente tabla

	x	y
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		

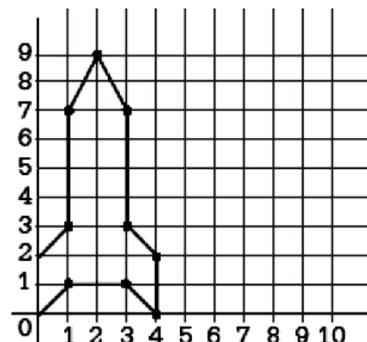
3) Escribe el par ordenado que representan los siguientes puntos representados



- A=(,)
- B=(,)
- C=(,)
- D=(,)
- E=(,)

4) Representa y une el punto (4, 3) con (4, 6) ; (4, 6) con (6, 3) y (6, 3) con (6, 6). ¿Qué letra obtienes?
¿Qué puntos tienen la misma abscisa? ¿Y la misma ordenada?

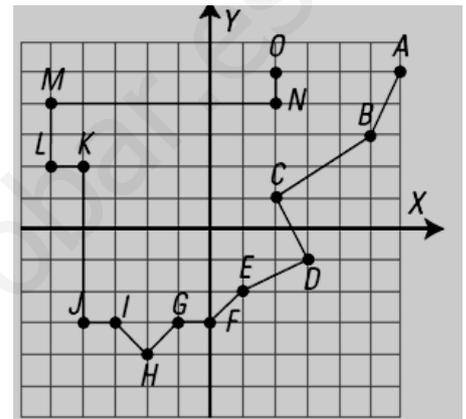
5) Escribe los pares ordenados que representa cada punto en el cohete



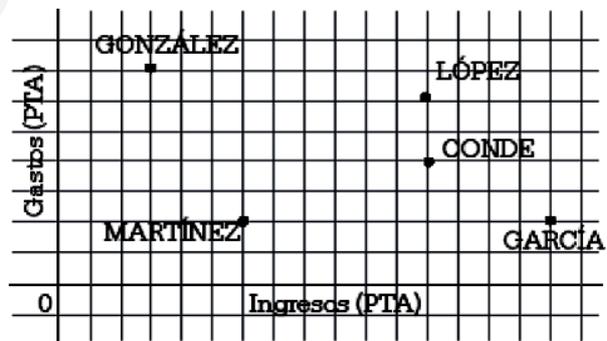
- 6) Dibuja el eje de abscisas y el eje de ordenadas, denomínalos con X e Y respectivamente.
- Representa en el primer cuadrante los siguientes pares ordenados de números: (3,4); (4,5); (2,7); (3,8); (4,2).
 - Representa en el primer cuadrante (4,5); (5,4). ¿Es el mismo punto? ¿Por qué?
 - Representa los siguientes puntos: (-2, 3); (3, -4); (-5, -6); (-3, -8); (-2, -5); (4, 3).

- 7) En un sistema de ejes cartesianos, y tomando como unidad 5 mm. (si es en papel blanco) o un "cuadradito" (si es en papel cuadriculado del cuaderno), representar los siguientes puntos:
 A(-3,3) ; B(3,3) ; C(-2,-3) ; D(4,-1) ; E(3,5) ; F(-3,-3); G(-3,5) ; H(3,-3) ; I(-4,3) ; J(4,-3) ; K(2,5) ; L(3,-1) ; M(-4,5) ; N(-3,-1) ; P(2,3).
 A continuación, trazar los segmentos siguientes: MA , IM , GA , EBP , PK , LDJ , JHL , CFN.

- 8) Halla los puntos con los que se obtiene el mapa de España.
 A(,); B(,); C(,); D(,); E(,);
 F(,); G(,); H(,); I(,); J(,);
 K(,); L(,); M(,); N(,); O(,)

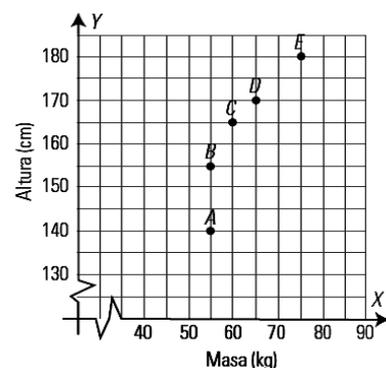


- 9) El gráfico siguiente muestra los ingresos y los gastos de 5 familias:
- ¿Qué familia gasta más?
 - ¿Cuál gasta menos?
 - ¿Qué familia gana más?
 - ¿Cuál gana menos?
 - ¿Hay dos familias que ganen y gasten lo mismo?

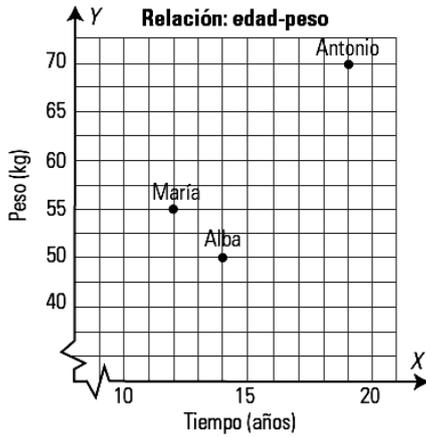


- 10) Dibuja en unos ejes coordenados los siguientes puntos y únelos en orden alfabético:
 A(0, 0), B(4, 0), C(2, -2), D(-2, -2), E(-3, 0), F(0, 0), G(0, 2), H(0, 6), I(-3, 2), J(0, 2)
 ¿Qué figura se obtiene?

- 11) Los puntos del gráfico se corresponden con las personas del dibujo. Di qué persona se corresponde con cada punto.



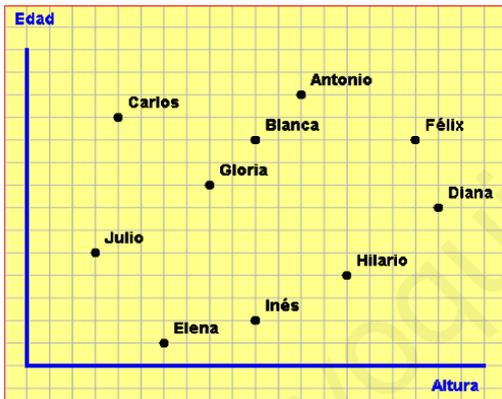
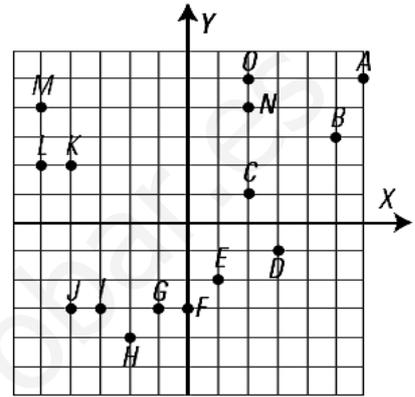
12) Interpreta los siguientes puntos del gráfico:



- ¿Quién tiene más edad?
- ¿Quién es el más joven?
- ¿Quién es el que más pesa?
- ¿Quién es el que pesa menos?
- ¿Cuánto pesa María?
- ¿Cuántos años tiene Alba?

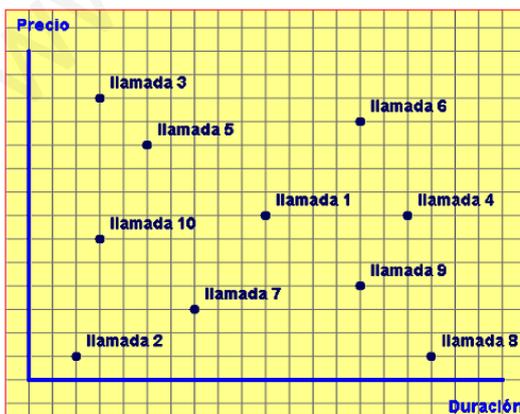
13) Copia en tu cuaderno y une mediante segmentos los siguientes puntos en orden alfabético. ¿Qué se obtiene? Escribe las coordenadas de todos los puntos del gráfico.

14) Observa la gráfica que relaciona la edad y la altura de una serie de personas y contesta a las siguientes preguntas



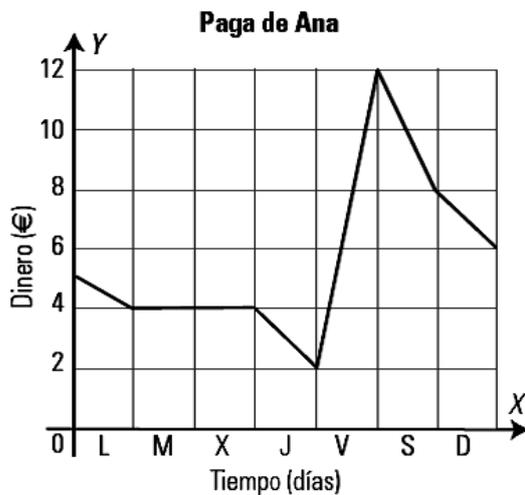
- ¿Quién es el más mayor?
- ¿Quién es el más joven?
- ¿Quién es el más alto?
- ¿Quién es el más bajo?
- ¿Hay dos personas que midan lo mismo? , ¿Cuál es la edad de cada una?
- ¿Hay dos personas que tengan la misma edad? , ¿Cuánto miden?

15) La siguiente gráfica se muestran el **precio** y el **tiempo** que han durado las llamadas realizadas por diez personas que se encontraban en un Locutorio telefónico. Contesta las preguntas



- ¿Cuál es la llamada de mayor duración?
- ¿Cuál es la llamada de menor duración?
- ¿Cuál es la llamada más cara?
- ¿Cuál es la llamada más barata?
- De las llamadas más largas ¿cual fue la más barata y cuanto fue? Y ¿Cuál fue la más cara y cuanto fue?
- De las llamadas más cortas ¿Cuál fue la mas cara y cuanto fue? , ¿Cuál fue la más barata y cuanto fue?

- 16) El gráfico representa la evolución del dinero de la paga de Ana durante la última semana



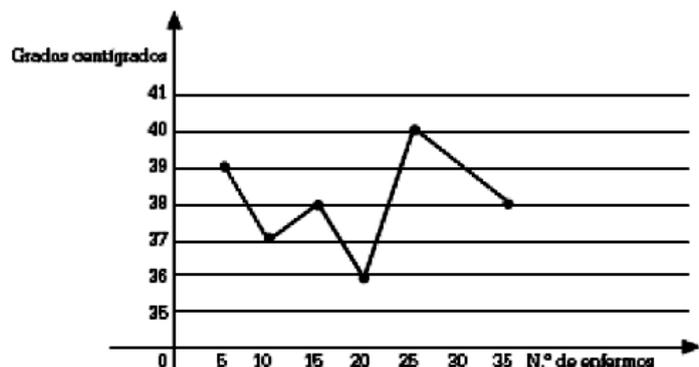
- Le dan la paga el viernes y no se gasta nada. ¿Cuánto le dan de paga?
- ¿Qué día de la semana es el que más dinero tiene? ¿Cuánto?
- ¿Qué día de la semana es el que menos dinero tiene? ¿Cuánto?
- ¿Cuánto dinero tiene cuando empieza la semana?
- ¿Cuánto dinero tiene cuando termina la semana?
- ¿Cuánto ha ahorrado esta semana?

- 17) Dada la gráfica de los beneficios de una empresa:

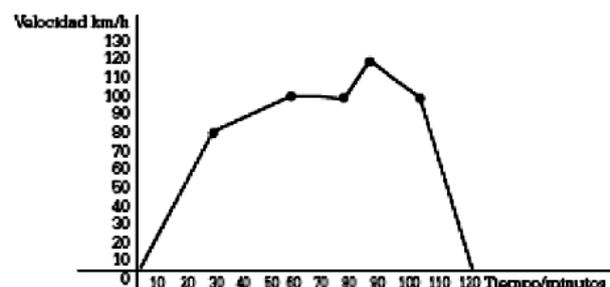
- ¿Es una gráfica de puntos o de líneas?
- ¿En qué momento alcanza los máximos y cuál es el mayor de ellos?
- ¿En qué momento alcanza los mínimos y cuál es el menor de ellos?
- ¿Durante qué años han crecido los beneficios?
- ¿Durante qué años han decrecido los beneficios?
- ¿Qué beneficios ha tenido en el año 12?



- 18) Observa esta gráfica: • La gráfica representa la temperatura corporal de los enfermos de la planta de un hospital: • Interpreta por escrito y lo mejor posible todo lo que veas en la gráfica.



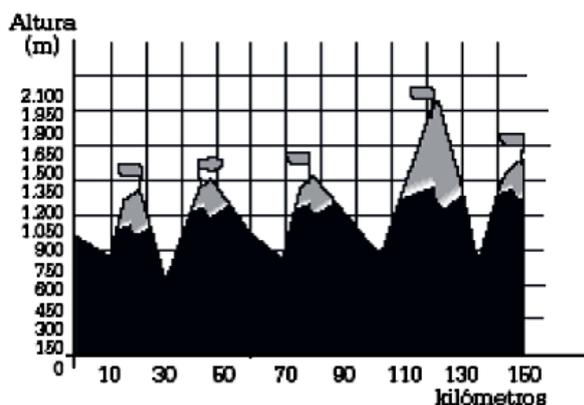
- 19) En la siguiente gráfica indica los valores máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento de la gráfica.



20) En la India los tigres de Bengala son muy apreciados por su piel y por su utilidad para fabricar medicamentos. Una O.N.G. dedicada a la conservación de estas especies ha publicado una tabla de cómo ha ido variando la población de tigres en los últimos 10 años.

X (años)	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
Y (tigres)	900	870	800	810	805	750	700	720	730	750

Representa los pares de valores de la tabla en un diagrama cartesiano e interpreta los resultados obtenidos destacando aquellos que consideres importantes.



21) Aquí tienes el perfil de una etapa de la Vuelta Ciclista a España:

- ¿En qué puntos kilométricos se encuentran los picos máximos y mínimos de la etapa?
- ¿En qué punto kilométrico está la altura máxima?
- ¿Cuántos metros tiene?
- ¿A qué altura han partido los ciclistas?
- ¿A qué altura se encuentra la meta? ¿En qué punto kilométrico?

22) Un estudio de un ginecólogo muestra como crece un bebé antes de nacer según el mes de gestación en el que se encuentra su madre, de acuerdo con la siguiente tabla. Haz la gráfica.

X (meses)	2	3	4	5	6	7	8	9
Y (cm)	4	8	15	24	29	34	38	42

23) La tarifa de un aparcamiento viene dada por la siguiente tabla:

Tiempo	Precio en Euros
Cada una de las tres primeras horas	0,70
Las tres horas siguientes	1
A partir de la sexta hora	0,50

- a) El padre de Juan estuvo 3 horas y 40 minutos. ¿Cuánto tuvo que pagar?
- b) El padre de Luisa estuvo exactamente 6 horas. ¿Cuál fue el importe?
- c) ¿Es posible que dos usuarios paguen lo mismo siendo distintos los tiempos de estancia?

24) Realiza una gráfica con los siguientes datos: en el campeonato deportivo del instituto se ha desarrollado una carrera de 1km. Han participado cuatro alumnas.

- a) Verónica salió muy rápido, pero poco a poco fue disminuyendo su velocidad para llegar a la meta casi andando. Quedó la tercera.

b) Eva salió rápida pero no llevaba 200 metros cuando tropezó, se cayó y, después de levantarse continuó pero cojeando. A mitad de la carrera el dolor le impidió seguir y se retiró.

c) María salió lenta, pero a medida que pasó el tiempo aumentó su velocidad hasta llegar a la meta la primera.

d) Ana llevaba siempre una buena velocidad, sin embargo, en los 100 últimos metros la incrementó aún más para intentar ganar.

Haz una única gráfica representando las carreras de cada una de ellas. En el eje horizontal señala el tiempo y en el vertical el espacio recorrido.

I. Marca de color verde las partes de las gráficas que sean crecientes y de rojo las decrecientes.

II. ¿Hay algún máximo y mínimo?

III. Señala el punto donde se cortan las gráficas de Verónica y Ana. ¿Qué ocurre en ese punto?

25) El franqueo postal se rige por la siguiente tabla:

<i>Peso en gramos</i>	<i>Franqueo en euros</i>
Hasta 20 gramos	0,21
De más de 20 gramos hasta 50 gramos	0,24
De más de 50 gramos hasta 100 gramos	0,27
De más de 100 gramos hasta 250 gramos	0,54
De más de 250 gramos hasta 500 gramos	1,08
De más de 500 gramos hasta 1.000 gramos	1,50
De más de 1.000 gramos hasta 2.000 gramos	2,16

Ramón ha escrito cartas a algunos amigos. La carta que envía a Juan pesa 15 gramos y la de Luisa 80. La de Serafín 90 y la de Santiago 500 gramos.

a) ¿Qué franqueo tendrá que poner a cada carta?

b) ¿Es posible que a dos cartas con distinto peso les corresponda el mismo franqueo?

c) ¿Cuántos euros habrá tenido que pagar Ramón por el envío de las cartas?

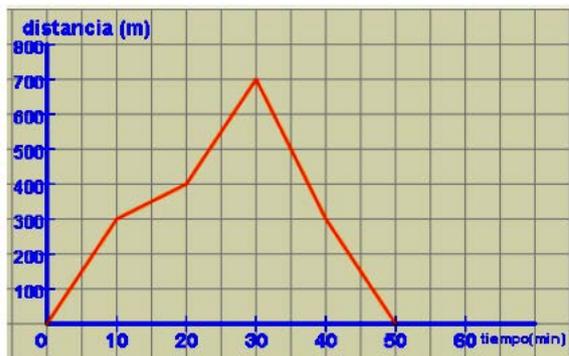
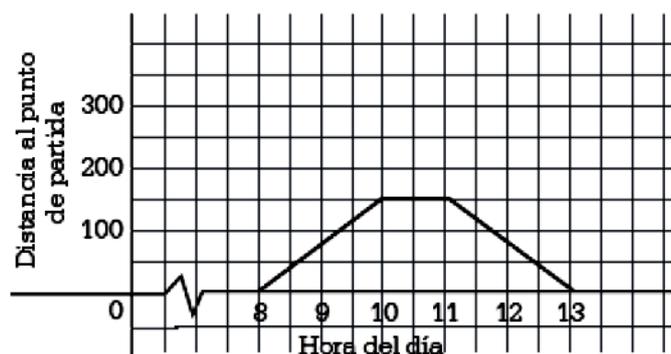
26) La gráfica de un viaje fue la siguiente:

a) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron de 8 a 10?

b) ¿Cuánto tiempo duró la parada?

c) ¿A qué hora iniciaron el regreso?

d) ¿Cuánto tiempo duró la vuelta?



27) Marta ha salido a dar un paseo.

¿Cuánto ha durado ese paseo?

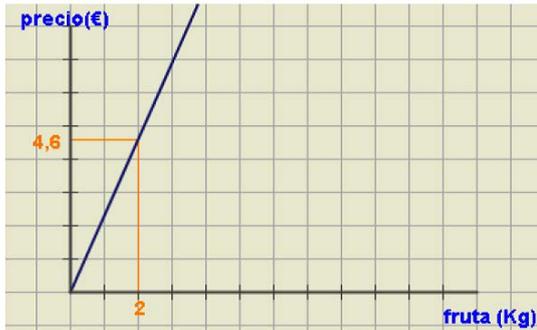
¿A qué distancia se encuentra el punto más alejado de su casa?

28) Sabiendo que el precio de un trayecto en taxi se calcula mediante la ecuación precio (en €) = $0,55 \cdot \text{distancia (en km)} + 1,5$, ($y = 0,55x + 1,5$) construye una tabla para recorridos de: 1, 2, 3, 5, 8, 12 y 15 km

29) Completa la tabla sabiendo que la cantidad de disolvente que debemos usar por kilo de pintura viene determinada por la ecuación: $\text{disolvente} = 0,55 \cdot \text{kg de pintura} + 0,2$.

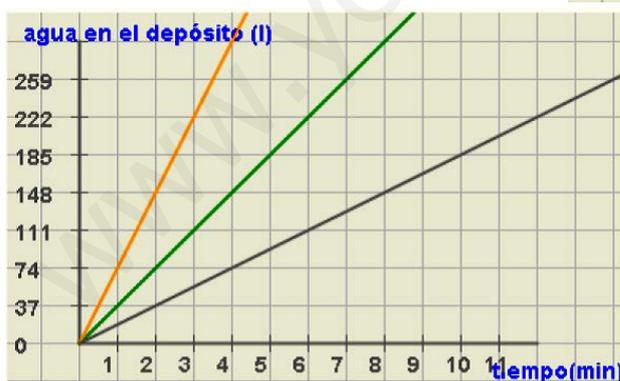
Kg. pintura	1	2	4	
disolvente	0,75			5,7

$$(y = 0,55x + 0,2)$$



30) Con los datos de la gráfica calcula a cuánto se ha vendido el kilo de fruta.

31) Un tren de largo recorrido une las ciudades de Málaga y Barcelona y ha iniciado el viaje a las 8 de la mañana. La siguiente gráfica muestra el recorrido realizado en función del tiempo y la distancia recorrida ¿A qué hora llega a Barcelona? ¿Cuál fue la velocidad media del tren?



32) Un depósito se llena mediante una bomba que vierte 74 litros de agua por minuto. ¿Cuál de las tres rectas representa el agua del depósito en función del tiempo?

33) Representa las siguientes funciones

- a) $y = 2x$
- b) $y = 3x$
- c) $y = -4x$
- d) $y = -2x$

- e) $y = -3x$
- f) $y = 1/2x$
- g) $y = -1/2x$

17º ESTADÍSTICA



Definición La estadística es la ciencia de recoger, clasificar, describir y analizar datos numéricos que sirven para conocer la realidad, sacar conclusiones y tomar decisiones a partir de los datos obtenidos.

Frecuencia absoluta

La frecuencia absoluta es el número de veces que aparece un determinado valor en un estudio estadístico. Se representa por f_i .

La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos, que se representa por N

Frecuencia relativa

La frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta de un determinado valor y el número total de datos. Se puede expresar en tantos por ciento y se representa por h_i .

Diagrama de barras

Un diagrama de barras se utiliza para de presentar datos. Se representan sobre unos ejes de coordenadas, en el eje de abscisas se colocan los valores de la variable, y sobre el eje de ordenadas las frecuencias absolutas o relativas o acumuladas.

Los datos se representan mediante barras de una altura proporcional a la frecuencia

Un diagrama de sectores

Se puede utilizar para todo tipo de variables, pero se usa frecuentemente para las variables cualitativas. Los datos se representan en un círculo, de modo que el ángulo de cada sector es proporcional a la frecuencia absoluta correspondiente.

$$\alpha = \frac{360^\circ}{N} \cdot f_i$$

(Cálculo del ángulo de cada sector)

El diagrama circular se construye con la ayuda de un transportador de ángulos.

La media aritmética

Es el valor obtenido al sumar todos los datos y dividir el resultado entre el número total de datos.

Moda

La moda es el valor que más se repite en una distribución.

Ejercicios



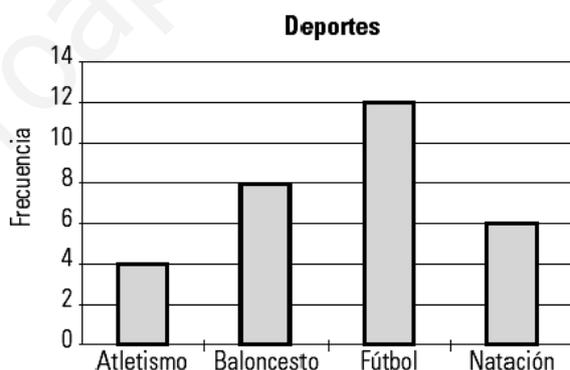
- 1) Los goles que ha conseguido por partido un equipo durante los últimos 25 partidos, han sido: 1, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 3, 2, 1, 3, 5, 4, 2, 4, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 5, 3, 2, 2
 - a) Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas.
 - b) Calcula la media y la moda.
- 2) Se ha lanzado un dado 40 veces, y se han obtenido los siguientes resultados: 5, 6, 2, 5, 3, 3, 5, 3, 4, 4, 1, 1, 3, 1, 4, 2, 4, 4, 6, 5, 1, 2, 3, 6, 4, 3, 5, 2, 3, 5, 6, 3, 5, 4, 2, 3, 5, 6, 2, 4
 - a) Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas.
 - b) Calcula la media y la moda
- 3) Se ha realizado un estudio para determinar el tipo de refresco que más consume un grupo de jóvenes, y los resultados han sido

Tipo de refresco	N.º de jóvenes
Naranja	20
Limón	25
Cola	35
Frutas tropicales	15

- a) Calcula las frecuencias relativas
- b) Calcula la moda y la media
- c) Representa la información en un diagrama de barras e interprétalo

4) PIENSA Y CALCULA

- a) ¿Qué representa el gráfico siguiente?
- b) ¿Qué deporte es el más practicado? ¿Cuántos alumnos y alumnas lo practican?
- c) representa los datos en una tabla y calcula las frecuencias relativas moda y media



5)

Haz un diagrama de sectores con los datos de la siguiente tabla

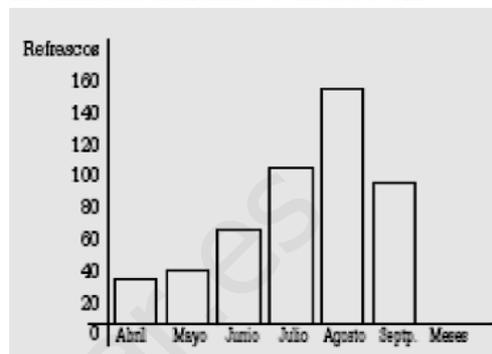
Día	N.º de días
Nublado	4
Nubes y claros	8
Lluvia	5
Sol	13

- 6) En una encuesta sobre el número de televisores que hay en el hogar, se han obtenido las siguientes respuestas: 1, 3, 1, 2, 4, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 2, 5, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 4
 - a) Haz una tabla de frecuencias.
 - b) Calcula la media y la moda
- 7) Se ha estudiado el número de DVD vendidos en una tienda, y se obtienen los siguientes resultados: 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 22, 22, 22, 22
 - a) Haz una tabla de frecuencias.
 - b) Calcula la media y la moda

- 8) El número de barras de pan consumidas durante 25 días por una familia es: 1, 2, 2, 3, 4, 2, 3, 1, 1, 3, 3, 4, 2, 4, 3, 2, 3, 4, 4, 3, 3, 3, 4, 1, 2
- Haz una tabla de frecuencias.
 - Calcula la media y la moda

- 9) El siguiente gráfico expresa el número de refrescos consumidos durante 6 meses en un bar de la capital:

- ¿Cómo se denomina este tipo de gráfica?
- ¿En qué mes se consumieron más refrescos?
- ¿Durante qué mes se consumieron menos refrescos?
- Interpreta la gráfica



- 10) . Para una competición deportiva, se quieren comprar camisetas del mismo color a los alumnos de una clase. Las tallas son las siguientes: 30, 28, 32, 34, 26, 28, 30, 30, 28, 32, 30, 28, 34, 28, 26, 32, 30, 34, 28, 28, 34, 30, 30, 32, 30, 30, 30.

- ¿Cuántas veces se repite la talla 30? ¿Y la 28?
- Haz una tabla donde aparezcan las tallas en una columna y el número de veces que se repiten en otra (frecuencia absoluta).
- Calcula las frecuencias relativas media y moda

- 11) El número de enfermos de gripe en un centro escolar durante el último curso ha sido:

1.º	2.º	3.º	4.º	1.ºB	2.ºB
12	16	11	18	9	12

Haz un diagrama de barras que represente esta información.

- 12) Representa en un diagrama de sectores el beneficio de cuatro tiendas una misma cadena en el último mes

Tienda	A	B	C	D
Beneficio (× 1000)	20	25	15	30

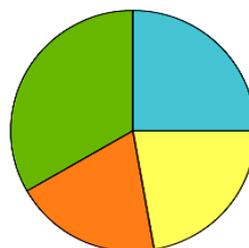
de

- 13) Cumpleaños de los alumnos de una clase:

a) ¿En qué estación del año se celebrarán más cumpleaños? ¿En cuál menos?

b) ¿Hay alguna estación en la que, exactamente, la cuarta parte de alumnos cumplen años?

c) Sabiendo que los alumnos que cumplen años en cada estación son 7, 8, 9 y 12, ¿qué número corresponde a cada una de ellas?



ESTACIÓN EN LA QUE ES EL CUMPLEAÑOS

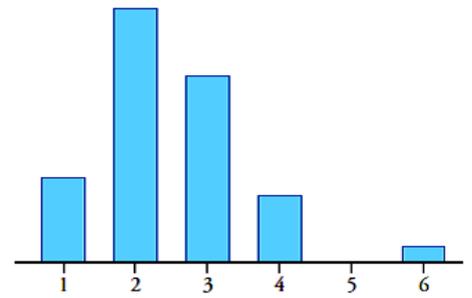
- PRIMAVERA
- VERANO
- OTOÑO
- INVIERNO

- 14) Estas son las notas que un profesor ha puesto a sus alumnos y alumnas en el último examen: 1, 5, 8, 6, 2, 4, 6, 5, 4, 5, 9, 3, 2, 5, 3, 6, 8, 7, 8, 4, 2, 7, 8, 4, 9, 7, 2, 3, 6, 8, 10, 6, 10, 1, 10, 5, 5, 6, 10, 5

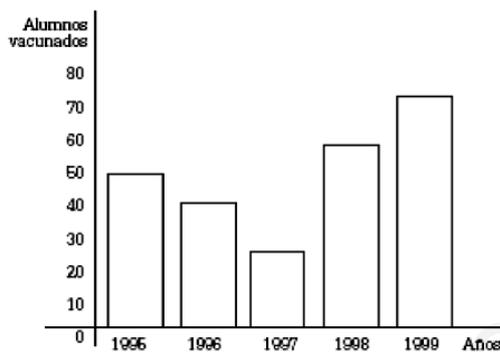
- Haz una tabla de frecuencias.
- Representa en un diagrama de barras los resultados

- 15) A los 36 alumnos de una clase se les ha preguntado: “¿Cuántos hermanos sois?”. Estas son las respuestas sintetizadas en un diagrama de barras:

- ¿Cuál es la variable estadística?
- En la clase hay un único alumno que pertenece a una familia con 6 hermanos.
- Construye una tabla de frecuencias absolutas y relativas
- Calcula la media y la moda



- 16) El número de alumnos de primero de secundaria de un colegio, que se han vacunado contra la hepatitis b en un periodo de cinco años está reflejado en la siguiente gráfica:

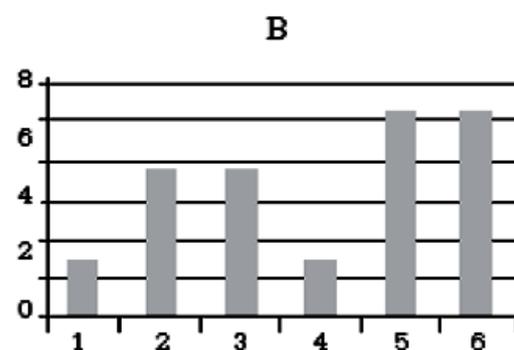
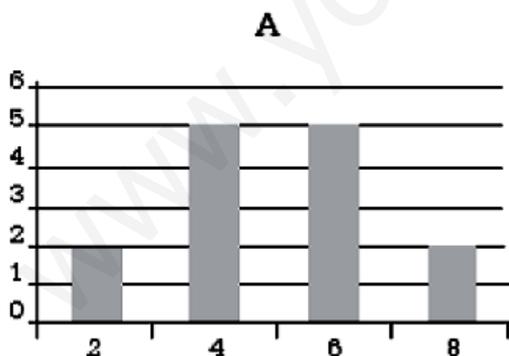


- ¿En qué año hubo mayor número de vacunas?
- ¿En qué años se vacunó el menor número de alumnos?
- ¿Cuántos alumnos se vacunaron en 1996?
- ¿Cuántos alumnos se han vacunado entre los 5 años?
- Construye una tabla estadística y calcula las frecuencias relativas
- Calcula la media y la moda

- 17) Los diez automóviles de una autoescuela han sufrido en el último año el siguiente número de averías: 0, 1, 4, 2, 3, 4, 1, 0, 1 y 2. Se pide:

- Elaborar la Tabla de frecuencias y el Diagrama de barras.
- Hallar la media de la distribución.

- 18) Calcula la media de las siguientes distribuciones, de las que se da diagrama de barras:



- 19) Dada la siguiente tabla estadística, representa los datos en un diagrama de sectores

INSUFICIENTE (1, 2, 3, 4)	13
SUFICIENTE (5)	7
BIEN (6)	6
NOTABLE (7, 8)	8
SOBRESALIENTE (9, 10)	6

18º Probabilidad



Son **experimentos aleatorios**, aquellos en los que no se puede predecir el resultado y de ellos se trata aquí.

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral**, y cada uno de esos posibles resultados es un **suceso elemental**.

Hay un suceso que se verifica siempre, **el suceso seguro** que es el mismo espacio muestral

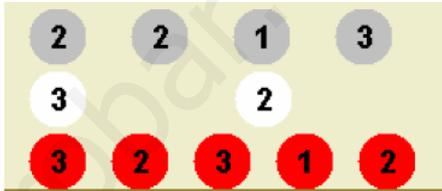
La regla de Laplace

Cuando en un experimento aleatorio todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad, equiprobables, para calcular la probabilidad de un suceso cualquiera A, basta contar y hacer el cociente entre el nº de sucesos elementales que componen A (casos favorables) y el nº de sucesos elementales del espacio muestral (casos posibles) espacio.

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Ejercicios

- 1) Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y en caso afirmativo halla su espacio muestral:
 - a) Extraer una carta de una baraja española y anotar el palo.
 - b) Pesar un litro de aceite.
 - c) Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos los catetos.
 - d) Elegir sin mirar una ficha de dominó.
 - e) Averiguar el resultado de un partido de fútbol antes de que se juegue.
 - f) Sacar una bola de una bolsa con 4 bolas rojas.
 - g) Sacar una bola de una bolsa con 1 bola roja, 1 verde, 1 azul y 1 blanca.
 - h) Lanzar al aire una moneda y observar el tiempo que tarda en llegar al suelo.
- 2) . Elegimos una ficha de dominó al azar, Describe los sucesos:
A="sacar una ficha doble"
B="sacar una ficha cuyos números sumen 5 ó múltiplo de 5"
- 3) Escribe el espacio muestral del experimento resultante de tirar 3 monedas. Describe sucesos:
A="Salir una cara"
B="Salir al menos una cara"
- 4) En una urna hay 15 bolas numeradas del 1 al 15, se extrae una de ellas; .Describe los sucesos:
A="Sacar un nº par"
B="Sacar un múltiplo de 4"
- 5) De una baraja española se extrae una carta, calcula la probabilidad de los sucesos:
A="Salir bastos"
B="No salir ni bastos ni as"
- 6) Se sacan dos bolas de una urna que se compone de una bola blanca, otra roja, otra verde y otra negra. Describir el espacio muestral cuando:
 - a) La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda.
 - b) La primera bola no se devuelve

- 7) Una urna contiene tres bolas rojas y siete blancas. Se extraen dos bolas al azar. Escribir el espacio muestral y hallar la probabilidad de:
- Extraer las dos bolas con reemplazamiento.
 - Sin reemplazamiento.
- 8) Tenemos una caja con 2 bola rojas, 3 bolas verdes y 2 amarillas. Se extraen tres bolas a la vez.
- Escribe el espacio muestral
 - Escribe el suceso "salir al menos dos bolas del mismo color"
 - ¿Cuál es la probabilidad de sacar las tres bolas verdes?
- 9) Se sacan dos bolas de una urna que se compone de una bola blanca, otra roja, otra verde y otra negra. Escribir el espacio muestral cuando:
- La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda.
 - La primera bola no se devuelve.
- 10) Halla la probabilidad de que al extraer una bola de la urna del gráfico sea
- una bola
 - un 2
 - roja y con 2
 - roja o con 2
- 
- 11) Lanzamos un dado y queremos saber:
- Probabilidad de sacar la cara tres.
 - Probabilidad de no sacar la cara cinco.
 - Probabilidad de sacar un número mayor que 2
 - Probabilidad de sacar un número par o un número impar
- 12) Sacamos una carta de la baraja española (40 cartas)
- Qué probabilidad hay de sacar una sota o un caballo?
 - Expresa la probabilidad obtenida en %?
- 13) Tiramos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos unos?
- 14) Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de los puntos obtenidos. Se pide:
- La probabilidad de que salga el 7.
 - La probabilidad de que el número obtenido sea par.
 - La probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de tres.
- 15) Busca la probabilidad de que al echar un dado al aire, salga:
- Un número par.
 - Un múltiplo de tres.
 - Mayor que cuatro.
- 16) Se sacan dos bolas de una urna que se compone de una bola blanca, otra roja, otra verde y otra negra. Describir el espacio muestral cuando:
- La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda.
 - La primera bola no se devuelve
- 17) Una urna tiene ocho bolas rojas, 5 amarilla y siete verdes. Se extrae una al azar de que:
- Sea roja.
 - Sea verde
 - Sea amarilla.
 - No sea roja.
 - No sea amarilla

- 18) Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 negras, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o blanca? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea blanca?
- 19) En una clase hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, cinco alumnos rubios y 10 morenos.. Elegimos un alumno al azar. Calcular las probabilidades:
- Que sea chico
 - Que sea chica.
- 20) En un sobre hay 20 papeletas, ocho llevan dibujado un coche las restantes son blancas. Hallar la probabilidad de extraer al menos una papeleta con el dibujo de un coche:
- Si se saca una papeleta.
 - Si se extraen dos papeletas.
 - Si se extraen tres papeletas.
- 21) Halla la probabilidad de que al lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6, la suma de las caras visibles sea múltiplo de 5. (la única cara que no se ve es la que queda abajo)
- 22) Se saca una carta de una baraja española (40 cartas). Calcular la probabilidad de:
- obtener 1 oro
 - obtener un as
 - sota espadas
- 23) En una urna tenemos 4 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas. Si extraemos una bola al azar, calcula la probabilidad de obtener:
- bola blanca
 - bola blanca o negra
 - bola azul
- 24) Al girar la ruleta de la figura, calcula la probabilidad de que salga rojo y mayor que 3.
- 25) Escribimos cada una de las letras de la palabra ALEATORIO en un papel y sacamos una al azar.
- Escribe el suceso "salir vocal" y calcula su probabilidad
 - Escribe el suceso contrario del calculado en ejercicio anterior.
- 26) Calcula la probabilidad de rojo en la ruleta de la figura
- 27) Se saca una carta de una baraja de 40, calcula la probabilidad de que sea de OROS o un AS.
- 28) Calcula los siguientes sucesos y sus probabilidades al lanzar un dado:
- $A = \{ \text{par} \}$
 - $B = \{ \text{múltiplo de tres} \}$
 - $C = \{ \text{mayor que cuatro} \}$
 - $D = \{ \text{número primo} \}$
 - $E = \{ \text{impar} \}$
 - $F = \{ \text{menor que cuatro} \}$

