MATEMÁTICAS

1º DE ESO

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

I.S.B.N. - 13: 978-84-695-9891-7

I.S.B.N. - 10: 84-695-9891-0

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Adela Salvador

Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

¿Qué es un problema? ¿Cómo enfrentarse a unos problemas nuevos que, quizás, no sean fáciles? ¿Es posible dar normas, conocer estrategias, para resolver mejor cualquier tipo de problema?

Un **problema** matemático es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan, de inmediato, alcanzar el objetivo.

Lo que para una persona es un problema, para otra puede ser un simple **ejercicio**, o mucho más que un problema, una **investigación**. La diferencia está en los conocimientos previos, y si para resolverlo debe hacerse preguntas, añadir hipótesis al enunciado.

Ante un auténtico problema muchas veces no sabe uno ni siquiera por dónde empezar. Veremos algunas **estrategias de pensamiento** útiles en toda clase de problemas.

Pensamos que enseñar a resolver problemas es lo mejor que se puede enseñar, pues el mundo evoluciona rápidamente y lo que hoy nos parece imprescindible, mañana puede haber quedado obsoleto, mientras que resolviendo problemas se prepara a las personas a enfrentarse a lo desconocido y los procesos mentales nunca envejecen.

Hay estudios que confirman que la enseñanza expresa de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea.

1. FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Ejemplo 1:

1. La madre de María observa que el cuentakilómetros de su coche marca 24.312 km. ¿Cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión, que debe ser cada 5.000 km?

Siempre que tengas que resolver un problema es conveniente que sigas los siguientes pasos:

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con cuidado el enunciado, y piensa:

- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Qué piden?

Fase 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema con operaciones con números naturales, luego:

- ¿Qué operaciones aritméticas debo hacer? ¿Habrá que sumar? ¿Habrá que multiplicar? ¿Habrá que restar? ¿Habrá que dividir?

Fase 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resolvemos el problema:

Si multiplicas 5.000 por 5 obtienes 25.000. Por tanto, la próxima revisión debe ser a los 25.000 km, luego a la madre de María le faltan 25.000 – 24.312 = 688 km para hacer la revisión.

Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.

Si sumas a 24.312 los 688 km del resultado tenemos los 25.000 km de la próxima revisión.

Actividades propuestas

2. ¡Inventa problemas similares!

3. Estima cuánto mide tu aula de largo y cuánto de ancho. Se desea poner un zócalo que vale a 6 € el metro. ¿Cuántos euros costará ponerlo?

4. El cuentakilómetros del padre de Juan marca 64.731 km. Si las revisiones son cada 5.000 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión?

5. La piscina de Inés tiene forma de rectángulo. Sus lados miden 10 m de largo y 7 m de ancho. Desea rodear la piscina con una valla. El metro de valla vale 12 €. ¿Cuánto costará hacer la valla?

2. ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

2.1. Estima el resultado

En muchas ocasiones nos basta con estimar un resultado, no con la solución exacta.

Ya has estimado las dimensiones de tu aula.

A la madre de María, por ejemplo, para estar tranquila le basta saber que le faltan más de 600 km para la próxima revisión. Mientras que el padre de Juan quizás no necesite saber que exactamente le faltan 65.000 - 64.731 = 269 km para la próxima revisión, sino estimar que le faltan menos de 300 km para empezar a preocuparse por hacerla.

Para realizar buenas estimaciones es conveniente haber practicado mucho.

Actividades propuestas

Intenta ahora tú estimar las soluciones de estos problemas:

6. Si tu paga semanal es de ocho euros, y ahorras toda la paga de un mes ¿Podrías comprarte un ordenador portátil (que estimas que vale unos 1.500 euros)? ¿Y con todas las pagas de un año?

7. Un ascensor sólo puede con 500 kg, ¿cuántos de tus amigos piensas que podrían subirse?

8. Informan que a una manifestación han ido 40.000 personas, ¿cómo crees que las han contado?

9. Si toda la población mundial se diera la mano, ¿qué longitud se formaría?

10. ¿Cuánta gente cabe de pie en tu aula?

11. ¿Cuántos kilómetros andas al año?

12. ¿Cuántos granos de arroz hay en un kilo?

2.2. Experimenta, juega con el problema

Al experimentar con los datos del problema es fácil que se te ocurra que debes hacer con ellos.

Actividades propuestas

13. a) Piensa un número de tres cifras.

b) Escríbelo al revés y resta el menor del mayor.

c) Escribe el resultado al revés y súmalo al resultado de la resta.

d) Escribe la solución final.

e) Prueba con varios números, ¿qué observas? ¿Hay algún caso en el que no se obtenga la misma solución?

f) Prueba con cuatro cifras. ¿Obtienes resultados del mismo tipo que las anteriores?

g) ¿Te atreves con cinco cifras?

2.3. Hazlo más fácil para empezar

14. "Las torres de Hanoi": Cuenta la leyenda que en tres agujas de oro hay sesenta y cuatro discos todos de distinto tamaño, colocados de mayor a menor. Unos monjes cambian continuamente de sitio estos discos, uno cada segundo con las siguientes reglas: En cada movimiento sólo se puede mover un disco. Y no podemos colocar nunca un disco encima de otro de menor tamaño. Cuando hayan pasado todos los discos de una de las agujas a otra se acabará el mundo. ¿Cuánto falta para que termine el mundo?

Para enfrentarte a este problema, ten en cuenta, lo primero, las **fases**, intenta entender bien el problema.

Luego, **hazlo más fácil para empezar**. En lugar de con 64 discos, empieza sólo con un disco. A continuación, con dos, con tres... Manipula los objetos. Haz un esquema.

15. Cuadrado Mágico

Con los números del 10 al 18 completa en tu cuaderno el cuadro de forma que obtengas la misma suma en todas direcciones, en horizontal, en vertical, e incluso en las dos diagonales.

- Hazlo más fácil, comienza con un cuadrado mágico con los números del 1 al 9. ¿Cuánto debe sumar cada fila? ¿Cuál debe ser el número de la casilla central? ¿La suma de 1 + 2 + … + 9 = …? ¿Qué número dividido entre 3 nos da: …?

Luego hazte las mismas preguntas con los números del problema inicial.

2.4. Haz un diagrama, un esquema...

En muchas ocasiones hacer un diagrama nos resuelve el problema.

Actividades propuestas

16. "Color del pelo": Tres amigas A, B, C, una rubia, otra morena y otra pelirroja, están jugando a las cartas sentadas en una mesa circular, cada una pasa una carta a la que está a su derecha. La amiga B ha pasado una carta a la rubia. La amiga A ha pasado una carta a la que ha pasado una carta a la pelirroja. ¿Cuál es el color del pelo de A, B y C?

Al hacer un esquema y analizar las dos configuraciones que existen, se observa que una de ellas es inconsistente, ya que uno de las amigas es a la vez rubia y pelirroja. La solución es la otra configuración, que es consistente con el enunciado.

17. Una persona es 80 cm más alta que la mitad de su altura. ¿Qué estatura tiene?

Lee y comprende con cuidado el enunciado, dibuja un esquema y sabrás la solución.

18. Quieren cruzar un río en una barca tres mujeres y tres maridos celosos, si sólo caben dos personas en la barca, y nunca pueden quedar solos una mujer y un marido que no sean pareja, ¿cómo pueden hacerlo?

2.5. Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas

Es posible que tu problema tenga el mismo aire que otro que ya has resuelto, lo que puede proporcionarte pistas útiles para resolver el nuevo.

Actividades propuestas

19. Observa las ofertas de una tienda:

	Precio anterior	*Oferta*
Camisetas	15 euros	12 euros
Chaquetas	40 euros	30 euros
Pantalones	32 euros	28 euros
Camisas	25 euros	21 euros

Una persona aprovecha estas ofertas y compra cinco camisas, una chaqueta, dos pantalones y tres camisetas. Averigua cuánto se gasta y cuánto se ahorra por comprar esa ropa en ofertas.

20. Se han apuntado 25 estudiantes a un viaje. Al pagar el billete 5 de ellos se dan cuenta que no han traído dinero. El resto decide pagárselo, y abonan cada uno 3 €. ¿Cuánto cuesta cada billete?

2.6. Escoge una buena notación

Actividades propuestas

21. Calcula mentalmente el producto de dos números y luego suma un tercero:

a) 5 x 9 + 26 =   b) 200 x 7 + 128 =   c) 60 x 8 + 321 =

Ahora al revés: nos dan el resultado y buscamos, de la forma anterior, con qué números puede obtenerse. Por ejemplo, nos dan 1000 y decimos 1000 = 100 x 7 + 300.

Sigue ese modelo para expresar los números siguientes: 2000, 4000 y 5500.

22. ***Emmy Noether***, una ilustre mujer matemática, nació el 23 de marzo de 1882 y murió el 14 de abril de 1935.

a) ¿Cuántos años tenía al morir?

b) ¿Cuántos años han pasado desde el año de su muerte?

c) ¿Cuántos años faltan para celebrar el centenario de su muerte? ¿Cuántos meses? ¿Cuántos días?

3. EMOCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. ¡Eureka!

Ya sabes que **Arquímedes** estaba en la bañera cuando exclamó **¡Eureka**! pues había descubierto una importante propiedad de los cuerpos sumergidos. Algo parecido ocurre en muchas ocasiones. Tú mismo, si trabajas en un problema, luego tu inconsciente continua trabajando y, de repente, cuando menos lo esperas ¡Eureka!, tienes la solución. Esta situación, esta emoción positiva y gratificante, también recibe el nombre de ¡**Ajá**!

En la Historia de la Ciencia se conocen muchas de estas situaciones. Busca alguna y reflexiona sobre cómo te sientes al resolver un problema, que en un primer momento, parecía imposible.

3.2. Bloqueos

Pero también pueden aparecer emociones negativas, a las que llamamos **bloqueos**. Muchas veces, al intentar resolver un problemas, éste nos parece imposible, nos desanimamos, entran ganas de dejarlo todo. Esto es un bloqueo. Pero eso le pasa a todo el mundo. Hay que sacar fuerzas y continuar. Buscar la causa del bloqueo.

Veamos algunos problemas sencillos que resultan complicados pues en ellos suele producirse un bloqueo. Intenta primero resolverlos y luego, si no te salen, lee la ayuda.

23. Sin levantar el lápiz une con 4 trazos rectos estos nueve puntos.

o o o

o o o

o o o

Dibuja en tu cuaderno nueve puntos como los de la figura y intenta unirlos, con 4 trazos sin levantar el lápiz.

Recuerda, lo primero es comprender el enunciado. Prueba a hacerlo. ¿Lo has conseguido? Estupendo. No lo consigues, inténtalo un poco más.

Bloqueo: Si no lo consigues es porque estás presuponiendo algo que no se ha dicho y es que no puedes salir del recinto limitado por los puntos. Haz trazos más largos y lo conseguirás enseguida.

24. Con 3 palillos, todos iguales, puedes construir un triángulo equilátero. Con 5 palillos puedes construir 2 triángulos equiláteros, ¿cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

- Experimenta, juega con el problema. ¡Lo has conseguido! Entonces no has tenido un bloqueo.

Bloqueo: Nadie ha dicho que no pudieras salir del plano. Ahí está el bloqueo. Lo consigues con un tetraedro regular.

4. JUEGOS Y PROBLEMAS

¿Te gusta jugar? Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.

Fases: Lo primero, naturalmente, comprender bien las reglas del juego, que es similar a comprender el enunciado. Lo segundo, jugar, hasta encontrar una estrategia ganadora. Luego jugar y ver si tu estrategia es realmente buena. Por último, generalizar, intentar mejorar la estrategia.

Actividades propuestas

Utiliza todo lo que has aprendido.

25. ¡Y ahora un juego! **Las tres en raya**

Se juega de dos en dos. Copia en el cuaderno la tabla siguiente:

497	315	69	77
115	33	90	22
225	161	46	55
355	142	135	213

Una persona escoge dos números, uno del conjunto A = {2, 3, 5, 7} y otro del conjunto B = {11, 45, 71, 23}. Los multiplica mentalmente, y pone su marca (o una ficha, o una bolita de papel) sobre el número resultante. La otra persona hace lo mismo cuando le toque el turno. Gana quien pone tres marcas en línea recta.

Ahora ¡*a jugar*!

26. Realiza el mismo juego de la actividad anterior con este otro tablero, y con los grupos de números: A = {2, 5, 7, 4} y B = {3, 11, 9, 1}.

63	7	21	6
22	4	15	5
45	2	55	44
12	36	18	77

- Inventa con otros números tu propio tablero de juegos.

Autora: Adela Salvador
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

27. Otro juego

Es un juego de **calculadora** y puede ser un juego cooperativo; un juego en el que se ponen en común las diferentes estrategias y se discute sobre el mejor procedimiento, el más sencillo o el más original.

Consta de cuatro fichas como las de la figura, donde se indican las teclas que está permitido pulsar, y el resultado, en rojo, al que hay que llegar.

2 4	5 6	1 0	3 7
+ –	x /	+ –	+ –
/ =	+ =	x =	x =
34	147	123	93

- El juego consiste, en primer lugar, en obtener el resultado en la calculadora.
- Debes anotar todos los métodos encontrados. Piensa y anota en tu cuaderno cuál es el procedimiento que te ha resultado más eficaz.
- Escribe, utilizando paréntesis, las expresiones que ha utilizado la calculadora.
- Modifica el juego confeccionando nuevas fichas, modificando éstas con otras teclas y con otros resultados.

28. ¡Hagamos magia!

Dile a una persona que piense un número de tres cifras, que escriba ese número y, de nuevo, las tres cifras, para formar un número de seis cifras. Pídele que lo divida entre 7, luego entre 11 y luego entre 13. Se quedará sorprendida al comprobar que el resultado es el número que escribió. ¿Sabes por qué?

29. *Resuelve el crucigrama:* Cópialo en tu cuaderno y resuélvelo.

	x		x		=	24
x		x		x		
	x		x		=	35
x		x		x		
	x		x		=	30
=		=		=		
6		50		84		

Autora: Adela Salvador
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

ELLAS Y ELLOS INVESTIGAN PARA RESOLVER PROBLEMAS

El progreso que ahora disfrutamos ha sido posible gracias a la iniciativa y al trabajo de miles de hombres y mujeres. Superaron retos y resolvieron problemas para los que necesitaron muchos conocimientos matemáticos

CONSTRUYERON PUENTES QUE NOS COMUNICAN

DISEÑARON AVIONES QUE SOBREVUELAN OCÉANOS

LA INFORMÁTICA QUE NOS INVADE

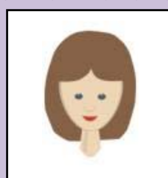
BARCOS QUE SURCAN LOS MARES

LA ELECTRICIDAD QUE LLEGA A TODAS PARTES

LA REINA DE LAS CIENCIAS DEL S. XIX

Mary Somerville dedicó su vida al estudio de las matemáticas y la física. Tradujo al inglés La Mecánica Celeste de Laplace, uno de los tratados científicos más importantes de su época. Escribió numerosas obras y artículos, viajó por Europa y se relacionó con los principales científicos. La Reina Victoria le concedió una pensión vitalicia en reconocimiento a su trabajo. Fue una mujer feliz. Mirad lo que escribió:

"Tengo 92 años..., mi memoria para los acontecimientos ordinarios es débil pero no para las matemáticas o las experiencias científicas. Soy todavía capaz de leer libros de álgebra superior durante cuatro o cinco horas por la mañana, e incluso de resolver problemas"



RESUMEN

Problema	Es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.
Fases en la resolución de un problema	Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema. Fase 2: Busca una buena estrategia. Fase 3: Lleva adelante tu estrategia. Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.
Algunas estrategias	➢ Estima el resultado. ➢ Experimenta, juega con el problema. ➢ Hazlo más fácil para empezar. ➢ Haz un diagrama, un esquema... ➢ Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas. ➢ Escoge una buena notación.
Emociones y resolución de problemas	Emoción positiva: Idea feliz. ¡Aja! ¡Eureka! Emoción negativa: Bloqueo
Juegos de estrategia	Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.

Autora: Adela Salvador
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS de 1º de ESO

1. La Jefe de Estudios de un colegio ha anotado en un cuadro el número de alumnos y alumnas que han faltado a clase. En ese colegio hay ocho clases de Secundaria.

	L	M	X	J	V	TOTAL
1º A	2	3	5	1	3	
1º B	3	4	1	3	2	
2º A	2	6	3	4	3	
2º B	5	1	0	2	1	
3º A	4	2	3	1	0	
3º B	6	3	1	2	3	
4º A	2	3	1	4	0	
4º B	4	2	2	2	0	
TOTAL						

Copia la tabla en tu cuaderno y resuelve allí el ejercicio.

a) Completa las últimas fila y columna del cuadro.

b) Sabiendo que el número total de alumnos y alumnas de ese colegio en Secundaria es de 205, averigua cuántos había en el colegio el jueves.

2. **"El extraordinario 37"**

37 x 3 = 111

37 x 6 = 222

37 x 9 = 333

Consigue tú ahora

444, 555, 666...

3. En una cuadrícula de cuatro por cuatro, coloca los números del 1 al 16 en los cuadrados, cada uno en uno. Multiplica los números de cada dos cuadrados adyacentes y escribe el producto en cada arista. Suma los números que hay en cada arista. Queremos que la suma sea lo menor posible, ¿Cómo debemos colocar los números del 1 al 16?

4. Triángulos

1 x 9 + 2 = 11

12 x 9 + 3 = 111

123 x 9 + 4 = 1111

1234 x 9 + 5 = 11111

Comprueba que el triángulo sigue hasta llegar a +10.

5. Estudia las maneras de dividir un cuadrado en cuatro partes iguales en forma y en área.

6. Números en fuga: Estas operaciones se han quedado sin resolver por falta de algunos números. ¿Puedes completarlas? Cópialo en tu cuaderno y resuélvelo.

a)

```
  3 □  8 9 □
  4 6  4 1 0
+ □ 2  5 □ 6
-------------
 1 □ 9 □ 5 3
```

b) 4 □ 2 : □ 5 = 17 resto 07

c) 2 □ 3□ x 75 = 2□0050

7. Dos mujeres habían ido al mercado a vender 30 manzanas cada una. La primera tenía la intención de vender cada dos manzanas por un €. ¿Cuánto pensaba ganar? La segunda quería vender cada tres manzanas por dos €. ¿Cuánto ganaría? Pero no querían hacerse la competencia por lo que llegaron al siguiente acuerdo: vender ambas cada cinco (2 + 3) manzanas por tres (1 + 2) €. Lo habían vendido todo. ¿Han ganado 36 €? ¡Les sobra un €! Con la venta anterior iban a ganar 35 €, y han ganado 36 €. ¿Puedes explicarles qué ha ocurrido?

8. Sofía, que es muy sabia, se lo ha explicado, y se han puesto tan contentas que han decidido ir a comer las tres juntas. Pagaron la comida con 30 €, y el camarero les devolvió 5 €. Cada una se quedó con un €, pero sobraban 2 que dejaron de propina. ¡De nuevo tenían un problema! ¡Ahora faltaba un €! Han pagado 10 – 1 = 9 € cada una, que por 3 son 27 €, más 2 de propina son 27 + 2 = 29. Y en un principio tenían 30. ¡Les falta uno! Explica lo sucedido.

9. Letras y números: Si sigues el orden alfabético estas cuatro operaciones dan como resultado letras con las que podrás formar una palabra:

(8 + 10): 3 + 7 x 1 – 5=

(23 – 15) + 2 x 4 =

1 x 4 + 6 : 2 + 5 x 1 =

45 x (1 + 0) – 45 + 1 =

Cópialo en tu cuaderno y resuélvelo.

10. "El lobo, la cabra y el repollo": Un hombre tiene que cruzar un río en una barca con un lobo una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir él y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que si no está el hombre delante, el lobo se come la cabra y la cabra se come el repollo ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?

A. I. Fernández

11. Juan, Jaime y Jorge tienen cada uno dos oficios. Hay un barbero, un chofer, un tabernero, un músico, un pintor y un jardinero. ¿A qué se dedica cada uno de ellos? Sabiendo que:

1: El chófer se burló del músico porque tenía el pelo largo

2: El músico y el jardinero pescan con Juan

3: El pintor compró al tabernero vino

4: El chófer cortejaba a la hermana del pintor

5: Jaime debía 5 dólares al jardinero

6: Jorge vio a lo lejos a Jaime y al pintor.

12. Sorpresas del 8 y el 9:

$0 \cdot 9 + 8 = 8$

$9 \cdot 9 + 7 = 88$

$98 \cdot 9 + 6 = 888$

$987 \cdot 9 + 6 = 8888$

$9876 \cdot 9 + 6 = 88888$

$98765 \cdot 9 + 6 = 888888$ ¿Te animas a continuar la pirámide?

13. Nos dan 16 bolas del mismo tamaño, pero una de ellas pesa un poco menos que las otras. Para averiguar cuál es disponemos de una balanza de dos platos. ¿Cuál es el mínimo número de pesadas que necesitas efectuar para, sin tener en cuenta la buena suerte, determinar la bola? ¿Y si son 32 bolas? ¿Y si son 27? ¿Y si 13? Generaliza el problema a cualquier número de bolas.

14. Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo: La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo que restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

15. ¿Cuál es el máximo número de ángulos rectos que puede haber en un polígono de *n* lados?

Autora: Adela Salvador
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

PARA EL PROFESORADO

En la enseñanza de las matemáticas es conveniente, como afirmaba *Hans Freudenthal*, "*hacer matemáticas en la clase de matemáticas*" y una forma de conseguirlo, es organizar clases de resolución de problemas o proponer pequeñas investigaciones.

Al investigar a los buenos resolutores de problemas se han obtenido dos conclusiones: La primera es que **la capacidad para resolver problemas mejora con la práctica**, la segunda es que el análisis de los métodos matemáticos, así como el de las distintas estrategias que intervienen en la resolución de problemas también mejora dicha capacidad. Hay estudios que confirman que la enseñanza expresa de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea. Es preciso resolver muchos problemas. Esa ayuda sólo puede ser eficaz si se ejerce sobre problemas concretos y no como pre-requisito teórico.

Trabajar en la resolución de problemas es lo mejor que se puede proporcionar a una persona, ya que ayuda a equiparla para su actividad integral, no solamente en lo que se refiere a sus capacidades matemáticas. El mundo evoluciona rápidamente, y tenemos la obligación de preparar personas que en el futuro van a enfrentarse a situaciones desconocidas. Los procesos mentales no se hacen obsoletos.

Un **problema matemático** es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.

Un problema tiene distinta calificación en función de la persona que se lo plantee, y es evidente que lo que son problemas para unos, no lo son para otros. Así cuando una persona sabe los rudimentos del lenguaje algebraico, un problema que pueda resolverse planteando una ecuación de primer o segundo grado o un sistema de ecuaciones, no es un problema, sino un **ejercicio** al que se le aplica una regla fija que es la notación algebraica y los algoritmos para resolver las ecuaciones que resultan. También es distinto un problema de una **investigación**, que al ser un proceso más abierto, es la persona quien se plantea el objetivo que quiere conseguir. Así, cuando un estudiante al resolver un problema se hace preguntas, intentando generalizar el resultado o modificar las condiciones iniciales, está realizando una investigación. Podemos pues distinguir entre ejercicio, problema e investigación.

La **heurística**, término introducido por ***George Polya*** en su libro *Cómo plantear y resolver problemas,* es el "arte de resolver problemas" y trata de desvelar el conjunto de actitudes, procesos generales, estrategias y pautas que favorecen la resolución de problemas en general y en particular de los problemas matemáticos. Decía *Polya*: "*El profesor de matemáticas no debería contentarse con dispensar el saber, sino que también debería intentar desarrollar en los estudiantes la capacidad de utilizar ese saber; debería insistir en el saber – hacer, en las actitudes adecuadas, en los hábitos intelectuales deseables*".

Polya considera la resolución de problemas como un proceso lineal en el que establece cuatro fases:

1. Comprender el problema,
2. Concebir un plan,
3. Ejecutar un plan, y
4. Examinar la solución obtenida.

En cada una de estas fases hay una serie de pautas o sugerencias heurísticas que pretenden fijar la atención sobre aspectos concretos del problema, para sugerir ideas que permitan avanzar en su resolución.

En España en 1991 se publica *Para pensar mejor* de *Miguel de Guzmán* en el que se destaca la identificación de los distintos tipos de bloqueos, la importancia de la actividad subconsciente en el proceso de resolución de problemas, el desarrollo de la creatividad, y la importancia de realizar un protocolo en el proceso de resolución. Aconsejaba *"enseñar matemáticas basándose fundamentalmente en la ocupación activa con problemas alrededor de los contenidos que se pretende impartir".* En *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas* (2003) reflexiona sobre la organización de una clase de problemas y las técnicas que la facilitan, como el torbellino de ideas o el trabajo en grupo.

Una forma aconsejable para las clases de resolución de problemas es organizar el **trabajo en grupos**. Existen muchas formas de organizar el trabajo en grupo, por lo que antes de proponer cualquier actividad grupal debemos asegurarnos que el alumnado conoce algunas técnicas básicas. Si no es así gran parte de la rentabilidad esperada se pierde ante un mal reparto de responsabilidades, una deficiente organización, una incorrecta administración del tiempo, etc.

Los grupos, ni demasiado grandes, ni demasiado pequeños, podrían estar formados por unas seis o siete personas. En un grupo debe haber una persona responsable y una persona secretaria:

- La **persona responsable** tiene dos funciones, **dinamizadora** para mantener el interés del grupo y cuidar que nadie se quede sin participar y **organizadora** preocupándose de planificar los tiempos y las tareas asignadas a cada fase del trabajo.
- La persona **secretaria** se ocupa de anotar todas las ideas que vayan surgiendo y sistematizar las tareas que se vayan desarrollando y es **portavoz,** encargándose de exponer las conclusiones de su equipo a toda la clase.

Cada una de las funciones descritas no deben asociarse siempre a una misma persona sino que es recomendable un sistema de alternancia.

Papel del profesorado: En una clase de resolución de problemas, nuestra labor es dinamizar a los distintos equipos, supliendo las deficiencias y ayudando en los primeros momentos a las personas responsable y secretaria en sus funciones.

Cuando un profesor o una profesora plantea un trabajo en grupo para resolver problemas debe:

- Elegir problemas con un enunciado atractivo y motivador.
- Graduar de manera conveniente la dificultad del problema.
- Analizar detenidamente los bloqueos que puedan surgir en la resolución del problema y utilizar los métodos adecuados para superarlos.
- Percibir las dificultades que el trabajo en grupo plantea como tal y contar con recursos para actuar frente a los obstáculos que perturban su buen funcionamiento.
- Procurar establecer un ambiente adecuado dentro del aula que favorezca actitudes positivas hacia el aprendizaje.

Pero el aprendizaje de la resolución de problemas es un proceso a largo plazo. No es un objetivo operativo evaluable mediante un examen.

Para saber más entra en: http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/node/91

1º ESO

CAPÍTULO 2: NÚMEROS NATURALES. DIVISIBILIDAD

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Fernanda Ramos

Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Sistema de numeración griego clásico

Ilustración: A. Ortega

Índice

Resumen

Jaime, María y Raquel van a visitar a su abuela a menudo. Jaime va cada 2 días, María cada 4 y Raquel solo va un día a la semana. Un día que coincidieron los tres, comentaron que nunca habían comido un pastel tan rico como el que hace su abuela. Ella afirmó: "El próximo día que volváis a coincidir, lo vuelvo a hacer". ¿Cuándo podrán volver a disfrutar del pastel?

En este capítulo aprenderemos a resolver problemas similares a este y profundizaremos en la tabla de multiplicar mediante conceptos como: divisibilidad, factorización o números primos.

Descubrirás algunos de los grandes secretos de los números y nunca te imaginarías que la tabla de multiplicar escondiese tantos misterios ocultos…

Fotografía: Clarisa Rodrígues

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. REPASO DE NÚMEROS NATURALES

1.1. Los sistemas de numeración

El sistema de numeración decimal

¿Por qué en otros países, aunque se hablen lenguas diferentes, se usan los mismos números?

Esos números, los que nosotros usamos, constituyen un lenguaje universal y se dice que están expresados en el sistema decimal.

El **sistema de numeración decimal** es el más usado en todo el mundo y en casi todos los ámbitos.

En este sistema el valor de una cifra en un número es diez veces mayor que el de la cifra situada a su derecha y diez veces menor que el valor de la situada a su izquierda. Por eso se dice que es un **sistema posicional**: el valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupe esa cifra.

Actividades resueltas

- En el número 4652031 tenemos:

  - La cifra de las unidades: el 1

  - Luego la cifra de las decenas: el 3, cuyo valor en el número es 10 veces más que el anterior, luego su valor será:

  $$3·10 = 30$$

  - En tercer lugar, las centenas: el 0, cuyo valor será el que resulte de multiplicar la cifra situada en tercer lugar por 100:

  $$0·100 = 0$$

  - En cuarto lugar las unidades de millar: 2, cuyo valor obtenemos multiplicando por 1000 la cifra situada en ese lugar:

  $$2 \cdot 1000 = 2000$$

  - Luego, las decenas de millar: 5 cuyo valor será:

  $$5 \cdot 10000 = 50000$$

  - En sexto lugar, las centenas de millar: 6, cuyo valor se obtiene multiplicando la cifra por 100000.

  $$6 \cdot 100000 = 600000$$

  - Y, por último, las unidades de millón: 4, cuyo valor obtenemos multiplicándolo por 1000000:

  $$4 \cdot 1000000 = 4000000$$

Con esto observamos que el número 4652031 se puede escribir utilizando potencias de 10 de la forma:

$$4652031 = 4 \cdot 1000000 + 6 \cdot 100000 + 5 \cdot 10000 + 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1$$

Actividades propuestas

1. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:

a) 7653 b) 30500 c) 275643 d) 200543

2. ¿Qué lugar ocupa la cifra 5 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?

a) 508744 b) 65339001 c) 7092157 d) 9745

3. Razona por qué en un número natural con dos cifras repetidas, éstas no tienen el mismo valor.

Números romanos

Otro sistema de numeración que todavía se usa es el de los **números romanos**. ¿Te acuerdas de sus equivalencias?

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000

Ejemplo:

- El número MDL equivale en el sistema decimal al 1550. Si ahora le añadimos un V, es decir: MDLV, el número es el 1555, pero las cifras siguen teniendo el mismo valor en ambos números.

Reloj con números romanos

Otros sistemas de numeración

Uno de los primeros sistemas de numeración que se utilizó fue el de **base 12** hace ya más de 5000 años. Todavía se usa cuando contamos objetos por docenas o con algunas mediciones del tiempo (como los meses de un año)

El sistema de **base 2** o sistema binario también es muy utilizado hoy en día, sobre todo en los ordenadores y calculadoras debido a su simplicidad, ya que para escribir números en este sistema solo se necesitan dos cifras distintas: el 0 y el 1


Cifras del sistema binario

Actividades propuestas

4. ¿Podrías escribir los números del 1 al 10 en el sistema binario?

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Operaciones elementales

Nota:

Aunque en primaria se usaba el símbolo "x" para denotar el producto, a partir de ahora y, por comodidad, lo simbolizaremos con un punto: ·

Multiplicación de números naturales

Como ya sabes, **multiplicar dos números naturales** es equivalente a sumar uno de ellos consigo mismo tantas veces como indica el otro.

Por ejemplo:

Hacer 6 · 5 es lo mismo que hacer 6 + 6 + 6 + 6 + 6

Recuerda que:

Las palabras "**multiplicación**" y "**producto**" significan lo mismo, es decir, hacen referencia a la misma operación.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma

Nota

Recuerda la **propiedad conmutativa** de la multiplicación:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Ejemplo:

2 · 3 = 3 · 2

Si llamamos *a, b* y *c* a tres números naturales, se verifica la siguiente propiedad:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Por ejemplo:

Sustituyendo las letras *a* por 2, *b* por 5 y *c* por 7, tenemos que:

2 · (5 + 7) = (2 · 5) + (2 · 7)

Esta propiedad también se verifica para la resta.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la resta

Considerando otra vez, *a, b* y *c* números naturales cualesquiera, se cumple que:

$$a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$$

Estas propiedades son muy útiles para hacer cálculos mentales rápidos descomponiendo números:

Calcular 15 · 23 mentalmente es complicado, pero si hacemos:

15 · 23 = 15 · (20 + 3) = (15 · 20) + (15 · 3) resulta más sencillo.

Si leemos la igualdad de derecha a izquierda, es decir:

(15 · 20) + (15 · 3) = 15 · (20 + 3) se suele decir que *hemos sacado factor común el número 15,* pero realmente estamos hablando otra vez de la propiedad distributiva.

Generalizando:

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ es lo mismo que: $(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b + c)$, y utilizando la propiedad conmutativa: $(b \cdot a) + (c \cdot a) = (b + c) \cdot a$.

$a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$ es lo mismo que: $(a \cdot b) - (a \cdot c) = a \cdot (b - c)$, y utilizando la propiedad conmutativa: $(b \cdot a) - (c \cdot a) = (b - c) \cdot a$.

Ejemplos:

a) (870 · 4) – (870 · 3) = 870 · (4 – 3) = 870 · 1 = 870
b) (450 · 2) + (3 · 450) = (2 + 3) · 450 = 5 · 450 = 2250
c) (45 · 6) – (45 · 5) = 45 · (6 – 5) = 45 · 1 = 45

División de números naturales

Nota:

La palabra "**cociente**" significa el resultado de hacer una "**división**" Los símbolos utilizados para representarlas son:

/, : , y la fracción: —

Ejemplo:

- En el comedor del instituto las mesas son de 6 personas y en la clase de 1º de la ESO hay 33 alumnos, ¿cuántas mesas ocuparán?

Vemos que habrá 5 mesas ocupadas y sobrarán 3 alumnos que han de sentarse en otra mesa:

$$\begin{array}{r|l} 33 & 6 \\ \cline{2-2} 3 & 5 \end{array}$$

Cada uno de los números que intervienen en la división se denominan:

33 → Dividendo 6 → Divisor 5 → Cociente 3 → Resto

Además, como ya sabes, se cumple que: 33 = (6 · 5) + 3

Esta propiedad se cumple siempre para cualquier división. En general:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} r & C \end{array}$$

Se verifica que:

$$\boldsymbol{D = (d \cdot c) + r}$$

Ejemplo:

- El cociente entre 3658 y 65 es 56 y el resto 18. Escribe la relación que existe entre estos cuatro valores.

3658 = (65 · 56) + 18

Ejemplos:

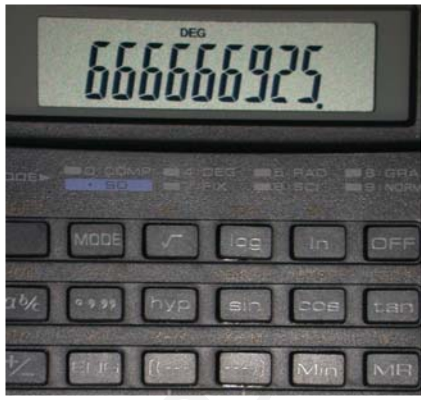
- 25/5, 25 : 5 y $\frac{25}{5}$ significan lo mismo: la división o el cociente de 25 entre 5.

La expresión:

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

También significa lo mismo, pero en Secundaria y Bachillerato apenas se utiliza, así que conviene que te familiarices cuanto antes con las anteriores.

Divisiones con calculadora



Ya sabemos que dividir con calculadora es muy fácil, pero ¿qué hacemos si nos piden el resto de la división y solo podemos usar la calculadora?

Es muy sencillo. Veámoslo con un ejemplo:

Si hacemos:

325 ÷ 5 = 65

Pero si hacemos:

325 ÷ 15 = 21.6666666667

En el primer caso está claro que el cociente es 65 y el resto es 0, pero ¿y en el segundo caso?

Claramente el cociente es 21. Ahora para calcular el resto tenemos que multiplicar este cociente por el divisor y restárselo al dividendo. El resto será: 325 – (15 · 21) = 10.

Jerarquía de las operaciones

En la expresión: 3 · 4 + 2, ¿qué operación realizarías antes, la multiplicación o la suma?

Existe una prioridad en las operaciones donde no existen paréntesis y es que la multiplicación y la división siempre se realizan antes que las sumas y las restas.

Por tanto, la operación anterior sería:

$$3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14$$

¿Y en 8 : 2 · 3? Son divisiones y multiplicaciones con igual prioridad. Podemos convenir que primero se realiza la primera operación, la que está más a la izquierda: 8 : 2 · 3 = 4 · 3 = 12, en lugar de 8 : 2 · 3 = 8:6 = 4/3.

En general:

En operaciones con paréntesis, primero hay que realizar las que están entre **paréntesis** y luego las demás.

En operaciones sin paréntesis, primero se efectúan las **multiplicaciones** y **divisiones** y luego, las **sumas y restas.**

En operaciones de igual prioridad, primero la de más a la izquierda.

Ejemplo:

- Observa la diferencia entre estas dos operaciones:

$$(15 + 10) \cdot 3 = 25 \cdot 3 = 75$$

$$15 + 10 \cdot 3 = 15 + 30 = 45$$

Notas

a) Es importante escribir los paréntesis solo cuando sea necesario. Por ejemplo, en la expresión: (21 · 2) + 30 resulta innecesario, ya que por la prioridad en las operaciones, ya sabemos que tenemos que efectuar el producto antes que la suma.

b) Si realizamos una operación en la calculadora sin paréntesis ésta ya respeta la jerarquía en las operaciones, por lo que si la operación necesitase paréntesis, hemos de incluirlos en la calculadora.

Actividades propuestas

5. Saca factor común y calcula mentalmente:

a) 23 · 4 – 23 · 3   b) 540 · 8 + 540 · 2   c) 55 · 13 – 55 · 3   d) 600 · 33 – 600 · 3

6. Construye dos números con las cifras 4, 5 y 6 tal que su producto sea lo más grande posible.

7. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad $D = d \cdot c + r$

6738 : 456   b) 34540 : 30   c) 240035 : 981   d) 397 : 45

8. ¿Recuerdas la definición de división exacta? ¿Qué ocurre en la igualdad anterior si la división es exacta?

9. El equipo de fútbol del instituto decide celebrar su victoria de liga yendo de viaje con su entrenador. Sabiendo que el equipo lo componen 20 alumnos, que el viaje les cuesta a cada uno 150 €, la noche en habitación individual 50 € y que han pagado 7350 € en total, ¿cuántos días han estado de viaje?

2. DIVISIBILIDAD

2.1. Múltiplos y divisores de un número entero

Múltiplos de un número

¿Recuerdas muy bien las tablas de multiplicar de todos los números?

- Escribe en tu cuaderno la del 5 y la del 7.

Sin darte cuenta, has escrito algunos de los múltiplos de 5 y de 7.

Se definen los **múltiplos** de un número entero ***n*** como los números que resultan de multiplicar ese número ***n*** por todos los números enteros.

Ejemplo:

- La tabla del 5 que has escrito antes está formada por los valores:

0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90,….

Todos ellos son múltiplos de 5.

La notación matemática de este concepto es: $\dot{5}$

Es decir: $\dot{5} = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \ldots\}$

Ejemplo:

- Cuenta los múltiplos de 5 que has escrito antes. ¿Es posible hacerlo?

Efectivamente, los múltiplos que tiene cada número entero son una cantidad infinita.

Actividades propuestas

10. Calcula los siete primeros múltiplos de 8 y de 9

11. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 12?

12, 13, 22, 24, 25, 100, 112, 142, 144

12. Halla los múltiplos de 11 comprendidos entre 12 y 90.

Divisores enteros de un número

Un número entero ***a*** es **divisor** de otro número entero ***b*** cuando al dividir ***b*** entre ***a***, el resto es 0.

Nota

Todo número tiene siempre como divisor a 1 y a sí mismo.

Ejemplo:

a) 2 es **divisor** de 8 porque al dividir 8 entre 2, el resto es 0.

b) 10 es **divisor** de 20 porque al dividir 20 entre 10, el resto es 0.

c) 6 es **divisor** de 36 porque al dividir 36 entre 6, el resto es 0.

d) 1 es **divisor** de 18 porque al dividir 18 entre 1, el resto es 0.

e) 18 es **divisor** de 18 porque al dividir 18 entre 18, el resto es 0.

Si ***a*** es **divisor** de ***b***, entonces también se dice que ***b*** es **divisible** por ***a***.

Ejemplo:

a) 8 es **divisible** por 2 porque 2 es divisor de 8, es decir, al dividir 8 entre 2, el resto es 0.

b) 20 es **divisible** por 10 porque 10 es divisor de 20, es decir al dividir 20 entre 10, el resto es 0.

c) 36 es **divisible** por 6 porque 6 es divisor de 36, es decir, al dividir 36 entre 6, el resto es 0.

Notas

a) Como habrás deducido, las relaciones ser *múltiplo* y ser *divisor* son relaciones inversas.

b) No confundas las expresiones ser múltiplo, ser divisor y ser divisible. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo:

- De la igualdad: 5 · 3 = 15, podemos deducir lo siguiente:
    - 5 y 3 son divisores de 15.
    - 15 es múltiplo de 3 y de 5.
    - 15 es divisible por 3 y por 5.

Actividades propuestas

13. A partir de la igualdad: 6 · 4 = 24, escribe las relaciones que existen entre estos tres números.

14. Escribe frases usando las expresiones: "ser múltiplo de", "ser divisor de" y "ser divisible por" y los números 10, 5 y 35.

2.2. Criterios de divisibilidad

Para ver si un número entero es divisible por otro número entero, basta con dividirlos y ver si el resto es 0. Pero cuando los números son grandes, las operaciones pueden resultar complicadas.

La tarea se simplifica si tenemos en cuenta los llamados **criterios de divisibilidad** que nos permiten saber si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número entero es divisible por **2** cuando su última cifra es 0 o cifra par.

Ejemplo:

- Los números: 312, 50, 346, 500, 780, 988 son divisibles por 2.

Criterio de divisibilidad por 3

Un número entero es divisible por **3** cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3

Ejemplo:

- El número 231 es divisible por 3 ya que 2 + 3 + 1 = 6 que es múltiplo de 3.
- El número 1002 es divisible por 3 ya que 1 + 0 + 0 + 2 = 3.

Si al sumar las cifras obtienes un número aún grande y no sabes si es o no múltiplo de 3, puedes volver a aplicar el mismo sistema, solo tienes que volver a sumar todas sus cifras:

- El número 69 es divisible por 3 ya que 6 + 9 = 15, y 15 es divisible por 3, pues 1 + 5 = 6 que es múltiplo de 3. Por tanto, 6, 15 y 69 son múltiplos de 3.
- El número 78596778696 es divisible por 3 ya que 7 + 8 + 5 + 9 + 6 + 7 + 7 + 8 + 6 + 9 + 6 = 78, y 78 es divisible por 3 pues 7 + 8 = 15, y 15 lo es.

Criterio de divisibilidad por 4

Un número entero es divisible por **4** si el número formado por las dos últimas cifras del número considerado es múltiplo de 4.

Ejemplo:

- El número 3628 es divisible por 4 ya que termina en 28, que es múltiplo de 4.

Criterio de divisibilidad por 5

Un número entero es divisible por **5** cuando termina en 0 o en 5.

Ejemplo:

- Los números 4875 y 34590 son divisibles por 5.

Criterio de divisibilidad por 6

Un número entero es divisible por **6** cuando lo es a la vez por 2 y por 3.

Ejemplo:

- El número 7332 es divisible por 6 ya que:
  - Lo es por 2 por ser par.
  - Lo es por 3, ya que sus cifras suman 15 que es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 9

Un número entero es divisible por **9** cuando la suma de sus cifras es 9 o múltiplo de 9.

Ejemplo:

- El número 6012 es divisible por 9 ya que: 6 + 0 + 1 + 2 = 9.
- El número 3903 no es divisible por 9 ya que: 3 + 9 + 0 + 3 = 15 que no es múltiplo de 9.

Criterio de divisibilidad por 10

Un número entero es divisible por **10** cuando termina en 0.

Ejemplo:

- El número 59870 es divisible por 10.

Nota

Observa que los números que son divisibles por 10 lo son por 2 y por 5 y viceversa.

Criterio de divisibilidad por 11

Un número entero es divisible por **11** cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11

Ejemplo:

- El número 80496 es divisible por 11 ya que: (8 + 4 + 6) – (0 + 9) = 11

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

15. Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 2:

23, 24, 56, 77, 89, 90, 234, 621, 400, 4520, 3411, 46295, 16392, 385500

Los números elegidos, ¿coinciden con los divisores de 2? ¿Y con los que son divisibles por 2?

16. Escribe cuatro números que sean divisibles por 10 y por 3 a la vez.

17. Sustituye A por un valor apropiado para que:

a) 24 A75 sea múltiplo de 3.

b) 1107 A sea múltiplo de 6.

c) 5 A439 sea múltiplo de 11.

18. ¿Todos los números divisibles por 3 los son por 9? ¿Y al revés? Razona la respuesta.

19. ¿Sabrías deducir un criterio de divisibilidad por 15? Pon un ejemplo.

20. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es…?	Verdadero/Falso
2567	Divisible por 2	
498650	Divisible por 5	
98370034	Divisible por 3	
78337650	Divisible por 6	
984486728	Divisible por 4	
23009845	Divisible por 11	

2.3. Obtención de todos los divisores de un número entero

En principio, para hallar los divisores naturales de un número entero N, lo vamos dividiendo sucesivamente entre 1, 2, 3, 4,..., N. De esta manera, los divisores de N serán aquellos números que lo dividan exactamente, es decir den de resto 0.

Ejemplo:

- Si queremos hallar los divisores de 18 lo tendríamos que dividir entre 1, 2, 3, 4, 5,…., 18 y ver en qué casos el resto es 0. Puedes comprobar que los divisores de 18 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Lo que ocurre es que esta forma de calcular los divisores de un número se complica mucho cuando el número es grande. Por lo que, si utilizamos los criterios de divisibilidad que hemos aprendido, sólo tendremos que hacer las divisiones por los números por los que N sea divisible.
Si la división es exacta, ***N* : *d* = *c*,** entonces el divisor (***d***) y el cociente (***c***) son divisores de ***N***, lo que nos permite acortar la búsqueda de divisores, pues de cada división exacta obtenemos dos divisores.
Terminaremos de buscar más divisores cuando lleguemos a una división en la que el cociente sea menor o igual que el divisor.

Actividades resueltas

- Veamos, como ejemplo, el cálculo de los divisores del número 54.

Ya sabemos que todo número tiene como divisores a la unidad y a él mismo 1 y 54.
Es divisible por 2. (Termina en cifra par) → 54 : 2 = 27 → Ya tenemos dos divisores: 2 y 27.
Es divisible por 3. (5 + 4 = 9, múltiplo de 3) → 54 : 3 = 18 → Ya tenemos dos divisores: 3 y 18.
Es divisible por 6. (Al ser divisible por 2 y 3) → 54 : 6 = 9 → Ya tenemos dos divisores: 6 y 9.
Es divisible por 9. (5 + 4 = 9, múltiplo de 9) → 54 : 9 = 6.
Como el cociente 6 es menor que el divisor 9, ya hemos terminado. 9 y 6 (Repetidos).
Por tanto, los divisores de 54 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 y 54.

Actividades propuestas

21. Calcula los múltiplos de 25 comprendidos entre 1 y 200.

22. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) 40 es múltiplo de 10.
b) 2 es divisor de 10.
c) 4 es múltiplo de 8.
d) 55 es divisible por 11.
e) 90 es divisor de 9.
f) 3 es divisible por 45.

23. Sustituye *x* e *y* por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 9 y por 10 a la vez: 256*x*81*y*.

24. ¿Qué único número con tres cifras iguales es divisible por 2 y por 9 a la vez?

25. Calcula todos los divisores de los siguientes números:

a) 65 b) 33 c) 60 d) 75 e) 100 f) 150

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. NÚMEROS PRIMOS

3.1. Números primos y compuestos

¿Cuáles son los divisores de 2? ¿Y del 3? ¿Y del 5? ¿Y del 7? ¿Encuentras alguna similitud entre ellos? Pues sí, los divisores de estos números son el 1 y ellos mismos. A estos números se les llama primos.

Un **número primo** es aquel número natural que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.

Se llama **número compuesto** a aquel número natural que tiene más de dos divisores, es decir, al que no es primo.

Nota

El 1 se considera que no es primo ni compuesto, ya que no verifica ninguna de las dos definiciones.

Ejemplo:

- Los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 son los diez primeros números primos.
- Números como: 22, 45, 60, 98, 345 o 39867657 son compuestos.

Actividades propuestas

26. Continúa la lista de números primos del ejemplo con 10 números primos más.

27. ¿Cuántos números primos crees que hay? ¿Crees que se acaban en un momento dado o que son infinitos?

3.2. La criba de Eratóstenes

La **criba de Eratóstenes** es un algoritmo (es decir, una secuencia de instrucciones) que permite hallar todos los números primos menores que un número natural dado.

Nosotros lo haremos para los menores o iguales que 100, es decir, vamos a averiguar cuáles son los números primos hasta el 100.

El algoritmo consta de los siguientes pasos:

a) Construimos una lista con los números del 1 al 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Inicialmente se tacha el 1, porque sabemos que no es primo.
c) El primer número que quede sin tachar ha de ser primo. Se marca y se tachan sus múltiplos.
d) Se repite de nuevo el paso c) hasta que se terminen los números.

Por tanto:

➢ Dejamos sin tachar el siguiente número, que es el 2, que por lo tanto es primo, y tachamos todos los múltiplos de 2, quedando la criba como sigue:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

➢ Conservamos el 3 porque al ser el primero que aparece sin tachar, sabemos que es primo, pero eliminamos todos los múltiplos de 3, es decir, tachamos uno de cada tres números. Nos queda una tabla así:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

➢ No necesitamos tachar el 4 porque ya está tachado, entonces vamos al 5 que es el siguiente número, por tanto no lo tachamos y eliminamos todos los múltiplos de 5 (algunos de los cuales ya estaban tachados)

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

➢ Y luego seguimos de forma análoga con el 7 y tachando todos los múltiplos de 7.
➢ Después el siguiente número no tachado es el 11 y tachamos los múltiplos de 11.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Después nos encontramos con el 13 y tachamos los múltiplos de 13.

De forma análoga vamos localizando los siguientes primos y tachando sus múltiplos hasta llegar a una tabla de la forma:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Los números que no quedan tachados en ningún paso es porque no son múltiplos de ningún número anterior (señalados aquí en rojo).

En realidad, lo que *Eratóstenes* estaba haciendo era construir una especie de "filtro" por el cual, al hacer pasar a todos los números, sólo quedaban los "primos".

Por tanto, los números primos que hay entre los primeros cien números, son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91 y 97.

Actividades propuestas

28. ¿Te atreverías a repetir la criba de Eratóstenes, pero hasta el 150?

29. Busca los distintos significados de las palabras "criba" y "algoritmo", ¿en qué más contextos los puedes utilizar?

3.3. Descomposición de un número natural en factores primos

Sabemos que un **número primo** solo tiene dos divisores: él mismo y el 1.

Así que si quisiéramos expresar un número primo como producto de otros dos, los únicos factores serían el 1 y el propio número.

Por ejemplo, si quiero expresar 13 como producto de dos números, sería:

$$13 = 1 \cdot 13 \text{ o también } 13 = 13 \cdot 1$$

Sin embargo, si el número es **compuesto**, podrá expresarse como producto de otros números que no son ni el 1 ni él mismo.

Vamos a aprender a descomponer un número natural en factores primos, lo que significa expresar un número natural como producto de otros números pero han de ser primos.

Descomponer un número natural en factores primos es expresar dicho número como un producto, donde todos sus factores son números primos.

Para descomponer el número 20 podríamos hacer: $20 = 4 \cdot 5$, pero la descomposición en factores primos no sería correcta porque el 4 no es un número primo.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Su descomposición sería $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, que se expresaría como $20 = 2^2 \cdot 5$

Para descomponer un número compuesto (pues, como hemos visto, descomponer un número primo no tiene ningún interés ni dificultad) en sus factores primos, se debe seguir el siguiente procedimiento:

a) Dividir el número natural dado por el menor primo posible utilizando para ello los criterios de divisibilidad si es posible, o realizando la división si no hay otro remedio.

b) Realizar la división, y si el cociente es divisor de dicho número primo, realizar la división.

c) Si el cociente no es divisor de dicho número primo, buscar el menor número primo posible que sea divisor, recurriendo nuevamente a los criterios de divisibilidad o continuar dividiendo.

d) Seguir con el procedimiento hasta obtener el cociente igual a uno.

Notas

1) Para realizar las divisiones utilizaremos una barra vertical, a la derecha escribimos los divisores primos y a la izquierda los cocientes.

2) Los factores primos en la expresión del número ya factorizado se suelen escribir en orden creciente.

3) Cuando ya tengamos práctica, y con números no demasiado grandes, podemos descomponer un número en producto de dos y luego cada uno de ellos en otros productos hasta que todos los factores obtenidos sean primos.

Por ejemplo: $60 = 30 \cdot 2$.

Como $30 = 15 \cdot 2$ y $15 = 3 \cdot 5$, tenemos que: $60 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ y por tanto, su descomposición es: $60=2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Actividades resueltas

1. Vamos a realizar la descomposición en factores primos del número 90:
Como 90 es múltiplo de 2, lo dividimos: $90 : 2 = 45$
Como 45 no es múltiplo de 2, buscamos el menor primo posible por el que se pueda dividir, que es 3, lo dividimos: $45 : 3 = 15$.
Como 15 se puede volver a dividir entre 3, tenemos: $15 : 3 = 5$
Por tanto: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
Esto se suele realizar como se señala en la nota de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

2. Vamos a realizar otra factorización para el número 2550:

$$\begin{array}{r|l} 2550 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Por tanto: $2550 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Actividades propuestas

30. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 40 b) 56 c) 75 d) 90

31. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 110 b) 124 c) 290 d) 366

32. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 1290 b) 3855 c) 4520 d) 5342

33. Si descomponemos en factores primos los números: 10, 100, 1000, 10000 y 100000, ¿qué es lo que observas? ¿Lo podrías hacer de forma más rápida sin necesidad de usar el método general?

34. ¿Qué ocurre al descomponer en factores primos los números 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256?

¿Podrías continuar tú la serie con 5 números más?

3.4. Máximo común divisor de varios números

Ejemplo:

- Vamos a calcular los divisores de los números 24 y 36:

Divisores de 24 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Divisores de 36 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18

¿Cuáles son los mayores divisores comunes a ambos? Los divisores comunes a ambos son varios: 1, 2, 3, 4, 6 y 12, pero el mayor de ellos es 12 y se dice que 12 es el máximo común divisor de 24 y de 36.

Se llama **máximo común divisor** de varios números naturales al mayor de los divisores comunes a todos ellos y se escribe **M.C.D.**

En el ejemplo anterior, escribiríamos: M.C.D (24, 36) = 12

En principio, parece que hallar el M.C.D no es muy complicado, solo tenemos que calcular los divisores de los números, considerar los comunes y tomar el mayor de ellos. Pero este método sólo tiene sentido con pocos números y pequeños, ya que con muchos números o con números grandes, el cálculo se complica mucho.

Por eso, vamos a calcular el máximo común divisor utilizando una serie de pasos, mediante los cuales el cálculo se simplifica muchísimo:

Cálculo del M.C.D.

1. Factorizamos los números.
2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados el menor exponente.
3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D.

Actividades resueltas

- Vamos a calcular el máximo común divisor de los números: 72, 90 y 120

1. Factorizamos cada número:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados el menor exponente: Son 2 y 3
3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D. Es decir:

$$\text{M.C.D } (72, 90, 120) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Nota

Dos números naturales siempre tienen al menos un divisor en común, el 1. Si ese es el M.C.D entonces decimos que esos números son **primos entre sí**.

Actividades propuestas

35. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:

a) 60 y 45 b) 120 y 55 c) 34 y 66 d) 320 y 80

36. Calcula el M.C.D de los siguientes números:

a) 30, 12 y 22 b) 66, 45 y 10 c) 75, 15 y 20 d) 82, 44 y 16

3.5. Mínimo común múltiplo de varios números

El **mínimo común múltiplo** de varios números naturales es el menor de los múltiplos que tienen en común, y se escribe **m.c.m.**

Actividades resueltas

Igual que con el M.C.D., se puede calcular el mínimo común múltiplo aplicando la definición que acabamos de ver. Lo que ocurre es que se trata de una forma muy "rudimentaria" y que se complica mucho para números grandes.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Vamos a calcular m.c.m (10, 15) aplicando esta definición:

Múltiplos de 10 $\rightarrow$ 10, 20, 30, 40, 50, 60, …

Múltiplos de 15 $\rightarrow$ 15, 30, 45, 60, 75, 90, …

Como vemos, múltiplos comunes a ambos son: 30, 60, 90, … pero el menor de ellos es el 30. Por tanto:

m.c.m (10, 15) = 30

Vamos a ver ahora los pasos a realizar para simplificar este cálculo y hacerlo más mecánico:

Cálculo del m.c.m.

1. Factorizamos los números
2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
3. El producto de esos factores del paso anterior es el m.c.m.

Actividades resueltas

- Veamos cómo calcular el mínimo común múltiplo de 16, 24, 40 siguiendo estos pasos:

1. Factorizamos los números:

$$16 = 2^4$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

En nuestro caso: 2^4, 3 y 5.

3. Multiplicando estos factores tenemos que:

$$\text{m.c.m}(16, 24, 40) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240.$$

Actividades propuestas

37. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

a) 60 y 45 b) 120 y 55 c) 34 y 66 d) 320 y 80

38. Calcula el m.c.m de los siguientes números:

a) 30, 12 y 22 b) 66, 45 y 10 c) 75, 15 y 20 d) 82, 44 y 16

Problemas

Pero, además, el cálculo del M.C.D. y del m.c.m. es muy útil para resolver **problemas reales**.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo:

- Una dependienta de una tienda de regalos tiene un rollo de lazo rojo de 15 m y uno azul de 20 m. Como para envolver cada regalo utiliza siempre trozos de 1 metro, y las quiere cortar en trozos de la misma longitud para tenerlas preparadas para hacer empaquetar cajas de modo que no sobre nada en los rollos. ¿Cuál es la longitud máxima que puede cortar cada rollo para hacer los paquetes?

Estamos buscando un número natural que sea divisor de 15 y de 20 a la vez. De los números que cumplan esto, escogeremos el mayor.

Esto es, precisamente, el M.C.D:

$$M.C.D.(15, 20) = 5$$

Por tanto, la longitud de cada trozo de lazo para los paquetes será de 5 m.

Ejemplo:

- El abuelo de Ana toma unas pastillas para el corazón cada 8 horas y otras para la circulación cada 12 horas. Acaba de tomar los dos medicamentos a la vez. ¿Dentro de cuantas horas volverá a tomárselos a la vez?

Estamos buscando un número de horas que será mayor o igual a 12, y múltiplo de 8 y de 12 a la vez. De todos los números que lo cumplan, nos interesa el más pequeño. Es decir, tenemos que calcular:

$$m.c.m.(8, 12) = 24$$

Por tanto, dentro de 24 horas se tomará ambos medicamentos a la vez.

Actividades propuestas

39. María y Paula tienen 25 cuentas blancas, 15 cuentas azules y 90 cuentas rojas. Quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna cuenta.

a) ¿Cuantos collares iguales pueden hacer?

b) ¿Qué número de cuentas de cada color tendrá cada collar?

40. Un autobús pasa por una parada cada 18 minutos, otro cada 25 minutos y un tercer autobús cada 36 minutos. Si a las 9 de la mañana han pasado en ese lugar los tres autobuses a la vez. ¿A qué hora vuelven a coincidir?

41. Se compran en una florería 24 rosas y 36 claveles. ¿Cuántos centros de mesa se pueden elaborar si se coloca la máxima cantidad de flores sin que sobre ninguna? ¿Cuántas rosas y claveles se colocan en cada centro de mesa?

42. Raúl tiene varios avisos en su móvil: uno que da una señal cada 60 minutos, otro que da una señal cada 150 minutos y un tercero que da una señal cada 360 minutos. Si a las 10 de la mañana las 3 señales de aviso han coincidido.

a) ¿Cuántas horas como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir?

b) ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?

43. ¿Cuál será la menor cantidad de caramelos que se puede repartir en partes iguales entre grupos de 20, 30, o 60 niños? Determina en cada caso cuántos caramelos les toca a cada niño.

CURIOSIDADES. REVISTA

¿A qué pensabas que los números eran solo eso, pues números?

Pues no, hay **números perfectos, números amigos,¡¡ hasta números gemelos!!**

Números perfectos

Son **números perfectos** los que son iguales a la suma de sus divisores, excepto él mismo.

El más pequeño es el 6: $6 = 1 + 2 + 3$

El siguiente es el 28: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Después del 28, no aparece ningún número perfecto hasta el 496, el cuarto número perfecto es el 8.128, el quinto perfecto es 33.550.336. Se observa que cada número perfecto es mucho mayor que el anterior. ¡¡Qué curioso!!

¿Habrá alguna fórmula para obtener números perfectos?

Pues sí, la descubrió Euclides y es la siguiente:

$$2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$$

Siendo n un número natural y siempre que (2^n-1) sea primo

Números amigos

Dos **números amigos** son dos enteros positivos tales que la suma de los divisores propios de uno de ellos es igual al otro. (Se consideran divisores propios de un número a todos sus divisores excepto él mismo)

Un ejemplo es el par (220, 284), ya que:

Los divisores propios de 220 son 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110, que suman 284

Los divisores propios de 284 son 1, 2, 4, 71 y 142, que suman 220

Para los pitagóricos los números amigos eran muy especiales, pues les atribuían propiedades casi mágicas.

Números gemelos

Se llaman números **primos gemelos** a los pares de números primos que son impares consecutivos (3 y 5, 11 y 13,…). ¿Puedes encontrar tú alguno más?

Se supone que el número de primos gemelos es infinito, pero está sin demostrar.

Lo que sí se puede demostrar es que existen dos números primos consecutivos cuya diferencia sea tan grande como queramos.

Números primos en la música y literatura

- El compositor francés Olivier Messiaen, inspirándose en la naturaleza, utilizó los números primos para crear música no métrica empleando sonidos con duración un número primo para crear ritmos impredecibles.
- *El curioso incidente del perro a medianoche*, de Mark Haddon, describe en primera persona la vida de un joven autista, utiliza únicamente los números primos para numerar los capítulos.
- *La soledad de los números primos*, novela escrita por Paolo Giordano, ganó el premio Strega en 2008.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplos
El sistema de numeración decimal es posicional	El valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupa en el número	El 1 no tiene el mismo valor en 1845 que en 6351
Jerarquía de las operaciones	-En las operaciones con paréntesis, primero se realizan los paréntesis y después lo demás. -En las operaciones sin paréntesis primero se realizan multiplicaciones y divisiones y luego sumas y restas.	La operación 2·3+7 tiene como resultado 13, no 20, que es lo que resultaría efectuando incorrectamente antes la suma que el producto.
- **Divisor** - **Divisible** - **Múltiplo**	- *a* es **divisor** de *b* cuando al dividir *b* entre *a* el resto es 0. - *a* es **múltiplo** de *b* o *a* es **divisible** por *b* cuando al dividir *a* entre *b* el resto es 0.	• 2 y 3 son divisores de 6. • 6 es múltiplo de 2 y de 3. • 6 es divisible por 2 y por 3.
Criterios de divisibilidad	Simplifican mucho el cálculo de la descomposición factorial y, en general averiguar cuando un número es divisible por otro.	• 3742 es divisible por 2. • 4980 es divisible por 2 y por 5. • 2957 es divisible por 3.
Número primo	Es aquel que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.	23 y 29 son números primos.
Número compuesto	Es aquel que tiene más de dos divisores, es decir, que no es primo.	25 y 32 son números compuestos.
Criba de Eratóstenes	Es un algoritmo que permite calcular todos los números primos menor que uno dado.	Los primos menores que 20 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13,17 y 19
Descomponer un número en factores primos	Es expresarlo como producto de números primos.	$60 = 2^2·3·5$
Mínimo común múltiplo de varios números	Es el menor de los múltiplos que tienen en común.	m.c.m.(18, 12)= 36
Máximo común divisor de varios números	Es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.	M.C.D.(18, 12) = 4

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS. Matemáticas 1º de ESO

Repaso números naturales

1. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:

a) 84300 b) 3333 c) 119345 d) 903711

2. ¿Qué lugar ocupa la cifra 4 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?

a) 508744 b) 653349001 c) 47092157 d) 9745

3. Saca factor común y calcula mentalmente:

a) 28 · 4 – 28 · 3 b) 30 · 4 + 50 · 2 c) 66 · 23 – 66 · 13 d) 700 · 44 – 700 · 4

4. Construye dos números con las cifras 6,7 y 8 tal que su producto sea lo más grande posible.

5. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad: D = d · c + r

a) 3844 : 45 b) 74840 : 30 c) 983035 : 981 d) 847 : 45

6.Halla, utilizando solo la calculadora, los cocientes y los restos de las siguientes divisiones:

a) 654 : 77 b) 543 : 7 c) 8374 : 85 d) 9485 : 11 e) 6590 : 41

7. Realiza las siguientes operaciones:

a) (55 + 12) · 4 b) 66 · 2 + 10 c) 55 + 70 · 3 + 11 d) 330 – 10 · 2 + 82

8. Di cuales de las siguientes operaciones tienen el mismo resultado:

a) 2 · (46 - 16) b) 2 · 46 - 16 c) 2 · 46 – 8 · 16 d) 2 · (46 + 16) e) 2 · 46 + 16

9. Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.

10. Realiza las siguientes operaciones:

a) 4 · (44 + 5) – 6 · 2 + 9 b) 2·(3 + 11) - (4 + 12) c) (18 - 4)·5 + 3 · 7 - 13 d) 5·12+(3 - 2)·4 - 3 + 4·5 - 5

11. Invente un problema en el que tengas que realizar la siguiente operación: 5 + 4(6 - 2)

12. Halla, utilizando solo la calculadora, los cocientes y los restos de las siguientes divisiones:

a) 376 : 37 b) 299 : 7 c) 3524 : 65 d) 585 : 22 e) 2060 : 51

13. Realiza las siguientes operaciones:

a) (34 + 23) · 5 b) 87 · 2 + 10 c) 55 + 65 · 3 + 11 d) 230 – 100 · 2 + 90

14. Di cuales de las siguientes operaciones tienen el mismo resultado:

a) 8 · (22 – 12) b) 8 · 22 – 12 c) 8 · 22 – 8 · 12 d) 8 · (22 + 12) e) 8 · 22 + 12

15. Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.

16. Realiza las siguientes operaciones:

a) 4·(65 + 7) – 5 · 2 + 4 b) 2·(3 + 9) - (4 + 8) c) (22 - 4)·5 + 3 · 2 - 1 d) 5 · 4 + (4 - 2) · 5 – 3 + 4 · 6 - 5

Inventa un problema en el que tengas que realizar la siguiente operación: (34 + 7) · 8

17. Sabemos que para el viaje de fin de curso son necesarios 3 autobuses, ya que viajarán 103 alumnos. En los dos primeros autobuses viajan el mismo número de estudiantes y en el tercero un alumno más que en los otros dos. ¿Cuántas personas viajan en cada autobús?

18. ¡MAGIA!

Sigue los siguientes pasos:

- Piensa en dos números naturales de una cifra.
- Multiplica el primero por 2 y súmale 8.
- Multiplica el resultado anterior por 5.
- Suma el segundo número que habías pensado al resultado anterior.
- Resta 40 al último resultado

¿Qué ocurre? ¿Es casualidad? ¿Pasará siempre lo mismo? ¿Puedes explicarlo?

Divisibilidad

19. Escribe los diez primeros múltiplos de 6 y los diez primeros múltiplos de 9. ¿Cuáles son comunes a ambos?

20. Escribe cuatro números que cumplan que la cifra de las unidades sea el triple que la de las decenas de manera que dos de ellos sean divisibles por 2 y los otros dos no lo sean.

21. Indica cuales de los siguientes números son múltiplos de 15:

1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150

22. Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 5. ¿Y de 10? ¿Cuáles coinciden? ¿Por qué?

23, 24, 56, 77, 89, 90, 234, 621, 400, 4520, 3411, 46295, 16392, 385500

23. Escribe cuatro números de cuatro cifras que cumplan que la cifra de las decenas sea el doble que la de las unidades de manera que uno de ellos sean divisible por 3, otro por 11, otro por 2 y otro por 4.

24. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es…?	Verdadero/Falso
327	Divisible por 11	
494530	Divisible por 4	
39470034	Divisible por 6	
7855650	Divisible por 3	
985555328	Divisible por 2	
20000045	Divisible por 10	

25. Haz una lista con los valores de las monedas y billetes del sistema monetario euro.

¿Figura entre ellos algún número primo? ¿Por qué crees que es así?

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

26. Pedro tiene una forma muy peculiar de dar el teléfono a sus amigos: les dice que consta de nueve cifras, que no se repite ninguna y que leyéndolo de izquierda a derecha se cumple:

- La primera cifra es un múltiplo de 3 mayor que 6.
- Las dos primeras cifras forman un múltiplo de 2 y de 5.
- Las tres primeras cifras forman un número par múltiplo de 3
- Las cuatro primeras cifras forman un número que es múltiplo de 5 pero no de 2.
- Las cinco primeras cifras forman un número múltiplo de 2 y de 3.
- Las seis primeras cifras forman un número múltiplo de 11.
- La séptima cifra es un múltiplo de 7.
- Las ocho primeras cifras forman un número impar.
- Las cuatro últimas cifras forman un múltiplo de 11.

¿Sabrías averiguar cuál es su teléfono?

27. Calcula cuántos cuadrados puedes contar en la siguiente figura:

28. Sustituye x e y por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 2 y por 11 a la vez:

256x81y

29. Sabemos que el número 1452 es múltiplo de 11. Calcula otro múltiplo de 11 solo cambiando de lugar las cifras de este número.

30. Completa en tu cuaderno con las expresiones ”ser múltiplo de”, “ser divisor de “ o “ser divisible por”:

a) 40 es ………… 10.

b) 2 es ……….. 10.

c) 4 es ……….. 8.

d) 335 es ………… 11.

e) 90 es …………. 45.

f) 3 es ……………..15.

Números primos

31. Descompón en factores primos los siguientes números: 1530, 2457 y 7440.

32. Observa la descomposición factorial de los siguientes números a, b, c, d y contesta:

$$a = 2 \cdot 32 \quad b = 2 \cdot 3 \quad c = 5 \cdot 7 \quad d = 2 \cdot 32 \cdot 7$$

a) ¿Cuál de ellos es múltiplo de a?
b) ¿Cuáles son divisores de d?
c) ¿Cuáles son primos entre sí?

33. Averigua cuales son los números cuyas descomposiciones factoriales son:

a) $x = 23 \cdot 32 \cdot 7$ b) $y = 52 \cdot 22 \cdot 11$ c) $z = 2 \cdot 52 \cdot 7$

34. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:

a) 9 y 12 b) 18 y 42 c) 8 y 15 d) 108 y 630

35. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

a) 140 y 300 b) 693 y 1485 c) 365 y 600 d) 315 y 1845

36. Calcula el m.c.m y M.C.D. de los siguientes números:

a) 24, 60 y 80 b) 60, 84 y 132 c) 270, 315 y 360 d) 240, 270 y 36

AUTOEVALUACIÓN DE 1º DE ESO

1. ¿Cuál es el resultado de 20 + 15 · 3?

a) 105 b) 65 c) 330 d) 900

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera ?

a) En una división exacta el cociente siempre es cero.

b) En el sistema de numeración decimal el valor de una cifra es independiente del lugar que ocupa.

c) Si multiplicamos dividendo y divisor por el mismo número distinto de cero, el cociente no varía.

d) El producto y la división de números naturales cumplen la propiedad conmutativa.

3. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para el conjunto de los divisores de 40?

a) D(40) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40} c) D(40) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 20, 40}

b) D(40) = {1, 2, 4, 6, 5, 8, 10, 20, 40} d) D(40) = {0, 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}

4. El número de divisores naturales de 12 es:

a) 3 b) 2 c) 4 d) 1

5. El número 315A es múltiplo de 9 para los siguientes valores de A:

a) A = 9 y A = 3 b) A = 9 y A = 1 c) A = 3 y A = 6 d) A = 9 y A = 0

6. ¿Cuál de estos números cumple que es un número de tres cifras par, divisible por 5 y por 17 y la suma de sus cifras es 7?

a) 170 b) 510 c) 610 d) 340

7. Sabiendo que a es divisible por b. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a) El número a es divisor de b.

b) El número a es múltiplo de b.

c) El número b es un múltiplo de a.

d) Los números a y b son primos entre sí.

8. El M.C.D.(54, 360, 45) es:

a) 18 b) 27 c) 45 d) 70

9. María compra en el supermercado los zumos en paquetes de 2 y los refrescos en paquetes de 3. Hoy quería comprar el mismo número de zumos que de refrescos, pero el menor número posible para no llevar mucho peso en el camino a su casa. ¿Cuántos compró?

a) 3 b) 2 c) 6 d) 12

10. Paula quiere hacer un juego de cartas cortando una cartulina de 16 cm de largo y 12 cm de ancho en cuadrados iguales de forma que sean lo más grandes posible y no sobre cartulina. ¿Cuánto medirá el lado de cada carta?

a) 4 cm b) 2 cm c) 8 cm d) 6 cm

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

LibrosMareaVerde.tk

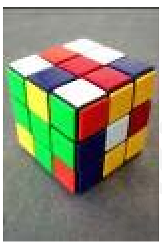
www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Ana Lorente

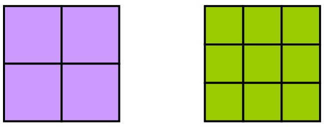
Revisora: Irene García Saavedra

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice



Para trabajar con números muy grandes, para calcular la superficie de una habitación cuadrada o el volumen de un cubo nos va a resultar útil a usar las potencias. Conoceremos en este capítulo como operar con ellas.



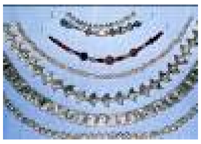
Si conocemos la superficie de un cuadrado o el volumen de un cubo y queremos saber cuál es su lado utilizaremos las raíces. En este capítulo aprenderás a usarlas con algo de soltura.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

1. POTENCIAS

1.1. Concepto de potencia. Base y exponente

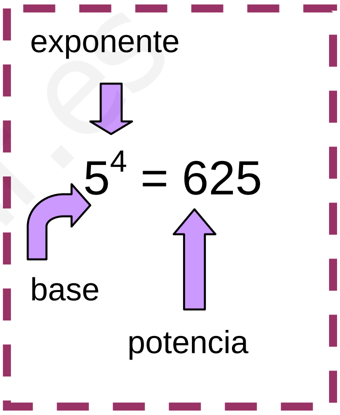
Ejemplo:



- María guarda 5 collares en una bolsa, cada 5 bolsas en una caja y cada 5 cajas en un cajón. Tiene 5 cajones con collares, ¿cuántos collares tiene?

Para averiguarlo debes multiplicar 5 x 5 x 5 x 5 que lo puedes escribir en forma de potencia: 5^4, que se lee 5 elevado a 4.

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625.$$



Una **potencia** es una forma de escribir de manea abreviada una multiplicación de factores iguales. La **potencia** a^n de base un número natural a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots^{n \text{ factores}} \ldots\ldots \cdot a \qquad (n > 0)$$

El factor que se repite es la **base** y el número de veces que se repite es el **exponente**. Al resultado se le llama **potencia.**

Actividades propuestas

1. Calcula mentalmente las siguientes potencias y escribe el resultado en tu cuaderno:

a) 4^2 b) 2^4 c) 10^5 d) 3^3 e) 1^4 f) 1000^2

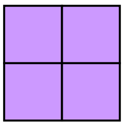
2. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:

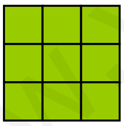
a) 3^5 b) 7^4 c) 4^5 d) 9^4 e) 25^2 f) 16^3.

1.2. Cuadrados y cubos

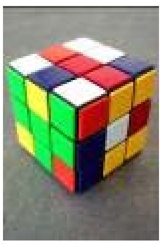
Ejemplo:

- Si un cuadrado tiene 2 cuadraditos por lado ¿Cuántos cuadraditos contiene ese cuadrado? El número de cuadraditos que caben es $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$. El área de este cuadrado es de 4 unidades. Y si tiene 3 cuadraditos por lado ¿Cuántos cuadraditos contiene ese cuadrado? El número de cuadraditos que caben es $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$. El área de este cuadrado es de 9 unidades.





$100 = 2^2 \cdot 5^2$
es un cuadrado perfecto y su raíz cuadrada es
$2 \cdot 5 = 10$.
$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
es un cuadrado perfecto y su raíz es
$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.
Son cuadrados perfectos.
$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$81 = 3^2 \cdot 3^2$
¿Lo son también 144, 324 y 400?



- ¿De cuántos cubitos está compuesto el cubo grande si hay 3 a lo largo, 3 a lo ancho y 3 a lo alto? El número de cubitos es $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$. El volumen de este cubo es 27 unidades.

Por esta relación con el área y el volumen de las figuras geométricas, las potencias de exponente 2 y de exponente 3 reciben nombres especiales:

Las potencias de exponente 2 se llaman **cuadrados** y las de exponente 3 se llaman **cubos**.

Actividades propuestas

3. Escribe en tu cuaderno el cuadrado y el cubo de los ocho primeros números naturales.

4. Indica cuáles de las siguientes potencias son cuadrados y cuáles son cubos:

a) 2^2 b) 3^2 c) 4^3 d) 5^4 e) 8^2 f) 16^3 g) 10^2

1.3. Lectura de potencias

Las potencias se pueden leer de dos maneras:

Ejemplo:

a) Así 5^2 se puede leer 5 elevado a 2 y también se lee 5 al cuadrado

b) 7^3 se puede leer 7 elevado a 3 y también se lee 7 al cubo

c) 8^4 se puede leer 8 elevado a 4 y también se lee 8 a la cuarta

d) 3^5 se puede leer 3 elevado a 5 y también se lee 3 a la quinta.

1.4. Potencias de uno y de cero

Una potencia, de cualquier base distinta de cero, elevada a cero es igual a 1.

Ejemplo:

$7^0 = 1$ $2459^0 = 1$ $1^0 = 1$.

$\boxed{3^0 = 1}$

Uno, elevado a cualquier exponente, es igual a 1.

Ejemplo:

$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ $1^{35} = 1$ $1^0 = 1$.

$\boxed{1^8 = 1}$

Cero, elevado a cualquier exponente distinto de cero, es igual a 0.

Ejemplo:

$0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ $0^{35} = 0$.

$\boxed{0^8 = 0}$

Observación: 0^0 no se sabe cuánto vale, se dice que es una *indeterminación*.

Actividades propuestas

5. Lee de dos maneras distintas las siguientes potencias:

a) 5^3 b) 7^2 c) 25^4 d) 30^2 e) 7^5 f) 7^6.

6. Calcula mentalmente:

a) 1^{2689} b) 0^{9826} c) 1927^0 d) 0^{1382} e) 1^{1000} f) 1961^0 .

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

7. Completa la tabla siguiente en tu cuaderno:

a	a^2	a^3	a^4	a^5
5				
	4			
		27		
			1	
				0

1.5. Potencias de 10. Notación científica.

Las potencias de base 10 tienen una propiedad muy particular, son iguales a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente:

Ejemplo:

$10^1 = 10$

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$

$$10^5 = 100\ 000$$

¿Sabrías hallar 10^7 sin hacer ninguna operación?

La unidad seguida de ceros es igual a una potencia de 10.

Esto nos permite expresar cualquier número en **forma polinómica** usando potencias de 10.

$$6928 = 6 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 8 = 6 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$$

Actividades propuestas

8. Busca los exponentes de las potencias siguientes:

a) $10^{\square} = 10.000$ b) $10^{\square} = 10.000.000$ c) $10^{\square} = 100$.

9. Expresa en forma polinómica usando potencias de 10:

a) 12.345 b) 6.780.912 c) 500.391 d) 9.078.280.

10. Utiliza la **calculadora** para obtener potencias sucesivas de un número. Si marcas un número, a continuación dos veces seguidas la tecla de multiplicar y después la tecla igual obtienes el cuadrado del número.

a) Compruébalo. Marca 7 * * = , ¿qué obtienes?

b) Continúa pulsando la tecla igual y obtendrás las potencias sucesivas: 7 * * = = =…

c) Utiliza tu calculadora para obtener las potencias sucesivas de 2.

d) Vuelve a utilizarla para obtener las potencias sucesivas de 31 y anótalas en tu cuaderno.

2. OPERACIONES CON POTENCIAS Y PROPIEDADES

2.1. Producto de potencias de igual base

Para calcular el **producto** de dos o más potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$9^3 \cdot 9^4 = 9^{3+4} = 9^7$$

Ejemplo:

$$3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{2+3} = 3^5$$

2.2. Cociente de potencias de igual base

El **cociente** de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base y de exponente, la diferencia de los exponentes.

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$5^7 : 5^4 = 5^{7-4} = 5^3$$

Ejemplo:

$$3^5 : 3^3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^{5-3} = 3^2$$

2.3. Elevar una potencia a otra potencia

Para elevar una **potencia** a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(6^3)^4 = 6^{3 \cdot 4} = 6^{12}$$

Ejemplo:

$$(7^5)^3 = (7^5) \cdot (7^5) \cdot (7^5) = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7^{15}$$

Actividades propuestas

11. Aplica las propiedades de las potencias en tu cuaderno:

a) $7^{10} \cdot 7^2$	b) $8^{23} \cdot 8^3$	c) $5^5 \cdot 5^3 \cdot 5^6$	d) $10^3 \cdot 10^5 \cdot 10^4$
e) $(8^3)^2$	f) $(7^2)^4$	g) $(9^0)^6$	h) $(4^3)^2$
i) $6^{10} : 6^2$	j) $2^{23} : 2^3$	k) $9^8 : 9^3$	l) $3^{30} : 3^9$
m) $12^4 : 12^4$	n) $1^{25} : 1^{25}$	o) $5^3 : 5^0$	p) $7^4 \cdot 7^0$

12. Te has preguntado por qué un número elevado a 0 es igual a 1. Analiza la siguiente operación:

$$\frac{25}{25} = 1 \text{ y también } \frac{25}{25} = \frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$$

Por ese motivo se dice que todo número distinto de cero elevado a cero es igual a uno.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

2.4. Potencia de un producto

La potencia de un **producto** es igual al producto de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplo:

$$(5 \cdot 4)^3 = 5^3 \cdot 4^3.$$

2.5. Potencia de un cociente

La potencia de un **cociente** es igual al cociente de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

Ejemplo:

$$(10 : 4)^3 = 10^3 : 4^3$$

Actividades propuestas

13. Calcula:

a) $(2 \cdot 5)^4$ b) $(32 : 4)^3$.

14. Calcula **mentalmente**

a) $2^2 \cdot 2^3$ b) $4^2 \cdot 4^2$ c) $3^2 \cdot 3^2$

d) $10^6 \cdot 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^2$ e) $1^4 \cdot 1^5 \cdot 1^{15}$ f) $0^{25} \cdot 0^5$.

15. Escribe en forma de una única potencia

a) $7^5 \cdot 7^6 \cdot 7^4$ b) $4^4 \cdot 4^6 \cdot 4^7$ c) $2^{20} \cdot 2^{17}$ d) $3^6 \cdot 3^7 \cdot 3^3$.

16. Calcula **mentalmente**

a) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2$ b) $1^4 \cdot 1^6 \cdot 1^7$ c) $10^{15} \cdot 10^5$ d) $0^2 \cdot 0^6 \cdot 0^{12}$.

17. Calcula **mentalmente**

a) $10^8 \cdot 10^3 \cdot 10^2$ b) $0^3 \cdot 0^7 \cdot 0^8$ c) $1^{46} \cdot 1^{200}$ d) $5^5 \cdot 2^5$.

18. Escribe en forma de una única potencia y calcula:

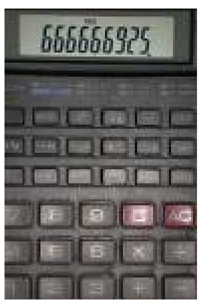
a) $2^5 \cdot 5^5$ b) $10^4 \cdot 3^4$ c) $2^{20} \cdot 5^{20}$ d) $10^{10} \cdot 5^{10}$.

19. Calcula utilizando la **calculadora**

a) $53^3 \cdot 53^2 \cdot 53$ b) $71^3 \cdot 71^2$ c) $3{,}2^2 \cdot 3{,}2$ d) $82^3 \cdot 82$.

20. Calcula utilizando la **calculadora**

a) $49^2 \cdot 49^3 \cdot 49$ b) $35^4 \cdot 35^2$ c) $0'5^3 \cdot 0'5^5$ d) $147^2 \cdot 147$.

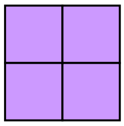


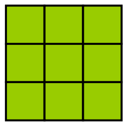
3. RAÍCES

3.1. Cuadrados perfectos

Si se quiere construir un cuadrado de lado 2, ¿cuántos cuadrados pequeños se necesitan?

Necesitamos 4. El 4 es un **cuadrado perfecto**. Observa que $2^2 = 4$.





Si queremos construir ahora un cuadrado de lado 3, ¿cuántos cuadrados pequeños necesitamos? Necesitamos 9. El 9 es también un cuadrado perfecto. Observa que $3^2 = 9$.

Ejemplo:

- ¿Cuál es el área de un cuadrado de 5 metros de lado?

Su área vale $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ metros cuadrados.

3.2. Raíz cuadrada. Interpretación geométrica

La raíz cuadrada **exacta** de un número *a* es otro número *b* cuyo cuadrado es igual al primero:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Ejemplo:

- Al poder construir un cuadrado de lado 2 con 4 cuadrados pequeños se dice que 2 es la raíz cuadrada de 4, ya que $2^2 = 4$, y por tanto decimos que 2 es la *raíz cuadrada* de 4, es decir:

$$\sqrt{4} = 2.$$

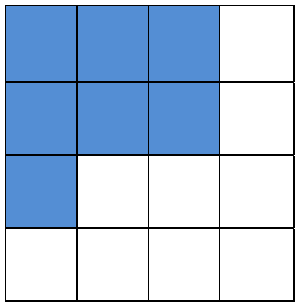
Obtener la raíz cuadrada exacta es la operación opuesta de la elevar al cuadrado.

- Por tanto, como $3^2 = 9$ entonces $\sqrt{9} = 3$.
- Al escribir $\sqrt{25} = 5$ se dice que la *raíz cuadrada* de 25 es 5.

Al signo $\sqrt{\ }$ se le denomina **radical**, se llama **radicando** al número colocado debajo, en este caso 25 y se dice que el **valor de la raíz** es 5.

Ejemplo:

- ¿Se puede construir un cuadrado con 7 cuadrados pequeños?



Observa que se puede formar un cuadrado de lado 2, pero sobran 3 cuadrados pequeños, y que para hacer un cuadrado de lado 3 faltan 2 cuadrados pequeños.

El número 7 no es un cuadrado perfecto, no tiene raíz cuadrada exacta porque con 7 cuadrados pequeños no se puede construir un cuadrado.

Ejemplo:

- Sabemos que el área de un cuadrado es 36, ¿cuánto vale su lado?

Su lado valdrá la raíz cuadrada de 36. Como $6^2 = 36$, entonces la raíz cuadrada de 36 es 6. El lado del cuadrado es 6.

Actividades propuestas

21. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt{100}$ b) $\sqrt{64}$ c) $\sqrt{81}$ d) $\sqrt{49}$ e) $\sqrt{25}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.

3.3. Raíz *n*-ésima de un número

- Como $2^3 = 8$ se dice que $\sqrt[3]{8} = 2$ que se lee: *la raíz cúbica de 8 es 2*. El **radicando** es 8, el valor de la **raíz** es 2 y 3 es el **índice**.

La ***raíz enésima*** de un número *a*, es otro número *b*, cuya potencia enésima es igual al primero.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ porque } 2^3 = 8$$

Ejemplo:

- Por ser $64 = 4^3$, se dice que 4 es la *raíz cúbica* de 64, es decir $\sqrt[3]{64} = 4$.
- Por ser $81 = 3^4$, se dice que 3 es la *raíz cuarta* de 81, es decir $\sqrt[4]{81} = 3$.

3.4. Introducir factores en el radical

Para introducir un número dentro del radical se eleva el número al índice de la raíz y se multiplica por el radicando.

Ejemplo:

$$10\sqrt{2} = \sqrt{10^2 \cdot 2} = \sqrt{200}$$

3.5. Extraer factores del radical

Para extraer números de un radical es preciso descomponer el radicando en factores:

Ejemplo:

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = 2^2\sqrt{2}$$

3.6. Suma y resta de radicales

Decimos que dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Para sumar y restar radicales, estos deben ser semejantes; en ese caso, se operan los coeficientes y se deja el mismo radical.

Cuidado, un error muy común: la raíz de una suma (o una resta) **NO** es igual a la suma (o la resta) de las raíces:

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64 + 36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$$

Actividades propuestas

22. Calcula mentalmente en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{1000}$ b) $\sqrt[3]{8}$ c) $\sqrt[4]{16}$ d) $\sqrt[4]{81}$ e) $\sqrt[3]{64}$ f) $\sqrt[5]{1}$ g) $\sqrt[3]{0}$.

23. Introducir los siguientes factores en el radical:

a) $2 \cdot \sqrt[3]{4}$ b) $3 \cdot \sqrt[3]{2}$ c) $5 \cdot \sqrt[5]{4}$ d) $10 \cdot \sqrt[3]{2}$ e) $2 \cdot \sqrt[4]{5}$.

24. Extraer los factores que se pueda del radical:

a) $\sqrt[3]{1000a^6b^3}$ b) $\sqrt[5]{100000000}$ c) $\sqrt[4]{81a^6b^5c^4}$ d) $\sqrt[3]{10000a^5b^3}$

25. Calcula:

a) $2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} - 5\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{27} + 2\sqrt{3} - \sqrt{81}$.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

NÚMEROS ENORMES

El cuerpo humano es uno de los mejores ejemplos para estudiar números de muchas cifras. Por ejemplo:

Un cuerpo humano adulto puede contener unos 50 trillones de células

Cada día nuestro organismo fabrica unos diez mil millones de glóbulos blancos que luchan contra las infecciones.

Se estima que tres mil millones de células mueren por minuto aunque la mayoría se renuevan

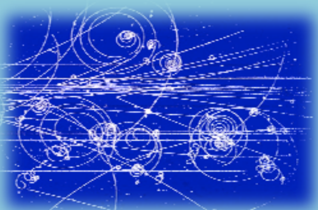
NÚMEROS PEQUEÑÍSIMOS

El **nanómetro** es la unidad de longitud que equivale a una mil millonésima parte de un metro (1 nm = 10^{-9} m).

Con esta unidad se mide, p. ej. la longitud de onda de las radiaciones infrarroja y ultravioleta .

La **nanotecnología**, es un área científica que estudia la aplicación de materiales que poseen dimensiones de unos pocos nanómetros en multitud de procesos de fabricación.

El símbolo del nanómetro es **nm**.



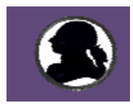
WhatsApp

El uso de esta aplicación supera los 420 millones de usuarios activos, y gestiona más de 54 mil millones de mensajes al día, de los cuales 38 mil millones son salientes y los restantes, 16 mil millones son entrantes.

POTENCIAS Y MÁS POTENCIAS

En un mueble hay seis estanterías con seis cajones cada una. Si se guardan seis llaveros en cada uno y en cada llavero hay seis llaves. ¿Cuántas llaves contiene el mueble? Expresa el resultado como potencia y calcúlalo.

CAROLINA HERSCHE



Estudiar las estrellas fue una actividad apasionante para Carolina Herschel. Trabajó como ayudante de su famoso hermano William Herschel, lo que le proporcionó conocimientos sobre astronomía.

Tras la muerte de William, sus descubrimientos sobre la posición de mil quinientas nebulosas fueron tan precisos que se le concedió la Medalla de Oro de la Royal Society of Astronomy y otras muchas distinciones internacionales.

Todo un reconocimiento a su trabajo como astrónoma que compartió con la gran científica escocesa Mary Somerville, siendo las primeras mujeres en recibir esta distinción.

RESUMEN

		Ejemplos
Potencia	Una potencia a^n de base un número real a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base	$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. 5 es la base y 3 el exponente
Cuadrados y cubos	Las potencias de exponente 2 se llaman cuadrados y las de exponente 3, cubos	5^2 es 5 al cuadrado y 5^3 es 5 al cubo.
Potencias de 1 y de 0	Cualquier número distinto de cero elevado a 0 es igual a 1. El número 1 elevado a cualquier número es igual a 1. El número 0 elevado a cualquier número distinto de cero es igual a 0.	$7^0 = 1$; $1^{35} = 1$; $0^{234} = 0$.
Potencias de base 10	Una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente. La unidad seguida de ceros es igual a una potencia de 10.	$10^3 = 1.000$ $10000 = 10^4$
Producto de potencias de igual base	Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.	$4^2 \cdot 4^3 = (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4) = 4^{2+3} = 4^5$
Cociente de potencias de igual base	Para dividir potencias de igual base, se deja la misma base y se restan los exponentes.	$7^8 : 7^5 = 7^{8-5} = 7^3$
Elevar una potencia a otra potencia	Para calcular la potencia de otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.	$(2^4)^6 = 2^{24}$
Raíz cuadrada	La raíz cuadrada de un número *a* es otro número *b* que al elevarlo al cuadrado nos da *a*.	$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{49} = 7$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS de 1º de ESO

Potencias

1. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:

a) 7^3 b) 8^4 c) 5^5 d) 3^5 e) 5^2

f) 5^3 g) 3^4 h) 1^{47} i) 9^0 j) 10^8

2. Calcula mentalmente en tu cuaderno las 5 primeras potencias de 10.

3. Expresa en forma de potencia en tu cuaderno:

a) 100000 b) 1000000 c) 10000000

4. Expresa como una única potencia y calcula el resultado:

a) $(4^3)^2$ b) $(2^2)^2$ c) $(9^0)^5$ d) $(5^3)^2$

5. Calcula mentalmente en tu cuaderno las 5 primeras potencias de 2.

6. Escribe en tu cuaderno en forma de potencia el resultado de estas operaciones:

a) $6^{10} \cdot 6^2$ b) $8^{14} \cdot 8^3$ c) $3^5 \cdot 3^3 \cdot 3^6$ d) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

e) $7 \cdot 7^4 \cdot 7^2$ f) $3^3 \cdot 3 \cdot 3^6$ g) $10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^4$ h) $2 \cdot 2 \cdot 2$

7. Escribe en forma de una única potencia el resultado de estas operaciones:

a) $7^{10} : 7^2$ b) $9^{14} : 9^3$ c) $3^8 : 3^3$

d) $5^7 : 5^3$ e) $6^4 : 6^4$ f) $10^7 : 10^5$

8. Simplifica y calcula en tu cuaderno:

a) $(3 \cdot 2^4 \cdot 5^3) : (3 \cdot 2^2 \cdot 5^2)$ b) $(6^3 \cdot 4^5 \cdot 11^3) : (2^4 \cdot 3 \cdot 11^2)$

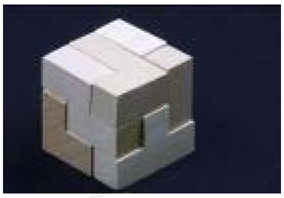
9. Escribe en tu cuaderno en forma de una única potencia:

a) $4^4 \cdot 2^5 \cdot 2^{10}$ b) $5^5 \cdot 25^6 \cdot 5^8$ c) $10^{12} \cdot 100^8$ d) $3^2 \cdot 9^5 \cdot 3^3$

10. Escribe en forma de potencias:

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ b) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ c) $11 \cdot 11 \cdot 11$ d) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

11. Dibuja en un papel cuadriculado un cuadrado de lado igual a 2 cuadrados pequeños. ¿Cuántos cuadrados pequeños tiene? Dibuja también cuadrados de lados 3, 4 y 5 cuadrados pequeños e indica cuántos cuadrados pequeños tienen. Exprésalo en forma de potencias.



Fotógrafo Francisco Javier Martí-

12. Con cubitos se forman cubos mayores de lado 2, 3, 4 y 5. ¿Cuántos cubitos son necesarios en cada caso? Exprésalo en forma de potencias.

13. Efectúa las siguientes operaciones con potencias dando el resultado en forma de potencia de una sola base, la que creas más adecuada en cada caso:

a) $(4^5 \cdot 4^2)^3 : 16$ b) $1^3 \cdot 3^3$ c) $(16^4 : 8^3)^4$

d) $(5^3 : 5^2)^3$ e) $((7^5 \cdot 7^2)^2)^3$ f) $(27^2 \cdot 9^2)^3$

14. Efectúa las siguientes operaciones dando el resultado como una única potencia:

a) $2^{10} \cdot 2^2 \cdot 2^2$ b) $(5^{10} \cdot 25^2)^4$ c) $4^3 \cdot 4^5 \cdot (4^5)^2$

d) $16^7 : 8^2$ e) $(16^7)^3 : (8^2)^2$ f) $3^4 \cdot (3^2 : 3^5)$

15. Escribe los cuadrados de diez números mayores que 10 y menores que 100.

16. En un envase de un supermercado hay 16 cajas de batidos de chocolate, y cada caja tiene 8 batidos de 200 centímetros cúbicos. Expresa el número total de batidos de cada envase en forma de potencia de 2.

17. Calculadora: Algunas calculadoras tienen la tecla $\boxed{x^2}$ que calcula cuadrados. Por ejemplo: Para calcular 23^2 se pulsa:

23 $\boxed{x^2}$

y se obtiene 529. Usa la calculadora para obtener:

a) 13^2 b) 43^2 c) 75^2 d) 82^2.

18. Escribe los cubos de los diez números mayores que 10 y menores que 100.

19. Indica cuáles de los siguientes números son cuadrados y cuáles son cubos:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16 f) 27 g) 1000

Raíces

20. Halla en tu cuaderno:

a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{81}$ d) $\sqrt{9}$

e) $\sqrt{64}$ f) $\sqrt{16}$ g) $\sqrt{225}$ h) $\sqrt{100}$

21. Calcula en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{125}$ c) $\sqrt[3]{8}$ d) $\sqrt[3]{1}$ e) $\sqrt[4]{16}$ f) $\sqrt{289}$

22. Introduce en tu cuaderno los siguientes factores en el radical:

a) $3\sqrt[3]{27}$ b) $8\sqrt[3]{4}$ c) $9\sqrt[5]{3}$ d) $5\sqrt[3]{7}$

e) $4\sqrt[5]{4}$ f) $5\sqrt[3]{2}$ g) $2\sqrt{7}$ h) $5\sqrt{7}$

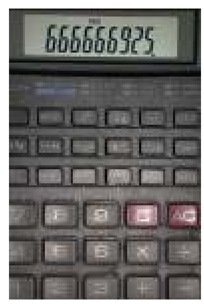
23. Extrae en tu cuaderno factores de los radicales siguientes:

a) $\sqrt[3]{729}$ b) $\sqrt{32}$ c) $\sqrt{175}$ d) $\sqrt{1200}$

e) $\sqrt{180}$ f) $\sqrt[4]{50000}$ g) $\sqrt[3]{64}$ h) $\sqrt[4]{100000}$

i) $\sqrt{50}$ j) $\sqrt{360}$ k) $\sqrt[3]{80}$ l) $\sqrt{8}$

24. Calculadora: Algunas calculadoras tienen la tecla:



$\boxed{\sqrt{\ }}$

que calcula raíces cuadradas. Por ejemplo: Para calcular $\sqrt{64}$ se pulsa:

64 $\boxed{\sqrt{\ }}$

y se obtiene 8.

Usa la calculadora para obtener las raíces cuadradas de 121, 144, 625, 2025.

25. En la pastelería quieren colocar en una caja cuadrada 196 bombones formando el mayor cuadrado posible, ¿cuántos bombones tendrá de lado? ¿Cuántos bombones se necesitan para formar el cuadrado que tenga un bombón más por lado?

26. Halla en tu cuaderno:

a) $3\sqrt{5} + 5\sqrt{20} - 7\sqrt{45}$ b) $4\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 6\sqrt{300}$

c) $5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

27. Calcula mentalmente las raíces cuadradas de 100; 10.000; 1.000.000.

28. Calcula en tu cuaderno:

a) $2 + 5^2 + (14 : 2) + (1)^7$ b) $3 + 4^2 + (12 : 6) + (1)^{14}$

c) $3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^0$ d) $4^3 + 7 \cdot 3^2$

29. Escribe en tu cuaderno las frases siguientes y complétalas:

a) La raíz cuadrada de ... ... es 10.

b) La raíz cuadrada de 36 es ... ...

c) El número al que se le halla la raíz cuadrada se llama ... ...

d) El cubo de 2 es ... ...

e) El cuadrado de ... ... es 81.

f) La raíz cuadrada aproximada de 5 es ... ... Observa con 5 cuadraditos podemos formar un cuadrado de lado 2 y nos sobra un cuadradito.

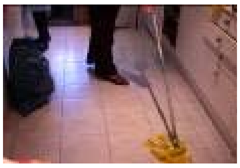
30. Se quieren plantar árboles en un jardín de forma que llenen un cuadrado. Hay 26 árboles. ¿Cuántos árboles habrá en cada lado del cuadrado? ¿Sobrará algún árbol?

31. Escribe al número 111 entre los cuadrados de dos números consecutivos.

32. Con 9 cuadrados hemos formado un cuadrado mayor de lado 3. ¿Cuántos cuadraditos debemos añadir para formar el siguiente cuadrado de lado 4? ¿Es 3 + 3 + 1? Y si ya tenemos el cuadrado de lado 4, cuántos para formar el cuadrado de lado 5?

Problemas

33. Una finca tiene forma cuadrada y mide 36 m de lado. Si el metro cuadrado se paga a 500 €, ¿cuánto vale la finca?



34. El suelo de una cocina es cuadrado y está formado por 121 losas cuadradas de 40 cm x 40 cm. Halla la medida del lado de la cocina y su área.

35. Preguntan la edad a una profesora de Matemáticas y contesta "Mi edad se obtiene si del cubo de 3 se suma el cuadrado de 2". ¿Qué edad tiene?

36. Nieves y Ana juegan tres partidas. Nieves tenía 10 cromos y Ana 80. En la primera partida ganó Nieves y elevó sus cromos al cuadrado, en la segunda perdió el cubo de 3, y en la tercera perdió el cuadrado de 4. ¿Cuántos cromos les quedan a Ana y a Nieves? ¿Quién ha ganado?

Fotógrafa: Manuela Morillo

37. Luis y Miriam tienen canicas. Luis tiene 8 elevado al cuadrado. Miriam tiene 2 elevado a la sexta potencia. ¿Quién tiene más canicas?

38. En un restaurante se puede elegir entre cuatro primeros platos, cuatro segundos y cuatro postres. ¿Cuántos menús distintos pueden hacerse?

AUTOEVALUACIÓN de 1º

1. ¿Cuál es el resultado de las tres potencias siguientes 2^4, 4^3 y 5^2

a) 16, 12, 25 b) 16, 64, 25 c) 32, 64, 10 d) 64, 32, 26

2. ¿Cuál es el resultado de la operación $4^2 + 5^2$?

a) 41 b) 64 c) 34 d) 16

3. Escribe = (igual) o ≠ (distinto) según corresponda:

a) 5^6 □ 15625 b) 1^8 □ 8 c) 14^0 □ 14 d) 10^4 □ 40

4. ¿Cuál de las respuestas corresponde a la multiplicación $3^3 \cdot 3^2 \cdot 3^5$?

a) 3^{30} b) 9^{10} c) 3^{10} d) 19683

5. ¿Cuál de las respuestas corresponde a la división $7^6 : 7^4$?

a) 7^{24} b) 7^2 c) 7^{10} d) 3/2

6. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para la operación $(5 \cdot 2 \cdot 1)^3$

a) 1000 b) 30 c) 100 d) 60

7. Elige la respuesta que corresponda al resultado de $((2)^2)^4$

a) 2^8 b) 2^6 c) 32 d) 16

8. ¿Cuál es el resultado de la operación $(18 : 2)^3$

a) 81 b) 316 c) 401 d) 729

9. Señala el número que no es cuadrado perfecto:

a) 49 b) 36 c) 25 d) 1000

10. El lado de una superficie cuadrada de 64 centímetros cuadrados mide:

a) 6 cm b) 8 cm c) 7 cm d) 7,5 cm

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

1º ESO

CAPÍTULO 4: NÚMEROS ENTEROS

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Ana Lorente

Revisora: Adela Salvador

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

Si subes en un ascensor de un edificio con garaje habrás observado que las plantas de sótano son –1, –2... Son números negativos. Cómo habrás visto, también se usan números negativos en los termómetros para indicar temperaturas por debajo de cero grados centígrados, para anotar las deudas en un balance, al indicar la profundidad de un objeto bajo el nivel del mar, en algunas latitudes y longitudes geográficas, en una fecha anterior a Cristo, incluso al decir algunas horas…

En este capítulo vas a aprender a trabajar con números positivos y negativos, a sumarlos, restarlos, multiplicarlos, dividirlos y representarlos en una recta.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. NÚMEROS ENTEROS

1.1. Números positivos, negativos y cero

Existen ocasiones de la vida cotidiana en que es preciso usar números distintos de los naturales, números positivos y negativos. Los números naturales no resultar ser suficientes.

- Por ejemplo, si tienes 20 euros y gastas 25 euros, ¿de cuántos euros dispones? Tienes una deuda de 5 €, y por lo tanto tienes una cantidad negativa de dinero.

Fíjate en estos ejemplos:

Ejemplo:

- Al hacer las cuentas de tu dinero puedes indicar con números positivos lo que recibes y con negativos lo que gastas. Así, si recibes 10 € de paga semanal lo indicarás (+10) y si gastas 1 € en un helado lo indicarás (–1) €. Si te quedas sin dinero dirás que tienes 0 €.

Ejemplo:

- Cuando hace mucho frío, por ejemplo 5 grados bajo cero, se indica diciendo que hace –5 ºC, mientras que si se dice que hace 9 grados, se indica +9 ºC.

Ejemplo:

- Se dice que el monte Niblock mide 2 976 m, mientras que una sima marina, por ejemplo la fosa de las Marianas, la más profunda del mundo, que está a 11 516 m bajo el nivel del mar, se indica diciendo que está a –11 516 m. El nivel del mar es el nivel 0.

Monte Niblock
Ilustración de INTEF.
Banco de imágenes

Actividades propuestas

1. Escribe el número que mejor representa la situación que se plantea:
a) Un avión vuela a 1 292 m de altura
b) El lunes el termómetro marcaba 6º C bajo cero
c) El coche estaba en el sótano 2
d) Sócrates nació en el año 470 antes de Cristo

1.2. Donde aparecen los números negativos

Los números negativos aparecen al considerar:

- El capital de una empresa que ha quebrado.
- Temperaturas por debajo de cero grados.
- Fechas antes de Cristo.
- Profundidad de un submarino bajo el nivel del mar.
- Se dice “las seis menos cinco” o las “ocho menos veinte”.

Actividades propuestas

2. Expresa estos enunciados con un número positivo, negativo o cero:
a) Me he gastado toda la paga.
b) Mi ciudad está a 700 m sobre el nivel del mar.
c) El garaje está en el segundo sótano.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Que son

Los **números enteros** son una ampliación de los números naturales:

- Los números enteros **positivos** son los números naturales y se escriben precedidos del signo +: +1, +2, +3, +4, +5…
- Los enteros negativos van precedidos del signo –: –1, –2, –3….
- El cero es el único número entero que no es ni negativo ni positivo y no lleva signo.

El conjunto de los números enteros se representa por **Z**.

Z =

Al escribir un número entero positivo no se suele escribir su signo: + 2 = 2; +6 = 6.

Actividades propuestas

3. Indica el significado de los números –5, 0 y +3 en cada una de las situaciones siguientes:

a) En un ascensor b) En un termómetro c) En una cuenta

1.4. Valor absoluto de un número entero

La distancia que separa un número entero del cero se define como **valor absoluto** del número.

- Es siempre un número positivo (o cero).
- Se escribe entre dos barras **| |**.

Ejemplo:

- El valor absoluto de +3 , es 3, y se escribe: |+3| = 3; el valor absoluto de –7 es 7, por tanto |–7| = 7, del mismo modo: |+8| = 8, |–5| = 5.

$$|+4| = 4$$
$$|-2| = 2$$

Actividades propuestas

4. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

a) |+9| b) |–11| c) |0| d) |–6|

1.5. Opuesto de un número entero

El **opuesto** de un número entero es otro número entero de igual valor absoluto y distinto signo.

Lo opuesto de "deber" es "tener". Lo opuesto de 5 m de altura es 5 m bajo el nivel del mar. Lo opuesto de 4º C es 4º C bajo cero, etc.

Se escribe: Op(+a) = –a, Op(–a) = +a o bien: – (+a) = –a, –(–a) = +a

Observa que...

Dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto y distinto signo.

Ejemplo: **+5 y -5**

Ejemplo:

- Op(+3) = –3 Op(–8) = +8 – (+3) = –3 –(–8) = +8

Actividades propuestas

5. Escribe en tu cuaderno:

a) |–5| b) |+7| c) Op(+6) d) Op(–4)

6. Escribe dos números que disten 4 de cero. ¿Cuánto dista de cero –3? ¿Y +3?

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

2.1. Representación en la recta numérica y orden en el conjunto de los números enteros

Los números enteros se representan en la recta numérica así:

1. Debemos trazar una recta horizontal y marcamos el **cero**, que se llama **origen**
2. Dividimos la recta en segmentos iguales, de longitud 1
3. Colocamos los números positivos a partir del cero a la derecha y los números negativos a partir del cero a la izquierda.

–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4

Ejemplo:

➢ Representa en una recta numérica: –2, 0, 4, –1, 8, –7, –3 y 1

–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

De esta forma quedan ordenados los números enteros. Cuanto más a la derecha esté un número situado en la recta numérica es mayor, y cuanto más a la izquierda esté situado, es menor.

Ejemplo:

➢ –7 está más a la izquierda que +4 por tanto –7 es menor que +4. Se escribe –7 < +4

El signo **<** se lee "menor que" y el signo **>** se lee "mayor que".

Ejemplo:

➢ Podemos ordenar números utilizando los signos anteriores:

–7 < –3 < –2 < –1 < 0 < 2 < 4 < 8.

O bien:

8 > 4 > 2 > 0 > –1 > –2 > –3 > –7.

➢ Parece raro que el 0 sea mayor que otro número, pero piensa que se tiene más si no se tiene nada, que si se debe dinero. Si el termómetro marca 0 º C no hace mucho calor, pero menos calor hace si marca: –7 º C. Es decir: 0 > –7

Actividades propuestas

7. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: –7, 3, 1, –4, 6, –5, –2 y 0.

8. Completa en tu cuaderno con el signo < (menor) o > (mayor) según corresponda:

a) –11 –6 b) –8 +4 c) +2 +10 d) +3 –9 e) –2 |–6|

9. Ordena de menor a mayor:

a) +12, –4, –15, +13 b) +3, –25, –9, –6

10. *Tales de Mileto* vivió hacia el año 600 a. C. y Newton durante el siglo XVII, ¿qué diferencia de siglos hay entre ambas fechas?

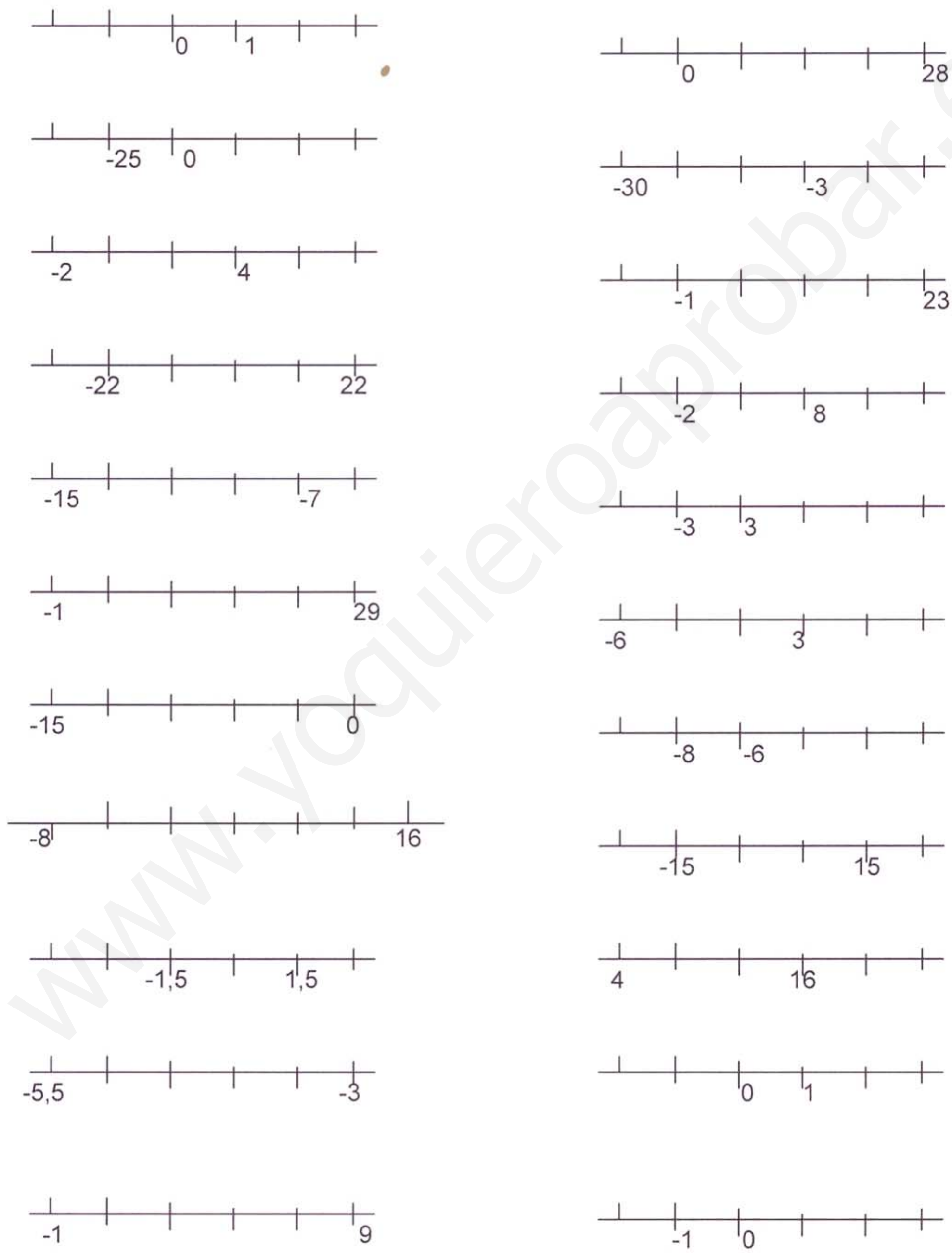
Ayuda: Representa ambas fechas en una recta numérica.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Recursos didácticos fotocopiables

Rectas numéricas

Escribe los números que faltan en los puntos señalados de las siguientes rectas numéricas:



Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

3.1. Suma de números enteros

Ejemplo:

- Tienes 12 € y te dan 5 € entonces tienes 17 €: **+12 + 5** = **+17**.
- Debes 12 € y gastas 5 € entonces acumulas una deuda de 17 €: **–12 – 5 = –17.**

Para **sumar** dos números enteros de igual signo se suman sus valores absolutos y se pone el signo de los sumandos

- Tienes 12 € pero debes 5 € entonces tienes 7 €: **–5 + 12 = +7.**
- Debes 12 € y tienes 5 € entonces debes 7 €: **–12 + 5 = –7.**

Para **sumar** dos números enteros de distinto signo se restan sus valores absolutos y se pone el signo del sumando de mayor valor absoluto

Suma de tres o más enteros

Se puede sumar 3 o más enteros mediante dos procedimientos:

1) Se suman los dos primeros sumandos y se suma el tercer sumando al resultado:

Ejemplo:

$$+8 - 5 + 2 = +3 + 2 = +5$$

En el caso de 4 sumandos se pueden sumar de dos en dos:

Ejemplo:

$$+8 - 5 + 2 - 6 = +3 - 4 = -1$$

2) Se suman los positivos por un lado (**tengo**) y los negativos (**debo**) por otro y finalmente se obtiene el resultado:

Ejemplo:

Debo tengo debo tengo debo

–12 + 19 – 4 = +19 – 16 = +3

tengo debo tengo debo tengo debo

+8 – 5 + 2 – 3 = + 10 – 8 = +2

Observa que al sumar números enteros puedes hacerlo en cualquier orden y siempre se obtiene el mismo resultado. Y puedes asociar los términos como más te convenga y el resultado será el mismo.

Actividades propuestas

11. Realiza en tu cuaderno las siguientes sumas de números enteros

a) +9 + 5 b) (–6) + (–3) c) +7 +(–4) d) (–8) + 10

12. Halla el resultado de las siguientes sumas:

a) (+12) + (+5) + (–4) b) (–8) + (–2) + (–10) c) (–15) + (–4) + (+9) d) (–3) + (+11)

13. Efectúa estas operaciones

a) (+8) + (+2) + (–2) b) (–14) + (–7) + (–11) c) (–7) + (–2) + (+6) d) (–5) + (+2)

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Resta de números enteros

Para **restar** dos números enteros se suma al primero el opuesto del segundo.

Ejemplo:

- Observa los cuatro casos siguientes:

$$(+12) – (+7) = (+12) + op(+7) = (+12) + (–7) = +5$$

$$(+12) – (–7) = (+12) + op(-7) = (+12) + (+7) = +19$$

$$(–12) – (+7) = (–12) + op(+7) = (–12) + (–7) = –19$$

$$(–12) – (–7) = (–12) + op(-7) = (–12) + (+7) = –5$$

El signo **menos delante de un paréntesis** cambia los signos de los números que hay dentro del paréntesis.

Ejemplo:

- Vamos a comprobar esa propiedad realizando de dos formas distintas las operaciones:
- Calculamos primero el paréntesis:

$$(+12) – ((–4) + 7) = (+12) – (+3) = +9$$

- Cambiamos primero los signos

$$(+12) – ((–4) + 7) = (+12) + ((+4) + (–7)) = (+12) + (–3) = +9$$

Actividades propuestas

14. Un autobús comienza el viaje con 45 pasajeros. En la primera parada se bajan 7 y se suben 12. En la segunda se bajan 10 y se suben 8, y en la tercera se bajan 4. ¿Cuántos pasajeros hay en el autobús?

Expresiones sencillas con paréntesis

El signo más (**+**) indica suma o que el número es positivo, y el signo menos (**–**) indica resta o que el número es negativo. Si se quiere escribir "*sumar al **8** el número **–3***" no es correcto escribir **8** + **–3**, lo correcto es escribir: **8** + (**–3**) añadiendo un paréntesis. Del mismo modo para escribir "***restar** al **7** el número **–3***", no es correcto **7 – –3**, se debe escribir **7 –** (**–3**) añadiendo el paréntesis.

Actividades propuestas

15. Un avión vuela a 4000 m y un submarino está sumergido a 60 m, ¿qué distancia en metros les separa?

16. El emperador romano Augusto nació el 23 de septiembre del año 63 a. C. y murió el 19 de agosto del año 14 d. C. ¿Cuántos años vivió?

17. Expresa al número 10 como suma y resta de 3 números enteros.

18. Expresa al número cero como suma y resta de cuatro números enteros.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Operaciones combinadas de suma y restas

En las operaciones de sumas y restas combinadas, como el siguiente:

$$(+2) + (-1) - (+3) - (-5) + (-8)$$

Debemos:

1º) Eliminar los paréntesis

2º) Operar adecuadamente los números resultantes

Recuerda que:

$+ (+a) = +a$

$+ (-a) = -a$

$- (+a) = -a$

$- (-a) = +a$

Ejemplo:

$(+2) + (-1) - (+3) - (-5) + (-8) = +2 - 1 - 3 + 5 = 7 - 4 = +3.$

$(+8) - (+3) + (-2) = +8 - 3 - 2 = 8 - 5 = +3.$

$(-7) + (-3) - (-5) = -7 - 3 + 5 = -10 + 5 = -5.$

$(-4) - (-7) + (-5) - (-1) = -4 + 7 - 5 + 1 = -9 + 8 = -1.$

$(-5) + (-6) - (-2) + (-3) = -5 - 6 + 2 - 3 = -14 + 2 = +12$

Actividades propuestas

19. Realiza en tu cuaderno las siguientes sumas de números enteros

a) $+8 +3$ b) $(-7) + (-9)$ c) $+10 + (-4)$ d) $(-7) +7$

20. Realiza en tu cuaderno las siguientes sumas de números enteros usando el método de agrupar:

a) $-6 + 7 - 5$ b) $+5 -7 + 9$ c) $-5 + 7 - 1$ d) $+6 - 9 -2$

21. Realiza en tu cuaderno las siguientes sumas de números enteros usando el método de tener y deber:

a) $-3 + 6 - 4$ b) $+4 - 6 + 8$ c) $-4 + 6 - 9$ d) $+5 - 8 - 9$

22. Escribe en tu cuaderno el resultado:

a) $+ (+5)$ b) $- (+6)$ c) $- (-7)$ d) $+ (-42)$

23. Realiza en tu cuaderno las siguientes sumas y diferencias de números enteros

a) $+(+4) + (-6)$ b) $-(+5) - (+7)$ c) $- (-6) + (+8)$ d) $- (+4) + (+2) - (-5)$
e) $- (+3) - (+2) - (+7)$ f) $- (+3) + (-2) + (-5) - (-6)$ g) $- (+2) - (+4) - (-5) - (-6)$

24. Realiza en tu cuaderno las siguientes operaciones:

a) $+(+6) + (-8) + (+2)$ b) $-(+7) - (+9) + (+1)$ c) $- (-8) + (+1)$ d) $- (+6) + (+4) - (-7)$
e) $- (+5) - (+4) - (+9)$ f) $- (+5) + (-4) + (-7) - (-8)$ g) $- (+4) - (+6) - (-7) - (-8)$

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.4. Producto y cociente de números enteros

Para **multiplicar** dos números enteros se debe:

1º) Multiplicar sus valores absolutos

2º) Aplicar la **regla de los signos** siguiendo lo siguiente:

Es decir, se asigna el signo **+** si ambos factores tienen el mismo signo, y el signo **–** si tienen distinto signo.

+ · + = +
– · – = +
+ · – = –
– · + = –

Ejemplo:

(+6) · (+4) = +24

(–3) · (–4) = +12

(+5) · (–3) = –15

(–7) · (+5) = –35

Ejemplo:

Luis gana 20 euros al mes, si no gasta nada, ¿cuánto ahorrará al cabo de 5 meses?

(+20) · (+5) =+100 € ahorrará al cabo de 5 meses.

Ejemplo:

El recibo mensual es de 30 euros al mes. ¿Cuánto gastará al cabo de 7 meses?

(–30) · (+7) = –210 € gastará al cabo de 7 meses.

Ejemplo:

Eva gasta 10 euros al mes en golosinas. Deja de comprarlas durante 3 meses. ¿Cuánto ha ahorrado?

(–10) · (–3) = +30 € ahorrará al cabo de 3 meses.

Para **dividir** dos números enteros se debe:

1º) Calcular el cociente de sus valores absolutos

2º) Asignar al resultado un signo mediante la siguiente regla:

+ : + = +
– : – = +
+ : – = –
– : + = –

Ejemplo:

(+25) : (+5) = +5

(–16) : (–2) = +8

(+21) : (–3) = –7

(–36) : (+9) = –4

Actividades propuestas

25. Realiza los siguientes productos y divisiones de números enteros:

a) (+3) · (+2) b) (+4) · (–7) c) (–8) · (–9) d) (–5) · (+6)

e) (+20) : (+2) f) (+21) : (–3) g) (–30) : (–2) h) (–54) : (+6)

26. Calcula en tu cuaderno los siguientes productos y divisiones de números enteros:

a) (+7) · (+3) b) (+5) · (–3) c) (–9) · (–2) d) (–6) · (+7)

e) (+30) : (+3) f) (+50) : (–5) g) (–16) : (–4) h) (–70) : (+2)

27. Efectúa mentalmente y anota los resultados en tu cuaderno:

a) (+2) · (+4) b) (+3) · (–2) c) (–6) · (–3) d) (–5) · (+8)

e) (+8) : (+4) f) (+15) : (–3) g) (–10) : (–5) h) (–60) : (+6)

3.7. Potencias de números enteros

Para calcular la **potencia** de un número entero se multiplica la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

Ejemplo:

$$(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$$

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

Conviene tener en cuenta algunas particularidades que nos ayudan a abreviar el cálculo:

Las potencias de **base negativa** y exponente **par** son números positivos.

$$(-2)^2 = +4$$
$$(-2)^3 = -8$$

Ejemplo:

$$(-5)^2 = +25$$

Las potencias de **base negativa** y exponente **impar** son números negativos

Ejemplo:

$$(-5)^3 = -125$$

3.8. Operaciones combinadas. Jerarquía de operaciones

En las operaciones combinadas es preciso tener en cuenta la **jerarquía de las operaciones**:

1ª) Se resuelven las operaciones que estén dentro de paréntesis

2º) Se realizan las multiplicaciones y las divisiones de izquierda a derecha

3º) Se efectúan las sumas y las restas

Ejemplo:

Jerarquía de operaciones	[(+4 – 5) · (+3 – 7 – 2)] + (– 9) : (–3) + 5
1) Se resuelven los paréntesis	[(–1) · (– 6)] + (– 9) : (–3) + 5
2) Se realizan multiplicaciones y divisiones	[+ 6] + (+3) + 5
3) Se efectúan sumas y restas	Resultado = 14

Actividades propuestas

28. Realiza las siguientes operaciones:

a) +4 – (+5) · (-3) b) +6 + (–9) : (+2–5) c) –3 + [–4 – (–26) : (+2)]

29. Realiza las siguientes operaciones:

a) +8 + (–1) · (+6) b) –6 + (–7) : (+7) c) +28 – (–36) : (–9–9)

d) +11 + (+7) · (+6 – 8) e) –7 – [+4 – (–6) : (+6)] f) +9+ [+5 + (–8) · (–1)]

30. Halla:

$(+1)^{2374}$ b) $(-1)^{2375}$ c) $(-3)^2$ d) $(-3)^3$

CURIOSIDADES. REVISTA

Pacto con el diablo

Una persona protestaba por su mala suerte. Había perdido su trabajo y sólo le quedaban unos euros en el bolsillo.

El diablo se le acercó y le hizo una extraña proposición:

–Yo puedo hacer que tu dinero se duplique cada vez que cruces el puente que atraviesa el río. La única condición es que yo te esperaré al otro lado y debes entregarme 24 €.

El trato parecía ventajoso. Sin embargo, cuando cruzó por tercera vez, al dar al diablo los 24 € se quedó sin nada. Había sido engañado.
¿Cuánto dinero tenía en un principio?

Un juego

Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que la suma de todas las filas y columnas sea siempre **3**.

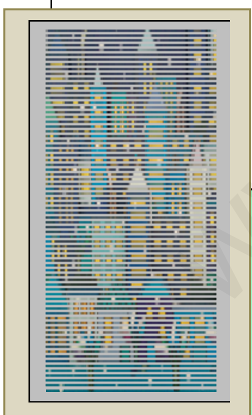
- 6		+6
	+2	
		0

Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que el producto de todas las filas y columnas sea siempre **–70**.

		+7
	- 7	
- 7		+2

Rellena con los números –**6, –5, 1, 2, 3, 5, 7, 9** y **11** de forma que todas las filas y columnas sumen lo mismo.

Rellena con los números –**8, –6, –4, –3, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** y **11** de forma que todas las filas y columnas sumen lo mismo. Dos números pueden repetirse.



SUBIR Y BAJAR

El Empire State Building, uno de los rascacielos más emblemáticos de Nueva York, necesitó para la construcción de sus 103 plantas, unos diez millones de ladrillos. En su construcción, 3000 obreros invirtieron, en 410 días, más de siete millones de horas de trabajo.

Para ascender casi sus 414 m de altura, hay que superar los 1860 escalones que llegan hasta la planta 102.

Si quisiéramos llegar hasta el centro de la Tierra bajando por una escalera semejante, el número de escalones que bajaríamos sería…………………… (el radio de la Tierra mide aproximadamente 6371 km)

RESUMEN

		Ejemplos
Números positivos, negativos y cero.	Los primeros llevan un signo + o no llevan signo, los segundos un signo -. El cero no tiene signo.	+2; 3; –5; 0
Números enteros	Z = {… –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 … }	
Valor absoluto de un número	Es su distancia al cero.	$\|+4\| = 4$; $\|-8\| = 8$.
Números opuestos	Tienen el mismo valor absoluto pero distinto signo.	Op(+5) = –5; Op(–9) = +9
Ordenación de números	Es mayor el que esté más a la derecha en la recta numérica.	410 > 20 > 0 > –21 > –43 –5 < –3
Suma de números del mismo signo	Se suman sus valores absolutos y se pone el mismo signo.	(+3) + (+9) = +12 (–4) + (–6) = –10
Suma de números enteros de distinto signo	Se restan sus valores absolutos y se pone el signo del de mayor valor absoluto.	(–2) + (+8) = +6 (–9) + (+2) = –7
Sustracción	Se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo.	(–6)–(–3) = (–6)+(+3) = –3 (-4) – (+5) = (-4) + (-5) = -9
Multiplicación	Se multiplican los valores absolutos y se aplica la regla de los signos: **+ · + = +; – · – = +; + · – = –; – · + = –**	(+4) · (+6) = +24 (–1) · (–8) = +8 (–3) · (+3) = –9 (+9) · (–3) = –27
Cociente	Se dividen sus valores absolutos y se aplica la misma regla de signos de la multiplicación.	(–16) : (–2) = +8 (+27) : (–3) = –9
Potencias de base negativa	Si el exponente es par, la potencia es positiva. Si el exponente es impar, la potencia es negativa	$(-2)^4 = +16$ $(-2)^3 = -8$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS. Matemáticas 1º de ESO

1. Calcula en tu cuaderno:

a. (+7) – (–5) – (+2) + (–6) b. –(–9) – (+7) + (–8) + (+6)

c. +(–1) – (+15) – (–13) + (+7) d. –(+2) + (–5) – (–17) – (+8) – (+4)

2. Calcula mentalmente:

a. 7 – 3 b. 6 – 14 c. 12 – 8 d. 25 – 32

e. 31 – 43 f. 56 – 63 g. –10 – 16 h. –31 – 18

i. –44 – 11 j. –18 + 18 k. –27 + 9 l. –42 + 32

3. Efectúa en tu cuaderno aplicando la regla de los signos:

a. (–6) · (–7) b. (–24) : (+4) c. (–5) · (+8) d.(+49) : (–7) e.(–7) · (–9)

f. (+48) : (+6) g. (+11) · (+6) h. (–60) : (–10) i. (–12) · (–6) j. (+75) : (–15)

4. Halla y escribe el resultado en tu cuaderno:

a. 6 – 9 – 5 + 4 – 7 + 1 b. 11 – 12 + 8 – 14 + 16 – 7

c. 1 – 3 – 8 – 12 + 4 + 19 – 2 d. –8 – 16 + 9 + 2 – 8 – 7 + 12

5. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:

a. 4 · (10 – 12) b. –6 · (5 – 1) c. 6 · (1 – 5) – 10

d. 10 + 5 · (8 – 12) e. 7 · (9 – 2) – 4 · (6 – 12) f. 5 · (12 – 9) + 4 · (2 – 17)

6. Efectúa en tu cuaderno aplicando la regla de los signos:

a. (+16) · (+3) b. (–4) · (+9) c. (+5) · (–6) d. (–8) · (–3) e. (–2) · (+5)

f. (+150) : (+15) g. (–75) : (+25) h. (+63) : (–21) i. (–40) · (+5) j. (–80) · (–10)

7. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:

a. 7 – 5 · 4 b. 3 · 8 – 6 c. 5 · 6 – 7 · 4

d. 3 · 9 – 5 · 4 e. 25 – 5 · 8 + 2 · 6 – 33 f. 6 · 7 – 40 – 4 · 8 + 57

8. Efectúa en tu cuaderno y explica qué conclusiones obtienes:

a. $(-3)^4$ b. $(+3)^4$ c. -3^4 d. $+3^4$ e. $(-3)^3$ f. -3^3

9. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:

a. 6 · (– 5) – 3 · (–7) + 20 b. –8 · (+5) + (–4) · 9 + 50

c. (–3) · (+9) – (–6) · (–7) + (–2) · (+5) d. –(–1) · (+6) · (–9) · (+8) – (+5) · (–7)

10. Representa gráficamente y ordena en sentido creciente, calcula los opuestos y los valores absolutos de los siguientes números enteros:

9, –5, –6, 4, –3, 5, –6, 0, 8

Problemas

11. En un campo de extracción de petróleo una bomba lo extrae de un pozo a 1528 m de profundidad y lo eleva a un depósito situado a 34 m de altura. ¿Qué nivel ha tenido que superar el petróleo?

12. La temperatura del aire baja según se asciende en la atmósfera, a razón de 9 ºC cada 300 metros. ¿A qué altura vuela un avión si la temperatura del aire es de −90 ºC, si la temperatura al nivel del mar en ese punto es de 15 ºC?

13. Nieves vive en la planta 8 de un edificio y su plaza de garaje está en el sótano 3. ¿Cuántas plantas separan su vivienda de su plaza de garaje?

14. La fosa de Filipinas está aproximadamente a 10 mil metros bajo el nivel del mar, y el monte Everest está a una altura de 8848 metros, ¿qué diferencia de altura hay entre el monte más alto y la sima más profunda en la Tierra?

15. Hay oscuridad absoluta en los océanos a 500 metros de profundidad, y su profundidad media es de 4 km. Expresa con números enteros esas cifras.

16. El saldo de la cartilla de ahorros de Manuel es hoy 289 €, pero le cargan una factura de 412 €. ¿Cuál es el saldo ahora?

17. Cuando Manuel fue a la Sierra a las 7 de la mañana el termómetro marcaba −7 ºC, aunque a la hora de comer el termómetro había subido 9 ºC, y a la hora de volver había vuelto a bajar 5 ºC, qué temperatura hacía a esa hora?

18. ¿Cuál era la temperatura inicial de un termómetro que ahora marca ahora 12 ºC después de haber subido 9 ºC?

19. Lourdes tenía ayer en su cartilla –169 euros y hoy tiene 56 euros. ¿Ha ingresado o ha gastado dinero? ¿Qué cantidad?

20. ¿Cuál es la diferencia de temperatura que debe soportar una persona que pasa de la cámara de conservación de las frutas, que se encuentra a 4 ºC, a la de la carne congelada, que está a −18 ºC? ¿Y si pasara de la cámara de la carne a la de la fruta?

21. Hace 5 semanas Ana tenía dinero ahorrado, si cada semana se gasta 7 euros, ¿cuánto dinero tenía más del que tiene ahora?

22. Roma fue fundada en el año 73 antes de Cristo, y el acueducto de Segovia se construyó hacia el año 160 d. C. ¿Cuántos años habían pasado desde la fundación de Roma?

AUTOEVALUACIÓN de 1º de ESO

1. El resultado de la operación: {(–1 + 3) · (–2 – 3) + (–5 + 1) : (+3 – 2)} es:

a) –10 b) +14 c) –14 d) +16

2. El producto (–2) · (–6) · (–5) es:

a) menor que –100 b) mayor que 0 c) menor que –4 d) mayor que 50

3. El resultado de la operación (+4) · (–2) · (–5) · (–1) es:

a) – 12 b) + 40 c) – 40 d) +20

4. Desde el año 63 a. C. hasta el 77 d. C. transcurren:

a) 140 años b) 14 años c) –14 años d) –40 años

5. ¿Cuál de las siguientes potencias es positiva?

a) $(-2)^5$ b) $(-3)^2$ c) $(-4)^3$ d) $(-1)^7$

6. Un termómetro ha subido 10 ºC, luego ha bajado 8 ºC y, por último, marca –5 º C. La temperatura inicial era:

a) –7 ºC b) –13 ºC c) +3 ºC d) –3 ºC

7. Al viajar desde una latitud de 6º Sur hasta otra de 40º Norte, la variación de latitud es:

a) 46º Norte b) 34º Sur c) 34º Norte d) 50º Sur

8. La temperatura es de 15 ºC bajo cero y, a lo largo del día, el termómetro sube 20 ºC y después desciende 8º C. Por tanto la temperatura final es:

a) – 2 ºC b) – 3 ºC c) 2 ºC d) 3 ºC

9. Si estás situada en el punto –9 de la recta numérica de los números enteros, ¿qué movimientos te llevan hasta +5?

a) +13 – 3 + 4 b) – 1 + 14 c) + 18 – 5

10. El resultado de la operación (+3) – (+5) + (–4) – (–7) + (–6) es:

a) –2 b) –3 c) –4 d) –5

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CAPÍTULO 5: FRACCIONES

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

Seguro que ya has utilizado fracciones. Seguro que sabes que media docena de huevos son seis huevos, que un cuarto de hora son 15 minutos, incluso que tres cuartos de kilo son 750 gramos.

En este capítulo vas a familiarizarte con el uso de las fracciones aprendiendo a operar con ellas, a sumarlas, restarlas, multiplicarlas y dividirlas. Para ello aprenderás cuando dos fracciones son equivalentes o se pueden simplificar…

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. INTERPRETACIÓN DE UNA FRACCIÓN

1.1. Introducción

En una fiesta de cumpleaños, cuando llega el momento de repartir la tarta, una persona se encarga de dividirla en porciones. Esa persona está fraccionando la tarta. Cada porción es una fracción de tarta. Además, como quien parte y reparte disfruta de la tarta en último lugar, esa persona intentará que todos los trozos sean prácticamente idénticos, se propondrá dividir la tarta en fracciones iguales.

En muchas situaciones cotidianas hemos de fraccionar. Para pelar una manzana es normal partirla primero por la mitad. De esta forma resultan dos mitades de manzana.

En otras ocasiones nos encontramos con algo que ya ha sido dividido. En Europa, un partido de baloncesto tiene una duración de 40 minutos distribuidos en cuatro tiempos, llamados cuartos, de 10 minutos cada uno. Cada tiempo es una fracción del partido completo, concretamente una cuarta parte.

Algunas fábricas funcionan durante las 24 horas del día. Si cada operario trabaja ocho horas al día, todo encaja si fraccionamos el día en tres turnos de ocho horas cada uno. Así, cada turno se corresponde con la tercera parte de un día completo, es un tercio de día.

Los objetos matemáticos llamados **fracciones** permiten que las personas se entiendan al hablar de trozos, partes o porciones, tanto si se ha troceado en porciones idénticas como si son de diferentes tamaños.

1.2. Términos de una fracción

Comencemos con un ejemplo. Si dividimos un bizcocho en 5 partes iguales, cada porción es una de las cinco partes en las que hemos dividido el bizcocho. Escribiremos

$$\frac{1}{5}$$

para representar cada trozo, es decir, cada una de las cinco quintas partes del bizcocho.

Si colocamos en una bandeja tres de esas porciones, sobre la bandeja habrá tres quintas partes de bizcocho:

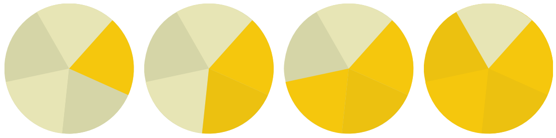
Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\frac{3}{5}$$

El bizcocho completo puede representarse de la siguiente forma

$$\frac{5}{5}=1$$

ya que está formado por cinco quintas partes.



En general, una ***fracción*** es una expresión de la forma

$$\frac{m}{n}$$

donde tanto *m* como *n* son números naturales. Para referirnos a ella diremos "*m partido de n*"; *m* recibe el nombre de ***numerador*** y *n* es el ***denominador***.

Para valores bajos del denominador, disponemos de denominaciones alternativas:

$\frac{1}{2}$, un medio $\frac{2}{3}$, dos tercios $\frac{2}{4}$, dos cuartos

$\frac{3}{5}$, tres quintos $\frac{7}{10}$, siete décimos

A partir del valor 11 del denominador:

$\frac{8}{11}$, ocho onceavos $\frac{6}{23}$, seis veintitresavos

Una pregunta natural que surge es la siguiente: ¿es posible, o tiene sentido, que sea mayor el numerador que el denominador? La respuesta es afirmativa, sí. Vamos a comprobarlo en la siguiente circunstancia: imaginemos que hemos comprado dos pasteles idénticos, se ha partido cada uno de ellos por la mitad y alguien se ha comido una mitad. ¿Cómo expresamos la cantidad de pasteles que quedan? Diríamos que quedan tres mitades de pastel, es decir

$$\frac{3}{2} \text{ de pastel}$$

¿Cómo podríamos entender la fracción 12/7 (doce séptimos)? Supongamos que disponíamos de varias naranjas iguales y que cada una de ellas ha sido dividida en siete porciones iguales. Si después de comer parte de la fruta solo quedan doce porciones, entonces tendremos

$$\frac{12}{7} \text{ de naranja}$$

Las fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador reciben el nombre de **fracciones impropias**. Las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador reciben el nombre de **fracciones propias.**

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Con lo que se ha expuesto hasta este momento, intuimos que las fracciones están muy ligadas a la acción de dividir. El denominador de una fracción señala en cuántas porciones se ha dividido cada unidad, lo que nos lleva a conocer el tamaño de cada porción.

Ejemplos:

$\frac{6}{9}$, tenemos 6 porciones, cada una de ellas de tamaño 1/9. Son seis novenas partes.

$\frac{11}{5}$, hay 11 trozos de tamaño 1/5. Son once quintas partes.

$\frac{7}{12}$, hay 7 porciones de tamaño 1/12, siete doceavas partes.

¿Qué representa la fracción 4/1? Indica 4 porciones de tamaño 1/1 = 1, es decir 4 porciones de algo que no ha sido dividido, con lo cual son 4 unidades:

$$\frac{4}{1} = 4$$

Al principio, en el ejemplo del bizcocho, surgió la fracción 5/5. Representa 5 porciones de tamaño 1/5, cinco quintas partes. Eso es un bizcocho completo:

$$\frac{5}{5} = 1$$

A la vista de lo anterior podemos escribir **unas primeras propiedades de las fracciones** que sirven de conexión con los números naturales:

$$\frac{m}{1} = m$$

$$\frac{m}{m} = 1$$

Actividades propuestas

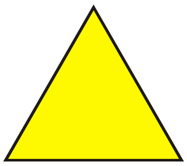
1. En cada una de las siguientes imágenes escribe en tu cuaderno la fracción que representan los quesitos de la caja:

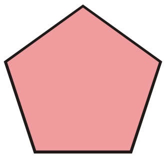
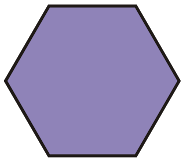
a) 
b) 
c) 
d) 

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

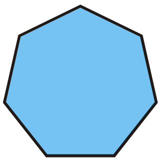
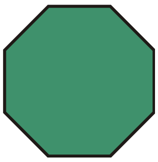
2. Copia en tu cuaderno y divide adecuadamente cada una de las siguientes figuras para poder destacar, en cada caso, la fracción indicada:

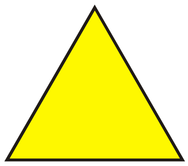
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{6}$



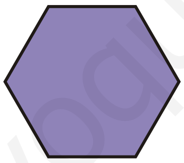
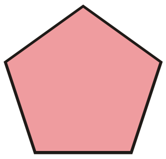



e) $\frac{7}{7}$ f) $\frac{1}{4}$ g) $\frac{2}{3}$ h) $\frac{3}{4}$



i) $\frac{4}{9}$ j) $\frac{1}{4}$ k) $\frac{7}{10}$ l) $\frac{5}{8}$


3. Señala diferentes acciones que obliguen a repartir, o subdividir, cierto objeto, ente o actividad.

4. Encuentra situaciones de la vida cotidiana en las que aparezcan fracciones.

2. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

2.1. Suma y resta de fracciones con igual denominador

En el comentado ejemplo del bizcocho, después de dividirlo en 5 partes iguales situamos en una bandeja 3 de esas porciones. De esa manera, sobre la bandeja había tres quintas partes de bizcocho:

$$\frac{3}{5}$$

Como cada porción es 1/5 de bizcocho, al colocar uno a uno cada trozo sobre la bandeja lo que estamos haciendo es añadir, sumar:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

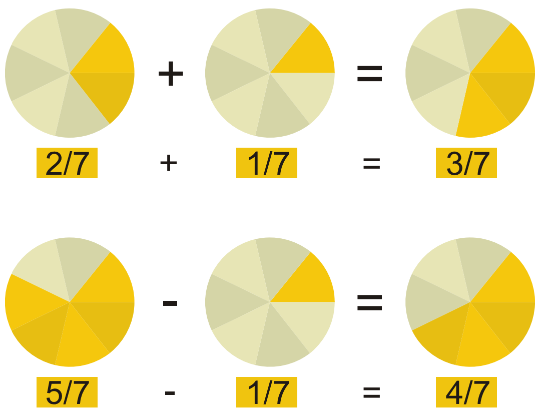
Cuando alguien coja uno de los trozos de la bandeja, en ella quedará una porción menos de bizcocho:

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

Vemos que resulta sencillo sumar y restar fracciones cuando tienen el mismo denominador. Basta realizar la suma, o la diferencia, con los numeradores y mantener el denominador común.

Ejemplos:

- $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$
- $\frac{6}{11}+\frac{13}{11}=\frac{6+13}{11}=\frac{19}{11}$
- $\frac{8}{10}-\frac{7}{10}=\frac{8-7}{10}=\frac{1}{10}$
- $\frac{9}{4}-\frac{5}{4}=\frac{9-5}{4}=\frac{4}{4}=1$



En general,

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$$

$$\frac{m}{n}-\frac{r}{n}=\frac{m-r}{n}$$

Para poder sumar fracciones con diferente denominador antes debemos saber qué son *fracciones equivalentes*.

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

5. Calcula:

a) $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$ b) $\frac{4}{13}+\frac{6}{13}$ c) $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}$ d) $\frac{7}{1}+\frac{2}{1}$ e) $4+\frac{8}{1}$ f) $1+\frac{2}{5}$

6. Halla:

a) $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$ b) $\frac{15}{11}-\frac{7}{11}$ c) $1-\frac{4}{7}$ d) $\frac{8}{3}-1$

2.2. Fracciones equivalentes

Si hemos cortado una pera en dos mitades y otra en cuatro cuartas partes, vemos que

$$2 \text{ peras} = \frac{2}{2}+\frac{4}{4}=1+1$$

Cuando solo nos quede una porción de la primera pera y una porción de la segunda pera, es decir, una mitad de pera más una cuarta parte de pera, tendremos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \text{ pera}$$

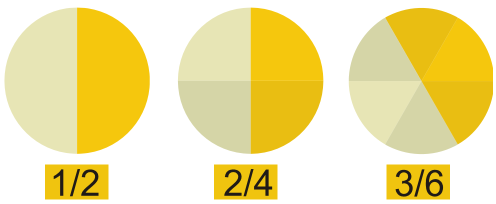
Pero si partimos la mitad de pera en dos trozos iguales, esa mitad de pera se convierte en dos cuartas partes de pera

$$\frac{1}{2}=\frac{2\cdot 1}{2\cdot 2}=\frac{2}{4}$$

y, de esta forma,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Si analizamos lo anterior, apreciamos que las fracciones 1/2 y 2/4 son **equivalentes**, representan la misma proporción. Es lo mismo media pera que dos cuartos de pera. Además, transformar una fracción en otra equivalente nos va a permitir sumar, o restar, fracciones con distinto denominador:



$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

A partir de una fracción m/n, si r es cualquier número natural entonces la fracción **($m\cdot r$)/($n\cdot r$)** es equivalente a m/n,

$$\frac{m\cdot r}{n\cdot r}=\frac{m}{n}$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

Una fracción equivalente a 5/3 es, por ejemplo, 20/12, ya que

$$\frac{5}{3}=\frac{5\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{20}{12}$$

Actividades propuestas

7. Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las que figuran a continuación:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{4}$ c) $\frac{24}{9}$

8. Decide si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes:

a) $\frac{4}{3}$ y $\frac{12}{9}$ b) $\frac{2}{5}$ y $\frac{10}{15}$ c) $\frac{4}{8}$ y $\frac{3}{6}$

2.3. Suma y resta de fracciones con distinto denominador

Para realizar la suma

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$$

deberemos buscar y encontrar dos números naturales *r* y *s* que nos transformen cada una de las anteriores fracciones en otras **equivalentes**, (*m·r*)/(*n·r*) y (*p·s*)/(*q·s*), de forma que las nuevas fracciones tengan el **mismo denominador**, es decir, que *n·r* = *q·s*, en cuyo caso

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m\cdot r}{n\cdot r}+\frac{p\cdot s}{q\cdot s}=\frac{m\cdot r}{n\cdot r}+\frac{p\cdot s}{n\cdot r}=\frac{m\cdot r+p\cdot s}{n\cdot r}$$

Como hay muchas parejas de números naturales *r* y *s* que hacen posible esa igualdad, buscaremos los más pequeños.

Puesto que *n·r* es múltiplo de *n* y *q·s* es múltiplo de *q*, alcanzaremos *r* y *s* a partir del **mínimo común múltiplo** de *n* y *q*.

$$n\cdot r=q\cdot s=m.c.m.(n,q)$$

El valor de *r* resulta de dividir ese mínimo común múltiplo entre *n* y el de *s* se obtiene al dividir el mínimo común múltiplo entre *q*.

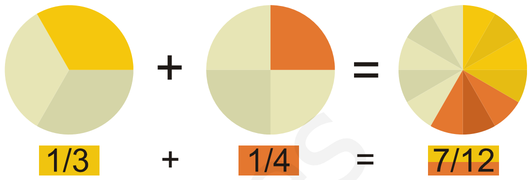
Ejemplo:

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{6}$$

Los denominadores son diferentes, 4 y 6. Su mínimo común múltiplo es 12. Al dividir 12 entre 4 nos da 3 y al hacerlo entre 6 obtenemos 2.

$$\frac{5}{4}=\frac{5\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{15}{12}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{2}{12}$$



Finalmente

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{15}{12}+\frac{2}{12}=\frac{17}{12}$$

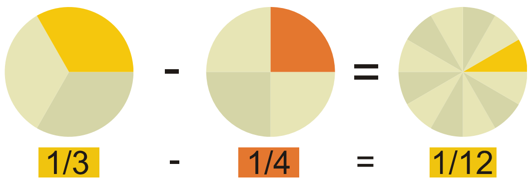
Ejemplo:

$$\frac{5}{7}-\frac{2}{3}$$

Los denominadores son diferentes, 7 y 3. Su mínimo común múltiplo es 21. Al dividir 21 entre 7 nos da 3 y al hacerlo entre 3 obtenemos 7.

$$\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{15}{21}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}=\frac{14}{21}$$



$$\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{15}{21}-\frac{14}{21}=\frac{15-14}{21}=\frac{1}{21}$$

Actividades propuestas

9. Realiza las siguientes sumas de fracciones:

a) $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}+\frac{2}{9}$ c) $\frac{7}{8}+\frac{3}{2}$ d) $\frac{13}{100}+\frac{17}{24}$

10. Calcula:

a) $\frac{3}{14}-\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{6}-\frac{3}{5}$ c) $\frac{11}{10}-\frac{11}{24}$ d) $\frac{10}{21}-\frac{1}{3}$

2.4. Propiedades de la suma de fracciones

Propiedad conmutativa. Nos indica que no importa el orden en el que coloquemos los sumandos:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{p}{q}+\frac{m}{n}$$

Ejemplo:

$$\frac{5}{6}+\frac{4}{9}=\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3}+\frac{4\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{15}{18}+\frac{8}{18}=\frac{23}{18}$$

$$\frac{4}{9}+\frac{5}{6}=\frac{4\cdot 2}{9\cdot 2}+\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3}=\frac{8}{18}+\frac{15}{18}=\frac{23}{18}$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden sumar tres o más fracciones. Basta hacerlo agrupándolas de dos en dos:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)=\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)+\frac{r}{s}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{9}{12}+\frac{2}{12}\right)=\frac{1}{2}+\frac{11}{12}=\frac{6}{12}+\frac{11}{12}=\frac{17}{12}$$

También:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{6}=\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{6}=\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{15}{12}+\frac{2}{12}=\frac{17}{12}$$

Actividades propuestas

11. Halla:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}+\frac{5}{6}+\frac{5}{3}$ c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ d) $\frac{7}{6}+\frac{3}{10}+\frac{1}{4}$

12. Calcula:

a) $\frac{11}{8}+\frac{5}{6}-\frac{4}{3}$ b) $\frac{11}{3}-\frac{5}{12}+\frac{13}{18}$ c) $\frac{15}{6}-\frac{4}{9}-\frac{1}{2}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. PRODUCTO Y COCIENTE DE FRACCIONES

3.1. Reducción de una fracción. Fracciones irreducibles

Anteriormente dijimos que 1/2 y 2/4 son fracciones equivalentes. Por la misma razón, otras fracciones equivalentes son 3/5, 6/10 y 24/40 puesto que

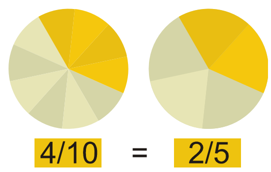
$$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{6}{10}$$

$$\frac{6}{10}=\frac{6\cdot 4}{10\cdot 4}=\frac{24}{40}$$

$$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 8}{5\cdot 8}=\frac{24}{40}$$

Una manera alternativa de destacar estas relaciones consiste en decir que las fracciones 3/5 y 6/10 son reducciones de la fracción 24/40, mientras que 3/5 es una reducción de 6/10. Podemos intuir que la fracción 3/5 no puede reducirse más, es una **fracción irreducible**.

En general, si tenemos dos fracciones *m/n* y *p/q* diremos que *m/n* es una reducción de *p/q* si *m<p* y el resultado de dividir *p* entre *m* es el mismo que el de *q* entre *n*. Dicho de otro modo, si tenemos una fracción *p/q* y *d* es un número natural que divide tanto a *p* como a *q*, si *p:d = r* y *q:d = s*, entonces las fracciones *r/s* y *p/q* son equivalentes y *r/s* es una reducción de *p/q*. En este caso:



$$\frac{r}{s}=\frac{r\cdot d}{s\cdot d}=\frac{p}{q}$$

Obtendremos la mayor reducción de una fracción *p/q* al dividir tanto *p* como *q* entre su **máximo común divisor**.

Una fracción es **irreducible** cuando el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1.

Ejemplo:

Una reducción de 24/40 es 6/10, pues la obtenemos al dividir tanto 24 como 40 entre 4.

Como el máximo común divisor de 24 y 40 es 8, la mayor reducción de la fracción 24/40 es 3/5. Al ser el máximo común divisor de 3 y 5 igual a 1, la fracción 3/5 es irreducible, tal y como era de esperar.

Ejemplo:

En ocasiones, una fracción se reduce a un número natural como, por ejemplo, la fracción 30/6. Así es, pues el máximo común divisor de 30 y 6 es igual a 6, y al dividir 30, el numerador, entre 6 obtenemos 5, y al dividir 6, el denominador, también entre 6 obtenemos el número 1:

$$\frac{30}{6}=\frac{5}{1}=5$$

Dos fracciones son equivalentes si se reducen a una misma fracción irreducible. Por esta razón:

Dos fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ son **equivalentes** si

$$m \cdot q = n \cdot p$$

Actividades propuestas

13. Reduce las siguientes fracciones a su expresión irreducible:

a) $\frac{48}{18}$ b) $\frac{14}{49}$ c) $\frac{8}{8}$ d) $\frac{60}{148}$

14. Determina si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes:

a) $\frac{4}{8}$ y $\frac{3}{6}$ b) $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{9}$ c) $\frac{5}{8}$ y $\frac{105}{168}$

3.2. Producto de fracciones

Podemos multiplicar un número natural por una fracción si razonamos de la siguiente manera:

2 · 5/7 o 5/7 · 2 lo leemos como "dos veces la fracción 5/7". Así:

$$2 \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \cdot 2 = \frac{5}{7} + \frac{5}{7} = \frac{5+5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{7} = \frac{10}{7}$$

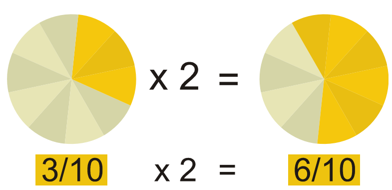
De otra forma, 5/7 indica 5 porciones de tamaño 1/7. El producto 2 · 5/7 señala dos veces 5 porciones de tamaño 1/7, esto es, 2 · 5 = 10 porciones de tamaño 1/7, es decir, 10/7.

En general,

$$a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{n}$$

¿Cómo podemos entender el producto de dos fracciones ambas con numerador igual a uno? Por ejemplo, 1/2 · 1/3:

Al ser 1/3 = 1 · 1/3, 1/3 es UNA porción de algo que se ha dividido en tres partes, de igual manera que 2/3 = 2 · 1/3 representa DOS porciones de algo que se ha dividido en tres partes. Análogamente, 1/2·1/3 nos apunta hacia la mitad de una porción de algo dividido en tres partes, es decir, una sexta parte, puesto que primero dividimos en tres porciones y luego cada una de ellas en dos:



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

En general,

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}=\frac{1}{n\cdot q}$$

A la vista de lo anterior:

Para **multiplicar** dos fracciones multiplicaremos sus numeradores entre sí y lo mismo haremos con los denominadores:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$$

Justificación:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{q}\cdot p\right)=m\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}\right)\cdot p=m\cdot\left(\frac{1}{n\cdot q}\right)\cdot p=\frac{m\cdot 1}{n\cdot q}\cdot p=\frac{m}{n\cdot q}\cdot p=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{4\cdot 3}{7\cdot 6}=\frac{12}{42}$$

Podemos simplificar, reducir, el resultado:

$$\frac{12}{42}=\frac{4\cdot 3}{7\cdot 6}=\frac{2\cdot 2\cdot 3}{7\cdot 2\cdot 3}=\frac{2\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{2}{7}$$

Actividades propuestas

15. Calcula:

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$ b) $7\cdot\frac{5}{9}$ c) $8\cdot\frac{1}{7}$ d) $\frac{6}{10}\cdot\frac{11}{2}$

16. Multiplica las siguientes fracciones y reduce, simplifica, el resultado:

a) $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}$ b) $\frac{9}{12}\cdot\frac{4}{3}$ c) $\frac{14}{6}\cdot\frac{5}{21}$ d) $\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{3}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Propiedades del producto de fracciones

Propiedad conmutativa. Nos indica que no importa el orden en el que coloquemos los factores:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}$$

Ejemplo:

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{5}=\frac{7\cdot 11}{9\cdot 5}=\frac{77}{45}$$

$$\frac{11}{5}\cdot\frac{7}{9}=\frac{11\cdot 7}{5\cdot 9}=\frac{77}{45}$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden multiplicar tres o más fracciones. Basta hacerlo agrupándolas de dos en dos:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}\right)=\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\right)\cdot\frac{r}{s}=\frac{m\cdot p\cdot r}{n\cdot q\cdot s}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{3}{48}$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Cuando en una multiplicación uno de los factores viene dado como la suma de dos fracciones como, por ejemplo,

$$\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{4}\right)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$\frac{6}{5}+\frac{1}{4}=\frac{6\cdot 4}{5\cdot 4}+\frac{1\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{24}{20}+\frac{5}{20}=\frac{24+5}{20}=\frac{29}{20}$$

$$\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{3}\cdot\frac{29}{20}=\frac{8\cdot 29}{3\cdot 20}=\frac{2\cdot 4\cdot 29}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{2\cdot 29}{3\cdot 5}=\frac{58}{15}$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)$$

Comprobemos que obtenemos el mismo resultado:

$$\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{8\cdot 6}{3\cdot 5}+\frac{8\cdot 1}{3\cdot 4}=\frac{8\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 4\cdot 1}{3\cdot 4}=\frac{8\cdot 2}{5}+\frac{2\cdot 1}{3}=\frac{16}{5}+\frac{2}{3}=\frac{16\cdot 3}{5\cdot 3}+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{48}{15}+\frac{10}{15}=\frac{48+10}{15}=\frac{58}{15}$$

En general, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}\right)$$

Conviene comentar que la anterior propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente denominamos **sacar factor común**:

$$\frac{12}{5}+\frac{22}{15}=\frac{2\cdot 6}{5}+\frac{2\cdot 11}{5\cdot 3}=\left(\frac{2}{5}\cdot 6\right)+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{11}{3}\right)=\frac{2}{5}\cdot\left(6+\frac{11}{3}\right)$$

Actividades propuestas

17. Realiza los productos indicados:

a) $\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}\right)$ b) $\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{1}{4}$ c) $\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}$

18. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)$ b) $\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{9}{8}$ c) $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{8}\right)$

3.4. Cociente de fracciones

Son cuatro las operaciones básicas de los números naturales y enteros, a saber: la suma, la resta o diferencia, el producto o multiplicación y la división. Para las fracciones ya han sido establecidas las tres primeras, nos falta la división.

Recordemos cómo podemos entender la división de dos números naturales. Por ejemplo, la división de 6 entre 2, cuyo resultado es 3, podemos entenderla como que si tenemos 6 objetos y los agrupamos de dos en dos resultarán 3 grupos.

De esta forma, la división de 6 (o de la fracción equivalente 6/1) entre la fracción 3/4 nos llevará al número de grupos que obtenemos al repartir 6 unidades en agrupaciones formadas por 3/4 partes:

- 6 unidades, ¿a cuántas cuartas partes equivalen? Respuesta: a 24, ya que 6·4 = 24. De esta manera, 6 = 6/1 = 24/4
- si colocamos 24 cuartas partes de tres en tres, ¿cuántas agrupaciones tenemos? Respuesta: 8, pues 24:3 = 8

Es decir,

$$6 : \frac{3}{4} = \frac{6}{1} : \frac{3}{4} = 8$$

Observemos que

$$8 = \frac{6}{1} : \frac{3}{4} = \frac{6 \cdot 4}{1 \cdot 3} = \frac{6}{1} \cdot \frac{4}{3}$$

En general,

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}$$

Ejemplo:

$$\frac{12}{5} : \frac{4}{7} = \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{12 \cdot 7}{5 \cdot 4} = \frac{84}{20} = \frac{21 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{21}{5}$$

Actividades propuestas

19. Calcula:

a) $\frac{7}{2} : \frac{3}{4}$ b) $\frac{11}{6} : \frac{2}{5}$ c) $\frac{5}{7} : \frac{5}{7}$ d) $\frac{6}{4} : \frac{12}{8}$ e) $\frac{16}{5} : 3$

20. Realiza las siguientes divisiones y reduce, simplifica, el resultado:

a) $\frac{15}{2} : \frac{5}{4}$ b) $\frac{6}{5} : \frac{1}{5}$ c) $\frac{4}{3} : \frac{4}{7}$ d) $15 : \frac{3}{5}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. OTROS ASPECTOS DE LAS FRACCIONES

4.1. Comparación de fracciones

Puesto que las fracciones son números, es interesante que sepamos compararlas, que podamos dictaminar cuál es mayor o cuál es menor. Para averiguarlo podemos transformarlas en otras fracciones equivalentes, de manera que tengan el mismo denominador, y, a la vista de los numeradores, ya es muy sencillo decidir.

Ejemplo:

¿Cuál de las siguientes fracciones es la mayor? 5/4 y 7/5

Los denominadores son 4 y 5. Su mínimo común múltiplo es 20:

$$\frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{25}{20}$$
$$\frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{28}{20}$$

Conclusión: 7/5 es mayor que 5/4

Ejemplo:

Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor:

$$\frac{7}{4}, \frac{19}{12}, \frac{17}{10}$$

Los denominadores son 4, 12 y 10. Su mínimo común múltiplo es 60 ya que

$$4 = 2 \cdot 2$$
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$10 = 2 \cdot 5$$
$$m.c.m.(4,12,10) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$$\frac{7}{4} = \frac{7 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{105}{60}$$
$$\frac{19}{12} = \frac{19 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{95}{60}$$
$$\frac{17}{10} = \frac{17 \cdot 6}{10 \cdot 6} = \frac{102}{60}$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Conclusión:

$$\frac{19}{12} < \frac{17}{10} < \frac{7}{4}$$

Podemos comprobar que si

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$$

debe cumplirse que

$$m \cdot q < p \cdot n$$

Actividades propuestas

21. En cada uno de los siguientes pares de fracciones, indica cuál es la mayor:

a) $\frac{7}{8}$ y $\frac{3}{2}$ b) $\frac{7}{8}$ y $\frac{10}{11}$ c) $\frac{2}{3}$ y $\frac{14}{21}$ d) $\frac{11}{18}$ y $\frac{14}{21}$

22. Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor:

$$\frac{12}{7}, \frac{4}{7}, \frac{8}{5}, \frac{6}{11}$$

4.2. Descomposición de una fracción

Cuando tenemos una fracción *m/n* impropia, es decir, una fracción en la que es mayor el numerador *m* que el denominador *n*, podemos descomponerla como la suma de un número natural más otra fracción en la que ya es mayor el denominador. Para ello basta con dividir el numerador entre el denominador y tener en cuenta tanto el resto como el cociente.

La fracción 26/3 es impropia al ser mayor su numerador. Al dividir 26 entre 3 obtenemos un cociente igual a 8 y un resto igual a 2. Por ello:

$$\frac{26}{3} = \frac{(8 \cdot 3) + 2}{3} = \frac{8 \cdot 3}{3} + \frac{2}{3} = 8 \cdot \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 8 \cdot 1 + \frac{2}{3} = 8 + \frac{2}{3}$$

Luego 26/3 es igual a ocho unidades más dos terceras partes. En algunas ocasiones, en lugar de escribir

$$8 + \frac{2}{3}$$

se opta por la expresión

$$8\frac{2}{3}$$

lo que se denomina ***número mixto***, pues recoge su *parte entera* y su *parte fraccionada*. Hay que tener cuidado con no confundirlo con

$$8 \cdot \frac{2}{3}$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

23. Escribe como número mixto las fracciones:

a) $\frac{11}{6}$ b) $\frac{34}{5}$

4.3. Fracciones negativas

En este capítulo todos los ejemplos de fracciones han sido a partir de dos números naturales, o enteros positivos; uno, el numerador, y, otro, el denominador. Igual que en otros cursos, después de estudiar los números naturales, se dio paso a los números negativos y, con ellos, a los números enteros, vamos a introducirnos ahora en las fracciones negativas. No se ha hecho así desde el principio del capítulo porque parece conveniente adquirir antes cierta soltura y conocimientos sobre fracciones positivas.

En adelante, una fracción será una expresión de la forma *m/n* donde tanto *m* como *n* son números enteros, y el denominador, *n*, es distinto de cero.

Las conocidas reglas de los signos de los números enteros, a la hora de multiplicar o dividir, también son válidas para las fracciones. Por ello un convenio extendido sobre el aspecto de una fracción consiste en que el denominador sea un número entero positivo, es decir, un número natural.

Vamos a exponer una serie variada de ejemplos en los que aparecen fracciones negativas y algunas de sus propiedades.

Ejemplos:

- $\frac{(-5)}{(-4)} = \frac{(-1)\cdot 5}{(-1)\cdot 4} = \frac{5}{4}$
- $\frac{(-2)}{3} = \frac{2}{(-3)} = -\frac{2}{3} = (-1)\cdot\frac{2}{3} = (-2)\cdot\frac{1}{3}$
- $\frac{(-3)}{4} + \frac{6}{5} = \frac{6}{5} + \frac{(-3)}{4} = \frac{6}{5} - \frac{3}{4} = \frac{6\cdot 4}{5\cdot 4} - \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5} = \frac{24}{20} - \frac{15}{20} = \frac{24-15}{20} = \frac{9}{20}$
- $-\frac{7}{2} - \frac{4}{3} = -\left(\frac{7}{2} + \frac{4}{3}\right) = (-1)\cdot\left(\frac{7}{2} + \frac{4}{3}\right) = (-1)\cdot\left(\frac{7\cdot 3}{2\cdot 3} + \frac{4\cdot 2}{3\cdot 2}\right) = (-1)\cdot\left(\frac{21}{6} + \frac{8}{6}\right) = (-1)\cdot\frac{29}{6} = -\frac{29}{6}$
- $\frac{3}{8} - \frac{5}{6} = \frac{3\cdot 3}{8\cdot 3} - \frac{5\cdot 4}{6\cdot 4} = \frac{9}{24} - \frac{20}{24} = \frac{9-20}{24} = \frac{-11}{24} = -\frac{11}{24}$

Actividades propuestas

24. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $-\frac{5}{3} - \frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7} + \frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5} + \frac{(-1)}{8}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

¿Sabías que ya los egipcios usaban fracciones?

En el papiro de Ahmes (o de Rhind), de hace casi cuatro mil años, se usaban fracciones. Usaban algunas fracciones como 2/3, pero sobre todo usaban las fracciones unitarias, aquellas en las que el numerador es un 1: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5… Para representar, por ejemplo, 1/5, escribían sobre su número 5 un punto o un círculo: . Busca en Internet Ahmes o Rhind para conocer más sobre el uso que los egipcios daban a las fracciones.

Quebrado

Aunque se encuentra en claro desuso, una manera alternativa para referirse a las fracciones es la palabra ***quebrados***.

Reflexiona brevemente y ofrece una justificación a esa denominación.

Posteriormente busca en un diccionario la definición de la palabra *quebrado* y compárala con tu argumentación.

Observa que tanto "*quebrado*" como "*fracción*" significan "*roto*".

Crucigrama

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						

HORIZONTALES

1. Numerador de un cuarto. Los 3/4 de 6500.
2. Diferencia entre 1/4 y 2/8. Los 11/3 de 69.
3. Producto de 2/5 por 5/2. Cociente entre 8/3 y 2/3. Parte entera del número mixto de 22/5.
4. Denominador de una fracción equivalente a 7/240 de numerador 21. Parte entera de 71/3 como número mixto.

VERTICALES

1. Denominador de una décima. Parte entera de 39/5 expresado como número mixto.
2. Denominador que resulta al simplificar 130/120.
3. Numerador del cociente entre 6/5 y 11/7. Diferencia entre 3/2 y 6/4.
4. Los 7/4 de 488.
5. Numerador de simplificar 146/22. Las 3/4 partes de 8/3.
6. Producto entre 15/2 y 2/3. Numerador de la suma de 7/5 y 3/4.

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

NOCIÓN	*DESCRIPCIÓN*	*EJEMPLOS*
Fracción	Expresión de la forma $\frac{m}{n}$ donde tanto *m*, el *numerador*, como *n*, el *denominador*, son números enteros. Leeremos "*m partido de n*".	$\frac{5}{6}$, cinco sextos $\frac{30}{19}$, treinta diecinueveavos
Fracciones impropias	Fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador.	$\frac{2}{3}, \frac{15}{25}, \frac{10}{11}$
Suma y resta de fracciones con igual denominador	Realizamos la suma, o la diferencia, con los numeradores y mantenemos el denominador común.	$\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=\frac{3+6}{5}=\frac{9}{5}$ $\frac{13}{7}-\frac{8}{7}=\frac{13-8}{7}=\frac{5}{7}$
Fracciones equivalentes	Son fracciones que representan la misma proporción.	$\frac{10}{25}$ y $\frac{6}{15}$
Suma y resta de fracciones con distinto denominador	Transformamos cada fracción en otra equivalente de manera que las nuevas fracciones tengan el mismo denominador, y las sumamos.	$\frac{9}{10}+\frac{7}{15}=\frac{9\cdot 3}{10\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{15\cdot 2}=$ $=\frac{27}{30}+\frac{14}{30}=\frac{27+14}{30}=\frac{41}{30}$
Fracción irreducible	Una fracción es irreducible cuando el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1.	$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{10}{9}$
Producto de fracciones	Multiplicamos sus numeradores entre sí y lo mismo hacemos con los denominadores.	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{9}=\frac{5\cdot 1}{6\cdot 9}=\frac{5}{54}$
Cociente de fracciones	Multiplicamos la primera fracción por la que resulta de intercambiar el numerador y el denominador de la segunda fracción.	$\frac{3}{11}:\frac{5}{7}=\frac{3}{11}\cdot\frac{7}{5}=\frac{3\cdot 7}{11\cdot 5}=\frac{21}{55}$
Comparación de fracciones	Podemos determinar cuál es la mayor de dos o más fracciones reduciendo a común denominador.	$\frac{18}{11}<\frac{7}{4}<\frac{15}{8}$
Fracciones negativas	Podemos extender la noción de fracción para que tanto el numerador como el denominador puedan ser números enteros, distinto de cero el denominador.	$\frac{(-3)}{(-7)}=\frac{(-1)\cdot 3}{(-1)\cdot 7}=\frac{3}{7}$ $-\frac{4}{5}=\frac{(-4)}{5}=\frac{4}{(-5)}=(-1)\cdot\frac{4}{5}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS. Matemáticas 1º de ESO.

1. Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:
   a) Si el denominador de una fracción es un número primo entonces la fracción es irreducible.
   b) Si el denominador de una fracción no es un número primo entonces la fracción no es irreducible.
   c) Hay fracciones irreducibles cuyo denominador no es un número primo.
   d) Cualquier fracción puede ser reducida a una fracción irreducible.

2. Ana ha recibido de sus padres 36 euros y su hermano menor, Ernesto, la tercera parte de lo que ha percibido Ana. ¿Qué cantidad recibió Ernesto?

3. A una fiesta de cumpleaños asisten 6 personas. La tarta ya ha sido dividida en seis porciones iguales cuando, sin esperarlo, llegan 2 personas más. Describe qué se ha de hacer con la tarta para que todas las personas coman la misma cantidad de tarta.

4. Si en la fiesta anterior en lugar de llegar repentinamente 2 personas se marchan 2, antes de distribuir la tarta ya cortada en 6 porciones iguales, comenta lo que se puede hacer con la tarta para que las 4 personas que se han quedado reciban la misma fracción de tarta, y no quede nada de ella.

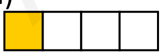
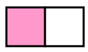
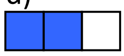
5. Una persona dispone de 1172 euros y ha decidido invertir tres cuartas partes de esa cantidad en cierto producto bancario. ¿Cuál es el importe de lo invertido?

6. Una figura maciza pesa ocho kilos y medio. ¿Cuánto pesará una figura y media?

7. Dibuja en tu cuaderno para cada caso un rectángulo, que será la unidad, y colorea en él la fracción correspondiente a:

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{7}{9}$

8. Expresa mediante una fracción la parte coloreada de cada figura:

a) 
b) 
c) 
d) 

9. Calcula:

a) $\frac{1}{13}$ de 39 b) $\frac{1}{10}$ de 50 c) $\frac{1}{7}$ de 35 d) $\frac{1}{3}$ de 21

10. Convierte en fracción los siguientes números mixtos:

a) $4\frac{1}{3}$ b) $5\frac{2}{9}$ c) $3\frac{4}{7}$ d) $2\frac{1}{4}$ e) $7\frac{3}{11}$

11. Pilar ha leído las $\frac{3}{4}$ partes de un libro de 300 hojas. Javier ha leído los $\frac{6}{8}$ del mismo libro. ¿Cuántas páginas han leído cada uno? ¿Cómo son las fracciones utilizadas?

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

12. Decide calculando mentalmente cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes a $\frac{1}{3}$:

a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{-1}{-3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{7}{21}$ e) $\frac{5}{15}$

13. Si se congela. el agua aumenta su volumen en 1/10. Metes en el congelador unas botella de un litro y medio, ¿cuánto debes dejar vacío para que no explote?

14. Escribe en tu cuaderno las siguientes operaciones y luego calcula el resultado:

a) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}$ c) $\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{2}$ d) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}$

15. En una obra de teatro han trabajado los 3/8 del alumnado de 1º A, 1/2 del de 1º B y 4/5 del de 1º C. ¿En qué clase han trabajado más estudiantes? Ordena las clases según que hayan trabajado más o menos estudiantes.

16. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes pares de fracciones para que resulten equivalentes:

- $\frac{5}{3}$ y $\frac{}{60}$
- $\frac{6}{8}$ y $\frac{21}{}$

17. Expresa de forma numérica y calcula el resultado:

a) Un cuarto de tres tercios

b) Dos séptimos de la mitad

c) La mitad de la quinta parte

18. En un almacén quieren envasar tres mil litros con botellas de 1/3, ¿cuántas botellas necesitan?

19. Copia en tu cuaderno y rellena los lugares vacíos:

a) $\frac{13}{6}+\frac{1}{6}=\frac{}{6}=\frac{}{3}$; b) $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{}{8}=\frac{}{4}$; c) $\frac{14}{9}+\frac{}{9}=\frac{10}{3}$; d) $\frac{}{10}-\frac{7}{10}=\frac{2}{5}$

20. Escribe en forma de fracción irreducible las cantidades:

a) 30 minutos de una hora; b) 45 minutos de una hora; c) 4 meses de un año;

d) 6 meses de un año; e) 3 días de una semana; f) 6 horas de un día.

21. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes fracciones de forma que resulten impropias:

a) $\frac{}{5}$ b) $\frac{34}{}$ c) $\frac{}{2}$

22. Finaliza las siguientes frases para dos fracciones con numerador y denominador positivos:

- si tienen el mismo numerador entonces es mayor la que tiene el ……………… denominador
- si tienen el mismo denominador entonces es mayor la que tiene el ……………… numerador

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN de 1º de ESO

1. Señala la fracción que no sea impropia:

a) $\frac{16}{9}$ b) $\frac{15}{4}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{9}{7}$

2. Indica cuál de las fracciones siguientes es equivalente $\frac{7}{9}$:

a) $\frac{21}{28}$ b) $\frac{63}{81}$ c) $\frac{15}{18}$ d) $\frac{28}{35}$

3. La suma $\frac{2}{3}+\frac{7}{2}+\frac{5}{6}$ es :

a) 5 b) $\frac{29}{6}$ c) $\frac{14}{3}$ d) $\frac{11}{2}$

4. El lugar vacío que falta es: $\frac{13}{6}+\frac{1}{6}=\frac{\ }{6}=\frac{\ }{3}$

a) 14 y 8 b) 13 y 7 c) 12 y 6 d) 14 y 7

5. Con 6 kilos de azúcar, ¿cuántos azucareros de 2/3 kg podemos rellenar?

a) 18 b) 4 c) 9 d) 12

6. Se sabe que un refresco con gas al congelarlo aumentará su volumen 1/9 respecto al que tiene a temperatura ambiente. Para congelar 2 litros de esa bebida, el envase debe tener una capacidad al menos de:

a) 2,12 litros, b) 2,22 litros, c) 2,23 litros d) 1,95 litros

7. Elige la fracción que sea el resultado de la división $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$

a) $\frac{8}{9}$ b) $\frac{6}{12}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{7}{8}$

8. En cada hoja de un álbum caben seis fotografías. He llenado ya con fotos 7 hojas y me quedan los $\frac{2}{3}$ de mis fotografías por colocar, en total quiero pegar:

a) 81 fotos b) 42 fotos c) 147 fotos d) 126 fotos

9. La cuarta parte de los $\frac{2}{3}$ de 600 equivale a:

a) 120 b) 100 c) 150 d) 400

10. Indica cuál de las siguientes fracciones es mayor que $\frac{6}{8}$:

a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{4}{7}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

Si prestamos atención a nuestro entorno, es fácil que nos encontremos con *"números que tienen decimales"*: al medir la temperatura corporal con un termómetro, en los precios de los productos de una empresa que leemos en una hoja de publicidad, etc.

En este tema vamos a trabajar con ellos, y lo haremos a partir de lo que hemos aprendido en el capítulo anterior sobre las fracciones. A lo largo de este capítulo veremos que hay fuertes conexiones entre esos dos entes matemáticos: fracciones y expresiones decimales.

1. PRIMERAS EXPRESIONES DECIMALES

1.1. Introducción. Números decimales

En el capítulo anterior surgieron las fracciones para que nos sea posible y fácil hablar de porciones, partes, en las que algo ha sido dividido. Sin embargo, en la vida cotidiana nos encontramos con otras formas que expresan cantidades que no se corresponden con unidades completas.

Ejemplo:

- En cualquier mercado vemos precios de un kilo de fruta tales como 2'38 €/kg. Un kilo de esa fruta nos cuesta 2 euros y 38 céntimos de euro, cantidad que se encuentra entre 2 y 3 euros, es mayor que 2 y menor que 3. Como cada céntimo de euro es la porción de euro que resulta al dividir un euro en cien partes iguales, tenemos una primera conexión entre la expresión 2'38 y las fracciones:

$$2'38 = 2 + \frac{38}{100} = \frac{238}{100}$$

que interpretamos como que 2 euros y 38 céntimos de euro es lo mismo que 238 céntimos de euro.

Ejemplo:

- En algunas calles o plazas de las ciudades se sitúan paneles que nos informan de la temperatura ambiente. En días calurosos la temperatura puede alcanzar, por ejemplo, los 37'4 grados. Esta temperatura es superior a 37 grados e inferior a 38 grados. Podemos decir que disponemos de dos números: a la izquierda de la coma el número 37, a la derecha de la coma el 4. Ellos nos informan de que la temperatura exacta de la calle es de 37 grados más 4 décimas de grado, esto es, 37 grados más lo que resulta de dividir un grado en diez partes iguales y tomar cuatro de ellas:

$$37'4 = 37 + \frac{4}{10}$$

Ejemplo:

- Si pesamos en una balanza la fruta que hemos escogido y vemos que su peso es de 1'692 kg sabremos que tenemos más de un kilogramo de fruta y menos de 2 kilogramos. La cantidad exacta es un kilogramo de fruta más 692 milésimas de kg. Una milésima de kilogramo (recibe el nombre de *gramo*) es cada una de las porciones de kilogramo que resultan tras dividir un kilogramo en mil partes iguales.

$$1'692 = 1 + \frac{692}{1000} = \frac{1692}{1000}$$

Esta igualdad nos indica que 1'692 kg es lo mismo que 1692 milésimas de kg, es decir, 1692 gramos.

En las tres situaciones anteriores han aparecido **números decimales**.

Un **número decimal** consta de dos partes:

- su **parte entera**, el número que está a la izquierda de la coma
- y su **parte decimal**, lo que se encuentra a la derecha de la coma

Como podemos apreciar, la parte entera de un número decimal recoge cierta cantidad de unidades completas, mientras que su parte decimal señala el número de porciones que hay que añadir, porciones que resultan de dividir una unidad en 10, 100, 1000, etc., partes iguales según tengamos, respectivamente, 1, 2, 3, etc., cifras decimales. Por ello, según vimos en el capítulo anterior, un número decimal está conectado con las descomposiciones de fracciones cuyo denominador es potencia del número 10.

Ejemplos:

$$2'9 = 2 + \frac{9}{10}$$

$$2'09 = 2 + \frac{9}{100}$$

$$0'3 = 0 + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

$$0'035 = 0 + \frac{35}{1000} = \frac{35}{1000}$$

Actividades propuestas

1. Busca otras situaciones de la vida real donde aparezcan números decimales.

1.2. Conversión de una expresión decimal a fracción

Ya hemos visto que una expresión decimal se convierte en la fracción cuyo numerador coincide con el número decimal, tras eliminar la coma, y el denominador es el número 1 seguido de tantos ceros como cifras tenía la parte decimal del número en cuestión.

Ejemplo:

$$73'18 = 73 + \frac{18}{100} = \frac{7318}{100}$$

Números decimales equivalentes. Si en un número decimal su parte decimal finaliza con el número cero podemos suprimir ese cero sin que alteremos la cantidad que expresa el número decimal.

Ejemplos:

$$3'90 = 3 + \frac{90}{100} = 3 + \frac{9}{10} = 3'9$$

$$76'0 = 76 + \frac{0}{10} = 76 + 0 = 76$$

$$8'200 = 8 + \frac{200}{1000} = 8 + \frac{2}{10} = 8'2$$

Recíprocamente, en ocasiones puede resultar conveniente, debido al contexto, añadir algún cero a la parte decimal:

$$46'54 = 46 + \frac{54}{100} = 46 + \frac{540}{1000} = 46'540$$

Actividades propuestas

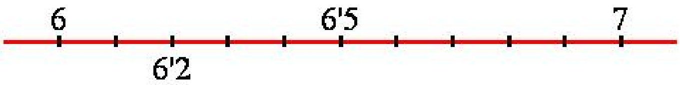
2. Transforma en fracciones los siguientes números decimales:

a) $0'87$ b) $0'0701$ c) $30'56$ d) $17'03$ e) $10'050$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Representación en la recta numérica

La relación que hemos alcanzado entre los números decimales y las fracciones nos permite *situarlos* en la recta numérica. Para representar un número decimal como 6’2 en primer lugar nos fijamos en su parte entera, 6, lo que nos informa de que 6’2 se encuentra entre los números naturales 6 y 7. Como su parte decimal posee una sola cifra, son 2 décimas, deberemos dividir el segmento de extremos 6 y 7 en diez partes iguales para, finalmente, situar 6’2 sobre la segunda de las marcas.



Si el número decimal tiene más de una cifra decimal, tendremos que realizar una subdivisión más exigente. El número decimal 3’76 tiene dos cifras decimales. Al ser su parte entera 3, se encuentra ubicado entre los números 3 y 4. La posición exacta la alcanzaríamos si dividiésemos el segmento de extremos 3 y 4 en 100 partes iguales y buscamos, a partir del número 3, la centésima número 76.

Actividades propuestas

3. Sitúa en la siguiente recta los números 8’43, 8’48, 8’51 y 8’38

Comparación entre expresiones decimales.

Decidir si un número decimal es mayor o menor que otro es bastante sencillo. Si sus partes enteras son distintas, ellas ya determinan cuál es mayor.

Ejemplo:

- 13’66 es mayor que 11’4, pues el primero tiene parte entera 13 y el segundo 11.

Si tienen igual parte entera pasamos a mirar su primera cifra decimal, la de las decenas. Si son diferentes, ya podemos decidir.

Ejemplo:

- 7’25 es menor que 7’3, ya que tienen la misma parte entera y la primera cifra decimal de 7’3 es mayor que la primera cifra decimal de 7’25.

En general, si coinciden las partes enteras buscamos la primera cifra decimal en la que los números difieren. La que sea mayor pertenecerá al mayor número decimal.

Actividades propuestas

4. Señala qué número es el mayor para cada una de las siguientes parejas:

a) 0'87 y 0'789 b) 3'58 y 4'1 c) 7'005 y 7'1 d) 32'4 y 27'9

5. Escribe dos números decimales que sean, simultáneamente, mayores que 6’147 y menores que 6’2.

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.4. Suma y resta de expresiones decimales

Debido a que hemos relacionado las expresiones decimales con las fracciones, vamos a trasladar las operaciones entre fracciones a operaciones entre expresiones decimales.

Suma de expresiones decimales. Si para sumar fracciones debíamos primero alterar, para que coincidieran, los denominadores, ahora basta con que las partes decimales tengan el mismo número de cifras. Si no lo tienen desde un principio, añadimos los ceros que sean necesarios para ello.

Ejemplos:

$$4'76+12'15=4+\frac{76}{100}+12+\frac{15}{100}=16+\frac{76+15}{100}=16+\frac{91}{100}=16'91$$

$$24'7+83'15=24'70+83'15=107'85$$

$$53'39+56=53'39+56'00=109'39$$

En estos ejemplos hemos sumado las partes enteras (en el primero de ellos, 3 + 12 = 15), y las partes decimales (76 + 15 = 91). La operación suma no siempre será exactamente así.

Ejemplos:

- Si una persona tiene 4 euros y 37 céntimos de euro y otra tiene 5 euros y 82 céntimos ¿cuánto dinero tienen entre las dos? Tenemos que sumar. En total tienen 4 + 5 = 9 euros y 37 + 82 = 119 céntimos. Pero, como 100 céntimos de euro es lo mismo que 1 euro, 119 céntimos de euro es igual a 1 euro más 19 céntimos. De esta forma, esas dos personas tienen 9+1=10 euros y 19 céntimos.

$$4'37+5'82=4+\frac{37}{100}+5+\frac{82}{100}=9+\frac{119}{100}=$$

$$=9+\frac{100+19}{100}=9+\frac{100}{100}+\frac{19}{100}=9+1+\frac{19}{100}=10+\frac{19}{100}=10'19$$

Observamos que, a veces, al sumar las partes decimales el valor que resulta tiene más cifras de las que tiene asignadas y eso afecta a la parte entera resultante.

Ejemplos:

$$5'25+2'98=8'23$$

$$11'5+4'77=16'27$$

$$24'7+83'35=108'05$$

Nos damos cuenta de que para sumar dos expresiones decimales debemos:

- Observar, en primer lugar, si sus partes decimales tienen la misma cantidad de cifras.
- Si no es así, provocamos esa coincidencia completando con ceros, por la derecha, la parte decimal más corta.
- Una vez que las expresiones decimales ya tienen sus partes decimales con la misma longitud, procedemos a sumar los números ignorando la coma que posee cada uno de ellos.
- Al resultado de esa suma le ponemos una coma para que surja una expresión decimal con parte decimal de la misma longitud que las expresiones decimales sumados.

Propiedades de la suma de expresiones decimales.

Conmutativa. No importa en qué orden sumemos dos expresiones decimales.

Ejemplo:

$$314'66 + 2'47 = 317'13$$

$$2'47 + 314'66 = 317'13$$

Asociativa. Nos permite sumar más de dos expresiones decimales. Para ello agrupamos, como queramos, de dos en dos.

Ejemplo:

$$5'7 + 30'02 + 17'4 = (5'7 + 30'02) + 17'4 = 35'72 + 17'4 = 53'12$$

$$5'7 + 30'02 + 17'4 = 5'7 + (30'02 + 17'4) = 5'7 + 47'42 = 53'12$$

Elemento neutro. El número 0 sumado a cualquier otro número decimal no lo altera.

Ejemplo:

$$0 + 42'324 = 42'324 = 42'324 + 0$$

Diferencia de expresiones decimales.

Al igual que con la suma, si hiciera falta, hemos de forzar que las partes decimales tengan la misma cantidad de cifras.

Ejemplos:

$$32'45-29'36=\left(32+\frac{45}{100}\right)-\left(29+\frac{36}{100}\right)=32+\frac{45}{100}-29-\frac{36}{100}=(32-29)+\left(\frac{45}{100}-\frac{36}{100}\right)=3+\frac{9}{100}=3'09$$

$$7'71-5'3=7'71-5'30=2'41$$

En estos ejemplos hemos restado las partes enteras (en el primero de ellos, 32 – 29 = 3) y las partes decimales (45 – 36 = 09). La operación diferencia no siempre se realizará exactamente así.

Ejemplo:

$$82'53-9'72=\left(82+\frac{53}{100}\right)-\left(9+\frac{72}{100}\right)=82+\frac{53}{100}-9-\frac{72}{100}=82-9+\left(\frac{53}{100}-\frac{72}{100}\right)=73+\frac{53-72}{100}=$$

$$=73+\frac{(-19)}{100}=73-\frac{19}{100}=72+1-\frac{19}{100}=72+\frac{100}{100}-\frac{19}{100}=72+\frac{100-19}{100}=72+\frac{81}{100}=72'81$$

$$23-16'32=23'00-16'32=6'68$$

Apreciamos que para restar dos expresiones decimales debemos:

- Observar si sus partes decimales tienen la misma cantidad de cifras.
- Si no es así, provocamos esa coincidencia **completando con ceros**, por la derecha, la parte decimal más corta.
- Una vez que las expresiones decimales ya tienen sus partes decimales con la misma longitud, procedemos a restar los números ignorando la coma que posee cada uno de ellos.
- Al resultado de esa resta le ponemos una coma para que surja un número decimal con parte decimal de la misma longitud que las expresiones decimales restadas.

Como es habitual, la operación diferencia no es conmutativa.

Actividades propuestas

6. Realiza las operaciones:

a) $17'03+5'46$ b) $26'84+15'57$ c) $6'64-5'47$ d) $35'21-23'57$

7. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $27'3+5'87$ b) $2'553+6'7$ c) $13'51-4'7$ d) $9'1-8'57$

8. Halla:

a) $5'57+32'6+9'115$ b) $46'77-15'6+2'3$ c) $33'2-16'53-12'4$

1.5. Producto de expresiones decimales

De nuevo el paso de decimal a fracción va a indicarnos cómo se debe operar.

Ejemplos:

$$5'7 \cdot 3'3 = \frac{57}{10} \cdot \frac{33}{10} = \frac{57 \cdot 33}{10 \cdot 10} = \frac{1881}{100} = 18'81$$

$$93'05 \cdot 72'4 = \frac{9305}{100} \cdot \frac{724}{10} = \frac{9305 \cdot 724}{100 \cdot 10} = \frac{6736820}{1000} = 6736'820 = 6736'82$$

$$44'16 \cdot 8 = \frac{4416}{100} \cdot \frac{8}{1} = \frac{4416 \cdot 8}{100 \cdot 1} = \frac{35328}{100} = 353'28$$

Estos ejemplos nos hacen ver cómo hemos de proceder, en la práctica, para realizar el producto de dos expresiones decimales:

- Multiplicar, en primer lugar, los números ignorando la coma que posee cada uno de ellos.
- Al resultado de ese producto le ponemos una coma para que surja una expresión decimal con una parte decimal de longitud igual a la suma de las cantidades de cifras decimales que tienen las expresiones decimales multiplicadas.

Propiedades de la multiplicación de expresiones decimales.

Conmutativa. No importa en qué orden multipliquemos dos expresiones decimales.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Ejemplo:

$$1'552 \cdot 5'9 = 9'1568$$
$$5'9 \cdot 1'552 = 9'1568$$

Asociativa. Nos permite multiplicar más de dos expresiones decimales. Para ello los agrupamos, como queramos, de dos en dos.

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Ejemplo:

$$5'7 \cdot 3'2 \cdot 7'14 = (5'7 \cdot 3'2) \cdot 7'14 = 18'24 \cdot 7'14 = 130'2336$$
$$5'7 \cdot 3'2 \cdot 7'14 = 5'7 \cdot (3'2 \cdot 7'14) = 5'7 \cdot 22'848 = 130'2336$$

Elemento neutro. El número 1 multiplicado por cualquier otro número decimal no lo altera.

$$1 \cdot a = a = a \cdot 1$$

Ejemplo:

$$1 \cdot 92'77 = 92'77 = 92'77 \cdot 1$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Cuando en una multiplicación uno de los factores es la suma de dos expresiones decimales, como, por ejemplo,

$$8'3 \cdot (6'5 + 1'04)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$6'5 + 1'04 = 6'50 + 1'04 = 7'54$$
$$8'3 \cdot 7'54 = 62'582$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$8'3 \cdot (6'5 + 1'04) = (8'3 \cdot 6'5) + (8'3 \cdot 1'04)$$

Comprobemos que obtenemos el mismo resultado:

$$(8'3 \cdot 6'5) + (8'3 \cdot 1'04) = 53'95 + 8'632 = 62'582$$

La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Actividades propuestas

9. Calcula:

a) $4'6 \cdot 7'5$ b) $1'16 \cdot 3'52$ c) $3'2 \cdot 5'1 \cdot 1'4$ d) $2'3 \cdot 4'11 \cdot 3'5$

10. Efectúa:

a) $4 \cdot (3'01 + 2'4)$ b) $5'3 \cdot (12 + 3'14)$ c) $3'9 \cdot (25'8 - 21'97)$

1.6. División de expresiones decimales (I)

Para dividir dos expresiones decimales, si ambos tienen parte decimal con igual cantidad de cifras, podemos olvidarnos de que estamos operando con números decimales y actuar como si las comas no estuvieran:

Ejemplo:

$$\frac{16'11}{2'25} = \frac{1611}{100} : \frac{225}{100} = \frac{1611}{100} \cdot \frac{100}{225} = \frac{1611 \cdot 100}{100 \cdot 225} = \frac{1611}{225} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 179}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{179}{5 \cdot 5} = \frac{179}{25}$$

Si el número de cifras decimales es distinto, lo primero que hacemos es igualarlas:

Ejemplos:

$$\frac{9'3}{4'81} = \frac{9'30}{4'81} = \frac{930}{100} : \frac{481}{100} = \frac{930}{100} \cdot \frac{100}{481} = \frac{930 \cdot 100}{100 \cdot 481} = \frac{930}{481}$$

$$\frac{6'32}{3'4} = \frac{6'32}{3'40} = \frac{632}{100} : \frac{340}{100} = \frac{632}{100} \cdot \frac{100}{340} = \frac{632 \cdot 100}{100 \cdot 340} = \frac{632}{340} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 79}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17} = \frac{2 \cdot 79}{5 \cdot 17} = \frac{158}{85}$$

Observamos que, por este camino, la división de dos expresiones decimales nos da como resultado una fracción. Queremos dar un paso más y, para ello, vamos a estudiar cómo convertir fracciones en expresiones decimales. De ese modo sabremos qué número decimal aparece al dividir dos expresiones decimales.

Actividades propuestas

11. Transforma en fracción las siguientes divisiones entre expresiones decimales:

a) $\frac{11'1}{3'7}$ b) $\frac{31'54}{2'7}$ c) $\frac{25'6}{1'39}$ d) $\frac{5}{3'5}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.7. Conversión de una fracción a expresión decimal

Ya sabemos escribir en forma de fracción una expresión decimal como, por ejemplo, 31'528:

$$31'528 = \frac{31528}{1000}$$

o, si queremos ir más despacio,

$$31'528 = 31 + 0'528 = 31 + \frac{528}{1000} = 31 + \frac{500+20+8}{1000} = 31 + \frac{500}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{8}{1000} = 31 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000}$$

Con esta descomposición,

$$31'528 = 31 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000}$$

apreciamos, claramente separadas, su parte entera y cada una de sus tres cifras decimales, el 5 de las décimas, el 2 de las centésimas y el 8 de las milésimas.

Ahora vamos a proceder en sentido contrario. Escogeremos una fracción y la convertiremos en una expresión decimal. Para que resulte más sencillo, elegiremos una fracción concreta como, por ejemplo, 93/8. Si procedemos a efectuar la usual división, 93 entre 8, nos aparece como cociente el número 11 y como resto 5:

$$\begin{array}{l|l} 93 & 8 \\ \cline{2-2} 13 & 11 \\ \ \ 5 & \end{array} \qquad \frac{93}{8} = \frac{8\cdot 11+5}{8} = 11 + \frac{5}{8}$$

Esto nos hace saber que la parte entera de 93/8 es igual a 11, puesto que la fracción 5/8 no contiene ninguna unidad completa ya que 5, el resto, es menor que 8, el divisor. De momento:

$$\frac{93}{8} = 11'......$$

Averigüemos su primera cifra decimal, las decenas:

$$\frac{93}{8} = 11 + \frac{5}{8} = 11 + \frac{\frac{5}{8}\cdot 10}{10} = 11 + \frac{\frac{50}{8}}{10} = 11 + \frac{6+\frac{2}{8}}{10} = 11 + \frac{6}{10} + \frac{\frac{2}{8}}{10}$$

En la anterior igualdad, cuando apareció 50/8, dividimos 50 entre 8. Nos dio de cociente 6 y de resto 2. Podemos asegurar que la primera cifra decimal de 93/8, la cifra de las decenas, será igual a 6 porque ha aparecido 6/10 y la otra fracción no puede aportar ninguna decena más debido a que 2/8 es menor que 1.

$$\frac{93}{8} = 11'6.....$$

La segunda cifra decimal de 93/8, la correspondiente a las centenas, surgirá del último sumando de la expresión anterior:

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$11+\frac{6}{10}+\frac{\frac{2}{8}}{10}=11+\frac{6}{10}+\frac{\frac{2}{8}\cdot 10}{10\cdot 10}=11+\frac{6}{10}+\frac{\frac{20}{8}}{100}=11+\frac{6}{10}+\frac{2+\frac{4}{8}}{100}=11+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{\frac{4}{8}}{100}$$

Cuando nos encontramos con 20/8, se procedió a dividir 20 entre 8 y se obtuvo 2 como cociente y 4 como resto. Debido a la fracción 2/100, la segunda cifra decimal de 93/8 es 2, puesto que la última fracción no añade ninguna otra centena ya que 4/8 es menor que 1.

$$\frac{93}{8}=11'62....$$

Conozcamos la siguiente cifra decimal, la de las milésimas:

$$11+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{\frac{4}{8}}{100}=11+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{\frac{4}{8}\cdot 10}{100\cdot 10}=11+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{\frac{40}{8}}{1000}=11+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$$

En esta ocasión, con la fracción 40/8, al dividir 40 entre 8 nos encontramos con que era una división exacta, de resto cero. Esto nos señala que hemos acabado ya que

$$\frac{93}{8}=11+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$$

y, finalmente,

$$\frac{93}{8}=11'625$$

Si analizamos con atención el proceso anterior, seremos capaces de agilizarlo:

- La fracción original era 93/8. El cociente de la simple división de 93 entre 8 nos proporciona su parte entera: 11.
- Como el resto era 5, dividimos 5·10 = 50 entre 8. Obtuvimos cociente 6 y resto 2. Primera cifra decimal: 6
- A partir del resto anterior, 2, dividimos 2·10 = 20 entre 8. Salen cociente 2 y resto 4. Segunda cifra decimal: 2
- A partir del resto anterior, 4, dividimos 4·10 = 40 entre 8. Salen cociente 5 y resto 0. Tercera cifra decimal: 5
- Como el último resto es 0, hemos concluido

Visualicemos lo expuesto recordando que 93=93’000:

```
93'000  | 8
        -----
13        11'625
 50
  20
   40
    0
```


Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

12. Convierte en expresión decimal las fracciones siguientes:

a) $\frac{9}{2}$ b) $\frac{31}{4}$

Asoma una pregunta lógica: en las conversiones de fracción a expresión decimal, ¿antes o después hemos de toparnos, necesariamente, con que es igual a cero el resto en alguna etapa?

En el ejemplo que nos ha ilustrado, 93/8, dejando al margen la parte entera, apreciamos que se "enfrentaron", y por este orden, los números 5 frente a 8, 2 frente a 8, 4 frente a 8, antes de ser multiplicados los primeros por 10. Siempre aparece el número 8, ya que es el denominador original. Como 8 siempre es el divisor, los únicos restos posibles son 0 (si la división es exacta), 1, 2, 3, 4, 5, 6, y 7. De esta manera si, con otra fracción distinta de 93/8, en algún momento aparece un resto que ya ha salido antes entraremos en un bucle o ciclo. Lo vemos con otra fracción, con 46/11:

$$\begin{array}{l|l} 46'000 & 11 \\ \hline \ \ 20 & 4'181 \\ \ \ \ 90 & \\ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ 9 & \end{array}$$

Tenemos

$$\frac{46}{11} = 4'181...$$

Como, al final de cada paso, los únicos restos que surgen son los números 2 y 9, todo lo que sigue es predecible: la cuarta cifra decimal es un 8, la quinta un 1, la sexta otro 8, la séptima otro 1, ….

$$\frac{46}{11} = 4'1818181818181....$$

Con lo que acabamos de alcanzar, podemos retornar a la división de números decimales.

1.8. División de expresiones decimales (II)

Si vamos a dividir dos expresiones decimales como, por ejemplo, 34'24 entre 2'7, lo primero que haremos será multiplicar ambas expresiones por un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el denominador. De este modo, el denominador pasa a ser un número natural:

$$\frac{34'24}{2'7} = \frac{34'24 \cdot 10}{2'7 \cdot 10} = \frac{342'4}{27}$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Seguidamente iniciamos el conocido algoritmo de la división limitándolo, en un principio, a la parte entera del numerador:

$$\begin{array}{l|l} 342' & 27 \\ \cline{2-2} \ \ 72 & 12' \\ \ \ 18 & \end{array}$$

Hemos acabado con la parte entera del numerador y nos encontramos, de momento, con cociente 12 y resto 18. En cuanto entran en acción las cifras decimales del numerador, hemos de poner una coma en el cociente ya que comienza a surgir su parte decimal:

$$\begin{array}{l|l} 342'4000 & 27 \\ \cline{2-2} \ \ 72 & 12'6814 \\ \ \ 184 & \\ \ \ \ \ 220 & \\ \ \ \ \ \ \ 040 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 130 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 22 & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{34'24}{2'7} = \frac{342'4}{27} = 12'68148148....$$

Actividades propuestas

13. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $\frac{42'78}{6}$ b) $\frac{15'2}{3'8}$ c) $\frac{12'505}{4'1}$ d) $\frac{6'42}{1'3}$

2. EXPRESIONES DECIMALES PERIÓDICAS

2.1. Decimales periódicos: puros y mixtos

En el paso de fracción a número decimal de, por ejemplo, la fracción 46/11 hemos apreciado que en ninguna etapa tenemos resto igual a cero. Aparece así un nuevo tipo de expresión decimal, es un **número decimal periódico**. Así los llamamos porque tienen un desarrollo decimal que, aunque no tenga final, se repite de manera periódica. Sobre el ejemplo anterior, diremos que el desarrollo decimal de 46/11 es periódico de **periodo** igual a 18. Escribiremos:

$$\frac{46}{11} = 4'1818181818181.... = 4'\overline{18}$$

Debido a lo que expusimos antes sobre los restos, cualquier fracción tiene un desarrollo decimal **exacto** o **periódico**.

Ejemplo:

$$\frac{3424}{27} = 126'\overline{814}$$

Las expresiones decimales periódicas cuyo desarrollo decimal periódico comienza inmediatamente después de la coma se llaman **periódicos puros**. Si el periodo se encuentra más allá de la coma estamos ante un número decimal **periódico mixto** y la parte decimal situada entre la coma y el periodo se llama **anteperiodo**.

Ejemplo:

- Halla el desarrollo decimal de la fracción 178/70.

a) Aplicamos el algoritmo de la división según lo dicho antes sobre la entrada en acción de las cifras decimales del numerador:

$$\begin{array}{l|l}
178'000... & \underline{70} \\
\ \ 380 & 2'54285714... \\
\ \ \ \ 300 & \\
\ \ \ \ \ \ 200 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 600 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 400 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 500 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 100 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 300 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 20 &
\end{array}$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

b) Cuando situamos en el cociente el número 1 y operamos, apareció por segunda vez el resto 30. Esa repetición de un resto nos hizo saber que estábamos ante un desarrollo decimal periódico. Lo hemos ratificado dando un paso más, añadiendo la cifra 4 en el cociente, y observamos que aparece como nuevo resto el que ya apareció antes tras el resto 30, el resto 20.

c) De acuerdo con lo anterior

$$\frac{178}{70} = 2'5\overline{428571}$$

Hemos llegado a la expresión decimal de la fracción 178/70. Es el número decimal de parte entera 2, anteperiodo 5 y periodo 428571.

Actividades propuestas

14. Transforma las siguientes fracciones en expresión decimal:

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{7}{11}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{4}{7}$ e) $\frac{25}{9}$ f) $\frac{17}{12}$ g) $\frac{50}{13}$

2.3. Conversión de una expresión decimal periódica en fracción

Apreciamos al comienzo del tema que es muy sencillo realizar el paso a fracción de los **números decimales exactos**, aquellos cuyo desarrollo decimal es finito. Ahora vamos a conseguir lo mismo para las expresiones decimales periódicas, tanto si son puros como mixtos. Como es habitual, un caso concreto nos abrirá camino.

Ejemplo:

- Vamos a convertir en fracción el número

$$42'\overline{7}$$

a) Aislamos su parte entera

$$42'\overline{7} = 42 + 0'\overline{7}$$

b) Vamos a transformar en una fracción el número decimal $0'\overline{7}$. Hay que buscar una fracción *m/n* que cumpla *m/n* = $0'\overline{7}$. Para simplificar la escritura, escribiremos X en lugar de la fracción que perseguimos *m/n*:

$$X = 0'\overline{7} = 0'777777 \ .....$$

$$10 \cdot X = 10 \cdot 0'\overline{7} = 10 \cdot 0'777777 \ ..... = 7'777777 \ ..... = 7'\overline{7} = 7 + 0'\overline{7} = 7 + X$$

$$10 \cdot X - X = 7$$

$$9 \cdot X = 7$$

$$X = \frac{7}{9}$$

c) Ya sabemos que $0'\overline{7}$ = 7/9. En la fracción 7/9 reconocemos en el numerador el periodo del número decimal $0'\overline{7}$. Luego encontraremos la justificación del número 9.

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

d) Solo nos queda añadir la parte entera:

$$42'\overline{7} = 42 + 0'\overline{7} = 42 + \frac{7}{9} = \frac{42 \cdot 9 + 7}{9} = \frac{378 + 7}{9} = \frac{385}{9}$$

$$42'\overline{7} = \frac{385}{9}$$

Ejemplo:

➢ Analicemos otro caso. Busquemos una fracción cuyo desarrollo decimal sea $0'\overline{31}$:

$$X = 0'\overline{31}$$

$$100 \cdot X = 100 \cdot 0'\overline{31} = 100 \cdot 0'31313131 \ ..... = 31'313131 \ ..... = 31'\overline{31} = 31 + 0'\overline{31} = 31 + X$$

$$100 \cdot X - X = 31$$

$$99 \cdot X = 31$$

$$X = \frac{31}{99}$$

Al hilo de estos dos ejemplos podemos vaticinar que:

Un número decimal periódico puro, **con parte entera igual a cero**, se convierte en aquella fracción que tiene por numerador al periodo y por denominador al número formado por una cantidad de nueves igual al número de cifras del periodo.

Ejemplos:

$$0'\overline{5} = \frac{5}{9}$$

$$0'\overline{934} = \frac{934}{999}$$

$$4'\overline{6} = 4 + 0'\overline{6} = 4 + \frac{6}{9} = 4 + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 4 + 2}{3} = \frac{14}{3}$$

Ya sabemos transformar un número decimal periódico puro en una fracción. Para alcanzar ese mismo cambio en el caso periódico mixto vamos a realizar una simple pero muy efectiva argucia: convertiremos el número decimal periódico mixto en otro que sea periódico puro, transformaremos éste en fracción y, por último, desharemos la primera conversión.

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- Transformad en fracción el número decimal $8'07\overline{458}$.

a) Su parte entera es 8, su anteperiodo es 07 y su periodo es 458. Como su anteperiodo posee dos cifras, multiplicamos al número por 100

$$8'07\overline{458}\cdot 100 = 807'\overline{458}$$

b) De esta forma estamos ante un número periódico puro, $807'\overline{458}$, al que convertimos en fracción

$$807'\overline{458} = 807 + 0'\overline{458} = 807 + \frac{458}{999} = \frac{807\cdot 999 + 458}{999} = \frac{806193 + 458}{999} = \frac{806651}{999}$$

c) Recuperamos el número decimal periódico mixto

$$8'07\overline{458} = \frac{807'\overline{458}}{100} = \frac{\frac{806651}{999}}{100} = \frac{806651}{999\cdot 100} = \frac{806651}{99900}$$

Ejemplo:

- Represéntese por medio de una fracción el número $0'3\overline{49}$.

a) Su parte entera es 0, su anteperiodo es 3 y su periodo es 49. Como su anteperiodo consta de una sola cifra, multiplicamos al número por 10

$$0'3\overline{49}\cdot 10 = 3'\overline{49}$$

b) Convertimos en fracción al número $3'\overline{49}$

$$3'\overline{49} = 3 + 0'\overline{49} = 3 + \frac{49}{99} = \frac{99\cdot 3 + 49}{99} = \frac{297 + 49}{99} = \frac{346}{99}$$

c) Por último

$$0'3\overline{49} = \frac{3'\overline{49}}{10} = \frac{\frac{346}{99}}{10} = \frac{346}{99\cdot 10} = \frac{346}{990}$$

d) Si ralentizamos las últimas operaciones podremos apreciar una regla para estas conversiones

$$0'3\overline{49} = \frac{3'\overline{49}}{10} = \frac{3 + 0'\overline{49}}{10} = \frac{3 + \frac{49}{99}}{10} = \frac{3}{10} + \frac{49}{990} = \frac{99\cdot 3 + 49}{990} = \frac{100\cdot 3 - 3 + 49}{990} = \frac{349 - 3}{990}$$

Una expresión decimal periódica mixta, **con parte entera igual a cero**, se convierte en aquella fracción que tiene por numerador al número natural formado por el anteperiodo inmediatamente seguido del periodo menos el anteperiodo y por denominador al número formado por una cantidad de nueves igual al número de cifras del periodo seguido de una cantidad de ceros coincidente con el número de cifras del anteperiodo.

Actividades propuestas

15. Expresa mediante una fracción cada uno de los siguientes números decimales:

a) $0'\overline{13}$ b) $14'\overline{5}$ c) $0'2\overline{6}$ d) $24'0\overline{18}$ e) $5'1\overline{101}$ f) $3'5\overline{40}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Operaciones con expresiones decimales periódicas

Para operar con números decimales periódicos lo más prudente es transformarlos en fracciones y luego realizar la operación a través de ellas. De esta manera podemos evitar cometer errores debido a la falta de costumbre de trabajar con un número infinito de decimales.

A título de curiosidad calculemos la suma $0'\overline{3}+0'\overline{6}$. Parece natural que

$$0'\overline{3}+0'\overline{6}=0'333333....+0'666666....=0'999999....=0'\overline{9}$$

Por otro lado

$$0'\overline{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad 0'\overline{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Así

$$0'\overline{3}+0'\overline{6}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$$

de modo que

$$1=0'\overline{9}=0'999999....$$

Entonces ¿algo está fallando? No, no hay ningún error. Debemos entender que una expresión decimal no es más que una **representación** de una fracción, o de un número natural. Otra representación decimal, sin ninguna utilidad, del número 1 sería

$$1=1'\overline{0}=1'00000.....$$

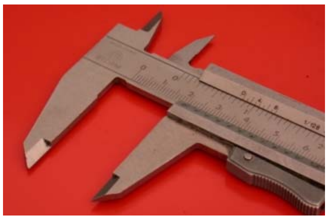
3. APROXIMACIONES, TRUNCAMIENTOS Y REDONDEOS

3.1. Aproximaciones

En la vida cotidiana resulta más sencillo trabajar, o manejarnos, con unidades completas antes que con partes o cantidades fraccionadas. Cuando vamos al mercado, no es fácil reconocer la exactitud de medio pollo pero no tenemos ningún problema en reconocer un pollo entero. Si tenemos sed y demandamos un vaso lleno de agua ésta es una petición “más simple” que si solicitamos un tercio de vaso. Naturalmente, en el mercado no cuestionaremos si nos ofrecen medio pollo exacto o no; lo aceptaremos simplemente si “parece” que es medio pollo. Tampoco tiene sentido que dediquemos tiempo a constatar si el agua que nos ofrecen se corresponde con la tercera parte del vaso. En ninguna de estas dos situaciones tenemos interés en la exactitud, en ambas nos conformamos con una ***aproximación***.

Son muy frecuentes las circunstancias en las que aparecen aproximaciones, habitualmente de expresiones decimales o fracciones:

- Si vamos a pagar con un billete de 50 euros una compra que asciende a 32’69 euros, esperamos una vuelta de 17’31 euros. Si en la caja no hay monedas de un céntimo, nos propondrán que demos por buena una vuelta de 17’30 euros. Es una *aproximación a la baja*.
- Si realizamos una compra por un importe de 12’44 euros y la saldamos con 12’45 euros estamos ante una *aproximación al alza*.
- Los instrumentos de medida, incluso los de alta precisión, siempre nos ofrecen mediciones aproximadas.



Actividades propuestas

16. Escribe en tu cuaderno tres circunstancias de la vida cotidiana donde se realicen aproximaciones.

3.2. Truncamientos y redondeos.

Aunque estemos en un contexto en el que no busquemos la exactitud, y nos baste con una aproximación, sí es conveniente que conozcamos la magnitud de la aproximación, cómo se ha llegado a ella.

Una manera de realizar una aproximación a la baja de un número decimal es el ***truncamiento***. Consiste en decidir cuántas cifras decimales queremos considerar y, simplemente, eliminar las restantes a partir de la última cifra decimal mostrada.

Ejemplo:

- Si truncamos el número decimal $12'3763$

  a) en las centésimas, aparece la aproximación $12'37$

b) en las milésimas, surge $12'376$

Ejemplo:

- Si disponemos del número decimal periódico $7'\overline{49}$
  - a) y lo truncamos en las décimas nos encontramos con la aproximación $7'4$
  - b) al truncarlo en la quinta cifra decimal obtenemos $7'49494$

Actividades propuestas

17. Aproxima por truncamiento los siguientes números decimales de forma que aparezca un desarrollo decimal hasta las milésimas:

a) $11'1234$ b) $6'\overline{6}$ c) $9'3\overline{50}$ d) $8'\overline{71}$ e) $8'334\overline{8}$ f) $2'64\overline{08}$

Otra forma de realizar una aproximación es a través de un ***redondeo***. Éste consiste en decidir cuántas cifras decimales va a tener la aproximación, realizar el truncamiento oportuno y, en función de cuál sea la primera cifra decimal no considerada, mantener o incrementar en una unidad la parte decimal del truncamiento. El criterio para efectuar, o no, dicho incremento es el siguiente:

- Cuando la primera cifra decimal eliminada es 0, 1, 2, 3 o 4, el redondeo coincide con el truncamiento.
- Si la primera cifra decimal no considerada es un 5, 6, 7, 8 o 9, el redondeo se obtiene al aumentar en una unidad la parte decimal del truncamiento.

De acuerdo con lo anterior, un redondeo es una aproximación que puede ser a la baja o al alza.

Ejemplo:

- Si redondeamos el número decimal $12'3763$
  - a) hasta las centésimas, aparece la aproximación $12'38$
  - b) hasta las milésimas, surge $12'376$

Ejemplo:

- Si disponemos del número decimal periódico $7'\overline{49}$
  - a) y lo redondeamos en las décimas nos encontramos con la aproximación $7'5$
  - b) al redondearlo en la quinta cifra decimal obtenemos $7'49495$
  - c) resulta 7’49 si se redondea hasta las centésimas.

Actividades propuestas

18. Aproxima por redondeo hasta la milésima los siguientes números decimales:

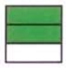
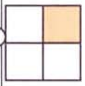
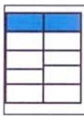
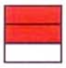
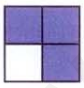
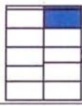
a) $11'1234$ b) $6'\overline{6}$ c) $9'3\overline{50}$ d) $8'\overline{71}$ e) $8'334\overline{8}$ f) $2'64\overline{08}$ g) $3'99\overline{96}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Recursos didácticos fotocopiables:

Dominó de fracciones y decimales

Objetivo: Reforzar el cálculo mental de operaciones con fracciones, decimales y porcentajes.

$\frac{1}{2}$	5/10	0,5	3/15	1/4		9/12	2/10
0,25		0,5 + 0,25		4/6	1/3	2/4	2/3
	1/5	0,2	1/4	0,25 + 0,25	3/4	0,66...	5/20
6/8	1/3 + 1/3	2/100	0,1	25/100	33,3... %	5/50	10/15
2/6	3/9	3/30	2/4	75/100		0,1 + 0,15	0,75
6/9		0,1 + 0,1		20/100	2/6		5/15
2/20	50/100	0,05 + 0,05	15/20	1/10	2/8	50/100	0,33...

CURIOSIDADES. REVISTA

Un número irracional no se puede expresar en forma de fracción

La idea del uso de la coma o el punto para los decimales se atribuye a matemáticos como Giovani Magini, o John Napier, a finales del s XVI. En 1698, Leibnitz, propuso usar el punto como símbolo de multiplicación, la coma quedó para separar la parte decimal del número. Pero en Inglaterra, se siguió utilizando el símbolo x para la multiplicación y el punto para separar los decimales ya que no eran seguidores de Leibnitz. En el mundo digital, el punto ha ganado a la coma, que seguimos utilizando en los escritos matemáticos

π = 3'141592… es el más famoso de los números irracionales. Es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Busca información sobre los millones de cifras decimales de π

Hipaso de Metaponto buscaba el cálculo de la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 y se encontró con el número $\sqrt{2}$, un número irracional de infinitas cifras decimales no periódicas.

La leyenda dice que este hallazgo llenó de ira a los pitagóricos que no concebían la existencia de números irracionales. Su intolerancia terminó con Hipaso ahogado en el mar.

Alberto Coto (Lada de Langreo, Asturias 1970). Campeón mundial de Cálculo Mental.

Licenciado en Ciencias del Trabajo, asesor fiscal, ha desarrollado técnicas de cálculo mental con las que ha establecido hasta en 14 ocasiones record Guiness en operaciones aritméticas.

Con sus actividades calculistas, ha ganado 9 medallas de oro, 2 de plata y 3 de bronce en torneos mundiales de "Deporte Mental"

Uno de sus records más famoso ha consistido en realizar sumas de 100 dígitos en 17,04 segundos. Eso supone una velocidad de 6 operaciones mentales por segundo.

Ha realizado actividades relacionadas con la pedagogía matemática y cuenta con numerosas publicaciones.

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

NOCIÓN		*Ejemplos*
Expresiones decimales	Alternativa a las fracciones para expresar cantidades que no se corresponden con unidades completas. Constan de dos partes: su parte entera y su parte decimal	$21'375$ Parte entera: 21 Parte decimal: 375
Expresión decimal exacta	Su parte decimal tiene una cantidad finita de cifras	$5'7767$
Expresión decimal periódica	Su parte decimal tiene una cantidad infinita de cifras que se repiten periódicamente. Pueden ser puros o mixtos	Puro: $3'\overline{07} = 3'0707070$ ..... Mixto: $4'8\overline{13} = 4'813131$ .....
Paso de expresión decimal a fracción	Podemos expresar cualquier expresión decimal exacta o periódica en forma de fracción	$5'7767 = \frac{57767}{10000}$ $3'\overline{07} = 3 + \frac{7}{99} = \frac{304}{99}$ $4'8\overline{13} = 4 + \frac{813-8}{990} = \frac{4765}{990}$
Operaciones con expresiones decimales	Se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir	
Conversión en expresión decimal de una fracción	Podemos representar cualquier fracción mediante un número decimal, el cual podrá ser exacto o periódico (puro o mixto)	$\frac{11}{4} = 2'75$ $\frac{10}{11} = 0'\overline{90}$ $\frac{32}{15} = 2'1\overline{3}$
Truncamiento de un expresión decimal	Es una aproximación de un expresión decimal que consiste en eliminar su parte decimal a partir de cierta cifra decimal	Truncamiento en las centésimas de 21'375: $21'37$
Redondeo de un expresión decimal	Es otra aproximación que, a diferencia del truncamiento, sí considera la primera cifra decimal eliminada	Redondeo hasta las centésimas de 21'375: $21'38$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS de 1º de ESO

1. Escribe con palabras la expresión de los números siguientes:

a) 2’5 b) 32’05 c) 45’50 d) 72’050

2. Multiplica mentalmente por a) 10, b) 100, c) 1000, d) 1000000 el número 3’761937

3. Ordena de menor a mayor los números: 5’67; 5’68; 5,6666; 5’63; 5’5; 5’8; 5’6070.

4. Ordena de mayor a menor los números: 7’45; 6’9999; 7’3456; 7’4378; 7’44444; 7’4501; 7’45012.

5. Indica entre qué dos números enteros se encuentran los siguientes números: 5,6666; 7,999; 1’0001; 3’099.

6. Redondea a las décimas los números siguientes: 5’67; 5’68; 5,6666; 7’45; 6’9999; 7’3456; 7’4378.

7. Redondea a las centésimas los números siguientes: 5’676767; 5’688989; 5,6666; 7’459; 6’9999; 7’3456; 7’4378.

8. Redondea a las milésimas los números siguientes: 5’676767; 5’688989; 5,6666; 7’45911; 6’9999; 7’3456; 7’4378.

9. Ordena de menor a mayor los siguientes números: 1/2; 0’45; 0,999; 2/3; 0,75; 5/4; 0,3939; 1/5.

10. Trunca por las centésimas los siguientes números: 5’676767; 5’688989; 5,6666; 7’459; 6’9999; 7’3456; 7’4378.

11. Completa las siguientes igualdades:

- $38'532 = 38 + \frac{\quad}{10} + \frac{\quad}{100} + \frac{\quad}{1000}$
- $0'078 = \frac{\quad}{10} + \frac{\quad}{100} + \frac{\quad}{1000}$
- $6'36 = \frac{\quad}{100}$
- $5'149 = \frac{\quad}{10} + \frac{\quad}{1000}$

12. Convierte en fracción los siguientes números decimales:

a) $0'124$ b) $5'23$ c) $49'350$ d) $0'013$

13. Efectúa las operaciones:

a) $1'34 + 51'7$ b) $53'4 - 3'72$ c) $4'83 + 9'77 - 5'9$ d) $1'42 - 9'77$

14. Rellena adecuadamente los lugares vacíos:

- $6'36 + \quad = 10$
- $36'76 - \quad = 10$
- $6'54 - \quad = 1'38$
- $2'7 + \quad = 15'29$

15. Realiza las siguientes operaciones:

- $43'76 \cdot 10 =$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $4'376 \cdot 1000 =$
- $0'017 \cdot 10 =$
- $3'76 : 10 =$
- $5'67 : 100 =$

16. Halla:

a) $3'6 \cdot 0'2$ b) $10'01 \cdot 3'5$ c) $0'6 \cdot 0'6$ d) $5'6 \cdot 3'2 \cdot \frac{2}{5}$

17. Calcula:

a) $\frac{15'6}{3'23}$ b) $\frac{1'1 \cdot (5'8 + 2'6)}{3'23 - 2'9}$ c) $\frac{2'5 \cdot (3'1 - 2'6)}{2'23 - 2'9}$ d) $\frac{(1'1 + 2'9) \cdot 2'53}{2'2 \cdot 0'1}$

18. Determina el desarrollo decimal de las fracciones siguientes:

a) $\frac{13}{50}$ b) $\frac{110}{9}$ c) $\frac{22}{12}$ d) $\frac{170}{125}$ e) $\frac{53}{22}$

19. Transforma en fracción los números decimales que siguen:

a) $0'\overline{5}$ b) $0'\overline{70}$ c) $21'4\overline{5}$ d) $3'0\overline{02}$ e) $1'\overline{500}$

20. Realiza los siguientes cálculos:

a) $\frac{4}{7} + 1'\overline{46}$ b) $3'\overline{7} \cdot \frac{2}{5}$ c) $\frac{6'\overline{41} - 4}{3 - 2'\overline{3}}$ d) $1'\overline{07} \cdot 2'\overline{5}$

21. Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

a) Toda fracción posee una representación decimal.

b) Si el denominador de una fracción es un número primo entonces su representación decimal es periódica.

c) Si el denominador de una fracción no es un número primo entonces su representación decimal es finita.

d) Dos fracciones equivalentes tienen la misma representación decimal.

22. Hemos visto que los números decimales exactos se pueden transformar en una fracción cuyo denominador es una potencia del número 10. Escribe una fracción cuya representación decimal sea finita y cuyo denominador no sea el número 10.

23. Después de lo que hemos razonado en el problema anterior, elabora una regla que nos sirva para distinguir las fracciones cuya representación decimal es finita.

24. Determina cuáles de las siguientes fracciones tienen representación decimal finita (decídelo sin calcularlas):

a) $\frac{12}{20}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{12}{5}$ d) $\frac{12}{45}$ e) $\frac{9}{48}$

25. Si se reparten equitativamente 270 euros entre 120 personas ¿qué cantidad recibe cada persona?

26. Escribe un número decimal que sumado a $7'63$ origine un número natural.

27. Señala otro número decimal que restado a $20'09$ nos dé un número natural.

28. Halla una fracción tal que al multiplicarla por el número $2'5\overline{7}$ dé como resultado un número

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

natural.

29. Aproxima por truncamiento, de diferentes maneras, los siguientes números decimales:

a) $7'123$ b) $15'001$ c) $7'\overline{7}$ d) $0'21\overline{87}$ e) $3'99\overline{96}$

30. Redondea los siguientes números decimales hasta la cifra que te parezca adecuada o significativa:

a) $7'391$ b) $6'1\overline{90}$ c) $24'\overline{74}$ d) $13'99$ e) $33'\overline{01}$

31. En cada uno de los redondeos que has realizado en el ejercicio anterior, distingue si se trata de una aproximación al alza o a la baja.

32. Manuel compró en la papelería 4 bolígrafos y 3 lapiceros. Si cada bolígrafo costaba 0'78 euros y cada lapicero 0'63 euros ¿cuánto se gastó Manuel?

33. Claudia se ha comprado tres bolígrafos iguales que, en total, le han costado 2'46 euros. También compró un cuaderno que costaba cuatro veces más que cada bolígrafo. Calcula el precio del cuaderno.

34. Un depósito contiene 46'22 litros de agua que vamos a traspasar a botellas de litro y medio. Halla cuántas botellas llenaremos e indica la cantidad de agua sobrante.

35. Escribe un número decimal que satisfaga la siguiente condición: sus truncamientos coinciden con sus redondeos.

36. Construye un número decimal que cumpla este requisito: ninguno de sus truncamientos coincide con los redondeos.

37. Muestra un número decimal que verifique la siguiente condición: alguno de sus truncamientos coincide con los redondeos, pero no todos.

38. El examen de Matemáticas constaba de cuatro ejercicios. En ellos Jaime obtuvo las siguientes calificaciones: 5, 7, 8 y 7. Calcula la nota media del examen de Jaime y aproxímala tanto por truncamiento como por redondeo hasta las décimas.

39. Los padres de Alicia están comprando varias macetas y plantas. El importe de todo ello es de 135'80 euros. El comercio realiza un descuento del 2'5 % si se paga en metálico y no con tarjeta de crédito. Si los padres de Alicia optan por el pago en metálico, ¿qué cantidad deberán abonar?

40. Si nos fijamos en los precios del litro de combustible que suelen exhibir las gasolineras en grandes postes o paneles observaremos que figuran hasta la milésima de euro, pese a que las monedas solo "llegan" al céntimo de euro. El importe de cada carga de combustible se realiza, en general, a través de una aproximación. Si, en una estación de servicio concreta, el precio del litro de gasolina es de 1'412 euros y el depósito de nuestro vehículo tiene una capacidad de 53 litros, analiza con cuántos litros de repostaje el importe no requiere ser aproximado.

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN de 1º de ESO

1. Señala la fracción cuyo desarrollo decimal es 8’37

a) $\frac{837}{1000}$ b) $\frac{800}{37}$ c) $\frac{837}{100}$ d) $\frac{83737}{100}$

2. El resultado del producto $15'06 \cdot 1000$ es:

a) 1506 b) 15060 c) 156 d) $1500'6$

3. El valor de la suma $2'5 + 4'83$ es

a) $7'3\overline{3}$ b) $7'\overline{3}$ c) $6'33$ d) $7'33$

4. El periodo y el anteperiodo del número $18'9\overline{03}$ son, respectivamente,

a) 18 y 9 b) 9 y 3 c) 3 y 9 d) 03 y 9 e) 18 y 3

5. La expresión decimal de la fracción 5/9 es:

a) $0'59$ b) $5'9$ c) $0'\overline{5}$ d) $0'\overline{59}$

6. ¿Cuál es la solución correcta para el paso a fracción del número decimal $13'\overline{57}$?

a) $\frac{1357}{9900}$ b) $\frac{1357}{99}$ c) $\frac{1344}{99}$ d) $\frac{1357}{9999}$

7. Finaliza las siguientes frases:

- Las fracciones impropias son aquellas cuya representación decimal presenta una parte entera ………………………………
- Cualquier número decimal, exacto o periódico, puede transformarse en una fracción cuyo denominador es ………………….. , ………………….. o …………………..

8. Clasifica los siguientes números según sean aproximaciones al alza o a la baja del número 375432’45

a) 375432’5 b) 375432 c) 375400 d) 375450 e) 375432’4

9. Si redondeamos el número $2'9\overline{36}$ hasta la centésima nos queda:

a) $2'93$ b) $2'94$ c) $2'96$ d) $2'95$ e) $2'9\overline{4}$

10. Si la nota de un examen se muestra con una cifra decimal, ¿cómo escogerías que se obtuviese?

a) por truncamiento b) por redondeo

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Luis Suberviola Serrano

Revisor: Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF más Wikipedia y producción propia

Índice

Resumen

Un accidente interespacial, la búsqueda infructuosa de un tesoro sumergido… todo debido a la confusión entre las unidades de medida. Es importante saber si estamos usando nuestro Sistema Internacional de Unidades (SI), o si se emplean unidades anglosajonas. En este capítulo aprenderás a utilizar las unidades de medida del Sistema Internacional de Unidades (SI), (antiguamente Sistema Métrico Decimal), a hacer cambios entre unas unidades y otras, e incluso a utilizar otras medida, de divisas …

Autor: Pedro Luis Suberviola / Revisor: Sergio Hernández
lustraciones: Banco de Imágenes de INTEF más Wikipedia y producción propia

1. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

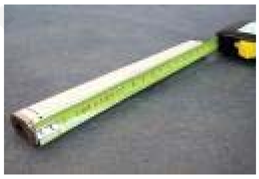
1.1. Magnitud

Una **magnitud** es una característica que se puede medir y expresar cuantitativamente, es decir, mediante un número.

Una magnitud se mide comparándola con un patrón que tenga bien definida esa magnitud y observando el número de veces que lo contiene. A ese patrón le llamamos **unidad de medida**.

Una misma magnitud se puede expresar con distintas unidades de medida.

Ejemplo:



La longitud es una magnitud y se puede expresar en kilómetros, metros, centímetros, millas, pulgadas,... Puedo decir que alguien mide 1,52 metros, 152 centímetros, 4,98 pies, 59,76 pulgadas,... la altura es la misma, pero está expresada en distintas unidades.

Observa que no se puede decir que *alguien mide 1 altura, 2 alturas*,... pues la altura es la magnitud, no la unidad, que podría ser el centímetro. Igual no se dice que *alguien pesa 1 masa, 2 masas*,... ya que masa es la magnitud, que se mide en kilogramos.

Actividades propuestas

1. Clasifica como magnitudes o unidades de medida:

a) Litro b) Tiempo c) Hora d) Memoria de un ordenador

e) Gramo f) Altitud g) Presión h) Kilómetros por hora

2. Indica a qué magnitud corresponde cada unidad de medida:

a) Euro b) Milímetro c) Hectárea d) Grado centígrado

3. Investiga a qué magnitudes corresponden las siguientes unidades poco corrientes:

a) Onza b) Herzio c) Yuan d) Grado Fahrenheit e) Año luz

1.2. Sistema Internacional de Unidades (SI)

Para poder **comparar** el valor de varias magnitudes debemos utilizar una misma unidad de medida.

Ejemplo:

Si quiero comparar las medidas de una mesa que uso en clase con una mesa de mi casa, debo utilizar la misma unidad. Si una la mido en centímetros y la otra en pulgadas, no puedo compararlas.

Para facilitar el intercambio científico, cultural y comercial, en casi todos los países se ha adoptado el **Sistema Internacional de Unidades** (SI) como sistema de medidas.

Es el heredero del antiguo **Sistema Métrico Decimal** y por ello también se le conoce como **Sistema Métrico** o simplemente como **Sistema Internacional** (SI).

Algunas de las unidades que utiliza para las distintas magnitudes son:

Longitud	Superficie	Volumen	Masa	Tiempo
El metro	El metro cuadrado	El metro cúbico	El kilogramo	El segundo

El segundo, que es una medida fundamental del Sistema Internacional de Unidades, como bien sabes, no es decimal, 100 segundos no son una hora ni un minuto. Sin embargo en el resto de los casos, para pasar de una unidad a otra que sea múltiplo o submúltiplo, hay que multiplicar por una potencia de diez. Por ello, en ocasiones, se habla del Sistema Métrico *Decimal*.

En general, los múltiplos y submúltiplos de la unidad principal se nombran añadiendo prefijos (kilo, centi,...). Lo estudiaremos con más detenimiento más adelante.

Existen unidades, como por ejemplo los pies, que usan en múltiplos y submúltiplos un sistema decimal, pero no forman parte del Sistema Internacional de Unidades. Mientras que otras, como el segundo, que si forman parte del Sistema Internacional de Unidades no usan un sistema decimal.

Nota curiosa:

Según la Física Clásica las unidades fundamentales de masa, tiempo y longitud son propiedades de los objetos, pero según la Teoría de la Relatividad ya NO son propiedades "reales" de los objetos. Al observa un objeto desde fuera, cuanta más velocidad lleve ese objeto más se achata la longitud, más se acelera el tiempo y más aumenta la masa del objeto. El tiempo es relativo, así como la longitud o la masa.

Las unidades fundamentales que usaremos son tres: masa (kg), tiempo (s) y longitud (m). Otras son unidades derivadas, como de superficie (metro cuadrado), de volumen (metro cúbico) o por ejemplo, la velocidad que se puede medir en kilómetros por hora (km/h).

Actividades propuestas

4. Indica al menos una unidad del Sistema Internacional de Unidades adecuada para expresar las siguientes magnitudes:

a) La edad de una persona

b) El tamaño de un huerto

c) La capacidad de una botella

d) La distancia entre Segovia y Albacete

f) La masa de un camión

5. Copia en tu cuaderno y relaciona cada magnitud con su posible medida:

6 º C	5 km	18 m^2	13 l	0,250 g
masa	longitud	capacidad	superficie	temperatura

Autor: Pedro Luis Suberviola / Revisor: Sergio Hernández
lustraciones: Banco de Imágenes de INTEF más Wikipedia y producción propia

2. EL METRO

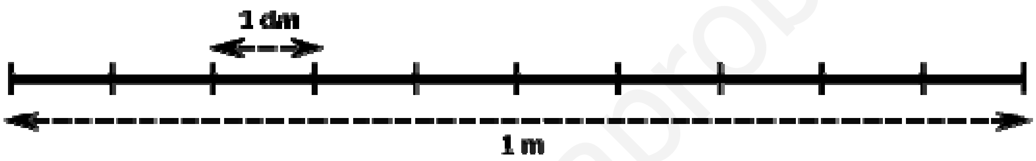
2.1. Unidades de longitud

El **metro** es una unidad de medida de longitud y se representa por **m**.

Pertenece al Sistema Internacional de Unidades (SI).

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

Múltiplos			**Unidad**	**Submúltiplos**		
Kilómetro	**Hectó**metro	**Decá**metro	**Metro**	**Decí**metro	**Cent**ímetro	**Milí**metro
km	**h**m	**da**m	**m**	**d**m	**c**m	**m**m
1.000 m	**100** m	**10** m	1 m	**0,1** m	**0,01** m	**0,001** m



Un metro está dividido en 10 decímetros

Existen otros múltiplos y submúltiplos:

Micrómetro (**µ**m). 1 µm = 0,001 mm = 0,000.001 m

Nanómetro o micra (**n**m). 1 nm = 0,001 µm = 0,000.000.001 m

Ångström (**Å**). 1 Å = 0,1 nm = 0,000.000.000.1 m

Otras unidades de longitud, que no son múltiplos o submúltiplos del metro son:

Unidad astronómica (UA): Es la distancia media entre la Tierra y el Sol, y es igual a 150 millones de km.

Año luz: Es la distancia recorrida por un rayo de luz en un año:

1 año luz = 63.240 UA = 9.460.000.000.000 km

Ejemplos:

- La Vía Láctea tiene de radio 50.000 años luz.
- El diámetro de un cabello es de aproximadamente 0,1 mm
- Un espermatozoide mide 53 µm, un hematíe 7 µm.
- Los chips electrónicos están compuestos de transistores de 22 nm de tamaño.
- El átomo más pequeño, el de hidrógeno, tiene aproximadamente 1 Å de diámetro.

Actividades propuestas

6. Si Iker mide 1,35 metros y Laura mide 134 centímetros: ¿Quién es más alto?

7. Contesta con una regla graduada:

a) Dibuja un segmento: ¿cuánto mide el segmento que has dibujado?

b) ¿Cuánto mide el borde de tu pupitre?

c) ¿Cuántos metros de cinta aislante necesitas para cubrir los bordes del pupitre?

8. Averigua cuánto mide tu cama.

2.2. Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de longitud debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario.

$$\text{km} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{hm} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{dam} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{m} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{dm} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{cm} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{mm}$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Actividades resueltas

- Expresa en metros:

a) 7,23 km = 72,3 hm = 723 dam = 7.230 m   7,23 km = [3 posiciones]=7.230 m

b) 312 mm = 31,2 cm = 3,12 dm = 0,312 m   312 mm = [3 posiciones]=0,312 m

c) 1,32 hm = 132 m

d) 27 cm = 0,27 m

e) 0,021 km = 21 m

f) 11 km 3 hm 7 m = 11.307 m

g) 4 dam 6 m 8 dm 5 mm = 46,805 m

Actividades propuestas

9. Expresa las siguientes longitudes en decímetros:

a) 54 cm   b) 21,08 m   c) 8,7 hm   d) 327 mm

10. Realiza los cambios de unidades que se indican:

a) 15,2 hm = ___ dm b) 257 cm = ___ dam c) 3.500 dam = ___ km d) 345 mm = ___ m

e) 0,234 km = ___ dm f) 23.000 cm = ___ hm g) 7,31 dm = ___ dm h) 2,5 km = ___ dam

11. Expresa las siguientes longitudes en las unidades que se indican en cada caso:

a) 8 m 1 mm en decímetros   b) 3,5 km 27 dam en decímetros   c) 13 km 21 mm en milímetros

d) 7 hm 15 cm en decímetros   e) 2 dam 5 dm en metros   f) 0,6 m 340 mm en centímetros

2.3. Unidades de superficie

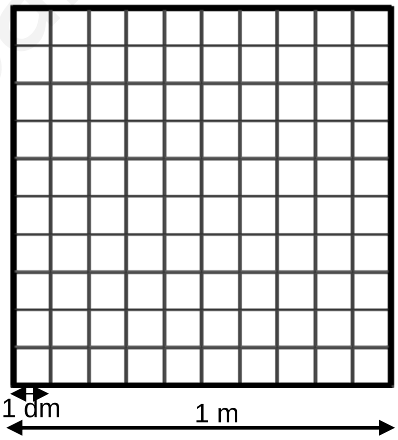
El **metro cuadrado** es la unidad de medida de superficie y se representa por m^2.

Es una unidad derivada del metro. No es una unidad fundamental.

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

Múltiplos			**Unidad**	**Submúltiplos**		
Kilómetro cuadrado	**Hectó**metro cuadrado	**Decá**metro cuadrado	**Metro cuadrado**	**Decí**metro cuadrado	**Centí**metro cuadrado	**Milí**metro cuadrado
km^2	**h**m^2	**da**m^2	**m^2**	**d**m^2	**c**m^2	**m**m^2
1.000.000 m^2	10.000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,000.01 m^2	0,000.000.1m^2

Comprobemos que en 1 m^2 hay 100 dm^2:



Un metro cuadrado es la superficie que tiene un cuadrado de 1 m de lado.

Dividimos cada uno de sus lados en 10 segmentos iguales, que medirán por lo tanto 1 dm cada uno.

Unimos los extremos de los segmentos formando cuadrados. Obtenemos 100 cuadrados de 1 dm de lado. Es decir, en el metro cuadrado hay 100 de estos cuadrados, es decir, 100 dm^2.

Ejemplos:

- Un piso suele medir entre 65 m^2 y 100 m^2.
- Un campo de fútbol para partidos internacionales mide entre 64 dam^2 y 82,5 dam^2.
- La ciudad de Valladolid tiene una superficie de 197,91 km^2, la de Madrid 605,8 km^2.
- La provincia del estado español con mayor superficie es Badajoz, con 21.766 km^2, la menor Guipúzcoa con 1.980 km^2.
- La provincia de Madrid tiene 8.027 km^2 de superficie. Imagina un rectángulo de 100 km de ancho y 80 km de largo.
- El estado de la Unión Europea con mayor superficie es Francia, con 547.030 km^2.

2.4. Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de **superficie** debemos multiplicar o dividir por **cien** tantas veces como sea necesario.

$$\text{km}^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} \text{hm}^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} \text{dam}^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} \text{m}^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} \text{dm}^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} \text{cm}^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} \text{mm}^2$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) de dos en dos cifras.

Autor: Pedro Luis Suberviola / Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF más Wikipedia y producción propia

Actividades resueltas

- Expresa en metros cuadrados:

a) 0,843 km^2 = 84,3 hm^2 = 8.430 dam^2 = 843.000 m^2 0,843 km^2= [6 posiciones a la derecha]= 843.000 m^2

b) 35.400 mm^2 = 354 cm^2 = 3,54 dm^2 = 0,0354 m^2 35.400 mm^2 = [6 posiciones a la izquierda]= 0,0354 m^2

c) 8,32 hm^2 = 83.200 m^2

d) 27 cm^2 = 0,0027 m^2

e) 74 km^2 = 74.000.000 m^2

f) 7 km^2 63 hm^2 7 m^2 = 7.630.007 m^2

g) 4 dam^2 5 m^2 23 dm^2 = 405,23 m^2

Actividades propuestas

12. Observa la tabla anterior y calcula:

a) 18 dam^2= ____ m^2 b) 5 m^2 = ____mm^2 c) 02 km^2 = ____ m^2 d) 87 m^2 = ____ hm^2

13. Pasa 38 hm^2 17 dam^2 a metros cuadrados.

14. Calcula los metros cuadrados de estas superficies:

a) 4,59 dm^2 b) 10,2 hm^2 c) 4.391 mm^2 d) 501 dam^2

15. Expresa las siguientes superficies a las unidades que se indican en cada caso:

a) 8 m^2 1 cm^2 en decímetros cuadrados   b) 2 dam^2 15 dm^2 en metros cuadrados

c) 3 hm^2 21 mm^2 en decámetros cuadrados   d) 7 hm^2 65 m^2 en milímetros cuadrados

2.5. Unidades agrarias

Son unidades que no pertenecen al Sistema Internacional pero se utilizan para medir superficies rurales, bosques, plantaciones,...

El **área**   1 **a** = 100 m^2 = 1 dam^2

La **hectárea**   1 **ha** = 100 a = 100 dam^2 = 1 hm^2

La **centiárea**   1 **ca** = 0,01 a = 1 m^2

Es decir, para hacer la conversión entre unidades agrarias y su conversión con el Sistema Internacional podemos utilizar la siguiente regla:

$$\begin{array}{ccccc} \text{hm}^2 & \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} & \text{dam}^2 & \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} & \text{m}^2 \\ \text{ha} & & \text{a} & & \text{ca} \end{array}$$

Ejemplos:

- Una hectárea es un cuadrado de 100 m de lado. Un campo de fútbol mide 62 áreas, aproximadamente media hectárea. Para hacernos una imagen mental, podemos pensar que dos campos de fútbol son más o menos una hectárea.

- La superficie incendiada en España cada año es, en promedio, unas 125.000 ha. La provincia más pequeña es Guipúzcoa, con 1.980 km^2, es decir, 198.000 ha. Es decir, el área incendiada cada año es aproximadamente el de esa provincia.

Actividades resueltas

Expresa en hectáreas:

a) 5,7 km^2 = 570 hm^2 = 570 ha

b) 340.000 ca = 34 ha

c) 200.000 dm^2 = 0,2 hm^2 = 0,2 ha

d) 930 dam^2 = 9,3 hm^2 = 9,3 ha

Actividades propuestas

16. Expresa las siguientes superficies en áreas:

a) 1.678 ha b) 5 ha c) 8 ha 20 a d) 28.100 ca

17. La superficie de un campo de fútbol es de 7.140 metros cuadrados. Expresa esta medida en cada una de estas unidades:

a) Centímetros cuadrados b) Decámetros cuadrados c) Hectáreas d) Áreas.

2.6. Unidades de volumen

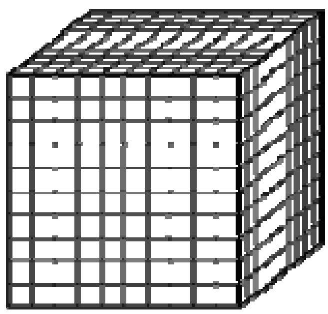
El **metro cúbico** es la unidad de medida de **volumen** y se representa por **m^3**.

Es una unidad derivada del metro.

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilómetro cúbico	**Hectó**metro cúbico	**Decá**metro cúbico	**Metro cúbico**	**Decí**metro cúbico	**Centí**metro cúbico	**Milí**metro cúbico
km^3	**h**m^3	**da**m^3	**m^3**	**d**m^3	**c**m^3	**m**m^3
1.000.000.000 m^3	1000.000 m^3	1000 m^3	1 m^3	0,001 m^3	0,000.000.1 m^3	0,000.000.000.1 m^3

Comprobemos que en 1 m^3 hay 1000 dm^3:



Un metro cúbico es el volumen que tiene un cubo de 1 m de arista.

Dividimos cada uno de sus aristas en 10 segmentos iguales, que medirán por lo tanto 1 dm cada uno.

Cortamos el cubo paralelamente a las caras. Obtenemos 1.000 cubos de 1 dm de arista. Es decir, en el metro cúbico hay 1.000 de estos cúbicos, es decir, 1.000 dm^3.

Ejemplo:

- El consumo de agua y de gas en las facturas se mide en m^3. Una persona consume de media 4,5 m^3 de agua al mes.
- El tamaño de un embalse pueden ser 50 hm^3 de capacidad.
- Uno de los embalses de mayor capacidad en España es el de la Almendra, con 2,6 km^3 de capacidad.
- La capacidad total de los embalses de España es de 55 km^3.

2.7. Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de **volumen** debemos multiplicar o dividir por **mil** tantas veces como sea necesario.

$$km^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} hm^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} dam^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} m^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} dm^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} cm^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} mm^3$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) de tres en tres cifras.

Actividades resueltas

- Expresa en metros cúbicos:

a) 0,843 km^3 = 84,3 hm^3 = 8.430 dam^3 = 843.000 m^3 0,843 km^3= [6 posiciones a la derecha]= 843.000 m^3

b) 35.400 mm^3 = 354 cm^3 = 3,54 dm^3 = 0,0354 m^3 35.400 mm^3 = [6 posiciones a la izquierda]= 0,0354 m^3

c) 8,32 hm^3 = 83.200 m^3

d) 27 cm^3 = 0,0027 m^3

e) 74 km^3 = 74.000.000 m^3

f) 7 km^3 63 hm^3 7 m^3 = 7.630.007 m^3

g) 4 dam^3 5 m^3 23 dm^3 = 405,23 m^3

Actividades propuestas

18. Resuelve:

a) 23 km^3= __ m^3 b) 25 m^3 = __cm^3 c) 302 hm^3 = __ m^3 d) 80 m^3 = __ dam^3

19. Expresa en metros cúbicos 4,6 dam^3 2.800 dm^3.

20. Expresa estos volúmenes en decámetros cúbicos:

a) 0,76 m^3 b) 65 dm^3 c) 7,89 hm^3 d) 93 m^3

21. Completa estas igualdades con las unidades que faltan:

a) 18 m^3 = 18.000 __ b) 23,99 dm^3= 23990 __ c) 100,12 cm^3= 0,10012 __

3. EL LITRO. MÚLTIPLOS Y DIVISORES

La "*capacidad*" es la misma magnitud que el "*volumen*", por tanto se mide la capacidad de un recipiente, (cuánto volumen le cabe) con el metro cúbico y sus derivados. El *litro* se utiliza por razones históricas, y no pertenece al Sistema Internacional de Unidades. Aunque nos conviene conocerlo si lo consideramos como una unidad de volumen "coloquial" utilizada normalmente para medir la capacidad de los recipientes. Un litro corresponde con un dm^3, y se utilizan múltiplos de litro como si fuera una unidad más del SI, con múltiplos y divisores decimales.

3.1. El litro

La **capacidad** es el volumen (generalmente de materia líquida o gaseosa) que es capaz de albergar un recipiente.
Su unidad de medida es el **litro** y se representa por **L**.

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilolitro	**Hectó**litro	**Deca**litro	**Litro**	**Deci**litro	**Centi**litro	**Mili**litro
kL	**h**L	**da**L	**L**	**d**L	**c**L	**m**L
1000 L	**100** L	**10** L	1 L	**0,1** L	**0,01** L	**0,001** L

Ejemplos:

- Una botella de agua grande tiene una capacidad de 1,5 L.
- Un depósito de gasóleo para una casa puede tener una capacidad de 4 hL.
- Una lata de refresco tiene una capacidad de 33 cL.
- Una dosis típica de jarabe suele ser de 5 mL.
- En una ducha de cinco minutos se utilizan unos 90 L de agua.
- Como hemos visto, cuando medimos capacidades de agua grandes se utilizan unidades de volumen (m^3, hm^3, ...).

3.2. Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de capacidad debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario. Igual que con metros, pues la unidad no está elevada ni al cuadrado ni al cubo.

$$\text{kL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{hL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{daL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{L} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{dL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{cL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{mL}$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Ejemplo:

Expresa en litros:

a) 4,2 hL = 420 L b) 300 mL = 0,3 mL c) 7,2 kL = 7.200 L
d) 0,0235 kL = 23,5 L e) 420 cL = 4,2 L f) 1,2 mL = 0,001.2 L

Actividades propuestas

22. Si un decilitro son 0,1 litros, ¿cuántos decilitros tiene un litro?

23. Expresa en kilolitros:

a) 34 L b) 1.232 cL c) 57 daL d) 107 hL

24. Añade la medida necesaria para que sume 5 litros:

a) 500 cL + __ cL b) 25 dL + __ dL c) 500 mL + __ mL d) 225 mL + __ __

3.3. Relación entre litros y m^3.

Los litros se relacionan con las unidades de volumen porque 1 L equivale a 1 dm^3. Por lo tanto:

1 L = 1 dm^3

1 mL = 1 cm^3

1 kL = 1 m^3

Si lo añadimos al esquema de cambios de unidades de capacidad:

$$\mathrm{kL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{hL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{daL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{L} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{dL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{cL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{mL}$$

$$\mathrm{m}^3 \underset{:1.000}{\overset{\cdot 1.000}{\rightleftarrows}} \mathrm{dm}^3 \underset{:1.000}{\overset{\cdot 1.000}{\rightleftarrows}} \mathrm{cm}^3$$

Ejemplos:

- Un depósito de agua de 1 m^3 tiene 1 kL de capacidad, es decir, 1.000 L.
- En los botellines de agua, dependiendo de la marca, se expresan la cantidad de agua en mL o en cm^3 es decir, como capacidad o como volumen. Pueden poner 250 mL o 250 cm^3.
- Un litro de leche ocupa un volumen de 1 dm^3.

Actividades resueltas

- Expresa en litros:

  a) 4,2 dm^3 = 4,2 L b) 12 m^3 = 12 kL =12.000 L c) 30 cm^3 = 30 cL = 0,03 L

- Expresa en decímetros cúbicos:

  d) 0,835 hL = 83,5 dm^3 = 83,5 dm^3 e) 43 cL = 0,43 L = 0,43 dm^3

  f) 23,5 kL = 23.500 L = 23.500 dm^3 g) 0,6 dL = 0,06 L = 0,06 dm^3

Actividades propuestas

25. Ordena de menor a mayor estas medidas:

a) 7,0001 hm^3 b) 23.000 L c) 8 mL d) 4 mm^3

26. Calcula esta resta: 8 mL – 8 mm^3=

27. Calcula el volumen (en litros y en cm^3) de una caja que mide 10 cm de ancho, 20 cm de largo y 5 cm de alto.

4. UNIDADES DE MASA

4.1. El kilogramo

El **kilogramo** es la unidad de medida de masa y se representa por **kg**.

Pertenece al Sistema Internacional de Unidades (SI).

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

La primera *definición* de **kilogramo** se decidió durante la Revolución Francesa y especificaba que era la masa de un dm^3 (un litro) de agua destilada al nivel del mar y 3,98 ºC. Hoy se define como la masa que tiene el prototipo internacional, compuesto de una aleación de platino e iridio que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas.

Unidad	**Submúltiplos**					
Kilogramo	**Hecto**gramo	**Deca**gramo	**Gramo**	**Deci**gramo	**Centi**gramo	**Mili**gramo
kg	**hg**	**dag**	**g**	**dg**	**cg**	**mg**
1000 g	**100** g	**10** g	1 g	**0,1** g	**0,01** g	**0,001** g

Múltiplos			**Unidad**
Tonelada	**Quintal**	**Miriagramo**	**Kilo**gramo
tm	**qm**	**mag**	**kg**
1000 kg	100 kg	10 kg	1 kg

La **tonelada** y el **quintal** no son múltiplos del gramo ni pertenecen al SI. En origen una tonelada eran 960 kg y corresponde a 20 quintales de 46 kg o 100 libras, pero cuando se impuso el SI continuaron usándose, aunque "redondeados" a 1000 kg y 100 kg. Estas nuevas unidades son la **tonelada métrica** (tm) y el **quintal métrico** (qm), que si pertenecen al Sistema Universal de Unidades.

Nota:

¡La masa no es lo mismo que el peso!

Una bola de acero peso mucho en la Tierra, pero no pesa nada en el espacio, y aún así, si te la tiran con fuerza te sigue dando un buen golpe. La fuerza de ese golpe te dice que tiene mucha masa (gramos). La masa se conserva en el espacio porque es una verdadera magnitud, pero el peso es una fuerza debida a la gravedad de la Tierra. Solo en la Tierra la masa y el peso de una persona coinciden como cantidad, por eso es normal decir que alguien "*pesa tantos kg*" aunque no sea del todo correcto, se debería decir que "tiene una masa de 70 kg y, en la Tierra, pesa 70 kgf (kilo gramos fuerza)".

En los ejemplos siguientes usaremos kg como peso por seguir con la forma *coloquial* de hablar, pero deberíamos usar kgf o decir que "tiene una masa de 70 kg".

Cuando pedimos en la tienda *un kilo de patatas*, estrictamente, desde el punto de vista matemático, estamos diciendo *mil patatas*, puesto que el prefijo *kilo* significa *mil*.

No significa que esté mal decirlo, debemos distinguir distintos contextos y situaciones.

En la tienda podemos comprar *un kilo de patatas*, mientras que en clase de matemáticas diremos un *kilogramo de patatas*.

Ejemplos:

- Una persona adulta puede pesar 70 kg (bueno, deberíamos decir "tiene una masa de 70 kg" como ya comentamos antes).
- En un bocadillo se suelen poner unos 40 g de embutido.
- La dosis que hay en cada pastilla de *enalapril* (medicamento contra la hipertensión arterial) es de 10 mg. El resto de la pastilla es excipiente (relleno para que sea manejable).
- Para plantar trigo, se utilizan entre 60 kg y 250 kg de semilla por hectárea y se cosechan varias toneladas por hectárea.
- El peso de un coche vacío es de unos 1.200 kg.
- El peso máximo autorizado de un vehículo con dos ejes es de 18 t.
- Un elefante africano puede pesar hasta 7,5 t. Una ballena azul, 120 t.

Actividad resuelta

- ¿Pesa más un kilogramo de hierro que uno de paja?

La masa es igual, pero ambas están en la Tierra rodeadas de aire, e igual que ocurre si están rodeadas de agua, el hierro irá hacia abajo con más fuerza que la paja que "flota más" tanto en el agua como en el aire. Piénsalo así: ¿Que pesa más, un trozo de hierro de 100 kg o un globo aerostático de 100 kg que está flotando? Si el globo vuela, ¿es que no pesa?

Volvemos a la misma idea de antes. No debemos confundir el peso (que es una fuerza) con la masa.

4.2. Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de masa debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario.

$$\text{kg} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{hg} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{dag} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{g} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{dg} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{cg} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{mg}$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Un **litro** de agua tiene de masa, casi de forma exacta **1 kg**. Esta aproximación se puede realizar, de forma menos precisa, para otros líquidos.

Actividades resueltas

- Expresa en gramos:

  a) 0,23 kg = 23 g   b) 312 mg = 0,312 g   c) 5,32 hg = 532 g

  d) 2,57 cg = 0,0257 g   e) 0,021 kg = 21 g   f) 11 kg 3 hg 7 g = 11.307 g

  g) 4 dag 6 g 8 dg 5 mg = 46,805 g

- Expresa en kilogramos:

  h) 3,2 t = 3.200 kg   i) 740 g = 0,74 kg   j) 5,4 q = 540 kg

  k) 42 mag = 420 kg   l) 238 hg = 23,8 kg   m) 1200 dag = 12 kg

- Supongamos que hemos comprado 1 kg de alubias, 2,5 kg de fruta, 2 L de leche y dos botellas de 1,5 L de agua. Si queremos calcular el peso de la compra de forma aproximada, podemos cambiar los litros por kilogramos.

  $$1 \text{ kg} + 2,5 \text{ kg} + 2 \text{ kg} + 2 \cdot 1,5 \text{ kg} = 8,5 \text{ kg}$$

  Nuestra compra pesa aproximadamente 8,5 kg.

Actividades propuestas

28. Expresa las siguientes cantidades en decagramos:

a) 16 g   b) 29 hg   c) 23,5 kg   d) 150 g

29. Expresa en gramos las siguientes masas:

a) 1,6 dag   b) 49 kg   c) 240,5 kg 7,5 dag   d) 2 dag 15,10 dg

30. Expresa en kilogramos:

a) 3 t 5 q 2,5mag   b) 2,35 t 750 dag   c) 312 q 459 hg   d) 52 t 3 mag 8 kg

31. Una furgoneta puede cargar 1,2 t. Debe transportar 72 cajas que contienen 25 envases de paquetes de jabón, con un peso de 750 g cada uno. ¿Puede transportarlos de un sólo viaje?

32. Estima la masa de:

a) tu cuaderno   b) tu bolígrafo   c) tu cartera   d) tu mesa

Autor: Pedro Luis Suberviola / Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF más Wikipedia y producción propia

CURIOSIDADES. REVISTA

a) Medidas de la antigua Grecia

Protágoras, filósofo griego del siglo V antes de nuestra era, dijo ***El hombre es la medida de todas las cosas***. Se puede interpretar como que las personas interpretamos nuestro entorno siempre en relación a nosotras mismas, ya sea de forma individual o colectiva.

Estableció unas dimensiones comparables con su propia experiencia, muchas veces, con su propio cuerpo. Por ejemplo, en la antigua Grecia:

1 ancho de un dedo (daktylos) = 2 cm   No confundir con pulgada, ancho de un pulgar

1 pie (*pous*) = 33,3 cm

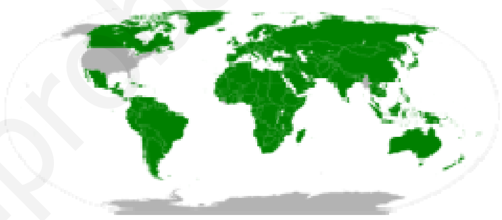
1 codo (*pēchys*) = 48 cm

1 braza (*orgyia*) = 4 codos = 1,92 m (Longitud de los brazos extendidos)

1 estadio (*stadium*) = 600 pies = 174 m (longitud del estadio de Olimpia).

b) Unidades de medida anglosajonas

Las unidades de medida anglosajonas, basadas en gran parte en las del Imperio Romano, fueron introducidas tras la invasión normanda de Inglaterra por Guillermo el Conquistador en 1.066 y fueron utilizadas por el Imperio Británico.



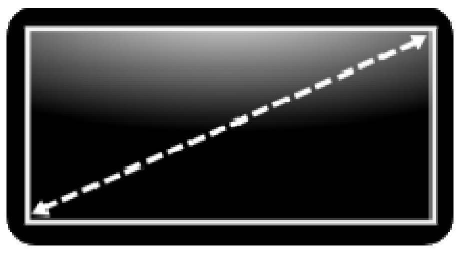
Países que han adoptado el Sistema Internacional

Sólo tres países lo utilizan oficialmente hoy en día: Estados Unidos de América, Liberia y Birmania. El resto han asumido el Sistema Internacional de Unidades (SI), implantado en 1.889 en una conferencia en París. Pero hay que tener en cuenta que hay países que lo han adoptado recientemente. Por ejemplo Gran Bretaña; hasta el año 2.000 no hubo obligación de que los productos de las tiendas estuvieran marcados en kilos o gramos, y todavía se puede encontrar el sistema de medidas anglosajón en muchas ocasiones.

Quizá la unidad que más podemos encontrar en la vida cotidiana es la **pulgada**. Por ejemplo, se utiliza para medir el diámetro de las tuberías, pero seguro que nos suena más como medida del tamaño de las pantallas.

Cuando decimos que una *tablet* tiene 7”, nos referimos a la distancia de la diagonal de la pantalla, y podemos hacer 7 · 2,54 = 17,78 cm.

Observa que no determina de forma única el tamaño de la pantalla, también nos debemos fijar en la relación del largo y el ancho (se expresa de la forma a : b).



7” = 17,78 cm

Las principales medidas del sistema anglosajón de los Estados Unidos de América de medidas (hay pequeñas diferencias respecto al británico) son:

Longitud	Área	Capacidad
1 pulgada (1 *inch*) = 2,54 cm 1 pie (1 *foot*) = 12 pulgadas = 0,340.8 cm 1 yarda (1 *yard*) = 3 pies = 0,914.4 cm 1 milla (1 *mile*) = 1.760 yardas = 1,609 km 1 legua (1 *league*) = 3 millas = 1.609 km	1 acre (1 *acre*) = 4.047 m^2 = 0,4047 ha	1 taza (1 *cup*) = 236,5 mL 1 pinta (1 *pint*) = 2 tazas = 473 mL 1 galón (1 *gallon*) = 8 pintas = 3,785 L 1 barril (1 *barrell*) = 31,5 galones = 119,24 L

RESUMEN

Magnitud	Una **magnitud** se puede medir en distintas **unidades de medida**.
	La distancia (magnitud) se puede medir en metros, centímetros, kilómetros,... (distintas unidades de medida)
Longitud: metro	km $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ hm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dam $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ m $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ cm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ mm
	0,32 km = 32 m = 3.200 cm 3.400 mm = 34 dm = 0,34 dam
Superficie: metro cuadrado	km^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ hm^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ dam^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ m^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ dm^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ cm^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ mm^2
	0,0014 km^2 = 0,14 hm^2 = 14 dam^2 23.000 mm^2 = 230 cm^2 = 2,3 dm^2 = 230 dm^2
Unidades agrarias	1 ha = 1 hm^2 1 a = 1 dam^2 1 ca = 1 m^2
	5 km^2 = 500 hm^2 = 500 ha 13.000 m^2 = 13.000 ca= 1,3 ha
Volumen: metro cúbico	km^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ hm^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ dam^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ m^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ dm^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ cm^3 mm^3
	3,2 hm^3 = 320 dam^3 = 32.00 m^3 2.800 mm^3 = 28 cm^3 = 0,28 dm^3
El litro	kL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ hL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ daL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ L $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ cL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ mL
	3,7 kL = 37 hL = 370 daL = 3.700 L 85 mL = 8,5 cL = 0,85 dL = 0,085 L
Litros y m^3.	1 kL = 1 m^3 1 L = 1 dm^3 1 mL = 1 cm^3
	4,5 cL = 45 mL = 45 cm^3 3 hL = 0,3 kL = 0,3 m^3 3 hL = 300 L = 300 dm^3
Masa: kilogramo	kg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ hg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dag $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ g $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ cg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ mg
	2300 kg = 2,3 t 0,23 dag = 2,3 g = 2.300 mg 5,3 hg = 53.000 cg

EJERCICIOS Y PROBLEMAS de 1º

Sistema Internacional de Unidades

1. Clasifica como magnitudes o unidades de medida lo siguiente:

a) Milla b) Tiempo c) Semana d) mm

e) Área f) Segundo g) Presión h) Litro

2. Indica a qué magnitud corresponde cada unidad de medida:

a) Año luz b) cm c) kg d) dL

3. Mide, o estima, la medida de:

a) Longitud de tu mano; b) Longitud de tu pié; c) Longitud de tu brazo; d) Longitud de tu pierna.

¿Qué unidades has utilizado? ¿Usarías el km o el mm? ¿Por qué?

4. Copia en tu cuaderno y relaciona cada magnitud con su posible medida:

8 km | 9 horas | 7 cm^2 | 2 dm^3 | 0,789 kg

masa | longitud | capacidad | superficie | tiempo

Unidades de longitud

5. Si la mano de Javier mide 0,25 metros y la de Miriam mide 24 centímetros: ¿Cuál mide más?

6. Calcula utilizando una regla graduada:

a) ¿Cuál es la longitud de tu bolígrafo?

b) ¿Cuánto miden los lados de tu cuaderno?

c) ¿Cuál es la altura de tu mesa?

d) ¿Y la altura de tu silla?

7. Expresa las siguientes longitudes en metros:

a) 78 cm b) 35,7 dm c) 9,72 dam d) 825 km

8. Expresa en micras:

a) 0,00067 mm b) 25,7 m c) 0,0768 dm d) 0,000002 cm

Unidades de superficie

9. Expresa en centímetros cuadrados:

a) 8,3 km^2; b) 4912 mm^2; c) 72,1 hm^2; d) 32 m^2; e) 28 dm^2;

f) 6 km^2 3 hm^2 5 m^2 1 dm^2 4 cm^2; g) 8 dam^2 9 m^2 2 dm^2 7 cm^2

10. Calcula los kilómetros cuadrados de estas superficies:

a) 34,5 dm^2 b) 8,26 hm^2 c) 999 mm^2 d) 8,35 dam^2 e) 7 m^2 f) 666 cm^2.

11. La superficie de un campo de fútbol es de 8.378 metros cuadrados. Expresa esta medida en cada una de estas unidades:

a) Centímetros cuadrados b) Decámetros cuadrados c) Hectáreas d) Áreas.

12. Escribe la unidad que utilizarías para medir la superficie de los siguientes objetos:

a) Una habitación b) Un país c) La sección de un tubo d) Una mesa

13. Quieres embaldosar tu habitación que mide 3,5 m de largo por 2,5 m de ancho. No quieres tener que cortar ninguna baldosa, pues entonces, muchas se rompen. Al ir a comprarlas hay baldosas de: a) 40 cm por 20 cm; b) 50 cm por 35 cm; c) 25 cm por 18 cm. ¿Te sirve alguna? ¿Cuántas baldosas comprarías? Indica en m^2 cuánto mide tu habitación.

14. Busca en Internet o en un diccionario la superficie de tu comunidad y exprésala en m^2.

15. Un terreno rústico de 6 ha cuesta 144.000 euros. ¿A cuánto sale el metro cuadrado? Compáralo con el precio del terreno urbanizable, que cuesta unos 350 euros el metro cuadrado. ¿A qué se debe la diferencia?

16. Copia en tu cuaderno y completa la tabla

mm^2	cm^2	dm^2	m^2	dam^2	hm^2	km^2
4850000						
	83,29					
						2

Unidades de volumen

17. Estima en cm^3 el volumen de:

a) Un cuaderno; b) Un lápiz; c) Una goma; d) El aula; e) Una televisión; f) Una caja de zapatos.

Indica en cada caso si su volumen es menor que un cm^3, está entre un cm^3 y un dam^3, o es mayor que un dam^3.

18. Una caja tiene un volumen de 18 cm^3, ¿cuáles pueden ser sus dimensiones?

19. Expresa en centímetros cúbicos:

a) 65,2 hm^3 b) 222 mm^3 c) 6,24 km^3 d) 34 m^3 e) 93 km^3

f) 5 km^3 4 hm^3 6dam^3 8 m^3 g) 5 dam^3 6 m^3 7 dm^3

20. Expresa estos volúmenes en hectómetros cúbicos:

a) 777 m^3 b) 652 dm^3 c) 926 km^3 d) 312,2 m^3 e) 712 dam^3 f) 893 cm^3.

21. Estima cuál es la respuesta correcta a estas medidas:

1) Juan mide:

a) 7 mm b) 300 km c) 1,7 m d) 1,7 cm

2) El longitud de este tenedor que está sobre mi mesa mide:

a) 5,8 mm b) 3,9 km c) 1,7 m d) 24 cm

3) En la botella de agua que está en mi nevera cabe:

a) 2,7 m^3 b) 7 ml c) 1,5 l d) 9,4 cm^3

4) Elena pesa:

a) 47 g b) 470 g c) 470 kg d) 47 kg

5) Ese autobús parado en la esquina mide:

a) 12,5 cm b) 12,5 mm c) 12,5 m d) 12,5 km

6) El suelo de este aula mide:

a) 1 m^2 b) 30 m^2 c) 30 cm^2 d) 30 km^2

22. Completa las siguientes igualdades:

a) ___ hl = 4000 L b) 0,025 L = ___ cL c) 1,2 daL = _____ mL d) 32 mL = _____ hL

23. Indica qué medida se aproxima más a la realidad en cada caso:

a) Un envase de natillas:	12 cL	12 L	12000 mL
b) Una cucharilla de café:	100 mL	1 L	8 mL
c) Una bañera:	85 L	850 daL	850 hL

24. Expresa en litros:

a) 5,8 dm^3 b) 39 m^3 c) 931 cm^3 d) 8.425 mm^3 e) 3 dam^3.

25. Si un centilitro son 0,1 decilitros, ¿cuántos centilitros tiene un decilitro?

26. Expresa en centímetros cúbicos:

a) 2,75 hL b) 72,8 cL c) 6,24 kL d) 3,75 dL e) 45 L f) 895 mL

27. Ordena de menor a mayor estas medidas:

a) 3,92 hm^3 b) 673 L c) 8.951.295 mL d) 4.000 mm^3

28. Expresa en cL las siguientes fracciones de litro:

a) 1/2 litro b) 1/5 litro c) 1/3 litro d) 3/4 litro 5/2 litro

29. Estima la cantidad de cuadernos como el tuyo que cabrían en un metro cúbico

30. Un grifo gotea 25 mm^3 cada 4 s. ¿Cuánto agua se pierde en una hora? ¿Y en un mes?

31. Expresa en kilolitros:

a) 7,29 L b) 3.891 cL c) 0,56 daL d) 3000 hL e) 982 dL f) 9.827 mL

32. Añade la medida necesaria para que sume 10 litros:

a) 500 cL + __ cL b) 25 dL + __ dL c) 500 mL + __ mL d) 2 L + __ dL

33. Corta la parte de arriba de un tetrabrick de 1 litro vacío. Coge un botellín de agua, también vacío, apunta su capacidad. Llena sucesivamente el botellín y vierte su contenido en el tetrabrick hasta llenarlo. ¿Cuántos botellines necesito para llenarlo? Haz lo mismo con un vaso de agua en lugar del botellín.

34. Javier desea echar 5 L de agua en un recipiente, pero sólo tiene un cacharro de 13 L y otro de 8 L, ¿qué debe hacer?

35. Calcula esta resta: 5 cL – 5 cm^3.

36. Haz una estimación, y discute el resultado con tus compañeros y compañeras, de las siguientes cantidades

a) ¿Cuántos litros de agua gastas al ducharte? ¿Y al bañarte?
b) ¿Cuántas cucharadas de café caben en un vaso de agua? ¿Y cucharadas soperas?
c) ¿Cuánto líquido bebes al cabo de un día?

37. En la comunidad de Madrid el agua se paga cada dos meses. Las tarifas van por tramos: Primeros 25 m^3 a 0,30 €/ m^3. Entre 25 y 50 m^3 a 0,55 €/ m^3. De 50 m^3 en adelante a 0,55 €/ m^3. Si la media de consumo de agua por persona y día es 170 L, ¿Cuánto pagará una persona que viva sola? ¿Cuánto pagará una familia de 6 miembros?

Unidades de masa

38. Expresa en kilogramos:
a) 4,6 tm b) 851 g c) 6,5 qm d) 53,1 mag e) 359,2 hg f) 235 dag

39. Expresa las siguientes cantidades en decagramos:
a) 16 g b) 29 hg c) 23,5 kg d) 150 g

40. Expresa en kilogramos:
a) 4 tm 6 qm 3,7 mag b) 3,46 tm 869 dag c) 424 qm 561 hg d) 6,3 tm 4,1 mag 8,92 kg

41. Indica, en cada caso, la medida más aproximada:

a) Masa de un autobús:	3 tm	4 qm	7000 g
b) Masa de un gorrión:	2 kg	150 g	30 mg
c) Masa de un gato:	350 g	1 qm	25 kg
d) Masa de una lenteja:	4 dag	2 g	5 dg

42. Una caravana con su remolque pesan juntos 2,5 qm. La caravana pesa 1.005 kg más que el remolque. ¿Cuánto pesa cada uno por separado?

43. Una caja llena de libros pesa 25 kg, 7 hg y 4 dag y vacía pesa 200 g y 5 dg. Halla el peso de los libros en gramos.

44. ¿Cuántos gramos pesa, aproximadamente, 1 daL de agua?

45. Un camión puede cargar 3 tm. Debe transportar 90 cajas que contienen cada una 30 envases de tetrabrik de leche, con un peso de 1005 g cada uno. ¿Puede transportarlos de un sólo viaje?

46. La balanza de una tienda redondea las medidas a los 10 gramos. ¿Cómo quedarán los siguientes pesos?
a) 368 g b) 35,79 g c) 3 kg d) 2,7 kg

47. Clasifica las siguientes masas en i) menos de un gramo, ii) entre un gramo y un kg, iii) entre un kg y 20 kg, iv) más de 20 kg:
a) un garbanzo b) un camión c) la Torre Eiffel d) un libro e) la mesa

48. Expresa en gramos:
a) 0,0005 kg b) 7.500 mg c) 2,98 hg d) 400 cg e) 0,085 tm
f) 44 kg 2 hg 6 g g) 36 dag 78 g 9 dg 4 mg h) 5 qm

AUTOEVALUACIÓN de 1º

1. ¿Cuánto miden 8 millas inglesas si una milla inglesa mide 1609,342 m?

a) 11 km b) 102 km 998 m c) 12 km 875 m d) 12872 m.

2. María se entrena corriendo todos los días. Da 14 vueltas a un recorrido de 278 m. ¿Cuánto recorre?

a) 3,892 km b) 40 hm 89 m c) 398,2 dam d) 38 km 92 m.

3. Un rectángulo mide de base 3,2 m y de altura 1,3 dm. Recuerda que su área se calcula multiplicando base por altura. ¿Cuál de las respuestas corresponde al área del rectángulo?

a) 3,1 m^2 b) 41,6 dm^2 c) 3 km^2 d) 0,5 m^2.

4. Un cubo de 54 cm de lado, ¿qué volumen tiene?

a) 1574 dm^3 b) 157,464 dm^3 c) 0,001 m^3 d) 1.000.176 cm^3.

5. De las siguientes medidas de masa, ¿cuál es la mayor?

a) 7,91 dag b) 791 g c) 7,91 kg d) 0,791 hg.

6. El resultado de sumar 0,07 kL + 0,62 daL + 9,3 hL es:

a) 1000 L b) 1 kL 62 L c) 10 hL 62 L d) 1006,2 L.

7. Una caja contiene 7 paquetes de 37 gramos, ¿cuál es su masa?

a) 2 kg b) 259 g c) 2,5 hg d) 2590 mg

8. La medida más adecuada para expresar la masa de un paquete de arroz es:

a) 1 kg b) 2 cg c) 20 g d) 2000 mg

9. Una botella de 2 litros de agua pesa vacía 30 g. Si se llena las 4/5 partes de la botella, ¿cuánto pesa?

a) 1.600.000 mg b) 1,7 kg c) 1600 hg d) 1630 g

10. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 7,4 dm y 8,43 cm. ¿Cuál de las respuestas corresponde al área del triángulo?

a) 31,191 dm^2 b) 3000 cm^2 c) 311,91 dm^2 d) 3,1191 dm^2.

Autor: Pedro Luis Suberviola / Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF más Wikipedia y producción propia

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa Asso

Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

Índice

Resumen

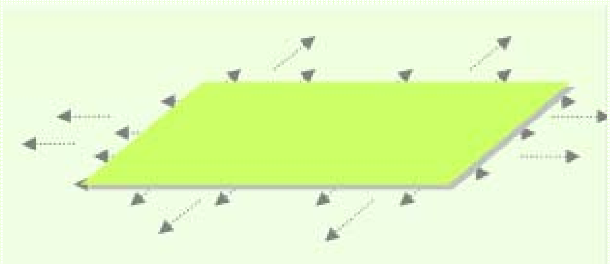
En los mosaicos de la Alhambra como el de la fotografía puedes observar distintas figuras geométricas como rectas paralelas y rectas secantes, estrellas de 5 y de 10 puntas, polígonos…
En este capítulo vas a revisar tus conocimientos de geometría y a aprender muchas cosas nuevas sobre las figuras geométricas planas lo que te va a permitir ver con unos ojos nuevos el mundo que te rodea observando rectas paralelas en los edificios, ángulos interiores o exteriores, o como en el mosaico anterior, los motivos geométricos que lo forman. Estas formas geométricas pueden permitirte diseñar interesantes decoraciones.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

1. ELEMENTOS DEL PLANO

1.1. Puntos, rectas, semirrectas, segmentos.

El elemento más sencillo del plano es el **punto**. El signo de puntuación que tiene este mismo nombre sirve para dibujarlo o también un pequeño círculo si queremos destacarlo. Es muy útil nombrarlo y para ello se utilizan letras mayúsculas A, B, C,...



Imagina que cada uno de los límites de la hoja de tu cuaderno, de la pizarra o de cada una de las paredes de la habitación en la que estás, se prolonga indefinidamente sin cambiar su inclinación o posición. Los objetos resultantes serían ejemplos de planos.

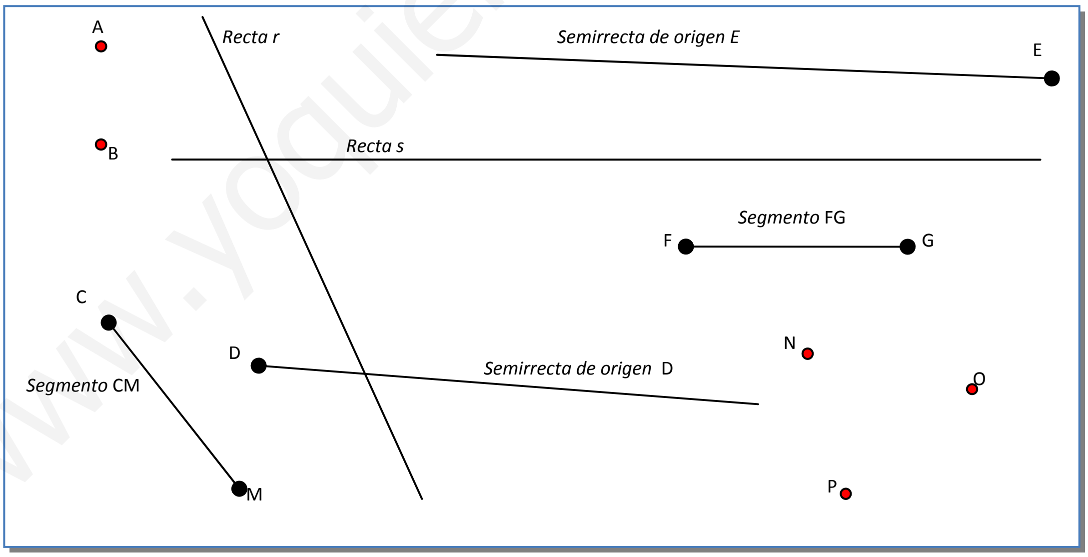
Para representarlos y estudiar bien sus elementos, nos quedaremos solo con una parte de cada uno. Por ejemplo, en los casos anteriormente citados, con la misma hoja, la pizarra o la pared tal como las vemos.

Al igual que el punto, **la recta** es un objeto elemental del plano. Constituye una sucesión infinita de puntos alineados en una misma dirección. Las rectas se nombran con letras minúsculas *r, s, t,...*

Una **semirrecta** es cada una de las partes en las que queda dividida una recta por un punto que pertenece a ella. El punto se denomina origen. Las semirrectas se nombran con letras minúsculas o referenciando su origen: semirrecta de origen O, semirrecta *p*, ...

Un **segmento** es la porción de recta comprendida entre dos puntos de la misma. Los puntos se llaman extremos. Los segmentos se nombran mediante sus extremos, por ejemplo: segmento $\overline{AB}$ o segmento de extremos A, B.

Ejemplo:



Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

Actividades propuestas

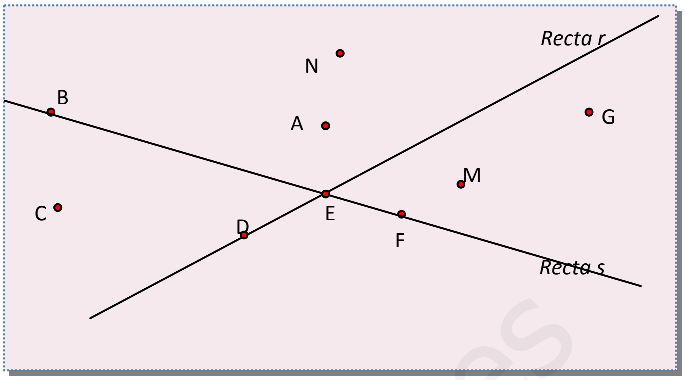
Copia en tu cuaderno el siguiente dibujo y realiza las siguientes actividades.

1.Dibuja tres segmentos que tengan sus extremos fuera de las rectas *r* y *s*.

2.¿El punto B pertenece a la recta *s*?. ¿Y a la recta *r*?

3.Dibuja un segmento que tenga como extremos A y un punto que esté en las rectas *r* y *s*

4.Dibuja una semirrecta de origen C y que pase por B.



5.¿Es posible dibujar una recta que pase a la vez por M, F y G?. ¿Y por N, A y E?

1.2. Rectas paralelas y secantes.

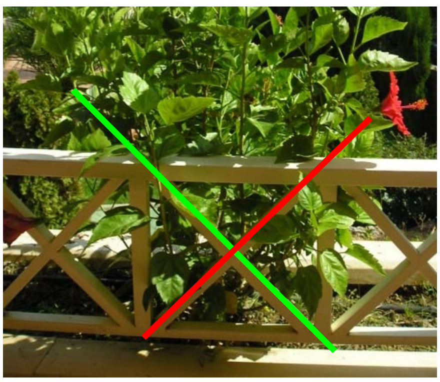
Pensemos ahora en las diferentes posiciones que pueden ocupar dos rectas en un plano:

***Rectas paralelas**:* No tienen ningún punto común	
***Rectas secantes**:* Tienen un único punto común	
***Rectas coincidentes**:* Todos sus puntos son comunes	

Por un punto P exterior a una recta r solo puede trazarse una recta paralela a ella e infinitas secantes.

Ejemplo:

A nuestro alrededor encontramos objetos cotidianos en los que se aprecian paralelas y secantes

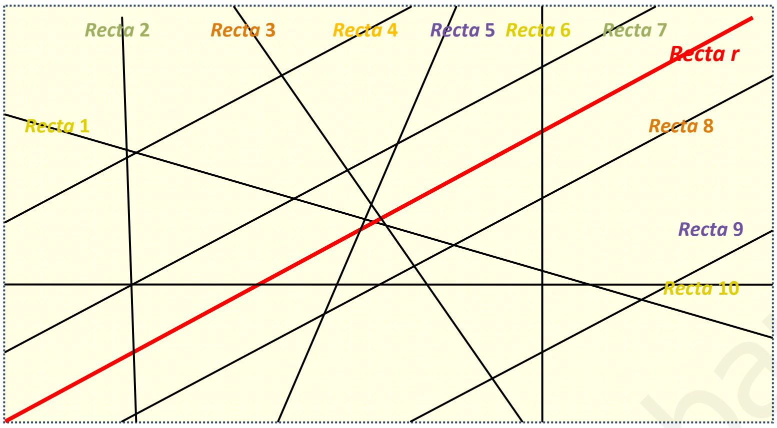



Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

Actividades propuestas

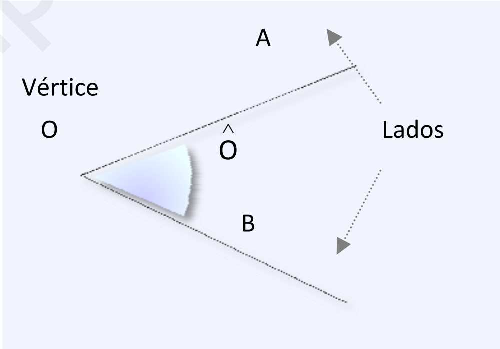
6. Dibuja cuatro rectas de modo que haya dos paralelas, dos perpendiculares y dos secantes no perpendiculares.

7. Observa el siguiente dibujo e indica qué rectas son paralelas a *r* y qué rectas son secantes a *r.*



1.3. Ángulos. Tipos de ángulos.

Se llama ***ángulo*** a la región del plano limitada por dos semirrectas con un origen común. Las semirrectas que lo limitan se llaman **lados** y el origen **vértice.**



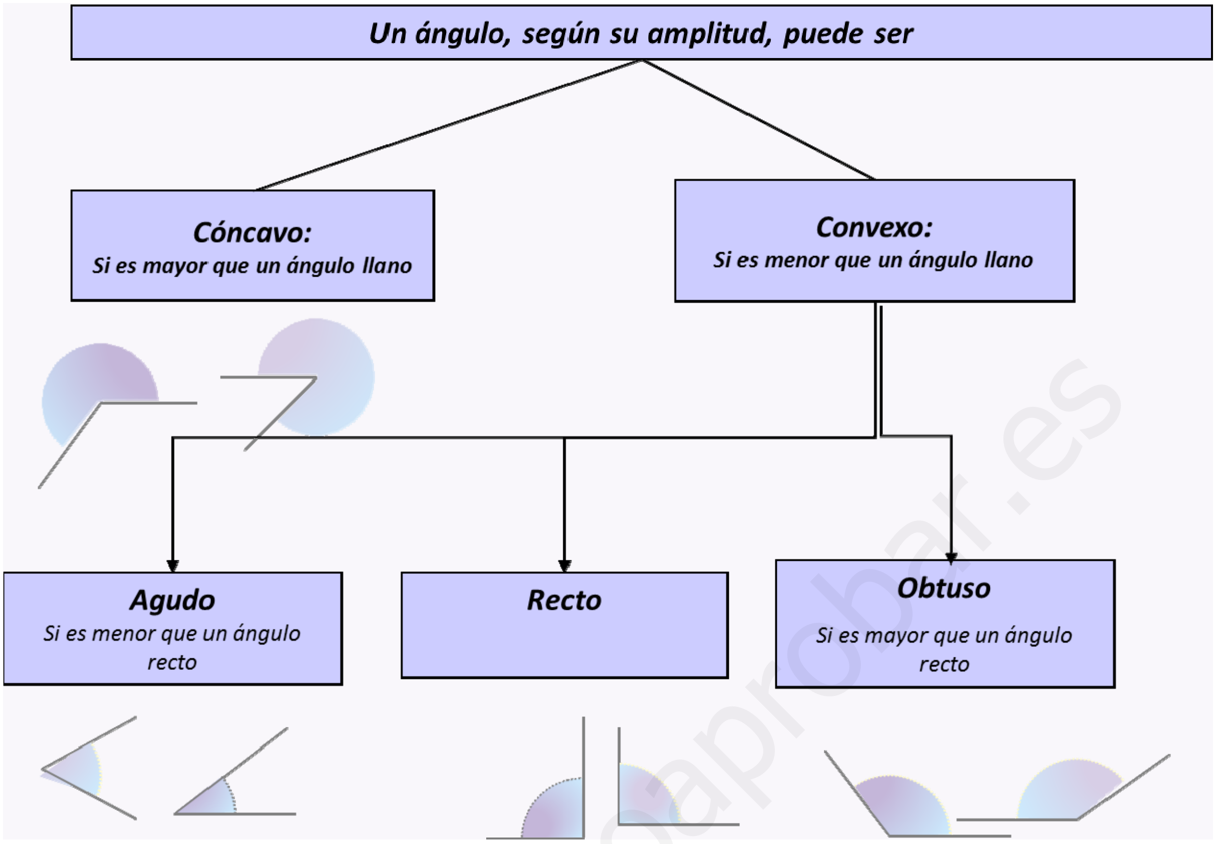
Para nombrar un ángulo podemos utilizar una sola letra o bien tres, que serán nombres de tres puntos: el primero y el último puntos sobre los lados del ángulo y el central el vértice. En ambos casos se coloca encima el símbolo ^.

En el ángulo del dibujo: $\hat{O} = A\hat{O}B$

Asociados a semirrectas especiales definiremos tres ángulos que nos servirán tanto como referencia para clasificar los demás, como para definir una de las medidas angulares más utilizadas. Nos referimos a ángulos **completos**, **llanos** y **rectos**.

Ángulo completo: Es el definido por dos semirrectas iguales.	**Ángulo llano**: Es la mitad de un ángulo completo.	**Ángulo recto**: Es la mitad de un ángulo llano.
		

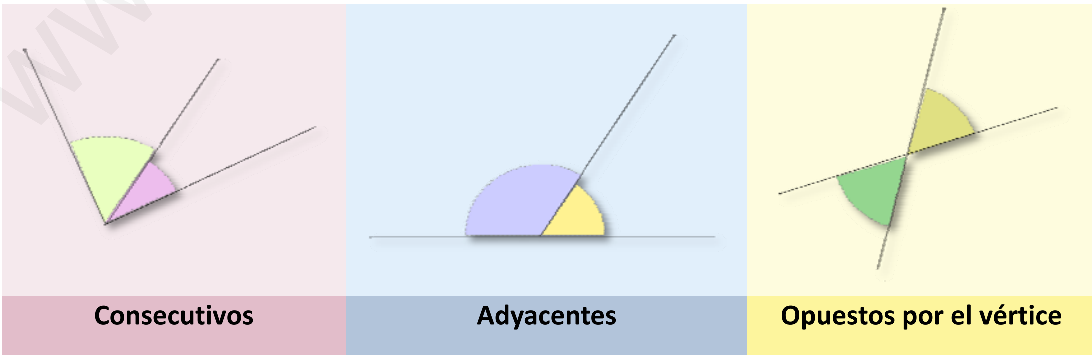
Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa



Se llaman ángulos ***consecutivos*** a dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común. Un caso particular son los ángulos ***adyacentes*** que son ángulos consecutivos cuyos lados no comunes forman un ángulo llano.

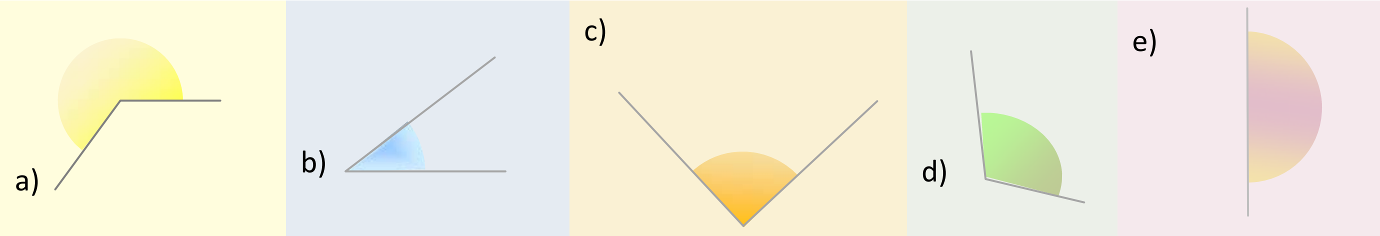
Se llaman ángulos ***opuestos por el vértice*** a los ángulos que tienen el mismo vértice y tales que los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Ejemplo:

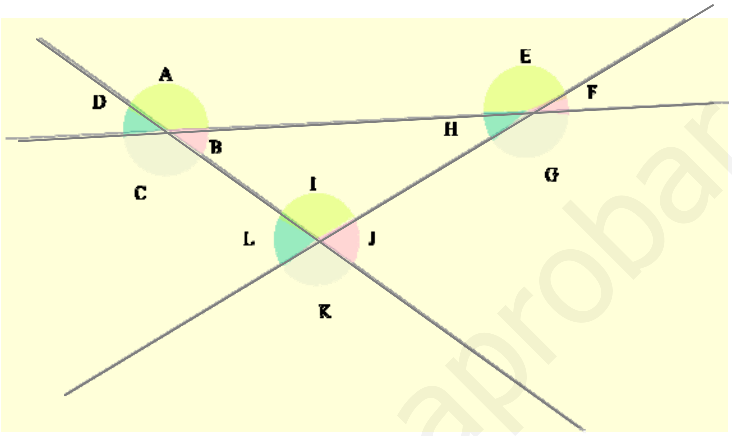


Actividades propuestas

8. Nombra cada uno de estos ángulos según su abertura:



9. Indica todas las parejas de ángulos adyacentes, consecutivos y opuestos por el vértice que se encuentran en el siguiente dibujo:



1.4. Medida de ángulos

Para medir ángulos utilizamos el llamado ***sistema sexagesimal***. La unidad de medida es el ***grado sexagesimal***. Se representa con el símbolo ° y se define como 1/360 de un ángulo completo.

1 ° = 1 / 360 parte de un ángulo completo

El *grado sexagesimal* tiene dos divisores:

Minuto 1 minuto = 1 ´ = 1/ 60 parte de un grado

Segundo 1 segundo = 1 ´´ = 1 / 60 parte de un minuto

Las unidades de este sistema aumentan y disminuyen de 60 en 60, por eso el sistema se llama sexagesimal.

Si un ángulo viene expresado en dos o tres de estas unidades, se dice que está expresado en *forma compleja*. En la *forma incompleja* de la medida de un ángulo aparece una sola unidad.

El paso de una a otra forma se realiza mediante multiplicaciones o divisiones por 60, según haya que transformar una unidad de medida de ángulos en la unidad inmediata inferior o superior.

Recuerda estas relaciones:

1 ángulo completo = 360 °

1 ángulo llano = 180°

1 ángulo recto = 90°

1 ° = 60 minutos = 3600 segundos

1 minuto = 60 segundos

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

Ejemplo:

Forma compleja: A= $12^{o}\,40´\,32´´$ B= $13´\,54´´$ C= $120^{o}\,23´´$

Forma incompleja: D =35000´´ E= 23^{o} F = 34´

Ejemplo:

Pasaremos el ángulo D del ejemplo anterior a forma compleja:

35000´´	60	583´	60
500	583´	**43´**	**9 º**
200			
20´´			

D = 35000´´ = 583´ 20´´= $9^{o}\,43´\,20´´$

Ejemplo:

A = $12^{o}\,23´10´´$ = 12. 3600´´+23.60´´+ 10´´ = 44590 ´´

Actividades propuestas

10. Pasa a forma compleja los siguientes ángulos

a) 12500´´ b) 83´ c) 230´´ d) 17600 ´´

11. Pasa de forma incompleja a forma compleja

a) $12^{o}\,34´\,40´´$ b) $13^{o}\,23´\,7´´$ c) $49^{o}\,56´\,32´´$ d) $1^{o}\,25´\,27´´$

12. Completa la tabla:

EXPRESIÓN EN SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN MINUTOS Y SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS
8465”		
	245 ´ 32 ´´	
		$31^{o}\,3´\,55´´$

1.5. Suma y resta de ángulos en el sistema sexagesimal.

Para sumar ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan los sumandos haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después se suman las cantidades correspondientes a cada unidad. Si los segundos sobrepasan 60, se transforman en minutos y se suman a los minutos resultantes de la primera fase de la suma. Si los minutos sobrepasan 60, los transformamos en grados y se suman a los grados anteriormente obtenidos.

Ejemplo 7:

24^{o} 43´ 29´´	77´´	60	73´	60
45^{o} 29´ 48´´	**17´´**	1´	**13´**	1^{o}
69^{o} 72´ 77´´	Nº minutos = 72´+ 1´= 73´		Nº de grados= $69^{o} + 1^{o} = 70^{o}$	

24^{o} 43´ 29´´ + 45^{o} 29´ 48´´ = 69^{o} 72´ 77´´ = 69^{o} 73´ 17´´ = **70^{o} 13´ 17´´**

Para restar datos de medida de ángulos, ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan el minuendo y el sustraendo haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después restamos. Si en alguna columna el minuendo es menor que el sustraendo, se pasa una unidad inmediatamente superior a la que presente el problema para que la resta sea posible.

Ejemplo:

65^{o} 48´ 50´´ 45^{o} 29´ 48´´ **20^{o} 19´ 2´´**	65^{o} 48´ 50´´ - 45^{o} 29´ 48´´= **20^{o} 19´ 2´´**

Ejemplo:

37^{o} 60´ ~~38^{o}~~ 12´ 14´´ 15^{o} 15´ 15´´	71´ 60´´ ~~37^{o}~~ 72´ 14´´ 15^{o} 15´ 15´´	37^{o} 71´ 74´´ 15^{o} 15´ 15´´ **22^{o} 56´ 59´´**

38^{o} 12´ 14´´ -15^{o} 15´ 15´´= 37^{o} 72´ 14´´- 15^{o} 15´ 15´´= 37^{o} 71´ 74´´- 15^{o} 15´ 15´´=

= **22^{o} 56´ 59´´**

Actividades propuestas

13. Calcula:

34^{o} 45´ 30´´ + 12 ^{o} 27´ 15´´ b) 16 ^{o} 30´ 1´´+ 12 ^{o} 13´ 12´´ + 2 ^{o} 1´
16 ^{o} 45' + 23 ^{o} 13'' + 30 ^{o} 20´ 30´´ d) 65 ^{o} 48´ 56´´ - 12 ^{o} 33´ 25´´
35 ^{o} 54´ 23´´ - 15 ^{o} 1´ 35'' e) 43 ^{o} 32´ 1 ´´ - 15 ^{o} 50´ 50''

1.6. Ángulos complementarios y suplementarios

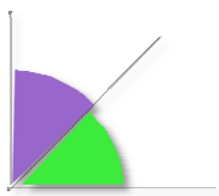
Se llaman **ángulos complementarios** a dos ángulos cuya suma es un ángulo recto (90 ^{o})

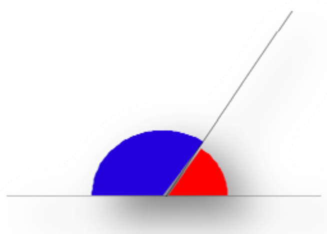
Se llaman **ángulos suplementarios** a dos ángulos cuya suma es un ángulo llano (180 ^{o})

Ejemplo:

En la figura aparecen dos ejemplos gráficos:

A y B son ángulos complementarios. C y D son suplementarios.

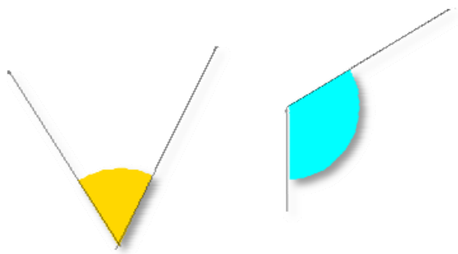




Ejemplo:

El ángulo = 12 ^{o} es el complementario de = 78 ^{o} y el suplementario de = 168 ^{o}

Actividades propuestas



14. Copia en tu cuaderno y dibuja el complementario del ángulo y el suplementario del ángulo .

15. Calcula los ángulos complementario y suplementario de:

a) 35º 54´ 23´´ b) 65º 48´ 56´´

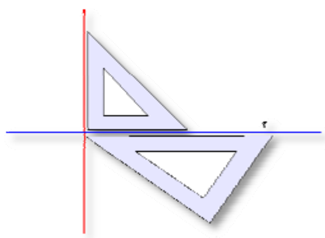
c) 43º 32´ 1´´ d) 30º 20´ 30´´

16. Indica si las siguientes parejas de ángulos son complementarios, suplementarios o ninguna de las dos cosas:

a) 15º 34´ 20´´ y 164º 25´ 40´´ b) 65º 48´ 56´´ y 24º 12´ 4´´ c) 43º 32´ 1´´ y 30º 26´ 59´´

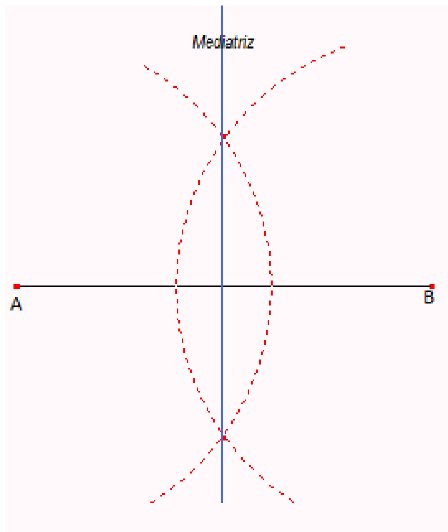
1.7 Rectas perpendiculares. Mediatriz de un segmento.

Dos rectas son **perpendiculares** si forman un ángulo recto. . Es un caso especial de rectas secantes.



Para construir una recta perpendicular a una recta dada r, se adapta un cartabón a r y sobre él se apoya uno de los lados que forma el ángulo recto (cateto) de la escuadra. El otro cateto de la escuadra nos sirve para realizar la construcción deseada. También pueden cambiarse las funciones de escuadra y cartabón.

La **mediatriz** de un segmento AB es la recta perpendicular a AB trazada desde el punto medio



Todos los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan, es decir, están a la misma distancia, de los extremos.

Con un compás y una regla podemos trazar fácilmente la mediatriz de un segmento dado. Debemos seguir los pasos

Se dibuja el segmento AB.

Con centro en A y con radio R mayor que la mitad del segmento, se traza un arco que corte al segmento AB.

Con el mismo radio se traza un arco de centro B.

Se unen los puntos comunes de los dos arcos. Esta recta es la mediatriz.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

Actividades propuestas

17. ¿Es posible dibujar tres rectas, secantes dos a dos de modo que haya exactamente: a) Una pareja de rectas perpendiculares? b) dos parejas de rectas perpendiculares?. c) las tres parejas de rectas sean perpendiculares?.

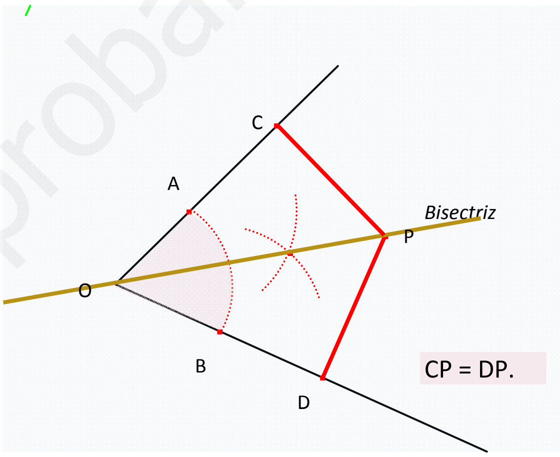
18. Dibuja la mediatriz de un segmento de 6 cm de longitud.

19. Dibuja un segmento de longitud 8 cm, su mediatriz y una recta perpendicular al segmento de partida que esté a una distancia de 5 cm del segmento inicial. ¿ Qué posición ocupa esta recta con respecto al segmento de partida?.

1.6. Bisectriz de un ángulo.

La **bisectriz d**e un ángulo es la recta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales.

Los puntos de la bisectriz son equidistantes a los 2 lados del ángulo. Puedes observar que en la figura del ejemplo adjunto que CP = DP.



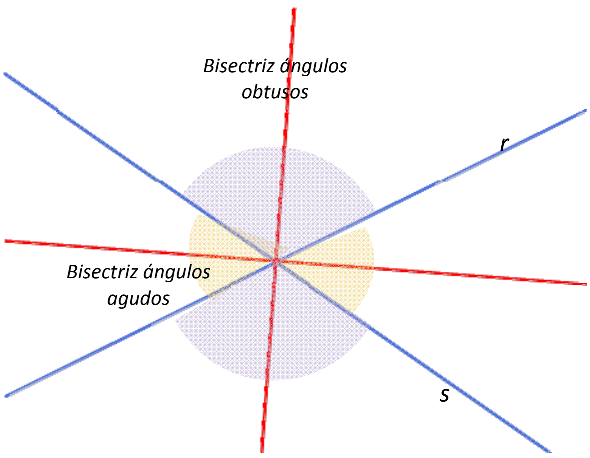
Para trazar la bisectriz de un ángulo de vértice O, se traza un arco haciendo centro en O que determina dos puntos, A y B. A continuación, con centros en A y B respectivamente y con radio fijo mayor que la mitad de la distancia AB, trazamos dos arcos. Estos se cortan en un punto, que unido con el vértice O nos da la bisectriz.

Dos rectas secantes determinan cuatro ángulos y sus bisectrices se cortan conformando ángulos rectos entre ellas.

Ejemplo:

En la figura inferior observamos que las bisectrices de los ángulos que forman *r* y *s* son perpendiculares.

Actividades propuestas



20. Utilizando un transportador de ángulos, una regla y un compás, dibuja los ángulos que se indican y la bisectriz de cada uno de ellos:

a) 45º b) 130º c) 70º d) 45º

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

2. POLÍGONOS

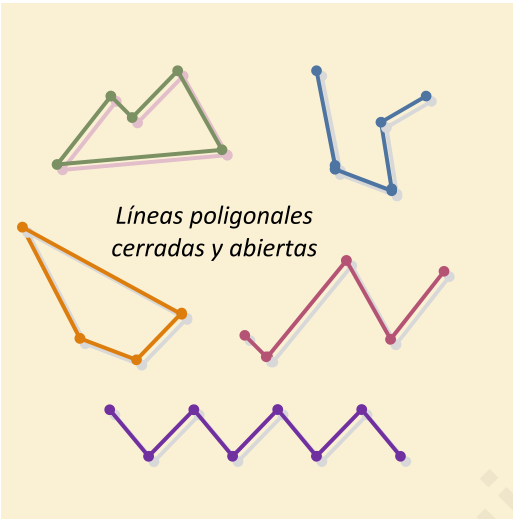
2.1. Líneas poligonales y polígonos.

Una **línea poligonal** es una colección de segmentos consecutivos. Esto quiere decir que el primer segmento tiene un extremo común con el segundo. El extremo libre del segundo es común con el tercero y así sucesivamente.

Si los extremos libres del primero y del último coinciden, se dice que la línea poligonal es cerrada. En caso contrario, es *abierta*.

Un **polígono** es una región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

Ejemplo:



2.2. Elementos de un polígono: lados, ángulos, vértices, diagonales

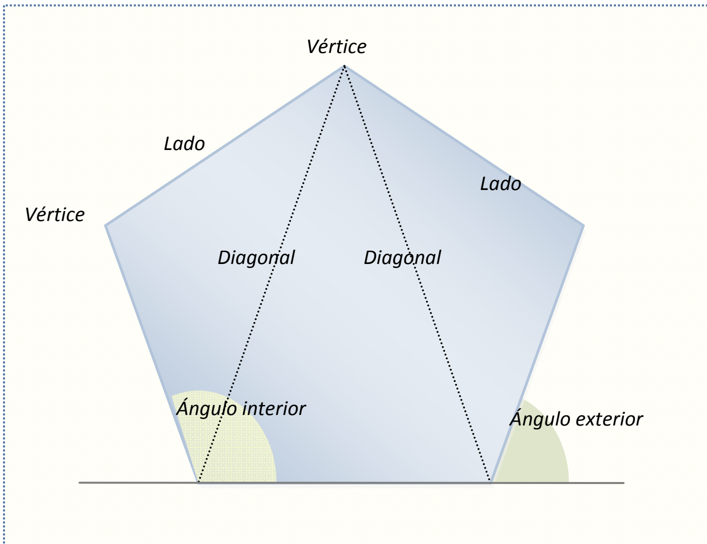
Se llama **lado** de un polígono a cada uno de los segmentos que forman la línea poligonal que lo limita.

Los ángulos limitados por dos lados consecutivos son los **ángulos interiores** del polígono.

Los ángulos limitados por un lado y la prolongación del lado consecutivo son los **ángulos exteriores** del polígono

Los puntos en los que se cortan los lados se llaman **vértices.**

Cada uno de los segmentos que une dos vértices no consecutivos se llama **diagonal.**

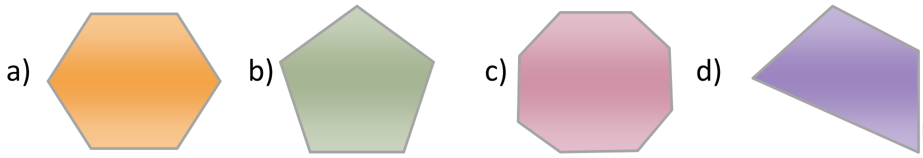


Cualquier polígono tiene el mismo número de lados, de ángulos interiores y de vértices.

Dos polígonos son **iguales** si tienen los lados y los ángulos iguales. En algunos casos basta con saber que se cumplen condiciones menos exigentes (llamadas criterios de igualdad) para garantizarlo. Veremos por ejemplo tres criterios de igualdad de triángulos.

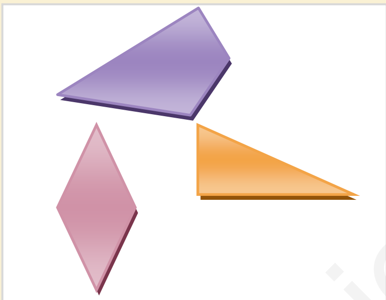
Actividades propuestas

21. Copia los dibujos siguientes y traza todas las diagonales de cada polígono:



2.3. Clasificación de los polígonos

Según *los ángulos* los polígonos se clasifican en dos grandes grupos:



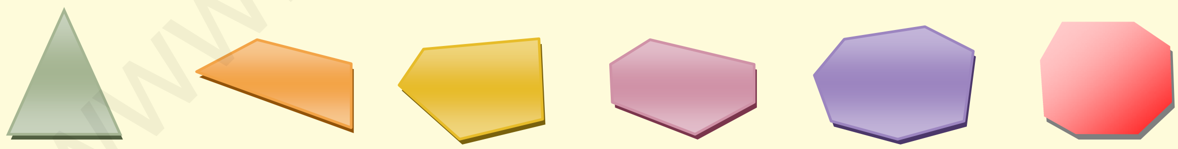
Convexos

Si todos sus ángulos son convexos.

Cóncavos

Si al menos uno de sus ángulos es cóncavo

Por *el número de lados,* los polígonos se clasifican en



Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octógono
Tres lados	*Cuatro lados*	*Cinco lados*	*Seis lados*	*Siete lados*	*Ocho lados*

Si un polígono tiene todos sus ángulos iguales se llama **equiángulo** y si tiene todos sus lados iguales se llama **equilátero**.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

Los polígonos que tienen todos sus ángulos interiores y sus lados iguales se denominan **regulares.** Los polígonos regulares son entonces equiláteros y equiángulos. Si por lo menos una de estas condiciones se incumple, el polígono se llama **irregular.**

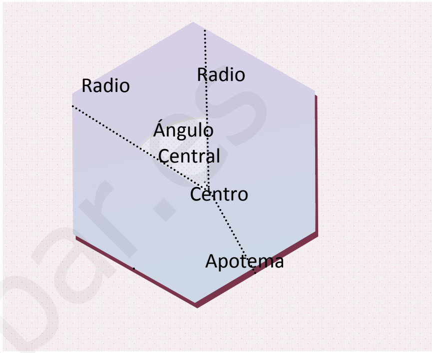
En un polígono regular aparecen nuevos elementos:

Centro que es un punto que equidista de los vértices.

Radio que es un segmento que une el centro con un vértice del polígono.

Ángulo central que es el menor de los ángulos que determinan dos radios que unen vértices consecutivos.

Apotema que es el segmento que une el centro con el punto medio de un lado. El apotema es perpendicular al lado.



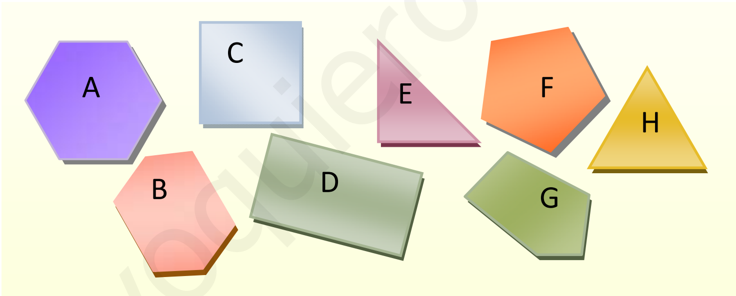
Actividades propuestas

22. Dibuja, si es posible, un polígono ejemplo de:

a) triángulo cóncavo b) pentágono convexo

c) hexágono cóncavo d) cuadrilátero convexo regular.

23. Observa la figura adjunta e indica qué polígonos son equiángulos, equiláteros, regulares e irregulares. Puedes copiar la tabla inferior en tu cuaderno y completarla



	A	B	C	D	E	F	G	H
EQUIÁNGULO								
EQUILÁTERO								
REGULAR								
IRREGULAR								

25. Dibuja en tu cuaderno el apotema de:

a) un triángulo equilátero, b) un cuadrado, c) un hexágono regular.

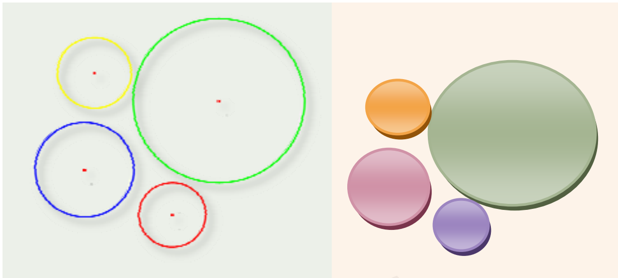
Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

3. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

3.1. Circunferencia y círculo

Una **circunferencia** es una línea cerrada y plana cuyos puntos equidistan de un punto interior a la misma llamado centro.

La porción de plano limitado por una circunferencia se llama **círculo.**



Circunferencias *Círculos*

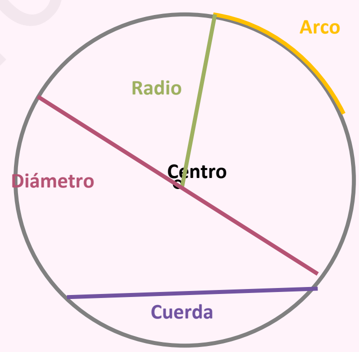
3.2. Elementos de una circunferencia.

Se llaman elementos de una circunferencia a ciertos puntos y segmentos singulares de la misma. Los describimos a continuación

El **centro** es el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.

El **radio** de una circunferencia es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. Se nombra con la letra *r* o bien con sus puntos extremos. La medida del radio es constante.

El **diámetro** de una circunferencia es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro mide el doble del radio.



Una **cuerda** es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia. El diámetro es la cuerda de longitud máxima.

Cada una de las partes en que una cuerda divide a la circunferencia se llama **arco**.

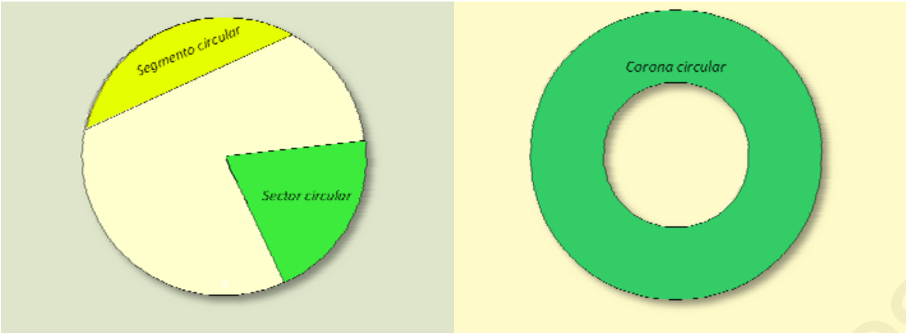
Un arco de circunferencia se denota con el símbolo ∩ sobre las letras que designan los puntos extremos del arco. Por ejemplo el arco de extremos A, B se escribe . Un caso particular es la semicircunferencia, arco delimitado por los extremos de un diámetro

3.3. Sector circular y segmento circular. Corona circular.

Un **sector circular** es la porción de círculo comprendida entre dos radios.

Un **segmento circular** es la porción de círculo comprendido entre una cuerda y el arco que tiene sus mismos extremos.

Una **corona circular** es la superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.



El ángulo que forman los dos radios que determinan un sector circular, se llama ángulo central. Si el ángulo central es llano, el sector circular es un semicírculo.

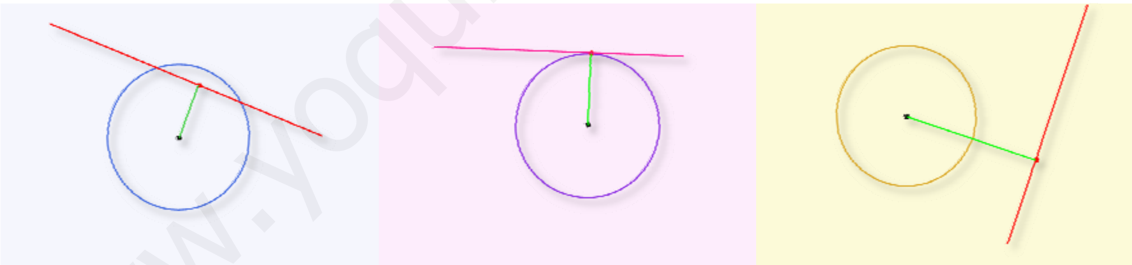
Actividades propuestas

26. Dibuja una circunferencia de radio 4 cm y en ella un sector circular de 30º de amplitud.

27. En la circunferencia anterior, indica si es posible trazar una cuerda en cada uno de los casos siguientes y hazlo en caso afirmativo: a) de 4 cm de longitud, b) de 8 cm, c) mayor de 8 cm.

3.4. Posiciones entre una recta y una circunferencia.

Una recta puede tener dos puntos comunes con una circunferencia, uno o ninguno.



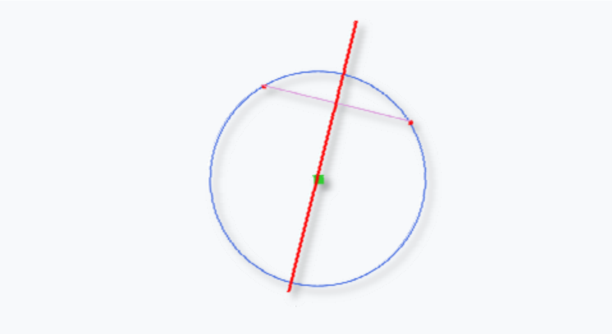
SECANTES Dos puntos en común	TANGENTES Un punto en común	RECTA EXTERIOR A LA CIRCUNFERENCIA Ningún punto común

El punto común de una circunferencia y una recta tangentes, se llama **punto de tangencia**

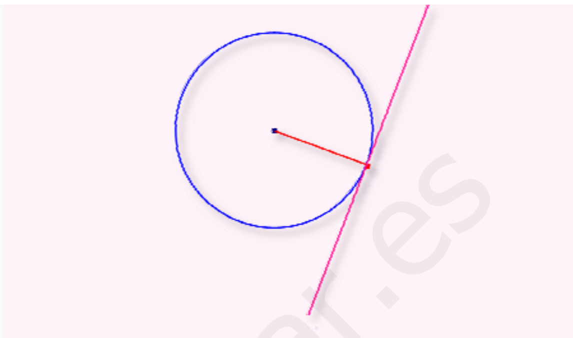
La distancia del centro de la circunferencia a una recta es menor, igual o mayor que el radio, dependiendo de que sean secantes, tangentes o exteriores

3.5. Propiedades importantes de las circunferencias y sus elementos

Algunas construcciones geométricas como el trazado de la circunferencia que pasa por tres puntos dados, la búsqueda del centro de un arco de circunferencia o el dibujo de una recta tangente a una circunferencia cuando se conoce el punto de tangencia, se pueden resolver gracias a estas propiedades que seleccionamos



Las mediatrices de todas las cuerdas de una circunferencia pasan por el centro.



La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

Actividades propuestas

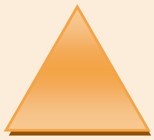
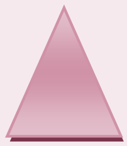
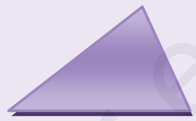
28. Dibuja tres puntos que no estén en línea recta de modo que el primero esté a 2 cm de distancia del segundo y el segundo a 3 cm del tercero. Finalmente traza la circunferencia que pase por los tres.

4. TRIÁNGULOS

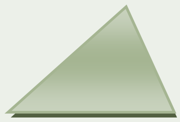
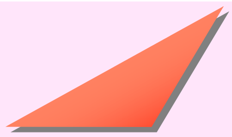
Como hemos visto antes, un triángulo es un polígono de tres lados. Estudiaremos en este párrafo dos clasificaciones de los triángulos, dos propiedades importantes comunes a todos los triángulos y descubriremos los llamados rectas y puntos notables de un triángulo.

4.1. Clasificación de los triángulos

Según *los lados* los triángulos se clasifican en

		
Equiláteros	**Isósceles**	**Escalenos**
Tienen tres lados iguales	*Tienen exactamente dos lados iguales*	*Los tres lados son desiguales*

Según *los ángulos* los triángulos se clasifican en

		
Acutángulos	**Rectángulos**	**Obtusángulos**
Tienen tres ángulos agudos	*Tienen un ángulo recto*	*Tienen un ángulo obtuso*

En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el tercero se denomina *hipotenusa*.

4.2. Propiedades fundamentales de un triángulo.

La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.

De esta propiedad se deducen las consecuencias siguientes:

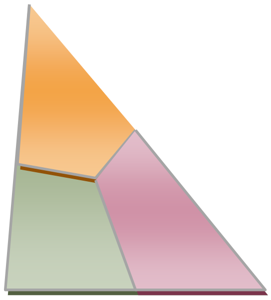
Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.
Cada ángulo de un triángulo equilátero vale 60º.

En un triángulo cualquier lado es siempre menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Es preciso tener en cuenta esta propiedad para saber si tres segmentos dados pueden o no ser los lados de un triángulo

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

Actividades propuestas



29. Dibuja en un papel un triángulo, divídelo en tres partes y coloréalas con tres colores diferentes. Después recórtalas y forma con ellas un ángulo llano. De esta forma, habrás demostrado que la suma de sus ángulos es 180°.

30. Calcula el valor del tercer ángulo de un triángulo si dos de ellos miden respectivamente:

a) 30° y 80° b) 20 ° y 50° c) 15° y 75° d) 40 ° 30 ´ y 63 ° 45 ´.

31. Clasifica, según sus ángulos, los triángulos del ejercicio anterior.

32. Construye un triángulo rectángulo isósceles.

33. Indica razonadamente si es posible construir un triángulo cuyos lados midan:

a) 5 cm, 4 cm y 3 cm b) 10cm, 2 cm y 5 cm c) 2dm, 2dm 4 dm d) 13 m, 12 m y 5 m

4.3. Rectas y puntos notables de un triángulo

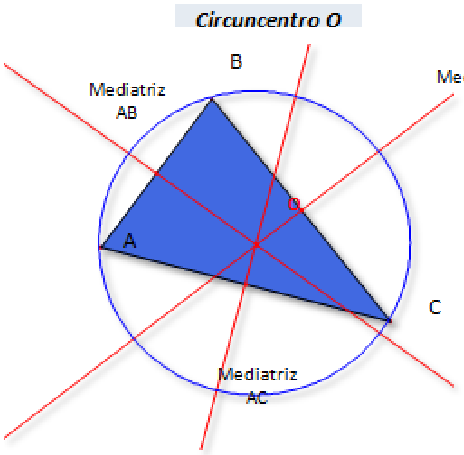
En un triángulo se definen cuatro tipos de rectas denominadas, genéricamente, rectas notables. Esas rectas son: mediatrices, bisectrices, medianas y alturas.

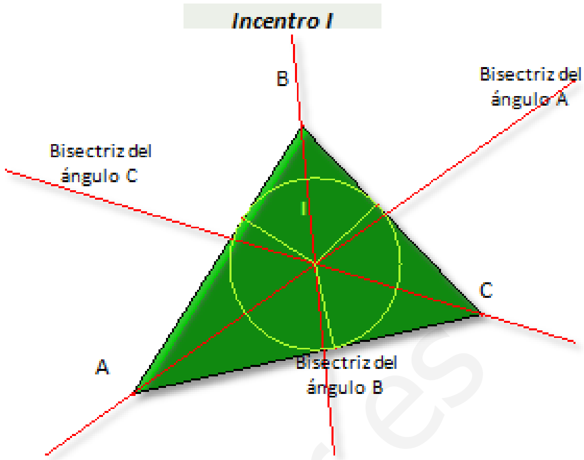
En todo triángulo existen tres rectas de cada uno de los tipos mencionados y tienen la propiedad de pasar por un mismo punto. Los puntos de intersección de estos grupos de rectas se denominan puntos notables

Las mediatrices de los tres lados del triángulo concurren en un punto llamado **circuncentro** (O en la figura izquierda del ejemplo 14). Dicho punto equidista de los vértices y, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto llamado incentro (I en la figura de la izquierda del ejemplo 14). Dicho punto equidista de los lados del triángulo y es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Ejemplo:



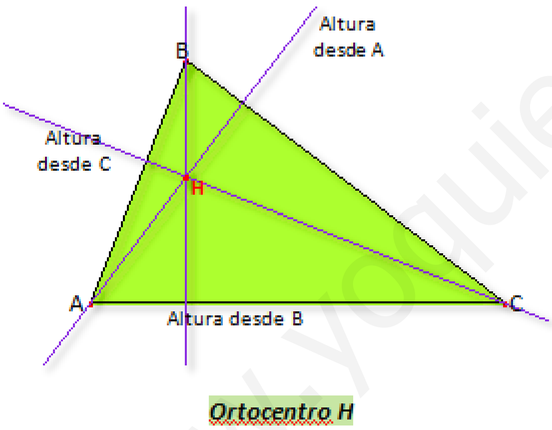


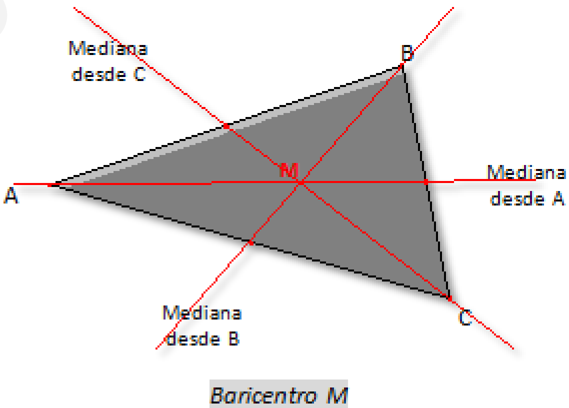
Se llama **altura** de un triángulo a la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

Las tres alturas de un triángulo se cortan en el **ortocentro.**

Se llama **mediana** de un triángulo a la recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. El punto de corte de las medianas se llama **baricentro**.

Ejemplo:





Actividades propuestas

34. Dibuja un triángulo equilátero de 10 cm de lado y comprueba que todos los puntos notables coinciden.
35. Calcula el circuncentro de un triángulo rectángulo. ¿Dónde se encuentra?
36. Calcula el ortocentro de un triángulo obtusángulo.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

4.4. Igualdad de triángulos.

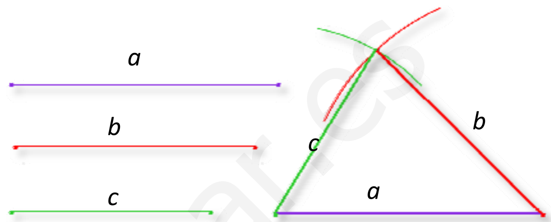
Dos triángulos son iguales si los tres lados y los tres ángulos son iguales.

Para comprobar que dos triángulos son iguales es suficiente comprobar que se cumple uno de los tres criterios siguientes:

1º Tienen los tres lados iguales.

Es posible construir un triángulo tomando como punto de partida las longitudes de los tres lados: *a, b, c*

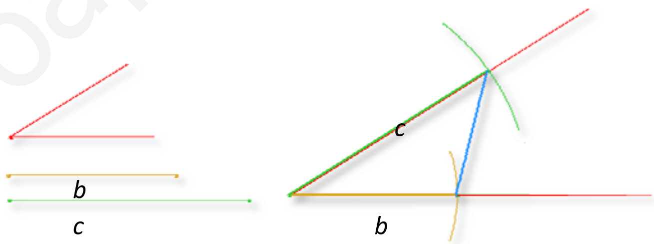
Para ello, se dibuja un segmento de longitud igual a uno de ellos (*a* por ejemplo). Sus extremos serán dos vértices del triángulo.



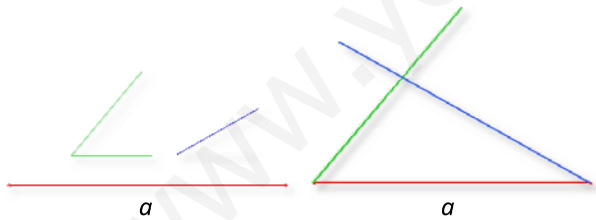
A continuación desde un extremo se traza un arco con radio *b* y desde el otro se traza un arco con radio *c*. El punto común de los dos arcos es el vértice que falta:

2º Tienen dos lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ambos.

Pongamos que los datos son las longitudes b y c y el ángulo . Se dibuja en primer lugar el ángulo . Su vértice es un vértice del triángulo. Sobre sus lados se llevan con un compás las medidas b y c, estos arcos son los dos vértices restantes.



3º Tienen un lado igual adyacente a dos ángulos también iguales.



Suponemos conocido el lado a y los ángulos y . Podemos construir el triángulo con facilidad también en este caso.

Se dibuja en primer lugar el segmento *a*. Sus extremos son dos vértices de nuestro triángulo. En sus extremos, se dibujan los ángulos y de modo que el segmento *a* sea un lado de cada uno de ellos. Por último, se prolongan los lados de y hasta que se corten.

Actividades propuestas

37. Dibuja un triángulo en los siguientes casos:

a) Sus lados miden 12 cm, 10 cm y 8 cm

b) Un lado mide 10 cm y sus ángulos adyacentes 30^{o} y 65^{o}.

c) Dos lados miden 10 cm y 8 cm y el ángulo comprendido entre ellos 50^{o}.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

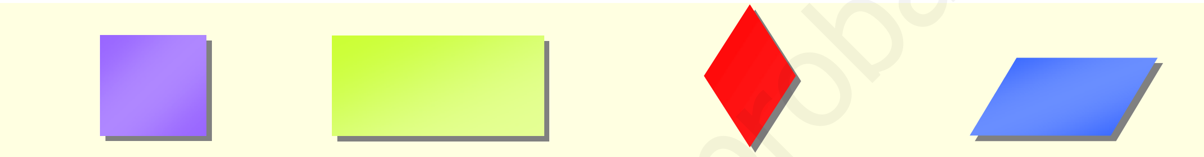
6 . CUADRILÁTEROS

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Como otros polígonos, se clasifican en dos grandes grupos dependiendo del tipo de ángulos que tengan: cóncavos y convexos. Además, podemos distinguir varios tipos de cuadriláteros convexos.

6.1. Clasificación de los cuadriláteros convexos.

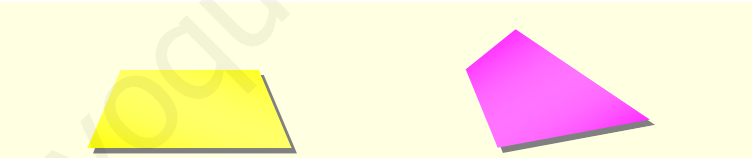
Los cuadriláteros convexos se clasifican en **paralelogramos** y **no paralelogramos.**

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene los lados paralelos e iguales dos a dos. También sus ángulos son iguales dos a dos. Hay cuatro tipos de paralelogramos:



Cuadrado	Rectángulo	Rombo	Romboide
Los cuatro lados y los cuatro ángulos son iguales	*Sus lados son distintos y sus cuatro ángulos iguales*	*Los cuatro lados son iguales y los ángulos distintos*	*Lados y ángulos distintos*

Los cuadriláteros no paralelogramos pueden ser de dos tipos:

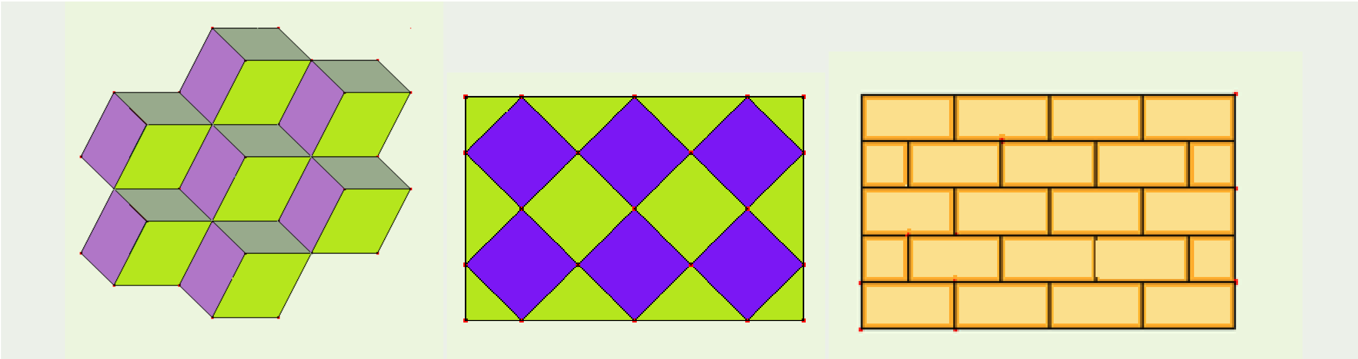


Trapecios	Trapezoides
Tienen exactamente dos lados paralelos	*No tienen ninguna pareja de lados paralelos*

Además, si un trapecio tiene dos lados iguales, se llama trapecio isósceles y si tiene dos ángulos rectos, se llama trapecio rectángulo.

Ejemplo:

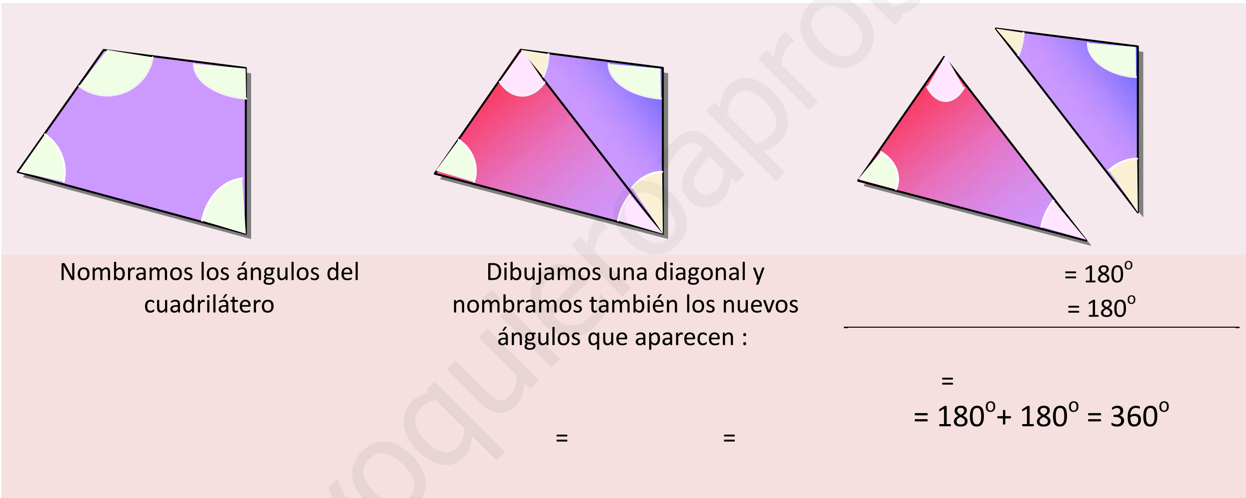
Los paralelogramos tienen muchas y variadas aplicaciones en diseño y construcción



6.2. Propiedades de los cuadriláteros

1. La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360 º.

Al trazar una de las diagonales de un cuadrilátero queda dividido en dos triángulos. La suma de los ángulos de ambos coincide con la suma de los ángulos del cuadrilátero.



Otras propiedades de los cuadriláteros son

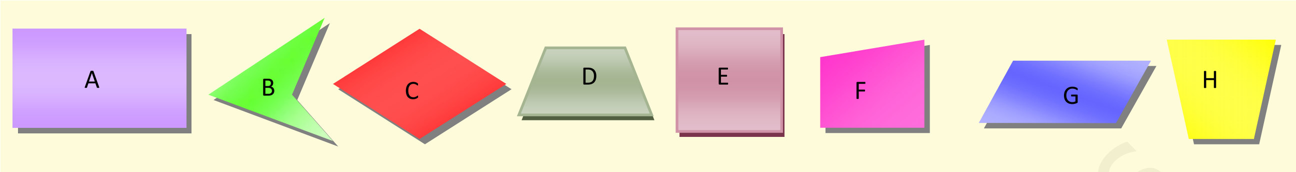
2. La diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales.
3. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio.
4. Las diagonales tanto de un rombo como de un cuadrado, son perpendiculares.
5. Al unir los puntos medios de un cuadrilátero, se forma un paralelogramo.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

Actividades propuestas

38. Fíjate en el dibujo e indica qué cuadriláteros son:

a) cóncavos b) paralelogramos c) isósceles d) trapecios e) trapezoides f) regulares



39. Averigua qué tipo de paralelogramo aparece si se unen los puntos medios de:

a) un cuadrado b) un rombo c) un rectángulo d) un trapecio e) un trapezoide.

40. Los dos ángulos agudos de un romboide miden 32º. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos obtusos?.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

CURIOSIDADES. REVISTA

EUCLIDES, UN GRAN GEÓMETRA

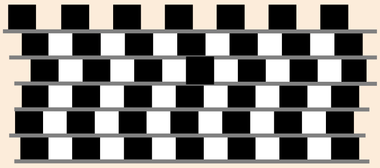
En el siglo III a. C. Euclides enseñaba Matemáticas en la escuela de Alejandría. Su obra principal fueron Los Elementos, que han sido durante siglos la base de la geometría.

Las aportaciones más interesantes de Euclides fueron definiciones y postulados como éstos:

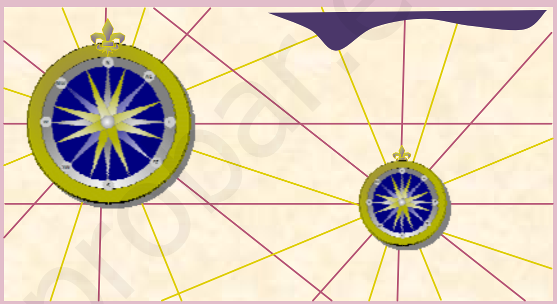
"Un punto es aquello que no tiene partes"
"Una línea es una longitud sin anchura"
"Las extremidades de una línea son puntos"

ILUSIONES ÓPTICAS

¿Son rectas paralelas o curvas las líneas grises?



LA ROSA DE LOS VIENTOS

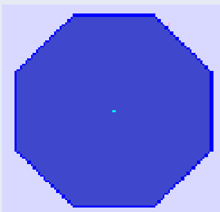


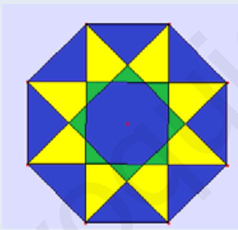
La *rosa de los vientos* ha aparecido en gráficas y mapas desde el año 1300. La base de su dibujo es un polígono estrellado. Las rectas que unen vértices opuestos son los rumbos de navegación

POLÍGONOS REGULARES ESTRELLADOS

Un polígono regular estrellado puede construirse a partir del regular convexo uniendo vértices no consecutivos de forma continua.

Si N es el número de vértices del polígono regular convexo y M el salto entre vértices, la fracción N/M ha de ser irreducible, de lo contrario no se genera el polígono estrellado.



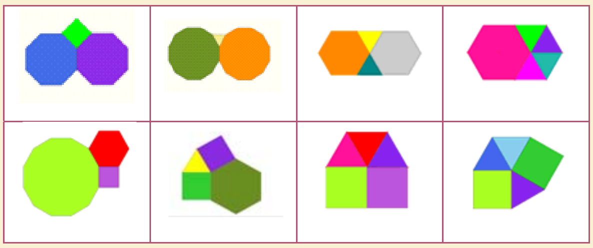


MOSAICOS

¿Sabes qué es un mosaico? .Se llama mosaico a todo recubrimiento del plano mediante piezas que no pueden superponerse, ni pueden dejar huecos sin recubrir .

Los más sencillos son los **mosaicos regulares** formados por polígonos regulares todos iguales. Solo hay tres posibilidades para construir mosaicos regulares. Búscalas.

Un **mosaico semiregular** es el formado por polígonos regulares de forma que en cada vértice tengan la misma distribución. Solo hay ocho



GRACE CHISHOLM YOUNG

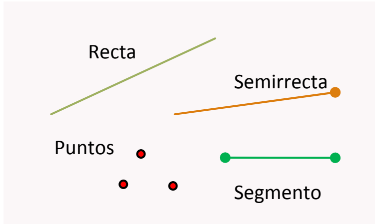
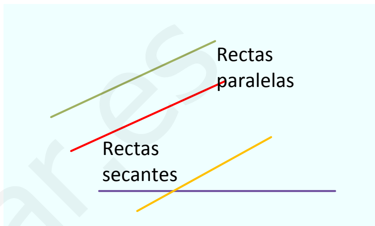
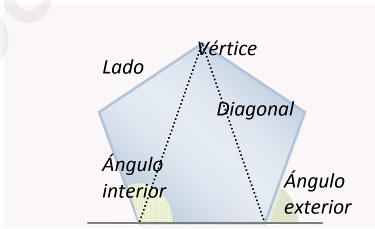
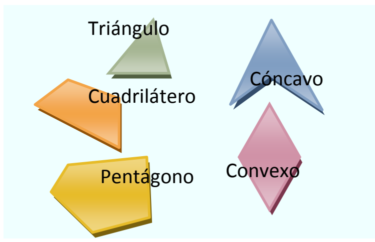
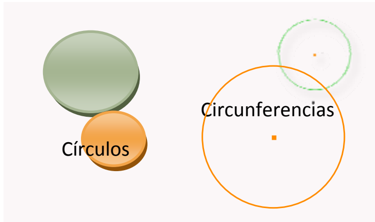
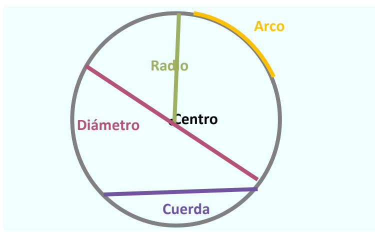
(1868 - 1944)

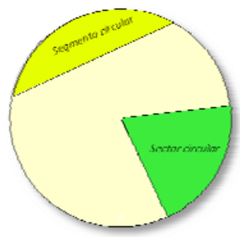
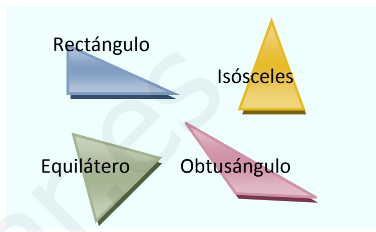
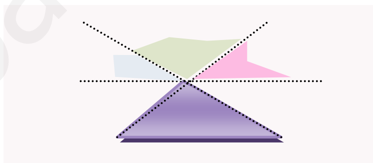
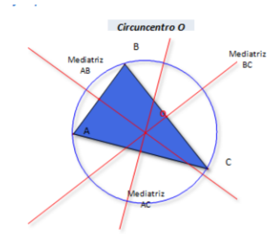
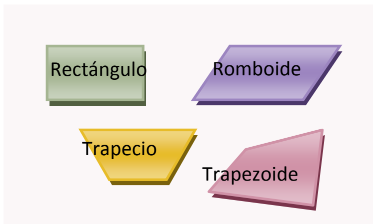
Grace Chisholm Young incluyó en su obra "Primer libro de Geometría" múltiples diagramas de figuras tridimensionales para ser recortadas y construidas.

Su innovadora forma de plantear la enseñanza de la Geometría, ha trascendido hasta el momento actual.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

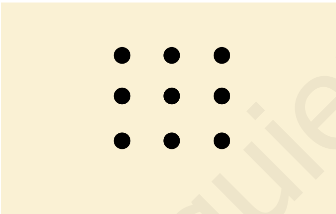
RESUMEN

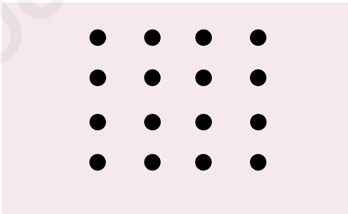
		Ejemplos
Elementos del plano	Los elementos fundamentales del plano son: puntos, rectas, semirrectas, segmentos	
Posición relativa de dos rectas	Dos rectas distintas pueden ser paralelas o secantes	
Polígonos. Elementos de un polígono	Un polígono es una línea poligonal cerrada. Los elementos de un polígono son lados, vértices, diagonales, ángulos interiores y exteriores	
Clasificación de los polígonos	Por el tipo de ángulos cóncavos y convexos. Regulares o irregulares según tengan todos sus lados y ángulos iguales o no. Por el número de lados: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos,…	
Circunferencia y círculo	Una circunferencia es una línea cerrada que cumple que todos sus puntos están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. Un círculo es la parte de plano que encierra una circunferencia.	
Elementos de una circunferencia	Centro, radio, diámetro, cuerda, arco.	

Sector circular, segmento circular y corona circular	Un sector circular es la porción de círculo comprendida entre dos radios. Un segmento circular es la porción de círculo comprendido entre una cuerda y el arco que tiene sus mismos extremos. Una corona circular es la superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.	
Clasificación de triángulos	Según los ángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos. Según los lados: equiláteros, isósceles y escalenos,	
Propiedades	La suma de los ángulos de un triángulo es 180^{o}. En todo triángulo, cualquier lado es menor que la suma de los otros dos.	
Rectas y puntos notables en un triángulo	Las mediatrices concurren en el circuncentro, las bisectrices en el incentro, las alturas en el ortocentro y las medianas en el baricentro.	
Clasificación de los cuadriláteros	Paralelogramos si sus lados son paralelos e iguales dos a dos y no paralelogramos. Los paralelogramos se dividen en cuadrados, rectángulos, rombos y romboides. Los no paralelogramos pueden ser trapecios o trapezoides.	

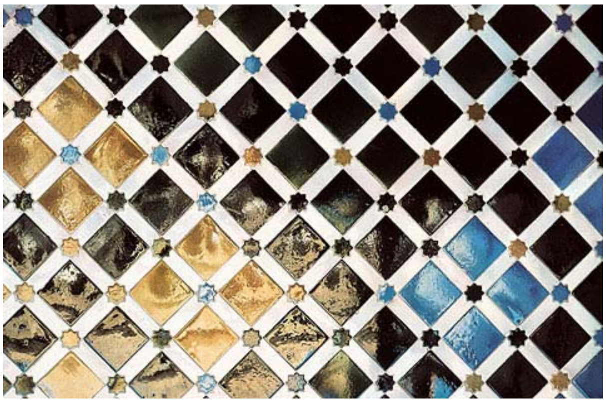
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dibuja una recta horizontal y otra que forme un ángulo de 60° con ella.
2. Dibuja cuatro rectas de modo que tres de ellas pasen por un mismo punto y la cuarta sea paralela a una de ellas.
3. Dibuja dos rectas secantes y un segmento que tenga un extremo en cada una de ellas.
4. Si dos rectas *r* y *s* son perpendiculares y trazas una tercera recta *p* paralela a una de ellas,por ejemplo a *r* ,¿cómo son las rectas *s* y *p*? . Haz un dibujo.
5. Un ángulo mide ¾ de recto. Expresa esta medida en grados, minutos y segundos.
6. Calcula :
   a) $54^{\circ}\ 25'\ 10'' + 32^{\circ}\ 17'\ 14''$ b) $14^{\circ}\ 30'\ 15'' + 62^{\circ}\ 1'\ 16'' + 42^{\circ}\ 1''$
   c) $15^{\circ}\ 23' + 73^{\circ}\ 10'' + 70^{\circ}\ 28'\ 38''$ d) $45^{\circ}\ 45'\ 45'' - 12^{\circ}\ 48'\ 85''$
   e) $67^{\circ}\ 4'\ 23'' - 15^{\circ}\ 4'\ 37''$ f) $33^{\circ}\ 32'\ 1'' - 15^{\circ}\ 35'\ 20''$
7. La suma de dos ángulos es $125^{\circ}\ 46'\ 35''$. Si uno de ellos mide $57^{\circ}\ 55'\ 47''$, ¿cuánto mide el otro?
8. Cinco guardas de seguridad deben repartirse por igual un servicio de vigilancia de 24 horas. Expresa en horas y minutos el tiempo que debe permanecer vigilando cada uno de ellos
9. En un tablero de 3×3, ¿cuál es el mayor número de lados que puede tener un polígono? ¿Y en uno de 4×4?





10. La fotografía representa un mosaico de La Alhambra de Granada. Observa que está constituido por motivos geométricos.
    a. Este mosaico tiene dos tipos de polígonos regulares: ¿Cuáles son?
    b. Describe el polígono blanco. ¿Es cóncavo o convexo?
    c. El mosaico de la fotografía no es un mosaico regular. Si lo fuera estaría formado únicamente por polígono regulares todos iguales.
    d. Describe un octógono regular: número de lados, cuánto mide su ángulo central, cuánto mide sus ángulos interiores…



Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

11. Calcula el número de diagonales que tienen los siguientes polígonos:

    a) Rombo b) trapecio c) trapezoide d) cuadrado e) rectángulo f) hexágono.

12. Dibuja un hexágono regular y un cuadrado. Marca el centro y sitúa en cada uno de ellos dos apotemas y dos radios.

13. Dibuja un decágono y todas sus diagonales.

14. Completa:

    a. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo …………………..

    b. Un triángulo……………………………. tiene un ángulo obtuso.

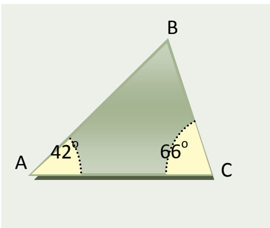
    c. Un triángulo……………………………. tiene los tres ángulos agudos.

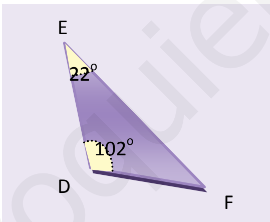
15. Construye un triángulo sabiendo que $a = 9$ cm , $b = 7$ cm y el ángulo $C = 50$ ° .

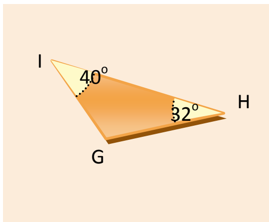
16. ¿Se puede construir un triángulo de modo que sus ángulos midan 105º, 45º y 35º. Razona tu respuesta.

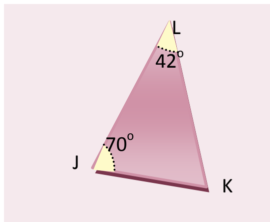
17. Dibuja un triángulo obtusángulo. ¿Crees que las tres alturas son iguales?

18. Observa las figuras y calcula los ángulos que faltan



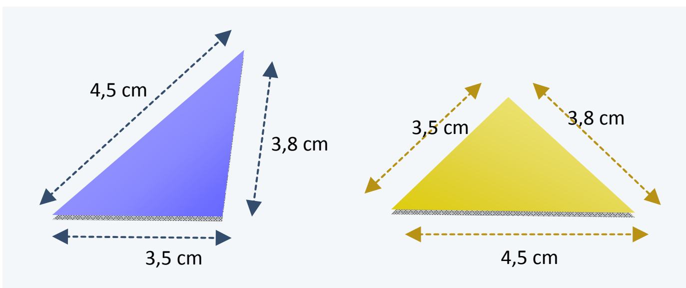






19. Dados tres segmentos de cualquier medida, ¿es siempre posible construir un triángulo?. ¿Por qué?. Recorta tiritas de papel de longitudes de 10 cm, 8 cm y 6 cm, ¿puedes construir un triángulo con ellas?.

20. ¿Puedes asegurar que son iguales los triángulos de la figura derecha?



21. Si uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es de 50º, indica el valor de los demás. Dibuja un triángulo rectángulo con estos ángulos y un cateto de 5 cm.

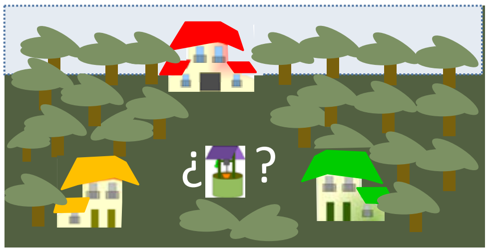
22. Si dos de los ángulos de un triángulo miden 30º y 70º, ¿cuánto mide el menor de los ángulos que forman las bisectrices correspondientes?

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

23. Construye un triángulo sabiendo que *a = 10 cm* , *los* ángulos *B = 45° C = 50°*

24. Calcula el incentro del triángulo anterior y dibuja la circunferencia inscrita al triángulo.

25. ¿En qué punto colocarías un pozo para que tres casas de campo no alineadas, estén a la misma distancia del mismo? Haz un gráfico esquemático en tu cuaderno y calcula el punto en tu dibujo.



26. Desde uno de los vértices de un hexágono se trazan tres diagonales que dividen al polígono en cuatro triángulos.
    a. Calcula la suma de los ángulos del hexágono.
    b. Si el hexágono es regular, calcula el valor de cada uno de sus ángulos interiores.
    c. En el mismo supuesto, calcula el valor del ángulo central.

27. Dibuja un polígono de 9 lados. ¿Cómo se llama?

    a. ¿Cuántos triángulos puedes formar al trazar todas las diagonales que parten de un vértice?

    b. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos del polígono inicial?.

28. Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas:

    "Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, se trata de un rombo"

    "Los trapecios rectángulos tienen todos sus ángulos iguales"

    "Los rectángulos son polígonos equiángulos".

    "Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio"

    Justifica tus respuestas y haz un dibujo que acompañe a cada una.

29. Consigue un hilo grueso y un trozo de papel de color. Recorta el hilo o el trozo de papel, según proceda y construye:

    a) Una circunferencia, b) un círculo, c) un radio , d) un segmento circular, e) un sector circular .

30. Dibuja una circunferencia de 3 cm de radio y dos arcos iguales así como las cuerdas que tienen sus mismos extremos. Comprueba que las cuerdas también son iguales.

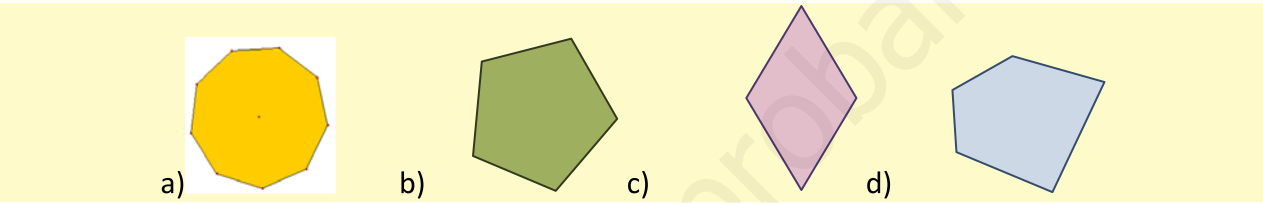
31. En el dibujo hecho para dar respuesta al ejercicio anterior, traza dos diámetros perpendiculares a las cuerdas. Mide después la distancia de cada cuerda al centro. ¿Qué observas?

32. Dibuja dos rectas paralelas de modo que la distancia entre ellas sea de 5 cm. Dibuja después una circunferencia tangente a ambas.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

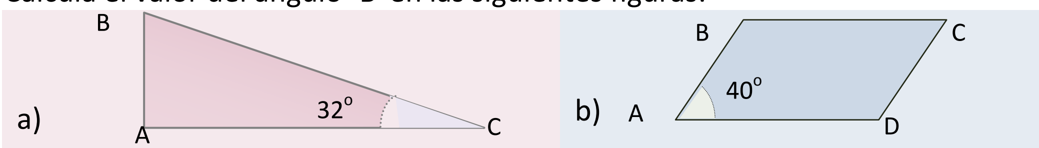
AUTOEVALUACIÓN

1. Dibuja tres puntos A, B, C que no estén alineados y :
    a. Las rectas r que pasa por A y B y s que pasa por B y C.
    b. La recta perpendicular a r y que pasa por el punto C.
    c. La recta perpendicular a s que pasa por B.
    d. La recta paralela a s que pasa por A.
2. Calcula el complementario y suplementario de los ángulos siguientes:
    a) 54^{o} b) 73^{o} 40´ 56´´
3. ¿Cuánto valen los ángulos interior y exterior de un pentágono regular?
4. Dibuja un hexágono y todas sus diagonales.
5. Clasifica los siguiente polígonos, completando la tabla:



POLÍGONO	CÓNCAVO	REGULAR	EQUIÁNGULO	EQUILÁTERO	POR EL NÚMERO DE LADOS ES UN
a)	NO	SÍ	SI	SI	ENEÁGONO
b)					
c)					
d)					
e)			SI	NO	CUADRILÁTERO

6. Dibuja un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 6 cm y 5 cm y traza sus tres alturas.
7. a) Dibuja un sector circular de radio 4 cm de modo que su amplitud sea de 82^{o} . b) Dibuja una corona circular definida por dos círculos de radios 4 cm y 2 cm.
8. Dibuja un triángulo en el que a = 6 cm, y 45^{o}. Calcula después su circuncentro.
9. Dibuja un trapecio isósceles, un trapecio rectángulo, un romboide, traza sus diagonales y estudia si se cortan en el punto medio.
10. Calcula el valor del ángulo $\hat{B}$ en las siguientes figuras:



Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

CAPÍTULO 9: LONGITUDES Y ÁREAS

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo

Revisores: Javier Rodrigo y Raquel Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

En este tema aprenderemos a hallar el perímetro y el área de las principales figuras: triángulos, cuadrados, rectángulos, trapecio, circunferencia, círculo, …

1. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

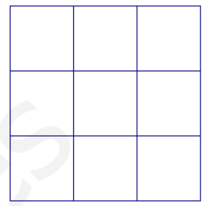
1.1. Concepto de perímetro y de área de una figura plana

El **perímetro** de una figura plana es la suma de las longitudes de sus lados.

El **área** de una figura plana es lo que mide la región limitada por los lados de la figura.

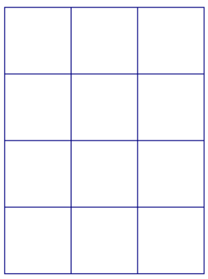
Las unidades para el perímetro son centímetros (*cm*), decímetros (*dm*), metros (*m*)…

Las unidades para el área son cm^2, dm^2, m^2, …



Ejemplo:

Si tenemos un cuadrado de lado 3 *cm*, su perímetro es 3 + 3 + 3 + 3 = 12 *cm* y su área es 9 cm^2 porque podemos meter en él 9 cuadraditos de lado 1 *cm*:



Ejemplo:

Si tenemos un rectángulo de base 3 *cm* y altura 4 *cm*, su perímetro es 3 + 4 + 3 + 4 = 14 *cm* y su área es 12 cm^2 porque podemos meter en él 12 cuadraditos de lado 1 *cm*:

Actividades resueltas

- Halla los siguientes perímetros y áreas:

El perímetro de un cuadrado de lado 4 *dm*: 4 + 4 + 4 + 4 = 16 *dm*

El área de un cuadrado de lado 4 *km*: $4 \cdot 4 = 16\ km^2$

El perímetro de un rectángulo de base 4 *m* y altura 5 *dm* en *m*: 4 + 0,5 + 4 + 0,5 = 9 *m*

El área de un rectángulo de base 4 *m* y altura 5 *dm* en m^2: $4 \cdot 0.5 = 2\ m^2$

Actividades propuestas

1. Indica la respuesta correcta: El perímetro y el área de un cuadrado de lado 5 *cm* son:

a) 10 *cm* y 25 cm^2 b) 20 *cm* y 25 cm^2

c) 20 *cm* y 5 cm^2 d) 20 *cm* y 20 cm^2

2. Indica la respuesta correcta: El perímetro y el área de un rectángulo de base 7 *dm* y altura 3 *cm* son:

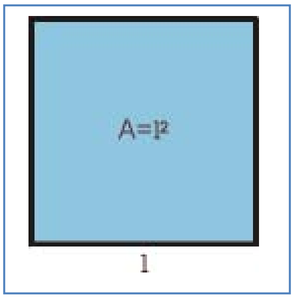
a) 146 *cm* y 210 cm^2 b) 20 *cm* y 49 cm^2

c) 20 *cm* y 21 cm^2 d) 21 *cm* y 21 cm^2

1.2. Área del cuadrado y del rectángulo

El **área de un cuadrado** es el cuadrado de uno de sus lados:

$$\textit{Área}_{\,cuadrado} = lado^2$$



El **área de un rectángulo** es el producto de su base por su altura:

$$\textit{Área}_{\,rectángulo} = base \cdot altura$$

Ejemplo:

- Si tenemos un cuadrado de 13 *dm* de lado, el área de dicho cuadrado es 169 dm^2 ya que:

$$\textit{Área}_{\,cuadrado} = lado^2 = 13^{\,2} = 169 \text{ dm}^2.$$

Actividades resueltas

- Calcula el área de la baldosa de la figura de 7 *cm* de lado

Baldosa cuadrada

Solución: La baldosa de la figura es cuadrada. Por lo tanto:

$$\textit{Área}_{\,cuadrado} = lado^2 = 7^{\,2} = 49\ cm^2.$$

- Calcula el área de un rectángulo de 9 cm de base y 4 cm de altura

Solución: Por tratarse de un rectángulo:

$$\textit{Área}_{\,rectángulo} = base \cdot altura = 9 \cdot 4 = 36 \text{ cm}^2.$$

Actividades propuestas

3. Las baldosas de la figura miden 12 *cm* de largo y 6 *cm* de ancho. ¿Qué área ocupa cada una de las baldosas?

Baldosas rectangulares

4. Mide la base y la altura de tu mesa. ¿De qué figura se trata? ¿Cuánto mide su área?

5. Estas molduras miden 175 cm de ancho y 284 cm de alto. ¿Cuál es el área encerrada?

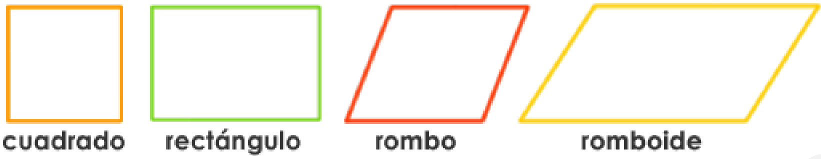
1.3. Área de paralelogramo y del triángulo

Recuerda que:

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero (cuatro lados) cuyos lados opuestos son paralelos.

Los cuadrados, los rectángulos y los rombos son paralelogramos.

Los que no son de ninguno de esos tipos se llaman **romboides.**

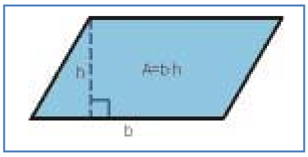


Los paralelogramos tienen las siguientes propiedades:

- Los lados opuestos son iguales
- Sus diagonales se cortan en sus puntos medios
- Tienen un centro de simetría
- Los romboides no tienen eje de simetría

El área de un **paralelogramo** es el producto de su base por su altura, igual que el área de un rectángulo:

Área $_{\textit{Paralelogramo}}$ ***= base · altura***

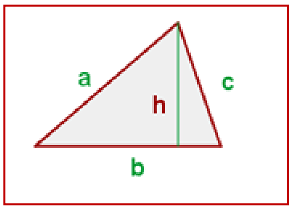


Mira el paralelogramo de la figura. Puedes convertirlo en un rectángulo cortando un triángulo y colocándolo al otro lado.

Si cortas a un paralelogramo por una de sus diagonales obtienes dos triángulos iguales, con la misma base y la misma altura que el paralelogramo. Por tanto su área es la mitad que la del paralelogramo.

El **área de un triángulo** es la mitad del área de un paralelogramo:

$$Área_{triángulo} = \frac{base \cdot altura}{2}$$



Ejemplo:

- El área de un triángulo de base b = 5 *cm* y altura h = 8 *cm* es 20 cm^2 ya que:

$$Área_{triángulo} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20\ cm^2.$$

Actividades resueltas

- La vela de un barco tiene forma triangular. La base de la vela mide 3 metros y su altura son 6 metros, ¿qué superficie ocupa dicha vela?

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Solución: Como la vela tiene forma triangular:

$$\acute{A}rea_{triángulo} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9\ m^2.$$

- Halla los siguientes perímetros y áreas:

a) Un cuadrado de 4 metros de lado:

Perímetro: La suma de sus cuatro lados: 4 + 4 + 4 + 4 = 16 *m*.

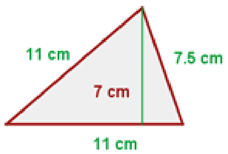
Área: lado · lado = 4 · 4 = 16 m^2.

b) Un rectángulo de 5 metros de ancho y 3 *m* de largo

Perímetro: Suma de sus lados: 5 + 5 + 3 + 3 = 16 *m*.

Área: Largo por ancho = 5 · 3 = 15 m^2.

c)



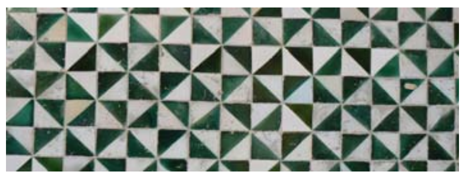
Área: $A = \frac{11 \cdot 7}{2} = 38.5\ cm^2$

Perímetro: $P = 11 + 11 + 7.5 = 29.5\ cm$

Recuerda que:
Un **triángulo** es **rectángulo**, si tiene un ángulo recto.

Actividades propuestas

6. Cada uno de los triángulos de la figura tienen una base de 10 *mm* y una altura de 6 *mm*. ¿Cuánto vale el área de cada triángulo? Si en total hay 180 triángulos, ¿qué área ocupan en total?

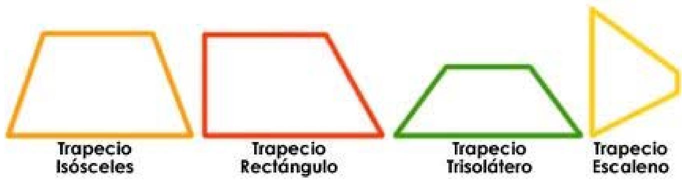


7. La base de un triángulo rectángulo mide 8 *cm*. Si su hipotenusa mide 10 cm, ¿cuál es el área de este triángulo rectángulo? (*Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto. Como los catetos son ortogonales, uno es la base y el otro, la altura)

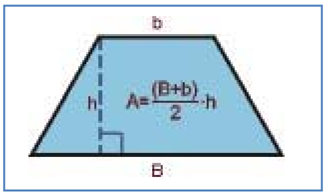
1.4. Área del trapecio, rombo y romboide

Recuerda que:

- Un **trapecio** es un cuadrilátero con dos lados paralelos y dos lados no
- Un trapecio con dos ángulos rectos se llama **rectángulo**
- Un trapecio con los dos lados no paralelos iguales se llama **isósceles**
- Un trapecio con los tres lados desiguales se llama **escaleno**



Imagina un trapecio. Gíralo 180º. Une el primer trapecio con el trapecio que acabas de girar por un lado. ¿Qué obtienes? ¿Es un paralelogramo? Tiene de base, la suma de las bases menor y mayor del trapecio, y de altura, la misma que el trapecio, luego su área es la suma de las bases por la altura. Por tanto el área del trapecio, que es la mitad es la semisuma de las bases por la altura.

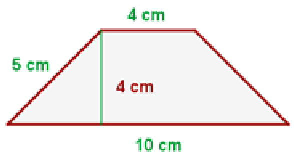


El **área de un trapecio** es igual a la mitad de la suma de sus bases multiplicada por su altura:

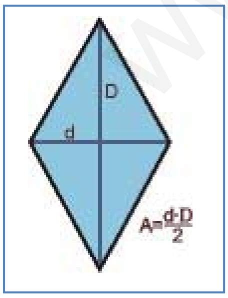
$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Ejemplo:

- Tenemos el siguiente trapecio cuyas medidas son: B = 10 *cm*, b = 4 *cm*, h = 4 *cm*, su área es:



$$A = \frac{(10+4)\cdot 4}{2} = 28\ cm^2$$



Piensa en un rombo. Está formado por dos triángulos iguales

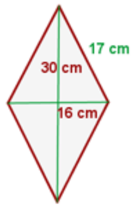
El **área de un rombo** es el producto de sus diagonales divididas entre 2:

$$A = \frac{D\cdot d}{2}$$

Ejemplo:

- Si tenemos un rombo cuyas diagonales miden D = 30 *cm* y d = 16 *cm* respectivamente y un lado mide 17 *cm*, el área será

$$A = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240\ cm^2$$



Y el perímetro $P = 17 \cdot 4 = 68\ cm$ al ser todos los lados iguales.

Otra manera de hallar el área de un rombo sería considerar que el rombo con sus dos diagonales forma cuatro triángulos rectángulos iguales de lados: 15 *cm*, (la mitad de la diagonal D), 8 *cm* (la mitad de la diagonal d), pues ambas diagonales se cruzan en el centro del rombo, y de hipotenusa 17 *cm*, el lado del rombo.

El área es: Área de un triángulo multiplicado por 4 triángulos.

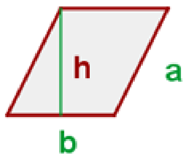
Comprobamos que el valor coincide con el anterior:

$$(8 \cdot 15 : 2) \cdot 4 = 60 \cdot 4 = 240\ cm^2.$$

Ya sabes que el romboide es un caso particular de paralelogramo.

El **área de un romboide** es el producto de su base y su altura:

$$Área_{romboide} = base \cdot altura = b \cdot h$$



Ejemplo:

- Si tenemos un romboide de 5 *cm* de base y 4 *cm* de altura su área es 5 · 4 = 20 cm^2.

Si el lado vale 4, el perímetro es 5 + 5 + 4 + 4 = 18 *cm*.

Actividades resueltas

- Calcula el área de las siguientes figuras planas:

  a) Un trapecio de bases 10 y 4 cm y de altura 3 cm

  b) Un rombo de diagonales 16 y 12 cm

Solución:

$$Área_{trapecio} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(10+4)\cdot 3}{2} = 21\ cm^2.$$

$$Área_{rombo} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96\ cm^2.$$

Actividades propuestas

8. En una cometa con forma de rombo, sus diagonales miden 84 y 35 *cm*. ¿Cuánto mide el área de la cometa?

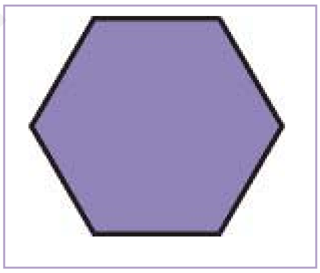
9. Un trapecista está realizando acrobacias sobre un trapecio de bases 1,2 y 0,8 *m* y altura 0,5 *m*. ¿Cuánto mide el área del trapecio que usa el trapecista?

10. Calcula el área de un romboide de 15 *cm* de base y 12 *cm* de altura. Si doblamos las medidas de la base y la altura, ¿cuál es el área del nuevo romboide?

1.5. Área de polígonos regulares

Un polígono regular podemos dividirlo en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono. Cada triángulo tiene de área: (base · altura)/2. La base del triángulo es el lado del polígono, y su altura, el apotema del polígono.

Ejemplo



- El hexágono regular de lado 4 *cm* y apotema 3,5 *cm* lo descomponemos en 6 triángulos de base 4 *cm* y altura 3,5 *cm*, por lo que su área es:

$$Área_{\,triángulo} = \frac{4 \cdot 3{,}5}{2} = 7\ cm^2.$$

El área del hexágono es por tanto:

$$Área_{\,hexágono} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3{,}5}{2} = \left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right) \cdot 3{,}5 = 42\ cm^2.$$

Al ser $\left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right)$ el semiperímetro del hexágono, es decir, la mitad de su perímetro, se puede decir que:

El **área de un polígono regular** es igual al semiperímetro por la apotema.

$$Área = semiperimetro \cdot apotema$$

Actividades resueltas

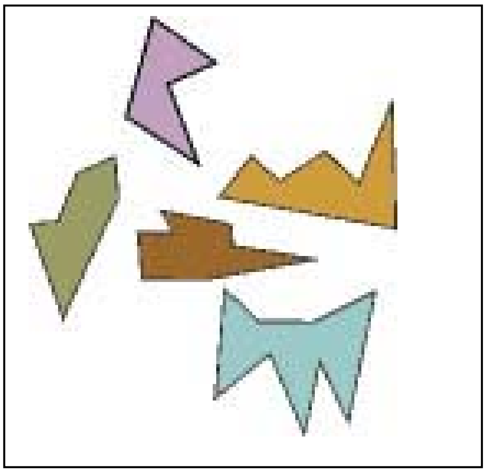
- Calcula las áreas de un triángulo y un hexágono regular de lado 6 *cm*.

Solución: El semiperímetro del triángulo es 9 *cm* y el del hexágono es 18 *cm*. Las apotemas las puedes calcular utilizando el teorema de Pitágoras y valen, para el triángulo y para el hexágono aproximadamente 5,2 *cm*, luego las áreas valen:

$$A_{\,triángulo} = 9 \cdot 5{,}2 = 46{,}8\ cm^2.$$

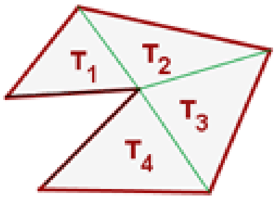
$$A_{\,hexágono} = 18 \cdot 5{,}2 = 93{,}6\ cm^2.$$

1.6. Área de polígonos irregulares



Los polígonos irregulares son aquellos que no tienen una forma conocida determinada.

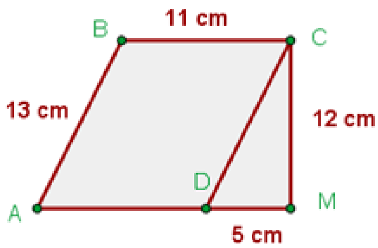
Para calcular el área de un polígono irregular, dividimos la figura en triángulos y cuadriláteros conocidos para poder aplicar las fórmulas aprendidas anteriormente.



$A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

Ejemplo:

- Hallar el perímetro y el área de la figura:



AD = BC; AB = DC ⟶ Romboide

P = 13 + 11 + 12 + 5 + 11= 52 *cm*

$A = A_R + A_T$

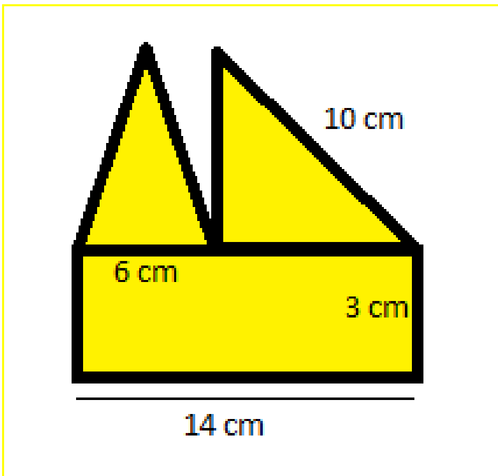
A_R = área del romboide A_T = área del triángulo

$A = 11 \cdot 12 + (12 \cdot 5) : 2 = 162\ cm^2$

Ejemplo:

- El área de esta figura irregular es 84 cm^2. ¿Qué hemos hecho para calcularla?

Dividimos la figura en dos triángulos y un rectángulo y calculamos el área de cada una de las figuras. Previamente utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura de los triángulos y obtenemos que mide 6 *cm*.



$$Área_{triángulo\ 1} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\ cm^2.$$

$$Área_{triángulo\ 2} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24\ cm^2.$$

$$Área_{rectángulo} = b \cdot h = 14 \cdot 3 = 42\ cm^2.$$

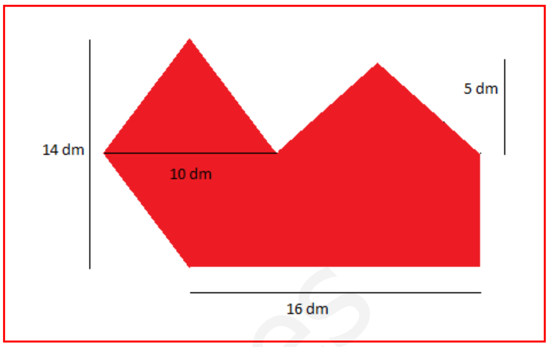
Para calcular el área total, sumamos las tres áreas obtenidas:

$$A_{total} = 18 + 24 + 42 = 84\ cm^2.$$

Actividades resueltas

- Para calcular el área de la figura de la derecha, la dividimos primero en cuadriláteros conocidos.

Tenemos un rombo, un trapecio y un triángulo:



Calculamos el área del rombo, el trapecio y el triángulo:

$$Área_{\ rombo} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{14 \cdot 10}{2} = 70\ dm^2.$$

El trapecio tiene de base mayor 16 dm, de base menor 16 – 5 = 11 dm, y de altura 7 dm, luego:

$$Área_{\ trapecio} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(16+11) \cdot 7}{2} = \frac{189}{2}\ dm^2.$$

La base del triángulo mide 11 *dm* y su altura 5 *dm*, luego su área mide:

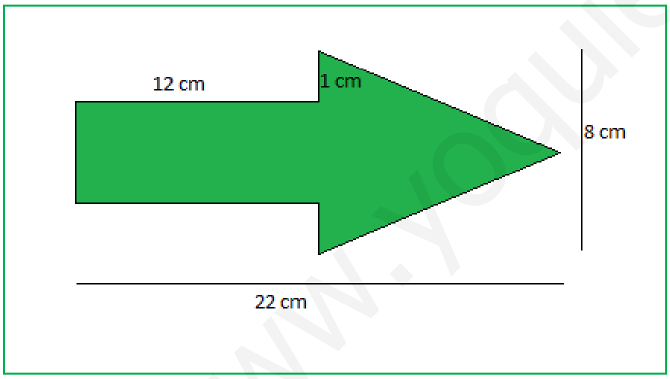
$$Área_{\ triángulo} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{11 \cdot 5}{2} = \frac{55}{2}\ dm^2.$$

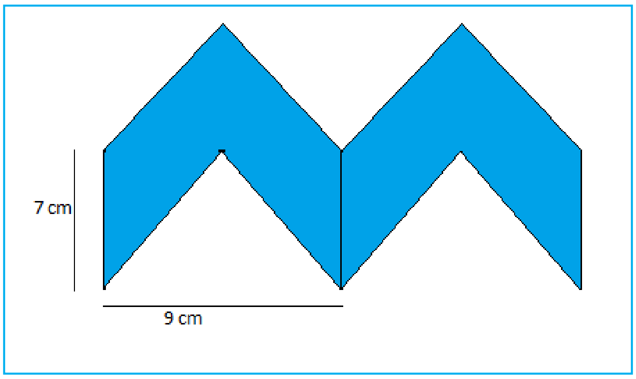
Sumando todas las áreas obtenidas:

$$Área_{\ TOTAL} = 70 + \frac{189}{2} + \frac{55}{2} = 192\ dm^2.$$

Actividades propuestas

11. Calcula el área de los siguientes polígonos irregulares:





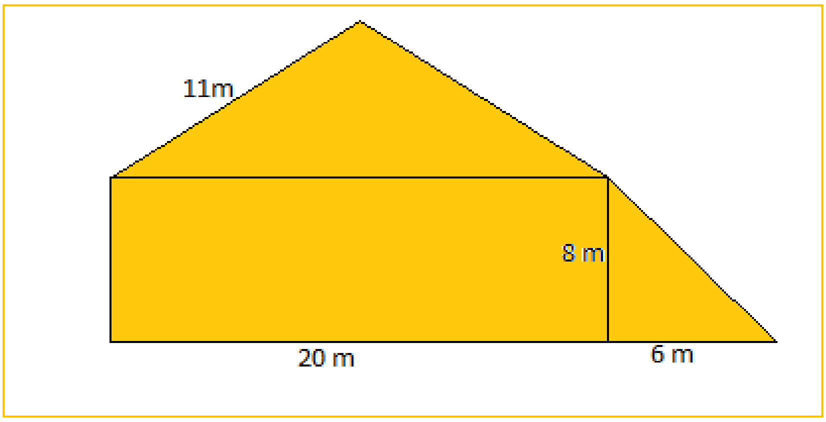
Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.7. Perímetros de polígonos

El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados

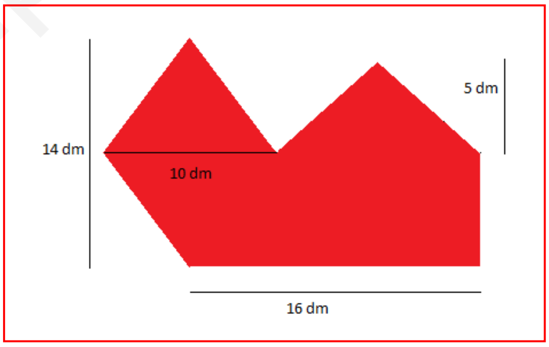
Actividades propuestas

12. Calcula el perímetro del polígono de la figura:



13. Calcula el perímetro de los polígonos de la actividad 11.

14. Calcula el perímetro del polígono de la figura:



2. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

2.1. Longitud de una circunferencia

El **número π** (pi) se define como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

π = Longitud de la circunferencia / Diámetro

Es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de **π** es 3,14, otra 3,1416, y otra 3,141592.

Desde la antigüedad más lejana hasta hoy en día los matemáticos siguen investigando sobre él.

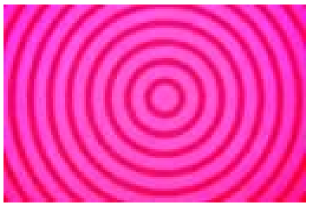
Si una circunferencia tiene un radio *r*, entonces su diámetro mide 2*r*, y su longitud, por la definición de π, mide 2·π·*r*.

Longitud de la circunferencia = 2·π·*r*.

Actividades resueltas

- La circunferencia de radio 3 *cm* tiene una longitud L = 2·π·*r* = 2·π·3 = 6·π ≈ 18,84.

Actividades propuestas



15. Las circunferencias de tamaño real de la ilustración del margen tienen como radio, la menor 2 *cm*, la un poco más oscura siguiente 2,5 *cm*, la clara siguiente 3,5 *cm*, y así, aumenta unas veces medio centímetro y otras, un centímetro. Calcula las longitudes de las 10 primeras circunferencias.

16. Busca 3 objetos redondos, por ejemplo un vaso, una taza, un plato, una botella… y utiliza una cinta métrica para medir su longitud. Mide también su diámetro. Calcula su cociente. Anota las aproximaciones de π que hayas obtenido.

17. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.379 *km*. ¿Cuánto mide el Ecuador?

2.2. Longitud de un arco de circunferencia

Para calcular la longitud de un arco de circunferencia que abarca un ángulo de α grados, debemos tener en cuenta que la circunferencia completa abarca un ángulo de 360 º. Por tanto:

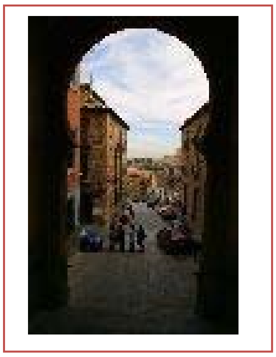
L = 2·π·*r*·α/360.

Actividades resueltas

- Las ruedas de un carro miden 60 *cm* de diámetro, y tienen 16 radios. La longitud del arco entre cada radio es L = 2·π·*r*·α/360 = 60·π/16 ≈ 11,78 *cm*.

Actividades propuestas

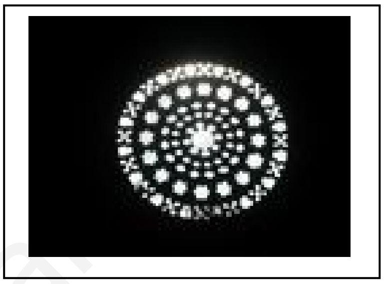
18. Antiguamente se definía un metro como: *"la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París"*. Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?



19. Hemos medido la distancia entre los pilares del arco de la figura que es de 8'4 *m*. ¿Cuál es la longitud del arco?

20. Un faro gira describiendo un arco de 170º. A una distancia de 5 *km*, ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?

21. El radio de la circunferencia exterior del rosetón de la figura es de 3 *m*, y la de la siguiente figura es de 2,5 *m*.



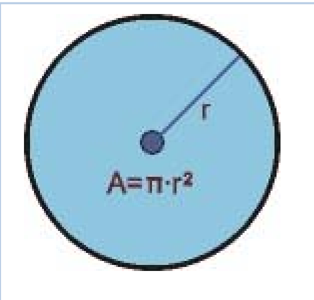
a) Calcula la longitud del arco que hay en la greca exterior entre dos figuras consecutivas.

b) Calcula la longitud de arco que hay en la siguiente greca entre dos figuras consecutivas

2.3. Área del círculo

El **área del círculo** es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

$$A = \pi \cdot r^2.$$



Se puede imaginar el área del círculo como a la que se acercan polígonos regulares inscritos en una misma circunferencia de radio *r*, con cada vez más lados. Entonces:

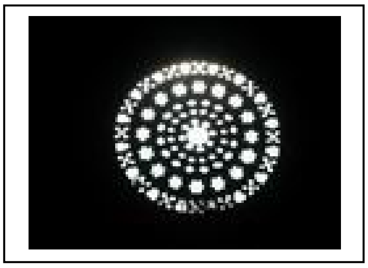
i) La apotema del polígono se aproxima al radio.

ii) El perímetro del polígono se aproxima a la longitud de la circunferencia.

Por lo tanto, el área de ese polígono, que es igual al semiperímetro por la apotema, es igual a:

$$(2 \cdot \pi \cdot r/2) \cdot r = \pi \cdot r^2.$$

Actividades resueltas



- El área de un círculo de radio 7 *cm* es $A = 49\pi \approx 153{,}86\ cm^2$. Y el de un círculo de 1 *cm* de radio es $A = \pi \approx 3{,}14\ cm^2$.
- El área de un círculo de diámetro 4 m es $A = 2^2\pi = 4\pi \approx 12{,}56\ m^2$. Y el de un círculo de 2 *m* de diámetro es $A = 1^2\pi = \pi \approx 3{,}14\ m^2$.

Actividades propuestas

22. Calcula el área encerrada por la circunferencia exterior del rosetón de 3 *m* de radio.

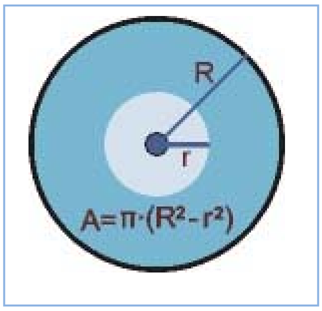
23. Calcula el área encerrada por la circunferencia que rodea a la figura interior sabiendo que su radio es de 1,3 *m*.

24. Dibuja un esquema en tu cuaderno de dicho rosetón y calcula áreas y longitudes.

2.4. Área de la corona circular

El **área de una corona circular** es igual al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.

$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$



Actividades resueltas

- El área de la corona circular formada por las circunferencias concéntricas de radios 97,5 *cm* y 53,2 *cm* es igual a: $A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (97{,}5^2 - 53{,}2^2) = \pi \cdot (9506{,}25 - 2830{,}24) = \pi \cdot 6676{,}01 \approx 20962{,}6714$ cm^2.

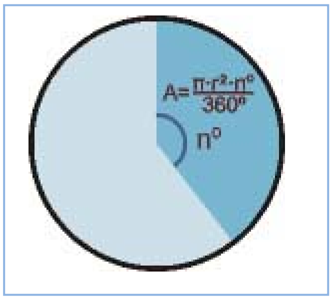
Actividades propuestas

25. Calcula el área de la corona circular de radios 7 y 3 *cm*.

2.5. Área del sector circular

El **área de un sector circular** que abarca un ángulo de *n* grados es igual a:

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot n/360.$$



Para hallar el **área del segmento circular** restamos al área del sector circular el área del triángulo construido sobre los radios.

Actividades resueltas

- Para hallar el área del *sector* circular de radio 7 m que abarca un ángulo de 90º, calculamos el área del círculo completo: $\pi \cdot 7^2 = 49\pi$, y hallamos la proporción:

$$A_S = 49\pi \cdot 90/360 = 12{,}25\,\pi \approx 38{,}465\ m^2.$$

Para hallar el área del *segmento* circular, restamos al área anterior el área del triángulo rectángulo de base 7 *m* y altura 7 *m*, $A_T = 7 \cdot 7/2 = 24{,}5\ m^2$. Luego el área del segmento es:

$$A = A_S - A_T = 38{,}465 - 24{,}5 = 13{,}965\ m^2.$$

Actividades propuestas

26. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 12 *cm* y que forma un ángulo de 60 º. Observa que para calcular la altura del triángulo necesitas usar el Teorema de Pitágoras.

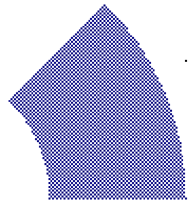
Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.6. Otras áreas

Para hallar el **área de un sector de corona circular** restamos al área del sector circular de mayor radio el área del sector circular de menor radio.

El **área de un sector de corona circular** formada por las circunferencias concéntricas de radios *r* y *R* que abarca un ángulo de *n* grados es igual a:

$$\mathbf{A = \pi \cdot R^2 \cdot (n/360) - \pi \cdot r^2 \cdot (n/360) = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot n/360.}$$



Actividades resueltas

- Para hallar el área del *sector* de corona circular de radios 7 m y 8 m que abarca un ángulo de 90º, calculamos el área de la corona circular completa: $\pi \cdot (8^2 - 7^2) = 15\pi$, y hallamos la proporción:

$$A_C = 15\pi \cdot 90/360 = 3{,}75\pi \approx 11{,}78\ m^2.$$

También se puede hallar con la fórmula anterior:

$$A_C = \pi \cdot (8^2 - 7^2) \cdot 90/360 \approx 11{,}78\ m^2.$$

Actividades propuestas

27. Calcula el área del sector de corona circular de radios 10 *cm* y 12 *cm* y que forma un ángulo de 60º.

CURIOSIDADES. REVISTA

Medida del radio de la Tierra.

Eratóstenes de Cirene estimó, de forma muy precisa para su época, el radio de la Tierra. Para ello debió medir con cuidado longitudes (entre la ciudad de Syena cerca de Assuan y Alejandría), ángulos (del Sol en el solsticio de verano). Como ese ángulo era 1/50 de la circunferencia determinó que el radio de la Tierra era 50 veces la distancia calculada.

El número π (PI)

Es un número sorprendente con infinitas cifras decimales no periódicas.

Su rastro más antiguo se encuentra en el Papiro de Ahmes donde se le da un valor de 3,16.

Arquímedes lo valoró como 22/7 que es 3,1429.

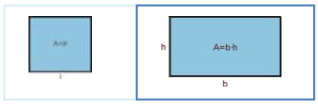
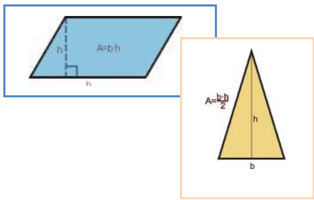
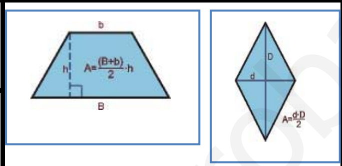
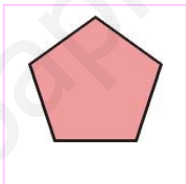
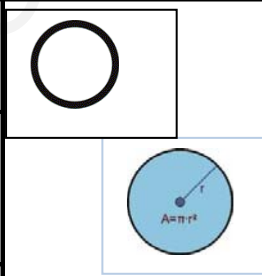
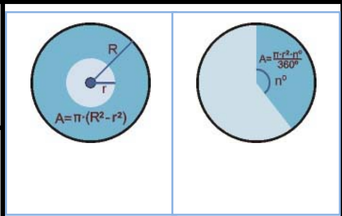
Actualmente, con ayuda del ordenador, se calculan más y más de sus cifras decimales. En 2009 se hallaron más de dos billones y medio de decimales

Algunas cifras de π:

3,141592653589793238462643383279502884986280348253421170679821480865132823066
841027019385211055596446229489549303817120190914564856692346034861045432664
881520920962829254091715364367892590360572703657595919530921861173819326117
932793818301194912983367336244065664308617176293176752384674818467669405132
000787214684409012249534301465495853710501815981362977477130996051870721134
999955346908302642522308253344685035261931776691473035982534904287554687311
595621300192787661119590921642019893809525735301852968995773622599413891249
721775617278558890750983817546374649393192550766010471018194295559619894676
783744969491293313677028989152104752162056966732639141992726042699227967823
547816364983850549458858692699569092721079750981834797753566369807426542527
862551818921732172147723501414419735685481613613454776241686251898356948556
209921922227232791786085784383827967976681454100841284886269456042419652850
222106611867191728746776465757396241389086583264552595709825822620522489407
726719478268524517493996514314298091906592509372216175392846813826868386894
277415599185548653836736222626099124608051243884390894416948685558484063534
220722258284883852254995466672782398645659611635488679451096596094025228879
710893145669136178249385890097149096759852613655497817755513237964145152374
623436454285844435969536231442952484937187110145765403784896833214457138687
519435064302184536141966342875444064374512371819217999831961567945208095146
550225231603881930467221825625996615014215030680384477343243408819071048633
173464965145390579659102897064140110971206280439039759515731251471205329281
918261861258673215797229109816909152801735067127485832228706751033467110314
1267111369908658516390998985998238734552833163550…

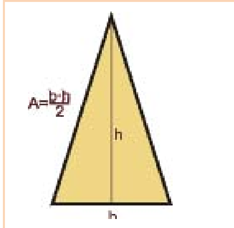
Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

			Ejemplos
Área del cuadrado	A = lado^2 = l^2		Si l = 4 cm $\Rightarrow$ A = 16 cm^2
Área del rectángulo	A = base por altura = $a \cdot b$		Si a = 3 cm, b = 5 cm $\Rightarrow$ A = 15 cm^2.
Área del paralelogramo	A = base por altura = $a \cdot b$		a = 7 m, b = 9 m $\Rightarrow$ A = 63 m^2
Área del triángulo	A = (base por altura)/2 = $a \cdot b/2$		a = 5 m, b = 6 m $\Rightarrow$ A = 15 m^2
Área del trapecio	Área igual a la semisuma de las bases por la altura		B = 7; b = 3; h = 5 $\Rightarrow$ A = 25
Área del rombo	Área igual al producto de las diagonales partido por 2		D = 4, D = 9 $\Rightarrow$ A = 36/2 = 18
Perímetro de un polígono	Perímetro es igual a la suma de los lados		Lado = 6 cm, apotema = 5 cm, número de lados = 5 $\Rightarrow$ Perímetro = 6 · 5 = 30 cm; Área = 15 · 5 = 75 cm^2.
Área de un polígono regular	Área es igual al semiperímetro por la apotema		
Longitud de la circunferencia	Si el radio es r, la longitud es igual a $2 \cdot \pi \cdot r$.		Radio = 3 cm $\Rightarrow$ Longitud = 6$\pi \approx$ 18,84 cm. Área = 9$\pi \approx$ 28,26 cm^2. Si α = 30º y r = 3 cm $\Rightarrow$Longitud del arco = 2·π·3·30/360 = 0,5$\pi \approx$ 1,57 cm
Longitud de un arco de circunferencia	Si abarca un arco α º, longitud es igual a $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha/360$		
Área del círculo	Si el radio es r, el área es igual a $\pi \cdot r^2$.		
Área de la corona circular	Es la diferencia entre el área del círculo mayor menos la del círculo menor.		R = 7, r = 3 $\Rightarrow$ A = $\pi(7^2 - 3^2)$ = $\pi(49 - 9)$ = 40$\pi \approx$ 125,6 u^2
Área del sector circular	Si abarca un arco nº, el área es igual a $\pi \cdot r^2 \cdot n/360$.		R = 4 cm, n = 60º $\Rightarrow$ A = π·16·60/360 $\approx$ 8,373 cm^2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS de 1º de ESO

Longitudes y áreas de polígonos



1. Una señal de tráfico tiene forma triangular. Su base mide 23 cm y su altura 36 cm. ¿Cuál es el área de la señal de tráfico?

2. La pizarra de una clase tiene 150 cm de altura y 210 cm de base. ¿Cuál es la superficie de la pizarra?

3. El tejado de una casa tiene forma de trapecio. La base pegada al techo de la vivienda mide 53 m y la otra base mide 27 m. Sabiendo que la altura del tejado son 8 m, ¿Cuánto mide su área?

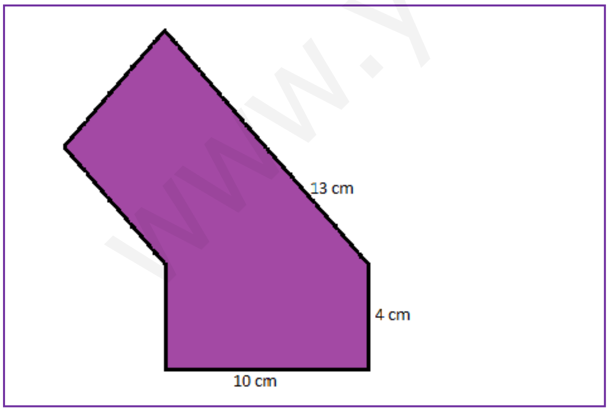
4. Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 cm de lado o circular de 7 cm de radio. Calcula ambas superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde. ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso? ¿Cuál es menor? Sólo tenemos 50 cm de reborde, ¿qué cuadrado podemos diseñar y qué posavasos circular? Calcula el área de cada uno.

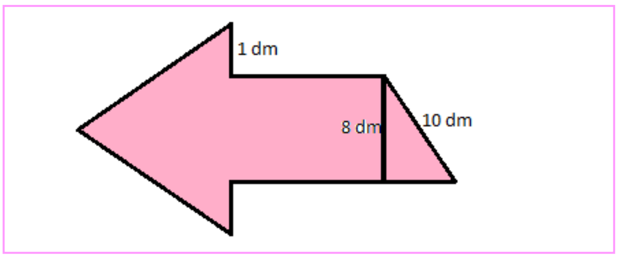
5. Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 *cm* y su perímetro mide 20 *cm*.

6. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuya diagonal mide 13 *cm* y su altura 5 *cm*?

7. Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 24 y 10 *cm* respectivamente.

8. Calcula el área de los siguientes polígonos irregulares:





Longitudes y áreas de figuras circulares

9. Calcula la longitud de una circunferencia de radio 7 cm.

10. Una circunferencia de 98,27 cm de longitud, ¿qué radio tiene? ¿y qué diámetro?

11. ¿Cuál es la longitud de un arco de circunferencia de 270 º si el radio mide 17 cm?

12. Calcula la longitud de una circunferencia inscrita en un hexágono de lado 5 cm.

13. Calcula la longitud de una circunferencia inscrita en un cuadrado de lado 5 cm.

14. Calcula la longitud de una circunferencia circunscrita en un cuadrado de lado 5 cm.

15. Calcula el área en m^2 de los círculos de radio *r* igual a:

a) *r* = 53 *cm* b) *r* = 9 *m* c) *r* = 8,2 *dam* d) *r* = 6,2 *dm*

16. Calcula el radio de un círculo de área 28,26 m^2.

17. Calcula el área de un círculo de diámetro 73,6 cm.

18. Calcula el área de las coronas circulares de radios, respectivamente:

a) R = 8 *m*; r = 3 *m*. b) R = 72 *cm*; r = 41 *cm*. c) R = 9 *m*; r = 32 *cm*. d) R = 5 *dm*; r = 4 *cm*.

19. Calcula el área, en cm^2, de los sectores circulares de radio *r* y ángulo α siguientes:

a) r = 6 m; α = 30º b) r = 3,7 cm; α = 45º c) r = 2,7 dm; α = 60º d) r = 4 m; α = 90º

20. En una habitación rectangular de lados 3 y 5 m, cubrimos un trozo con una alfombra circular de radio 2 m, ¿qué parte de suelo queda sin cubrir?

21. Dibuja en tu cuaderno el diseño de tapiz del margen de forma que el lado del cuadrado pequeño oscuro sea de 1 cm, el lado del cuadrado de borde amarillo, de 3 cm, y el borde del cuadrado de fondo rojo, de 6 cm. Estima el área del círculo rojo, del círculo oscuro, de la figura en rojo y de las líneas amarillas.

22. En una alfombra circular de 3 m de diámetro ha caído en el centro una mancha de medio metro de radio. a) ¿Qué área ocupa la parte limpia de la alfombra? b) Tapamos la mancha con otra alfombra cuadrada de 1,5 m de lado, ¿qué área de la alfombra circular queda sin tapar?

23. En un círculo cortamos dos círculos tangentes interiores de radios 5 y 2 cm, ¿qué área queda sin cortar?

AUTOEVALUACIÓN de 1º de ESO

1. El lado de un hexágono regular mide 7 *m*, entonces su perímetro mide:

a) 4,2 *dam* b) 42 m^2 c) 42 *m* d) 42000 *cm*

2. El rombo de diagonales 12 *dm* y 10 *dm* tiene como área:

a) 62 dm^2 b) 11 dm^2 c) 60 dm^2 d) 67 dm^2

3. El trapecio de bases 7 *cm* y 5 *cm* y altura 8 *cm*, tiene como área:

a) 60 cm^2 b) 48 cm^2 c) 50 cm^2 d) 40 cm^2

4. La longitud de la circunferencia de radio 4,6 *cm* mide aproximadamente:

a) 0,2 *m* b) 30 *cm* c) 28,9 *cm* d) 25,7 *cm*

5. La longitud del arco de circunferencia de radio 27,4 *m* que abarca un arco de 30º mide aproximadamente:

a) 28,6 *m* b) 100 *cm* c) 28,9 *cm* d) 14,34 *m*

6. El área del círculo de radio 83,6 *m* mide aproximadamente:

a) 2,19 hm^2 b) 234 dam^2 c) 295413344 cm^2 d) 0,2 km^2

7. El área de la corona circular de radios 10 y 5 *m* mide aproximadamente:

a) 23550 cm^2 b) 235,5 m^2 c) 235 *m* d) 0,2 km^2

8. La longitud de la semicircunferencia de radio 7,3 *cm* mide aproximadamente:

a) 0,3 *m* b) 45,8 *cm* c) 22,922 *cm* d) 25,7 *cm*

9. La longitud del arco de circunferencia de radio 9,2 *m* que abarca un arco de 60º mide aproximadamente:

a) 9,3421 *m* b) 10 *m* c) 976 *cm* d) 9,6 *m*

10. El área del sector circular de radio 83,6 *m* que abarca un arco de 45º mide aproximadamente:

a) 2,172 hm^2 b) 231 dam^2 c) 27445581 cm^2 d) 273 m^2

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

En este capítulo aprenderemos a utilizar instrumentos que nos permitan establecer comparaciones entre magnitudes.

Estudiaremos los procedimientos de la proporcionalidad directa como la regla de tres y el cálculo de porcentajes, en la resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana.

Si conoces la escala o proporción de una fotografía, una fotocopia... puedes saber el tamaño real del objeto midiendo sobre la foto o fotocopia.

Si conoces la escala o proporción de esta fotografía puedes saber el tamaño real de estas flores midiendo sobre la foto.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RAZÓN Y PROPORCIÓN

1.1. Razón

Razón, en Matemáticas, es una comparación entre los valores de dos variables.

Se expresa en forma de cociente, de forma similar a una fracción y se lee ***"A es a B"***

Ejemplo:

- Compramos 3 kg de cerezas por 6 €. Podemos establecer la relación entre el precio (6 €) y la cantidad (3 kg)

$$6 : 3 = 2 \text{ € el kilo}$$

$\frac{6}{3}$ es **la razón** entre euros y cerezas.

De esta manera si compramos otras cantidades de cerezas podremos calcular el precio a pagar.

Observa:

Una fracción expresa una parte de un todo de **una única magnitud**, mediante sus términos, numerador (las partes que se toman) y denominador (el total de las partes en las que se ha dividido ese todo)

Sin embargo, los términos de **una razón** se refieren a cantidades de **dos magnitudes**, el primero se llama "antecedente" y el segundo "consecuente"

Ejemplo:

- La razón que relaciona el gasto de 4 personas y los 200 litros de agua que gastan en un día, puede escribirse:

$$\frac{\mathbf{4}\ personas}{\mathbf{200}\ litros} \text{ o bien } \frac{\mathbf{200}\ litros}{\mathbf{4}\ personas}$$

En cualquiera de los casos estamos expresando que la razón entre litros de agua y personas es:

200 : 4 = 50 litros por persona

Si son 40 personas, la cantidad de agua será 2000 litros, si son dos personas la cantidad de agua será 100 litros, es decir:

$$\frac{4}{200} = \frac{40}{2000} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \text{ o bien } \frac{200}{4} = \frac{2000}{40} = \frac{100}{2} = \frac{50}{1}$$

Ideas claras

Una **razón** es un cociente. Se expresa en forma de **fracción** pero sus términos no expresan una parte de una misma magnitud sino la **relación** entre dos magnitudes.
Los términos de la razón pueden ser números enteros o decimales.

Actividades propuestas

1. Tres personas gastan 150 litros de agua diariamente.
¿Cuál es la razón entre los litros consumidos y el número de personas? ¿Cuál es la razón entre las personas y los litros consumidos?

2. Seis kilos de naranjas costaron 6,90 €. Expresa la razón entre kilos y euros.

3. La razón entre dos magnitudes es 56. Escribe un ejemplo de los valores que pueden tener estas dos magnitudes

1.2. Proporción

Una **proporción** es la **igualdad** entre dos razones.

Los términos primero y cuarto son los **extremos** y el segundo y tercero son los **medios.**

$$\frac{\textit{extremo}}{\textit{medio}} = \frac{\textit{medio}}{\textit{extremo}}$$

Se llama "***razón de proporcionalidad***" al cociente entre dos variables. Y su valor constante nos permite obtener razones semejantes.

Cuando manejamos una serie de datos de dos pares de magnitudes que presentan una misma razón, se pueden ordenar en un cuadro de proporcionalidad.

Ejemplo:

- En el cuadro de abajo se observa que cada árbol da $\frac{200}{4}$ = 50 kg de fruta. Es la **razón de proporcionalidad.**

  Con ese dato podemos completar el cuadro para los siguientes casos.

kg de fruta	**200**	400	100	50	500	150	3000	1000
nº de árboles	**4**	8	2	1	10	3	60	20

Propiedad fundamental de las proporciones:

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Ejemplo:

- $\frac{45}{27} = \frac{30}{18} \Rightarrow 45 \cdot 18 = 30 \cdot 27$

Ideas claras

Observa que la razón de proporcionalidad nos sirve para establecer una relación entre las dos variables para cualquiera de los valores que puedan adoptar

Actividades propuestas

4. Completa las siguientes proporciones:

a) $\frac{18}{12} = \frac{30}{x}$ **b)** $\frac{0,4}{x} = \frac{6}{9}$ **c)** $\frac{x}{7,5} = \frac{3,6}{2,4}$ **d)** $\frac{0,05}{10} = \frac{x}{300}$

5. Ordena estos datos para componer una proporción:

a) 12, 3, 40, 10 b) 24, 40, 50, 30 c) 0,36; 0,06; 0,3; 1,8

6. Copia en tu cuaderno y completa la tabla sabiendo que la razón de proporcionalidad es 4,5:

0,5	**7**	**3**		**20**			**3,6**
		13,5	**36**		**45**	**18**	

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

2.1. Proporcionalidad directa

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Ejemplo:

- El número de personas que vienen a comer y la cantidad de comida que necesito. Por ejemplo si el número de personas es el triple habrá que preparar triple cantidad de comida.

Sin embargo, hay relaciones entre magnitudes que no son de proporcionalidad porque cuando una se multiplica o se divide por un número, la otra no queda multiplicada o dividida de la misma forma.

Ejemplo:

- El peso y la edad de una persona no son magnitudes proporcionales: El doble de la edad no significa el doble de peso

Ideas claras

Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, el doble, triple, … de la primera supone el doble, triple ... de la segunda

Hay magnitudes que no se relacionan proporcionalmente.

Actividades propuestas

7. Señala de estos pares de magnitudes, las que son directamente proporcionales:

- El tamaño de un recipiente y el número de litros que puede contener
- La edad de una persona y su altura
- El número de pisos que sube un ascensor y las personas que caben en él
- Los kilos de pienso y el número de animales que podemos alimentar
- Las entradas vendidas para un concierto y el dinero recaudado
- El número de calzado y la edad de la persona

8. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

a) $\frac{18}{24} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{25}{100} = \frac{40}{x}$ c) $\frac{3,6}{21,6} = \frac{x}{3}$

9. Ordena estos valores de manera que formen una proporción directa:

a) 3,9 0,3 1,3 0,1 b) 5, 12, 6,10 c) 0,18 4 0,4 18

¿Hay más de una solución?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.2. Regla de tres directa

Para resolver problemas de proporcionalidad directa, podemos utilizar el **método de reducción a la unidad.**

Ejemplo:

- Cinco billetes de avión costaron 690 €. ¿Cuánto pagaremos por 18 billetes para el mismo recorrido?

Primero calculamos el precio de un billete, 690 : 5 = 138 €.

Después calculamos el coste de los 18 billetes: 138 · 18 = 2484 €

La **regla de tres** es otro procedimiento para calcular el cuarto término de una proporción

Ejemplo:

- Con dos kilos de pienso mis gatos comen durante 6 días. ¿Cuántos kilos necesitaré para darles de comer 15 días?

Formamos la proporción ordenando los datos: $\frac{2\ kg}{x\ kg} = \frac{6\ días}{15\ días} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 15}{6} = 5\ kg$

Otra forma habitual de plantear la regla de tres es situando los datos de esta forma:

2 kg ———— 6días

x kg ———— 15 días

$$x = \frac{2 \cdot 15}{6} = 5\ kg$$

Ideas claras

En la **regla de tres directa** ordenamos los datos de forma que el valor desconocido se obtiene multiplicando en cruz y dividiendo por el tercer término.

Reducir a la unidad significa calcular el valor de uno para poder calcular cualquier otra cantidad.

Actividades propuestas

10. Un coche gasta 7 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 825 km?

11. En una rifa se han vendido 320 papeletas y se han recaudado 640 euros. ¿A cuánto se vendía cada papeleta? ¿Cuánto habrían recaudado si hubieran vendido 1000 papeletas?

12. Una paella para 6 personas necesita 750 g de arroz, ¿cuántas personas pueden comer paella si utilizamos 9 kg de arroz?

13. Tres camisetas nos costaron 24,90 €, ¿cuánto pagaremos por 11 camisetas iguales?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Porcentajes

El porcentaje o **tanto por ciento** es la proporción directa más utilizada en nuestra vida cotidiana.

En los comercios, informaciones periodísticas, o en los análisis de resultados de cualquier actividad aparecen porcentajes.

Un porcentaje es una razón con denominador 100.

Su símbolo es **%**.

Su aplicación se realiza mediante un sencillo procedimiento:

"Para calcular el % de una cantidad se multiplica por el tanto y se divide entre 100"

Ejemplo:

- Calcula el 23 % de 800 El 23 % de 800 = $\frac{23 \cdot 800}{100} = 184$

Algunos porcentajes se pueden calcular mentalmente al tratarse de un cálculo sencillo:

- El 50 % equivale a la mitad de la cantidad
- El 25 % es la cuarta parte de la cantidad
- El 75 % son las tres cuartas partes de la cantidad
- El 10 % es la décima parte de la cantidad
- El 200 % es el doble de la cantidad

¡¡GRANDES REBAJAS!!
40 % DE DESCUENTO
EN TODOS LOS ARTÍCULOS

Ejemplo:

- El 25 % de 600 es la cuarta parte de 600, por tanto es 600 : 4 = 150

Ideas claras

Si cualquier cantidad la divides en 100 partes, el 22 % son veintidós partes de esas cien.
El total de una cantidad se expresa como el 100 %

Actividades propuestas

14. Calcula mentalmente:

a) El 50 % de 190 b) el 1 % 360 c) el 10 % de 200 d) el 300 % de 7

15. Completa la tabla:

Cantidad inicial	%	Resultado
280	16	
720		108
60	140	
	60	294

16. En un hotel están alojadas 320 personas. De ellas, 40 son italianas, 120 francesas, 100 son alemanas y el resto rusas. Calcula el % que representa cada grupo sobre el total.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. ESCALAS: PLANOS Y MAPAS

Los dibujos, fotografías, mapas o maquetas representan objetos, personas, edificios, superficies, distancias...

Para que la representación sea perfecta, deben guardar en todos sus elementos una misma razón de proporcionalidad que denominamos **"escala"**

La **escala** es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida

Ejemplo:

- En un mapa aparece señalada la siguiente escala **1 : 20 000** y se interpreta que 1 cm del mapa representa 20 000 cm en la realidad.

Ejemplo:

CATEDRAL DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

- Hemos fotografiado la catedral de Santiago de Compostela. El tamaño de la foto nos da una escala:

$$1 : 600.$$

Las dos torres de la fachada tienen en la foto una altura de 3,5 cm. La altura real de las torres será:

$$3,5 \cdot 600 = 2100 \text{ cm} = 21 \text{ m}.$$

Las escalas nos permiten observar que la imagen real y la del dibujo son **semejantes.**

Ideas claras

La escala utiliza el cm como unidad de referencia y se expresa en comparación a la unidad.
Por ejemplo: 1 : 70000

Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma y sus lados son proporcionales.

Actividades propuestas

17. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.

18. La distancia entre Madrid y Burgos es 243 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 8,1 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

19. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 5000

Dibujo	Medida real
18 cm	
	3 km
0,008 m	

20. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
2,5 cm	800 m	
4 cm	6,4 hm	
5 cm	9 km	

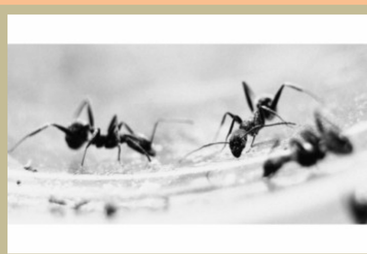
Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

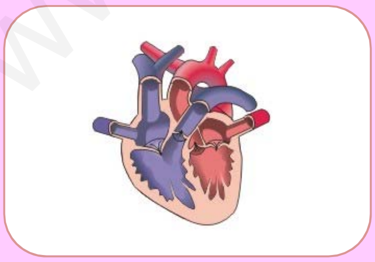
Si el planeta Tierra fuera
una canica de 1 cm de diámetro,
Júpiter sería una bola de
11,20 cm de diámetro,
ya que sus diámetros
son 12.756 km y 142.984 km

PROPORCIONALMENTE UNA HORMIGA COMÚN ES MÁS FUERTE QUE UN ELEFANTE, porque es capaz de levantar, gracias a sus músculos, 50 veces su propio peso y 30 veces el volumen de su cuerpo. Algunos tipos más de 80 veces. Es el animal con el cerebro más grande respecto a su tamaño

El perezoso de tres dedos se mueve a una velocidad de 2,2 metros por hora.
El caracol tarda una hora en caminar medio metro.



El corazón impulsa 80 ml de sangre por latido, alrededor de 5 litros de sangre por minuto. Late entre 60 y 80 veces por minuto, lo que supone más de 30 millones de veces al año y 2000 millones de veces en toda la vida.



Si por alguna razón el sol dejara de emitir luz, en la tierra tardaríamos 8 minutos en darnos cuenta ya que estamos a 149.600.000 km de distancia

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La velocidad como objetivo

En el mundo moderno, la gestión del tiempo ha primado frente a otros objetivos.

Esto se refleja en la incorporación masiva de la alta velocidad en nuestros trenes. El AVE puede alcanzar los 300 km por hora.

Un ascensor de alta velocidad es capaz de subir, sin realizar paradas, hasta la planta 80 en 48 segundos

EL PESO DE LAS HORMIGAS

Estudios recientes afirman que el 10 % de la biomasa animal está formada por hormigas. La biomasa, el peso total de todos los individuos del planeta. Se estima que hay unos 7000 billones de hormigas, es decir un millón por cada humano.

Teniendo en cuenta que el peso medio de una hormiga es de 0,000065 kg y que el peso de las personas vivas se estima en 455 gigatoneladas, se puede concluir que las hormigas llegan a igualar el peso de los humanos a pesar de su pequeño tamaño.

Suponiendo un **peso medio unitario de 65 kilos, todos los humanos vivos juntos pesamos 455 gigatoneladas**, un peso parecido, según Wilson, al de todas las hormigas pero con un pequeño matiz: **ellas son 7.000 billones, a razón de un millón por cada uno de nosotros**. Y no pienses que son todas iguales, pues la mayor de todas, la hormiga gigante (*formicium giganteum*) podría albergar en su cabeza una colonia entera de la más pequeña (*pheidole*).

Si nos ceñimos a la biomasa, es decir, al peso total de todos los individuos, **las hormigas ganan de calle la competición por ser el animal más abundante del planeta**, igualando el peso de todos los hombres (y mujeres) juntos. Lo cual tiene mucho mérito, teniendo en cuenta que la hormiga media pesa una millonésima parte del humano medio, es decir 0,000065 kilos.

Según los cálculos de Bert Hölldobler y Edward Osborne Wilson en su maravilloso compendio **"Las hormigas"** (1990), **las hormigas y sus lejanas parientes las termitas acapararían "un tercio de toda la biomasa animal terrestre".** Un estudio realizado en Finlandia concluyó que **el 10 % de la biomasa animal estaba formada por hormigas**, una cifra que se elevaba hasta el **15 % en el caso de la selva de Brasil**. En el Amazonas, nos cuenta Wilson, "las hormigas tienen más de cuatro veces la biomasas de todos los vertebrados terrestres juntos: aves reptiles, anfibios y mamíferos".

TORTILLA RECORD

16000 huevos, 1600 kg de patatas, 26 kg de cebolla, 150 litros de aceite y 15 kg de sal han permitido conseguir el record de la tortilla de patatas más grande cocinada. Esta súper tortilla midió 5,20 metros de diámetro, 7 cm de grosor y una tonelada y media de peso

Este record se consiguió el 2 de agosto en Vitoria-Gasteiz.

RESUMEN

Concepto	*Definición*	*Ejemplo*
Razón	Comparación entre los valores de dos variables	Precio y cantidad
Proporción	Igualdad entre dos razones	A es a B como C es a D
Magnitudes directamente proporcionales	Si se multiplica o divide una de las magnitudes por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número	24 es a 10 como 240 es a 100
Razón de Proporcionalidad directa	Cociente entre los valores de dos magnitudes	$\frac{300}{25}$
Porcentajes	Razón con denominador 100	$\frac{23}{100}$
Escalas y planos	Comparación entre tamaño real y tamaño representado	1 : 20000

PORCENTAJE CON CALCULADORA

En la calculadora puedes encontrar una función que te permite calcular el % de manera directa.

Para ello debes seguir los siguientes pasos:

1. **Escribe la cantidad**
2. **Multiplica por el tanto**
3. **Pulsa SHIFT y %. El resultado que aparece en la pantalla es la solución.**

Ejemplo:

650	*****	**16**	**SHIF**	**%**	**=**	**104**

Una forma fácil de añadir o restar el importe del tanto por ciento a la cantidad final puede hacerse de la siguiente forma:

- **Sigue los pasos 1, 2 y 3 anteriores**
- **Pulsa la tecla + si lo que quieres es un aumento porcentual**
- **Pulsa la tecla – para una disminución porcentual**

Ejemplo:

1370	*****	**12**	**SHIFT**	**%**	**164.4**	**+**	**1534.4**

1370	*****	**12**	**SHIFT**	**%**	**164.4**	**–**	**1205.6**

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS de 1º de ESO

1. Expresa la razón entre las edades de Jorge, 26 años, y Andrés, 32 años

2. Expresa la razón entre las 20 personas que acuden a comer un restaurante y los 440 € que se recaudan.

3. En un examen de 30 preguntas un estudiante ha contestado 21 bien y 9 mal. Expresa las razones entre estos resultados y el total de las preguntas

4. Copia en tu cuaderno y relaciona las magnitudes de ambas columnas para que cada ejemplo responda a pares de magnitudes directamente proporcionales:

Número de kilos de patatas y	Litros de gasolina necesarios,
Cantidad de agua necesaria y	Personas que viven en un edificio
Dinero disponible y	Vestidos confeccionados
Kilómetros a recorrer y	Número de personas que vienen a comer
Metros de tela y	Prendas que podemos comprar

5. Con estas seis magnitudes debes elaborar tres razones:

Número de personas, horas, cantidad de leche, litros de refresco, distancia entre dos ciudades, número de vacas

6. Calcula el cuarto término de las siguientes proporciones:

a) $\frac{36}{20} = \frac{45}{x}$ b) $\frac{12,6}{x} = \frac{0,2}{0.5}$ c) $\frac{1}{0,25} = \frac{x}{3}$ d) $\frac{x}{2} = \frac{35}{5}$

7. Esta receta es para 4 personas. Elabora dos recetas similares para 6 personas y para 15 personas

ARROZ CON VERDURAS

380 g de arroz
1 kg de tomate triturado
800 g de calabacín
3 dientes de ajo
120 cl de aceite
1 kg champiñón
1/2 kg pimientos rojos y verdes

8. Completa la tabla de proporcionalidad directa:

Distancia	100	240		360	
Litros	6,5		52		2,6

9. Una lata de mejillones de 200 g vale 2,40 €. Otra lata de 700 g se vende a 7,20 €, ¿cuál de las dos es proporcionalmente más barata?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

10. ¿Cuánto dinero nos costarán 6 ordenadores sabiendo que 56 ordenadores han costado 28 000 €?

11. Cálculo Mental

3 % de 40	20 % de 800	12 % de 70	3 % de 120
25 % de 300	15 % de 60	150 % de 30	200 % de 2

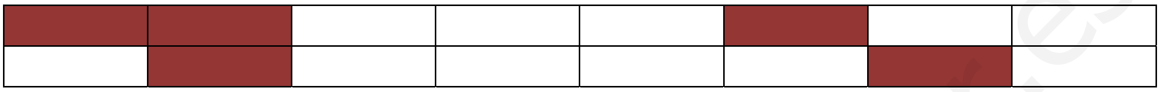
12. Completa mentalmente:

a) El ………….% de 30 es 3 b) El ………….% de 500 es 250 c) El ………% de 400 es 4

d) El 20% de ………… es 8 e) El 75% de ………………… es 30 f) El 150% de …….. es 60

13. Calcula el 300 % del 10 % de 480.

14. ¿Qué porcentaje ocupan los cuadros negros?



15. Copia esta tabla en tu cuaderno y colorea un porcentaje que represente el 40 %.

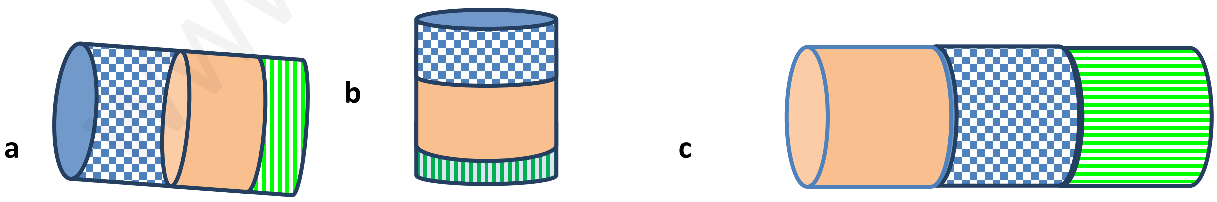
16. Rosana gasta el 15 % de su dinero y Marta gasta el 50 % del suyo. Sin embargo Marta ha gastado menos dinero que Rosana, ¿cómo es posible?

17. Completa la tabla:

%	Cantidad	Resultado
45	1024	
	23	115
18		162

18. ¿Cuál de estos dibujos contiene mayor proporción de color naranja en relación a su tamaño?

19. ¿Cuál de estos dibujos contiene mayor proporción de color naranja en relación a su tamaño? ¿Y de rayas? ¿y de cuadros?

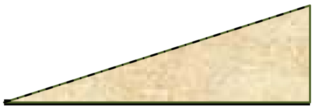


Haz una estimación en tantos por ciento para cada cilindro y cada parte.

20. En la oficina de mi madre, el 18 % de sus compañeros juegan a la BONOLOTO, el 56 % juegan al EUROMILLÓN, el 20 % juegan a la PRIMITIVA, y los 3 trabajadores restantes no juegan a nada. ¿Cuántas personas trabajan en esa oficina?

21. Un adulto respira unos 5 litros de aire por minuto. ¿Cuántos litros respira en una semana?

22. En 2 km ascendemos 40 m, respecto a la horizontal, ¿qué % hemos ascendido?

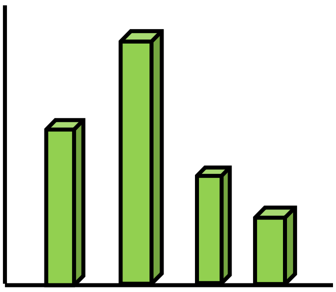


23. El guepardo es el animal terrestre más rápido, ya que es capaz de alcanzar una velocidad máxima de 130 km hora. ¿Cuántas horas tardaría un guepardo, sin parar, en viajar desde Valencia hasta Barcelona? ¿Y de Palencia hasta Cádiz?

24. Haz un informe sobre el animal que más corre, el que más vive, el que más come, el que más tiempo puede pasar sin comer o sin beber.

25. Si el dólar se cotiza a 1,12 €, ¿Cuántos dólares obtendremos al cambiar 360 €?

26. En estadística se utilizan los gráficos para expresar la evolución de los valores de una variable respecto a otra.



Si asignamos a la barra más alta el valor 100, calcula de forma aproximada la altura de las demás.

Si la barra más pequeña pesa 0,5 kg. ¿Cuánto pesarán cada una de las otras barras?

27. En un plano de carreteras la distancia entre dos ciudades es de 6 cm. Si la escala es 1 : 40000

28. Calcula la escala a la que está dibujado un plano sabiendo que 15 cm del plano corresponden a 375 km.

29. En el antiguo Egipto, para definir la proporción de las diferentes partes del cuerpo, se usaba la longitud de los dedos y para el canon, los puños. Una cabeza debía medir dos puños. Los griegos utilizaban, al igual que los egipcios, la proporción para valorar los distintos cánones de belleza. Un cuerpo bien proporcionado debía tener una longitud proporcional a la cabeza. Alguno de los más conocidos corresponden a famosos escultores:

	Canon de Praxíteles	Canon de Polikletos	Canon egipcio
Medida del cuerpo	Ocho cabezas	Siete cabezas	16 puños

Con estos datos puedes investigar sobre qué proporción es la más frecuente entre tus amigos

30. Hay otras maneras de estudiar la proporción en la figura humana. La proporción áurea, conocida por los griegos y desarrollada de manera brillante por Leonardo de Vinci nos ha dejado imágenes como el famoso "Hombre de Vitrubio". Busca información sobre esta figura.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN de 1º de ESO

1. El valor de *x* en la proporción $\frac{2,4}{x}=\frac{0,8}{3}$ es:

a) 0,9 b) 1,2 c) 9 d) 0,9

2. En una caja por cada tres bolas blancas hay cinco bolas rojas. Si hay 108 bolas rojas, las bolas blancas son:

a) 200 b) 180 c) 220 d) 210

3. Para una excursión un grupo de 28 personas contrató un autobús. Cada una debe pagar 45 €. Como quedaban plazas libres, a última hora se han apuntado 7 personas más. ¿Cuánto deben pagar finalmente cada una?

a) 36 € b) 30 € c) 38 € d) 40 €

4. Una bicicleta se vende por 225 €. Si hacen un descuento del 14 % ¿Cuánto tendremos que pagar?

a) 201,50 € b) 198,50 € c)214 € d) 193,50 €

5. En un mapa 16 cm equivalen a 208 km. La escala es:

a) 1: 320000 b) 1: 2100000 c) 1: 20800000 d) 1: 2220000

6. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

Personas	8	11	46	
Kg de comida	12			72

a) 24, 69,48 b) 16, 49, 68 c) 16.5 , 69, 48

7. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad inversa son:

Nº de trabajadores	12	7			21
Horas diarias	35		10	7	

a) 60, 60, 42, 20 b) 60, 42, 42, 20 c) 60, 21, 42, 20

8. Los valores que completan las operaciones siguientes son:
El 25% de 0,28 es ……… El …….. de 630 es 63 El 150% de …….. es 120

a) 0.07, 10, 80 b) 0.7, 10, 90 c) 0.7, 3, 80

9. Al efectuar un incremento porcentual del 18% sobre estas tres cantidades, 350, 99 y 6 obtenemos:

a) 413, 116,82 , 7.08 b) 630, 116.82, 7.08 c) 403, 112, 7.08

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Caro

Revisor: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

El Álgebra es una materia nueva que ahora vamos a empezar a estudiar. Hay autores que opinan que el álgebra comienza cuando se utilizan letras en lugar de números, pero, recuerda, los romanos ya utilizaban letras, y eso no era álgebra. En realidad el origen del álgebra está en hacer operaciones con números simbolizados con letras, lo que supone un ahorro de esfuerzo, pues permite hacer de una sola vez lo que de otra manera habría que repetir muchas veces.

En la época de *El Quijote*, en la puerta de las barberías, se leía el siguiente cartel:

"ALGEBRISTA Y SANGRADOR"

¿Y eso, por qué? La palabra "*Álgebra*" es una palabra árabe que utilizó el matemático *Al-Khwarizmi*. Si logras leer ese nombre verás que te suena a otra palabra: "*algoritmo*". Hacia el año 825 escribió un libro titulado:

Al-jabr w'almuqabalah

La palabra árabe *jabr* significa restaurar. El libro trataba de álgebra, de sumas y otras operaciones, pero como los barberos también restauraban huesos, por eso se llamaban algebristas.

En este capítulo aprenderemos a utilizar el lenguaje algebraico,.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

1.1. Letras y números

A nuestro alrededor nos encontramos con multitud de símbolos cuyo significado conocemos, como las señales de tráfico o algunos logotipos.

El **lenguaje algebraico** consigue que podamos expresar mensajes en los que las letras representan variables de valor desconocido. Utiliza letras, números y operaciones para representar una información.

Ejemplo:

- Ya has utilizado el lenguaje algebraico para indicar el área de un cuadrado de lado *a*: $A = a^2$; el área de un círculo de radio *r*: $A = \pi r^2$.

Para cada situación podemos utilizar la letra que queramos, aunque, cuando hablamos de algo desconocido, la letra más utilizada es la ***x***.

Ejemplo:

- El doble de la edad de una persona $2x$
- El triple de un número menos 4 $3x - 4$

El propio *Al-Khwarizmi* usó originariamente la palabra *"cosa"*, (por ejemplo, en lugar de 2*x* decía "*el doble de una cosa*"), que en árabe suena como *"šay*" y que se tradujo al español como "*xei*". De aquí procede la *x* actual.

Las expresiones que nos permiten reflejar mediante letras y números una situación se llaman **expresiones algebraicas.**

Actividades resueltas

- Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:

El triple de un número	$3x$
La suma de dos números consecutivos	$x + (x + 1)$
La edad de una niña hace 2 años	$x - 2$
La suma de dos números	$a + b$

El triple de un número

- Lee las expresiones algebraicas siguientes:

$x - 3x$	Un número menos su triple
$2(x - 4)$	El doble de la diferencia de un número menos 4.

Actividades propuestas

1. Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:

a) El doble de un número más su triple

b) La edad de una persona dentro de 7 años

c) La quinta parte de un número

d) La diferencia entre dos números

1.2. Coeficiente y parte literal

Una **expresión algebraica** puede estar formada por uno o varios sumandos que se denominan **términos** o **monomios**. Una suma de monomios es un **polinomio**.

En un monomio la **parte literal** son las letras y se llama **coeficiente** al número por el que van multiplicadas.

Ejemplo:

- En la expresión $4x$, el coeficiente es 4 y la parte literal x. En $7ab$ el coeficiente es 7 y la parte literal ab.

Cuando la expresión es positiva no suele ir precedida del signo +, aunque siempre aparecerá el signo – en las expresiones negativas.

Ejemplo:

- Señala el coeficiente y la parte literal en la expresión $-6a$. El coeficiente es –6 y la parte literal a.

Actividades resueltas

- Señala los coeficientes, las partes literales y el número de monomios de la expresión algebraica:

$$3a - 5b + c + 6$$

Esta expresión algebraica tiene 4 términos o 4 monomios: $3a$, $-5b$, c y 6. Los coeficientes son +3, –5, + 1 y +6 respectivamente. Las partes literales son a, b y c. El último término no tiene parte literal.

- Señala en el polinomio $8x + 5x - 2x$ cuáles son los coeficientes. Los coeficientes son 8, 5 y –2.

1.3. Valor numérico de una expresión algebraica

Si a las letras de una expresión algebraica se les da un valor concreto, se puede calcular el **valor numérico** de dicha expresión.

Actividades resueltas

- Calcula el valor numérico de la expresión $3x + 2$ cuando x vale 5.

Hay que sustituir en la expresión, x por su valor, 5.
Por tanto: $3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = 17$, que es el valor numérico cuando x vale 5.

1.4. Equivalencia y simplificación de expresiones algebraicas

La expresión algebraica $4x + 4x$ es equivalente a la expresión $8x$, que es su expresión más simplificada.

Actividades propuestas

2. Señala el coeficiente, la parte literal y el número de términos o monomios de los polinomios siguientes:

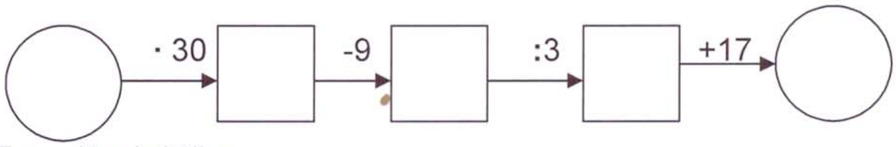
a) $2 - 7x$ b) $a + 3b - 8c$ c) $4x + 5$ d) $7x + 9 - 5y$

3. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios:

a) $2x + 3y$ para $x = 3$, $y = 2$.
b) $6 - a$ para $a = -5$.
c) $3a + 4b - c$ para $b = -1$, $a = -1$ y $c = +2$.

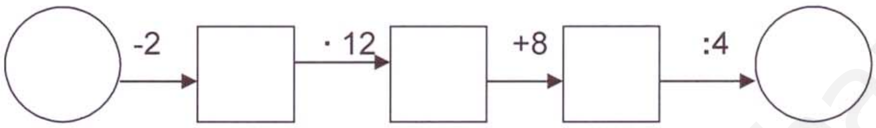
Material didáctico fotocopiable:
Cadenas numéricas

Completa las siguientes cadenas numéricas dando a *x* los valores siguientes: 3, 5, 7 y 10.
Expresa simbólicamente lo que hacen estas cadenas, y simplifica:

I.-


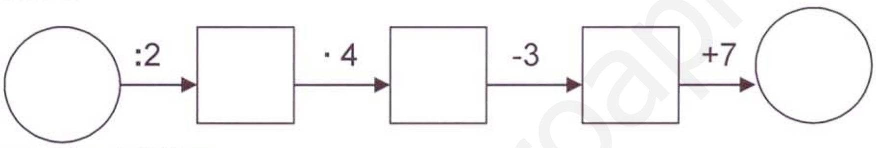
3	
5	
7	
10	

a) Expresión simbólica:
b) Simplificación:
c) Calcula el número por el que debes comenzar para que la cadena dé como resultado 54.

II.-


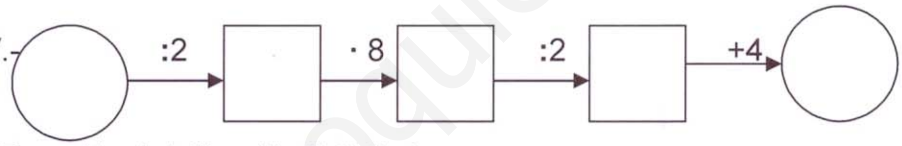
3	
5	
7	
10	

a) Expresión simbólica:
b) Simplificación:
c) Calcula el número por el que debes comenzar para que la cadena dé como resultado 8.

III.-


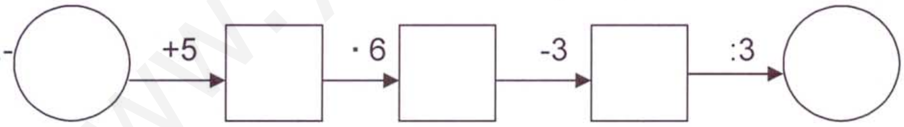
3	
5	
7	
10	

a) Expresión simbólica:
b) Simplificación:
c) Calcula el número por el que debes comenzar para que la cadena dé como resultado 16.

IV.-


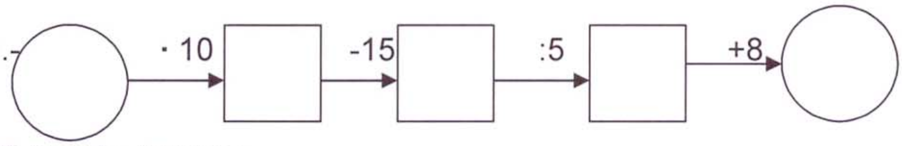
3	
5	
7	
10	

a) Expresión simbólica: $(((x:2)\cdot 8):2)+4$
b) Simplificación: $(((x:2)\cdot 8):2)+4=(4x:2)+4=2x+4$
c) Calcula el número por el que debes comenzar para que la cadena dé como resultado 9.

V.-


3	
5	
7	
10	

a) Expresión simbólica: $(((x+5)6)-3):4=(6x+30-3):3=2x+9$
b) Simplificación:
c) Calcula el número por el que debes comenzar para que la cadena dé como resultado 17.

VI.-


3	
5	
7	
10	

a) Expresión simbólica:
b) Simplificación:
c) Calcula el número por el que debes comenzar para que la cadena dé como resultado 9.

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

2.1. El lenguaje de las ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo:

- Si tenemos dos expresiones algebraicas: $3x$ y $2x + 1$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $3x = 2x + 1$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama primer miembro y la que está a la derecha, segundo miembro.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "desconocidas". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Ejemplo:

2X + Y = 5
X - 2 = 3Y

- $3x - 2 = 2x + 1$ es una ecuación con una sola incógnita, mientras que:
- $2x + y = 5$ o $x - 2 = 3y$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e y.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente que aparece en alguna de sus incógnitas.

Ejemplo:

- $7x - 5 = x + 7$ es una ecuación de primer grado, mientras que $x + 3y^2 = 9$ es una ecuación de segundo grado.

Actividades propuestas

4. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$7x - 3 = 4x - 5$			
	$6x + 2$	$x - 8$	
$4a + 9 = 23$			
	$x - y$	$5 + y$	

5. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:

a) $7x - 5y = x + 7$; b) $x + 3y^2 = 9$ c) $a + 4a^2 = 7$ d) $9x + 3x^2 = 5$

6. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 6 = 3x + 8$; b) $5x + 2y^2 = 11$ c) $x + 2x^2 = 3$ d) $x + 6xy^2 = 1$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.2. Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones

Solución de una ecuación:

Una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica la igualdad, es decir, los dos términos de la ecuación valen lo mismo.

Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Actividades resueltas

- Si te fijas en la ecuación: $3x - 2 = 2x + 1$, verás que al darle valores a x la igualdad no siempre se cumple.

Por ejemplo, para $x = 1$, el primer miembro vale $3 \cdot 1 - 2 = +1$, mientras que el valor del segundo miembro es: $2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$. Luego 1 **no** es solución de la ecuación. Para $x = 3$, el primer miembro toma el valor: $3 \cdot 3 - 2 = 9 - 2 = 7$; y el segundo miembro: $2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$. Por tanto 3 es una **solución** de la ecuación.

Si se desconoce la solución de una ecuación, resulta muy pesado resolverla probando un número tras otro. Por eso lo que se hace habitualmente es transformarla en otras ecuaciones **equivalentes** más sencillas.

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones.

Ejemplo:

- $2x - 5 = 11$ es equivalente a $2x = 16$, puesto que la solución de ambas ecuaciones es $x = 8$.

Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

- Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.

- Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación $3x + 7 = x - 3$ transformándola en otra más sencilla equivalente.

Transformar una ecuación hasta que sus soluciones se hagan evidentes se llama "*resolver la ecuación*". Siguiendo estos pasos intentaremos resolver la ecuación: $3x + 7 = x - 3$

1) Sumamos a los dos miembros $-x$ y restamos a los dos miembros 7:

$$3x - x + 7 - 7 = x - x - 3 - 7.$$

2) Hacemos operaciones y conseguimos otra ecuación que tiene en el primer miembro los términos con x y en el segundo, los términos sin x:

$$3x - x = -3 - 7.$$

3) Efectuamos las sumas en el primer miembro y en el segundo:

$$2x = -10.$$

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{-10}{2} \text{ de donde } x = -5.$$

5) Comprueba que todas las ecuaciones que hemos obtenido en este proceso son equivalentes y que su solución es $x = -5$.

Resuelve la ecuación $8 - x = 2x - 4$.

1) Sumamos x y 4 para pasar a un miembro los términos con x y al otro miembro los términos sin x:

$$8 - x + x + 4 = 2x + x - 4 + 4,$$

2) Hacemos operaciones:

$$8 + 4 = 2x + x$$

3) Efectuamos las sumas:

$$12 = 3x.$$

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 3:

$$4 = x.$$

La solución de la ecuación es $x = 4$.

5) Comprobamos que en efecto es la solución:

$$8 - x = 2x - 4 \Rightarrow 8 - 4 = 4;\ 2\cdot 4 - 4 = 4.$$

Actividades propuestas

7. Averigua cuál de los números es la solución de la ecuación y escríbelo en tu cuaderno:

Ecuación	Posibles soluciones		Ecuación	Posibles soluciones
$3x + 7 = x - 3$	2, –1, –5		$a^2 - 5 = -1$	–2, –10, 2
$x + 2 = 4x - 1$	1, –2, –3		$b - 3 = 7 - b$	2, 4, 6

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 5 = 2x - 7$ b) $6x + 8 = 3x - 4$ c) $5x + 2 = 12$ d) $4x - 7 = 3x - 7$

9. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = 2x + 9$.

a) $x + 10 = 5$ b) $10 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 30$ d) $2x = 10 + 20$ e) $15 = x$

10. Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $2x - 4 = 11$ b) $3x = 12$ c) $5x + 11 = 6$ d) $x = -3$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

3.1. Procedimiento

Muchos problemas pueden resolverse mediante una ecuación.

Actividades resueltas

- Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 7.

Para resolverlo, sigue los siguientes pasos:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate:

¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número x. Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 7.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema que queremos resolver mediante una ecuación. Escribe en lenguaje algebraico el enunciado del problema y plantea una ecuación:

$$x + (x + 1) = 7.$$

Pregúntate si efectivamente resuelve el problema releyendo el enunciado.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resuelve la ecuación. Para resolver una ecuación conviene seguir un orden de actuación que nos ayude a no cometer errores, para ello seguimos el procedimiento que acabamos de aprender.

Quita, si los hay, paréntesis y denominadores: $x + x + 1 = 7$

Para poner en el primer miembro los términos con x, y en el segundo los que no lo tienen, **haz lo mismo a los dos lados**, resta 1 a los dos miembros: $x + x + 1 – 1= 7 – 1$, luego $x + x = 7 – 1$. Opera: $2x = 6$. Despeja:

Para despejar la x, se hace lo mismo a los dos lados, se dividen por 2 ambos miembros: $2x/2 = 6/2$, por tanto, $x = 3$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, comprueba que: $3 + 4 = 7$.

Actividades propuestas

11. La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más 1. Calcula dichos números.

12. La madre de Álvaro tiene el triple de la edad de su hijo, y éste tiene 30 años menos que su madre. ¿Cuántos años tienen cada uno?

13. El perímetro de un triángulo isósceles mide 30 centímetros. El lado desigual mide la mitad de uno de sus lados iguales. ¿Cuánto mide cada lado?

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

A) Cuadrados mágicos

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

En el cuadro Melancolía del famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528) aparece este cuadrado mágico en el que todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, y además ese mismo resultado se obtiene sumando las cuatro casillas centrales.

Además, las dos casillas del centro de la línea inferior indican el año en el que este cuadrado mágico fue resuelto, 1514.

40. Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

B) EMMY NOETHER (1882 – 1935)

Emmy Noether

Emmy Noether fue una famosa algebrista. Nació en Alemania, hija de padres judíos. Su padre era catedrático de matemáticas en la Universidad y Emmy heredó de él la pasión por las matemáticas. Sin embargo, por aquella época la Universidad no admitía que las mujeres desarrollasen estudios científicos, así que tuvo que conseguir un permiso especial para que la dejaran asistir a las clases, aunque no tenía derecho a examinarse. Años más tarde, las leyes cambiaron y pudo doctorarse. Trabajó con los matemáticos alemanes más brillantes y desarrolló un teorema esencial para la Teoría de la Relatividad en la que estaba trabajando Albert Einstein. Ante la situación política de Alemania, con la subida al poder de HItler, tuvo que exiliarse a Estados Unidos. Allí coincidió con **Einstein** quien le dedicó estas palabras: *"A juicio de los matemáticos más competentes que todavía viven, desde que las mujeres empezaron a recibir enseñanza superior, Emmy Noether ha tenido el genio creativo más destacado que haya surgido hasta la fecha de hoy en el campo de la matemática*".

C) DIOFANTO

Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. En el epitafio de su tumba escribió:
¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar ¡oh maravilla! La duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.
A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.
Pasó, además un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de primogénito.
Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.
Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.
Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto.

41. a) Escribe en lenguaje algebraico el epitafio de la tumba de Diofanto
b) Resuelve la ecuación. Comprueba que Diofanto vivió 84 años.

RESUMEN

		Ejemplos
Lenguaje algebraico	Utiliza letras y números para representar una información	Área de un rectángulo = base por altura: A = b⋅ a
Expresión algebraica	Expresiones que reflejan una situación mediante letras y números	$x + 3x$
Monomio o término algebraico	Consta de coeficiente y parte literal. Van separados por los signos +, –, =.	$5x^2$
Coeficiente	Número que multiplica en un monomio	El coeficiente de $5x^2$ es 5.
Valor numérico de una expresión algebraica	Número que se obtiene al sustituir las letras por números y hacer las operaciones.	El valor numérico de $x + 3x + 5$ para $x = -2$ es: $-2 + 3(-2) + 5 = -2 - 6 + 5 = -3$
Ecuación	Igualdad entre dos expresiones algebraicas.	$3x - 1 = 2x + 5$
Miembros de una ecuación	Cada una de las dos expresiones algebraicas que forman la ecuación. Van separados por el signo =.	En la ecuación anterior $3x - 1$ es el primer miembro, y $2x + 5$ es el segundo miembro
Incógnitas	Letras de valor desconocido que contienen una ecuación	En $3x - 1 = 2x + 5$ la incógnita es x.
Grado de una ecuación	El mayor exponente de la incógnita.	La ecuación $3x - 1 = 2x + 5$ es de primer grado. La ecuación $3x^2 = 27$ es de segundo grado.
Solución de una ecuación	Número por el que se puede sustituir la incógnita para que la igualdad sea cierta.	La solución de $3x - 1 = 2x + 5$ es $x = 6$.
Resolver una ecuación	Es hallar su solución.	$\mathbf{3x - 1 = 2x + 5}$ $3x - 2x - 1 + 1 = 2x - 2x + 5 + 1$ $x = 6$
Ecuaciones equivalentes	Tienen las mismas soluciones	$2x - 5 = x + 2$ es equivalente a: $2x - x = 2 + 5$
Pasos para resolver una ecuación:	Quitar paréntesis Quitar denominadores Agrupar los términos con x en un miembro y los términos sin x en el otro. Operar Despejar la x.	$\mathbf{(3x - 1) = 7/2}$ 1. $6x - 2 = 7/2$ 2. $12x - 4 = 7$ 3. $12x = 7 + 4$ 4. $12x = 11$ 5. $x = 11/12$
Pasos para resolver un problema mediante ecuaciones	Leer el enunciado. Escribir la ecuación. Resolver la ecuación. Comprobar la solución.	Hallar un número que sumado a 7 da lo mismo que su doble menos 3. 1) Comprender el enunciado 2) $x + 7 = 2x - 3$ 3) $x - 2x = -3 - 7$; $-x = -10$; $x = 10$ 4) $10 + 7 = 2 \cdot 10 - 3$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS. Matemáticas 1º de ESO

Lenguaje algebraico

1. Expresa en tu cuaderno en lenguaje algebraico

a) El triple de un número es igual a 21.

b) A un cierto número se le suma 2, se multiplica el resultado por 3, y se divide entre 4.

c) El doble de un número más 6.

d) Un número más su anterior.

2. Copia en tu cuaderno y relaciona:

a) El doble de un número	1) $x - 17$
b) La diferencia entre un número y 17	2) —
c) El producto de un número por –3	3) $2(x + 5)$
d) La quinta parte de un número	4) $2x^2$
e) El doble del cuadrado de un número	5) $x + y$
f) El número siguiente a x	6) $2x$
g) La suma de dos números	7) $x + 1$
h) El doble de la suma de un número y 5	8) $x/5$
i) La tercera parte del cuadrado de un número	9) $-3x$

3. Si llamamos x a los ahorros que tiene Laura, expresa algebraicamente:

a) A María le faltan 7 € para tener los mismos ahorros que Laura.

b) Alfonso tiene 14 € más que Laura.

c) Martín tiene 3 € menos que el doble de Laura.

d) Fátima tiene igual que Laura y Rosa.

4. He aquí lo que sabemos de las edades de un grupo de amigos:

a) Juan tiene 3 años más que Antonio;

b) Elena tiene el doble que Juan;

c) Félix tiene 5 años menos que Elena y Laura tiene la mitad que Antonio.

d) Si la edad de Antonio es x, indica, mediante expresiones algebraicas, las edades de los otros amigos.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. Escribe en lenguaje algebraico las siguientes informaciones relativas a la base *x* y la altura *y* de un rectángulo:

a) La base es doble que la altura

b) La base excede en 5 unidades a la altura

c) La altura es 3/7 de la base

d) El área del rectángulo vale 20 cm^2.

e) La diferencia entre la altura y la base es de 10 unidades.

6. Escribe las siguientes operaciones en lenguaje ordinario

a) $x + 5$ b) $a - 4$ c) $2x$ d) y^2

7. Completa en tu cuaderno las frases siguientes:

a) En una expresión ... … puede haber números, letras y signos de operación.

b) Un número cualquiera se indica en álgebra mediante una ... …, por ejemplo, la x.

c) En la expresión –3x el número –3 es el ... ….

d) La ecuación $x^2 = 25$ es de ... … grado.

e) El primer miembro de la ecuación $3x + 1 = 2x - 7$ es ... …

f) Dos ecuaciones que tienen las mismas soluciones se llaman ... …

g) Una ... … es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

h) El número por el que se sustituye la incógnita de una ecuación de manera que la igualdad sea cierta se llama ... … de la ecuación.

i) ... … una ecuación es hallar el valor de la incógnita.

j) Si el mayor exponente de la incógnita de una ecuación es 1, entonces la ecuación es de ... … grado.

8. El kilo de melocotones cuesta *x* euros. Indica en lenguaje algebraico el precio de:

a) El cuarto de kilo de melocotones

b) Tres kilos de melocotones

c) El kilo de mandarinas sabiendo que es 75 céntimos más barato que el kilo de melocotones.

9. Llamamos *x* a una cantidad. Escribe en lenguaje algebraico:

a) El doble de esa cantidad más 9.

b) Esa cantidad más 5.

c) 20 menos esa cantidad.

d) Cuatro veces esa cantidad menos 7.

e) La mitad de esa cantidad más 8.

f) Siete veces esa cantidad menos la tercera parte de la cantidad.

10. Calcula el valor numérico de las expresiones siguientes para $x = 2$.

a) $5x - 3$ b) $2(x + 5)$ c) $(x - 4)/2$ d) $7(2 - x^2)$

11. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $x + x + x - x$ b) $2x + 3x + 5x - x$ c) $x/2 + x/2$ d) $2(x + 3x - 2x)$

12. Escribe en tu cuaderno el valor numérico de cada expresión para el valor de x que se indica en cada caso:

	Expresión	**Valor de *x***	**Valor numérico**
a)	$5x - 4 + x$	-1	
b)	$x - 3 + 7x$	-2	
c)	$x + 3 + 2x$	-3	
d)	$3x - x$	-4	
e)	$2x - 3$	2	

13. Realiza las operaciones siguientes

a) $3x + 5x - 2y + 9y - 4x - 3y$ b) $(2x - 5x^2) - (3x^2 + 5x)$

c) $3(7x - 3) - 2(2x + 5)$ d) $2a - 5a + 7a - 8a + b$

Ecuaciones

14. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	**Primer miembro**	**Segundo miembro**	**Incógnitas**
$8x - 5 = 2x - 1$			
	$7x + 3$	$2x - 8$	
$4x + 3 = 6x + 9$			
$4a + 11 = 23$			
	$x - y$	$5 + y$	

15. Calcula mentalmente el valor que se debe asignar a cada círculo:

a) $2 \cdot O = 30$ b) $10 = O : 5$ c) $3 \cdot O = 27$ d) $5 = O : 3$

16. Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $3x - 4 = 11$ b) $2x = 9$ c) $x + 11 = 6$ d) $x = -3$

17. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $2x + 4 = 7$ b) $4x + 3 = 15$ c) $5x - 2 = 37$ d) $-2x - 3x = -55$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

18. Relaciona cada ecuación con su solución:

a) $x + 5 = 7x - 1$ b) $3x - 2 = 4 - x$ c) $x - 9 = 3 - 2x$ d) $5 = x + 9$ e) $8 - 2x = 5 - 3x$

f) $9x - 2 = 5x$ g) $3 + 2x = 1$ h) $6 - x = 5 + 9x$ i) $x = 6 - 2x$ j) $2x + 4 = x + 7$

Soluciones:

1) $x = 4$ 2) $x = -4$ 3) $x = -3$ 4) $x = 1,5$ 5) $x = 0,5$

6) $x = 1$ 7) $x = 0,1$ 8) $x = -1$ 9) $x = 3$ 10) $x = 2$.

19. Di si las siguientes frases son verdaderas o falsas. Razona la respuesta.

a) La ecuación $x + 3 = 5$ es equivalente a $x + 5 = 3$.

b) La ecuación $2x + 3 = 7x - 1$ tiene dos incógnitas.

c) La ecuación $x^3 + 5 = 2x^2$ es de tercer grado.

d) El valor numérico de $5x - 2$ para $x = -1$ es -7.

e) La solución de la ecuación $6x = 3$ es 2.

20. Encuentra los números que faltan:

a) 15 = 25 –2·O b) 100 = 25 – O c) 200 = O – (–25) d) 40 = O – (–20)

21. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones:

a) $x + 3 = 9$ b) $x + 5 = 4$ c) $x + 1 = 78$ d) $x + 7 = 46$

22. En el tren se puede transportar un perrito siempre que su peso no exceda de 6 kg. Averigua a cuál de mis perritos podría llevarme de viaje en el tren sabiendo que Eder pesa 8 kilos y que el valor de x es el mismo en todos los casos:

Nombre	***Peso en kg***
Eder	$2x$
Peque	$-3(x - 7)$
Gosca	$3x - 5 + 6x$
Atila	$4x + 6 - 5x$
Clea	$1 - 2x + 9x$

23. Encuentra los números que faltan:

a) O + 3 = 8 b) O + 7 = 3 c) O – 6 = 10 d) O – 8 = –2

24. Resuelve las siguientes ecuaciones: (Sugerencia: ilustra las ecuaciones mediante balanzas equilibradas. Mantenlas equilibradas hasta conseguir la ecuación equivalente que nos dé el resultado).

a) $x + 5 = 10$ b) $x + 7 = 4$ c) $x + 3 = 8$ d) $x + 7 = 12$

25. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones:

a) $x - 4 = -7$ b) $x - 34 = 12$ c) $x - 21 = 84$ d) $x - 28 = 7$

Problemas

26. Si el doble de un número menos 3 es igual a 7, ¿cuál es el número?

27. Un rectángulo tiene 7 cm de base y su área es de 21 cm^2, ¿qué altura tiene?

28. La suma de tres números consecutivos es 48. ¿Cuánto vale cada número?

29. Si en una familia la suma de la edades de los tres hijos es de 37 años, Ana es 2 años menor que Antonio, y este es 3 años menor que Maite, ¿qué edad tiene cada hijo?

30. Si una parcela rectangular tiene 4 m menos de ancho que de largo, y la valla que lo rodea mide 88 m, ¿qué dimensiones tiene la parcela?

31. Para cada uno de los siguientes enunciados, dibuja la figura que corresponda, escribe una ecuación y resuélvela:

a) Halla las dimensiones de un rectángulo si la base mide 3 cm más que la altura y el perímetro es 22 cm.

b) El perímetro de un cuadrado es 28 mm. ¿Cuánto mide su lado?

c) El lado desigual de un triángulo isósceles mide 7 cm y su perímetro mide 35 cm. ¿Cuánto mide cada uno de los lados iguales?

d) El perímetro de un octógono regular es 28 cm mayor que el de un cuadrado de 36 cm^2 de área. Averigua el lado del octógono.

e) Cada uno de los ángulos de un cuadrilátero irregular mide 30º más que el ángulo anterior. ¿Cuánto mide cada uno de los cuatro ángulos del cuadrilátero? (Ayuda: recuerda que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360º).

f) Las medidas de los lados de un triángulo escaleno son números consecutivos y el perímetro es 33 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

g) Dos ángulos son complementarios y se diferencian en 18º. ¿Cuánto miden?

h) Dos ángulos suplementarios se diferencian en 25º. ¿Cuánto mide cada uno?

32. Escribe en lenguaje algebraico: "La suma de los ángulos interiores de un polígono es tantas veces 180º, como lados tenga menos 2". ¿Cuántos lados tiene un polígono si la suma de sus ángulos interiores es 720º?

33. Si un triángulo isósceles tiene un perímetro de 36 cm, y su lado desigual mide 5 cm menos que sus lados iguales, ¿cuánto miden sus lados?

34. Halla las edades de tres hermanos sabiendo que suman 52 años, que los dos pequeños se llevan dos años, y que el mayor tiene tantos años como los otros dos juntos.

35. Un montañero hace una ruta de 48 km en tres etapas. El segundo día recorre 10 km más que el primero y el tercer día recorre 7 km más que el segundo. ¿Cuánto recorre cada día?

36. Tengo 26 monedas de 1 € y de 2 €, que valen en total 37 €. ¿Cuántas monedas tengo de cada clase?

37. Alfonso quiere saber cuánto pesa la compota de moras que ha hecho, pero solo tiene pesas de 1 kg y de 200 gr. Comprueba que si pone los dos botes iguales de compota, junto con la pesa de 200 gr en un plato de la balanza, y en el otro plato la pesa de 1 kg, la balanza queda equilibrada. ¿Cuánto pesa cada bote?

38. Si multiplicas a un número por 5 y luego le sumas 12, obtienes 62, ¿de qué número se trata?

39. El patio de un colegio es rectangular, el doble de largo que de ancho, y su perímetro es de 600 m. Si se quiere poner una valla que cuesta a 3 € el metro en el lado más largo. ¿Cuánto habrá que pagar?

40. Alberto ha sacado un 8 en un examen de 10 preguntas. En la primera pregunta sacó un punto, y en la última, que dejó en blanco por falta de tiempo, un cero. La profesora le ha dicho que en todas las preguntas centrales ha obtenido la misma puntuación. ¿Cuál ha sido esa nota?

41. Mario estudia lo que más le gusta las 2/5 partes del tiempo diario que dedica al estudio, y le sobran 72 minutos para el resto de materias. ¿Cuánto estudia cada día?

42. Si Cristina tiene 12 años y su madre, 36, ¿cuántos años deben pasar para que la edad de la madre sea el doble de la de su hija?

43. Miriam le dice al mago, piensa un número, multiplícalo por 2, ahora súmale 10, divide el resultado entre 2 y resta el número que has pensado. ¿Tienes un 5?

a) Escribe en forma algebraica el juego de magia de Miriam, y descubre su truco.

b) Inventa un nuevo juego de magia.

44. Carlos ha comprado 25 cuadernos, los ha pagado con un billete de 20 €, y le han devuelto 12 €. Escribe una ecuación que permita calcular el precio de cada cuaderno.

45. Un triángulo equilátero tiene un perímetro de 36 cm, ¿cuánto mide su lado?

46. Braulio, Rosa y Guillermo han ganado 1200 € en la lotería. Si Braulio había pagado la tercera parte del décimo, Rosa, la mitad, y Guillermo, el resto, ¿cómo deben repartir lo que han ganado.

AUTOEVALUACIÓN DE 1º DE ESO

1. Los coeficientes de la expresión algebraica 5 x – 7 + *y*, son:

a) 5, 7 y 1 b) +5, –7 y +1 c) + 5 y – 7

2. El valor numérico de la expresión algebraica 2 a + 6 b, cuando $a = 2$ y $b = -1$, es:

a) 2 b) –2 c) – 4

3. La solución de la ecuación $3 + x - 4x = 8 + 2x$ es:

a) +5 b) +1 c) – 1

4. El doble de un número más 2, equivale a su triple menos 10. El número es:

a) 5 b) 11 c) 12

5. La suma de las edades de dos personas es de 48 años y su diferencia, 14 años. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones nos permite calcular sus edades?

a) $x + x + 14 = 48$ b) $x - 14 = 48$ c) $48 + x = 14 - x$

6. El perímetro de un rectángulo es 72 cm. Si la base es el doble de la altura menos 9 cm, las dimensiones del rectángulo son:

a) 21 y 15 b) 20 y 16 c) 30 y 6

7. Tres números suman 77. El mediano es el doble del menor, y el mayor es triple del menor menos 7. ¿Cuál de estas ecuaciones nos permite hallar los números?

a) $2x + x + 3x = 77$ b) $x + 3x + 2x = 77 + 7$ c) $x + 2x + 3x = 77 - 7$

8. Tenemos 12 monedas de 2 € y 1 €. Si en total tenemos 19 €, de cada clase de monedas, tenemos:

a) 6 y 6 b) 7 y 5 c) 8 y 4

9. La madre de Juan tiene el doble de la edad de este más 5 años. La suma de sus edades es 38 años. La ecuación que planteamos para saber sus edades es:

a) $x + 2x + 5 = 38$ b) $x + 5 = 2x$ c) $x + 2x = 38$

10. Con 24 € hemos comprado 5 objetos iguales y nos han sobrado 6 € . El precio de cada objeto podemos conocerlo al resolver la ecuación:

a) $5x = 24 + 6$ b) $x + 5 = 24$ c) $5x + 6 = 24$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1º ESO

CAPÍTULO 12: TABLAS Y GRÁFICAS. EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS.

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

El estudio de las relaciones entre dos magnitudes y su representación mediante **tablas y gráficas** es de gran utilidad para describir, interpretar, predecir y explicar fenómenos naturales y cotidianos que se relacionan de manera funcional.


René Descartes

En muchas ocasiones necesitaremos que los datos recogidos en una tabla sean representados gráficamente y utilizaremos el **sistema de referencia cartesiano**.

El sistema de referencia cartesiano se llama así en honor al filósofo, científico y matemático francés ***René Descartes*** *que vivió entre los años 1596 y 1650. Descartes quiso fundamentar su pensamiento filosófico en la necesidad de tomar un «punto de partida» sobre el que edificar todo el conocimiento. En Geometría, Descartes también comenzó tomando un "punto de origen" para poder representar la geometría plana.*

En este tema aprenderemos a utilizar el **lenguaje gráfico** para interpretar y describir situaciones del mundo que nos rodea. También estudiaremos las **funciones** entre dos magnitudes variables, en las que una tiene una relación de dependencia de la otra. *Descartes, Newton y Leibniz ya establecieron la idea de función como dependencia entre dos cantidades variables.*

Así, los contenidos que vamos a tratar nos van a permitir trabajar con las distintas formas de representar algunas situaciones funcionales: numérica, gráfica, verbal o a través de una expresión algebraica (como las que acabamos de estudiar en el tema anterior) y las distintas formas de traducir una expresión de uno a otro lenguaje.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

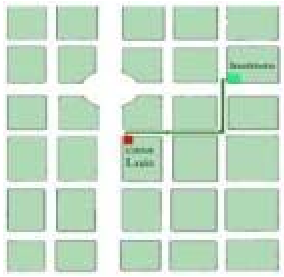
1. EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS

1.1. Sistema de referencia cartesiano.

Constantemente nos encontramos con situaciones en las que tenemos que indicar la localización de objetos o lugares respecto de otros conocidos y, en ocasiones, sus posiciones en un plano o mapa. Para entendernos es muy importante que tengamos una referencia común.

Si quieres indicar a unos amigos que no conocen tu barrio, donde se encuentra una tienda determinada o el Instituto donde estudias, bastará con que les indiques su posición con las referencias que utilicéis todos.

Ejemplo 1:



- Luis vive en la casa marcada en rojo en el plano adjunto y estudia en un Instituto cercano marcado en verde en el plano.

Para indicar a sus amigos franceses donde está su Instituto les da las siguientes indicaciones:

"Al salir de mi casa vais hacia la derecha y cruzáis dos calles,
luego hacia la izquierda cruzáis una calle y ya habéis llegado"

Las referencias izquierda y derecha así como la idea de cruzar una calle son comunes a todos nosotros, además fíjate que en el esquema la línea que indica el camino es muy clara

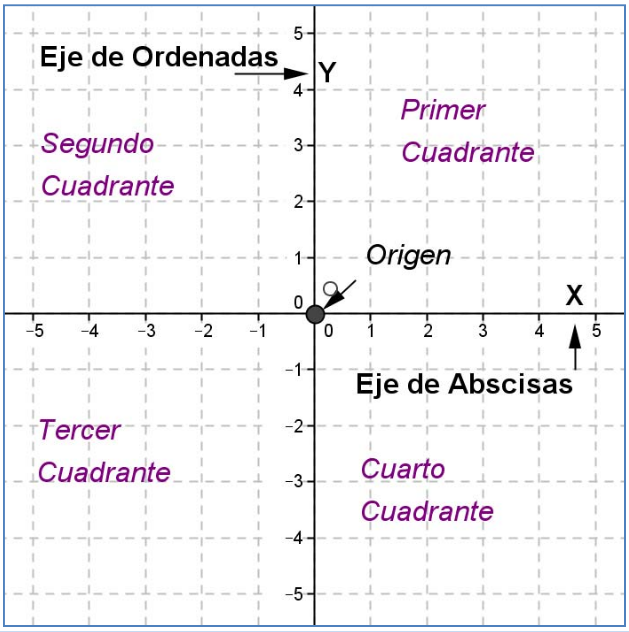
En Matemáticas, en la mayoría de las ocasiones, utilizamos sistemas de referencia cartesianos que también se utilizan en Ciencias Sociales para trabajar los mapas y los planos.

Un **sistema de referencia cartesiano** consiste en dos rectas numéricas (ver *capítulo 4*) perpendiculares, llamadas **ejes**. El punto en el que se cortan los ejes es el origen del sistema, también llamado **origen de coordenadas.**

Normalmente lo representamos con un eje vertical y el otro horizontal. Al eje horizontal le denominamos **eje de abscisas** o también eje X y al vertical **eje de ordenadas** o eje Y.

Al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como cuadrantes:

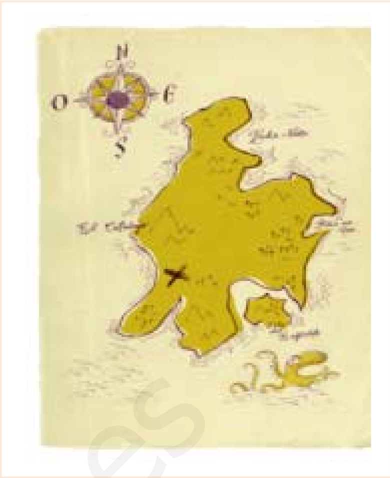
- Primer cuadrante: Zona superior derecha
- Segundo cuadrante: Zona superior izquierda
- Tercer cuadrante: Zona inferior izquierda
- Cuarto cuadrante: Zona inferior derecha



Sistema de referencia cartesiano

Ejemplo 2:

- "Si estas situado sobre la X que aparece en el mapa, sigue 3 leguas al Este y luego 2 leguas al Norte. Allí está enterrado el tesoro"



Nota: La legua es una antigua unidad de longitud que expresa la distancia que una persona puede andar durante una hora. La legua castellana se fijó originalmente en 5.000 varas castellanas, es decir, 4,19 km

Las referencias Norte, Sur, Este y Oeste nos definen un sistema de referencia cartesiano donde el Origen es el punto marcado con la X.

Actividades resueltas

1. Marca en el plano el punto donde se encuentra el tesoro y como se llegaría a él desde el punto X

Solución:

Actividades propuestas

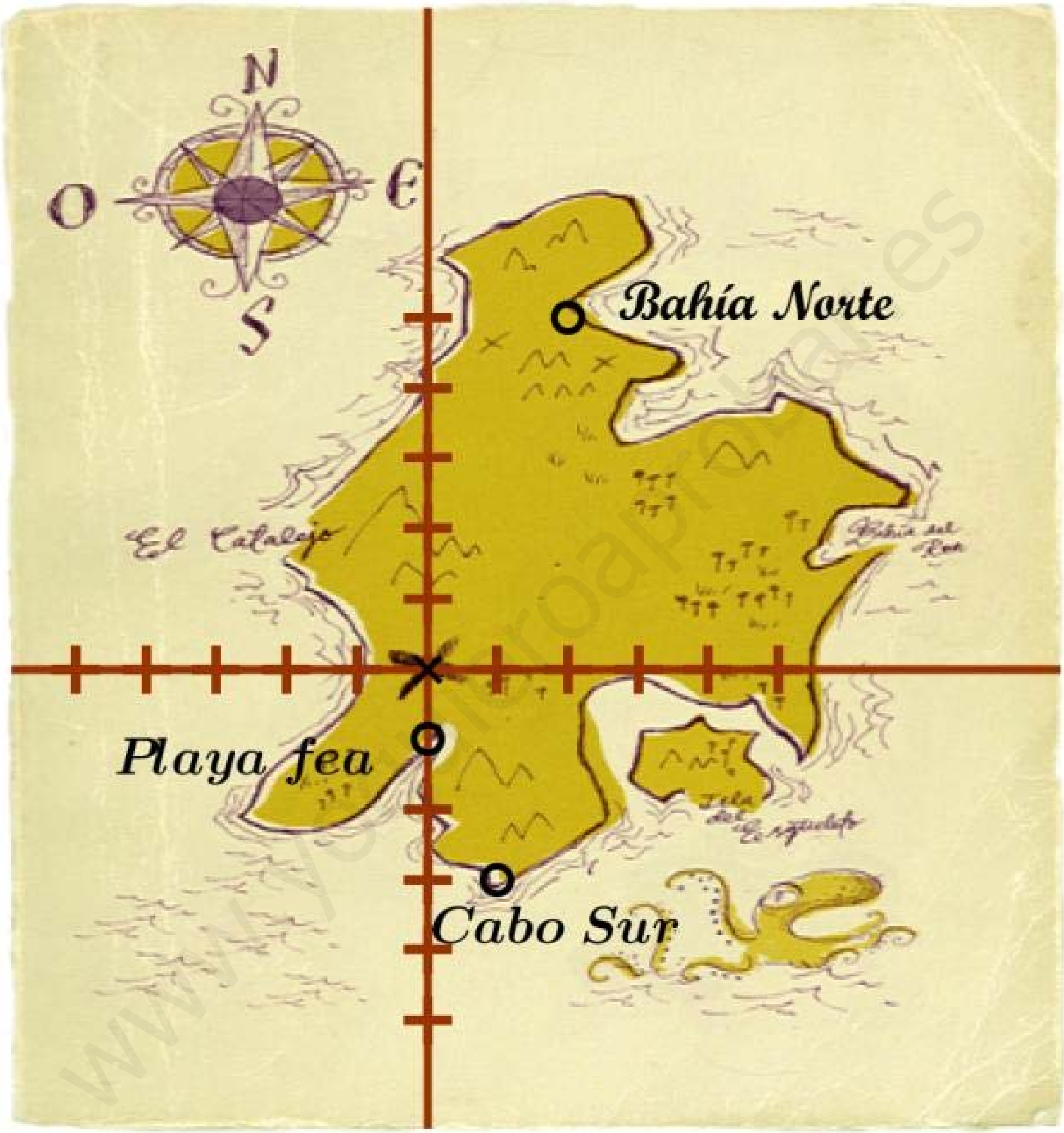
2. Describe y marca en el plano adjunto como llegarías a:

a) Cabo Sur

b) Bahía Norte

c) Playa fea

Material fotocopiable



Isla del Tesoro

Fuente: Banco de Imágenes y sonidos del INTEF.
Colecciones: Robert Louis Stevenson: La isla del tesoro. La isla del tesoro: El mapa del tesoro, Ilustrador: Loren

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

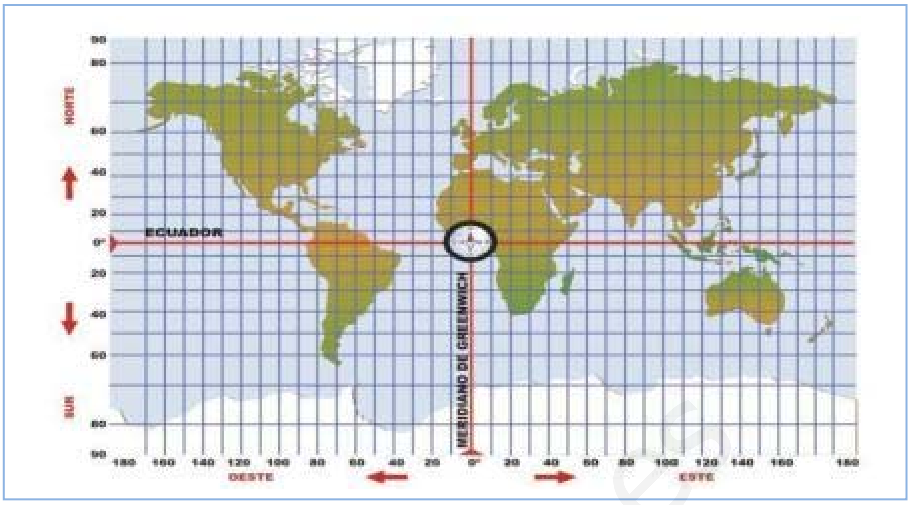
3. En el mapa indica en que cuadrante se encuentran los siguientes paises:

a) Africa del Sur

b) Estados Unidos

c) Argentina

d) India

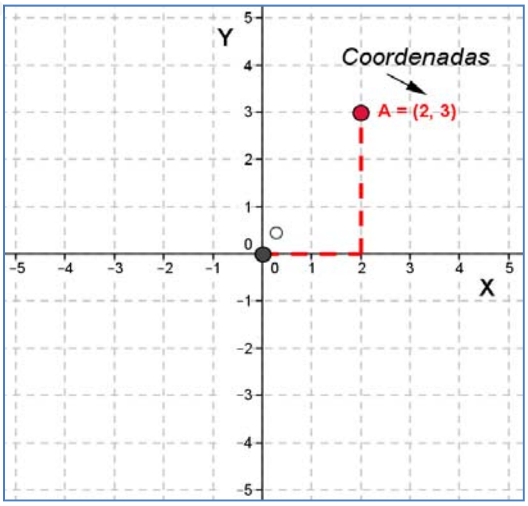


1.2. Coordenadas. Representación e identificación de puntos.

En las actividades anteriores hemos descrito como llegaríamos a algunos puntos a partir de un sistema de referencia. Para llegar a un punto, partiendo del Origen del sistema de referencia, hemos recorrido una determinada cantidad hacia la derecha o la izquierda y luego otra hacia arriba o hacia abajo. Así cada punto quedará determinado por un par de números a los que llamaremos **coordenadas del punto**.

Las **coordenadas de un punto A** son un par ordenado de números **(*x*, *y*)**, siendo ***x*** la primera coordenada que la llamamos **abscisa** y nos indica la cantidad a la que dicho punto se encuentra del eje vertical. La segunda coordenada es la ***y***, llamada **ordenada** y nos indica la cantidad a la que dicho punto se encuentra del eje horizontal.

Cuando esta cantidad sea hacia la izquierda o hacia abajo la indicaremos con un número **negativo** y si es hacia arriba o a la derecha la indicaremos con **positivo**, de la misma manera que hacíamos al representar los números en la recta.



Ejemplo 3:

- En el grafico el punto A tiene coordenadas (2, 3).

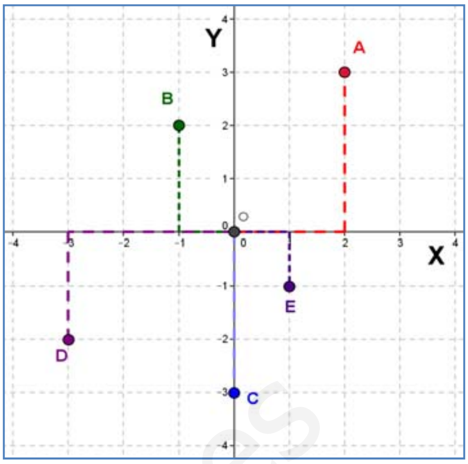
Ejemplo 4:

- En la primera Actividad resuelta el TESORO se encuentra en el punto de coordenadas (3, 2).
- En la Actividad propuesta 2 el Cabo Sur se encuentra en el punto de coordenadas (1, –3), la Bahía Norte en el punto (2, 5) y Playa fea en el punto (0, –1).

Nota: El cabo Sur se encuentra en el cuarto cuadrante y su ordenada es una cantidad negativa porque desde el origen tiene que ir hacia el Sur, esto es, tiene que bajar. Y la Playa fea se encuentra en el eje de ordenadas hacía el Sur, por eso su abscisa es 0 y su ordenada negativa.

Actividades resueltas

4. Indica cuales son las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico adjunto:



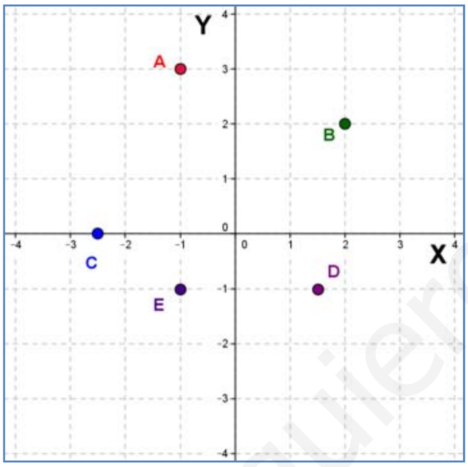
Solución

A = (2, 3); B = (–1, 2); C = (0, –3); D = (–3, –2) y E = (1, –1)

5. Dibuja un sistema de referencia cartesiano y en él marca los puntos siguientes:

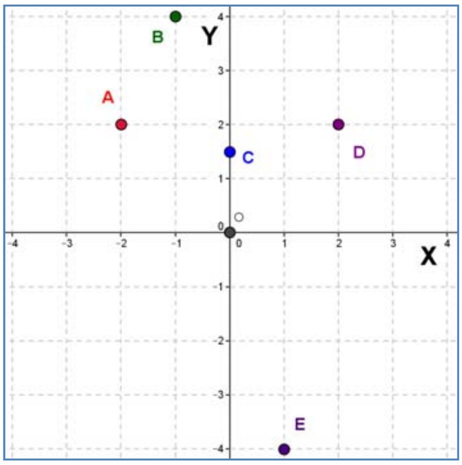
A = (–1, 3); B = (2, 2); C = (–2'5, 0), D = (1'5, –1) y E = (–1, –1)

Solución



Actividades propuestas

6. Indica cuales son las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico adjunto:



7. Dibuja un sistema de referencia cartesiano y en él marca los puntos siguientes:

A = (–4, 2); B = (–3, –3); C = (–0'5, 0'5) y D = (0, –2)

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. TABLAS Y GRÁFICAS

2.1. Relación entre dos magnitudes. Tablas de valores.

En muchas ocasiones tenemos una relación entre dos magnitudes que nos viene dada por la correspondencia entre las cantidades de cada una de ellas. Esta relación puede ser de proporcionalidad, como estudiamos en el capítulo 10, también puede estar dada por una expresión verbal o definida por una fórmula o ecuación de las que acabamos de estudiar en el capítulo 11.

De una relación entre dos magnitudes podemos obtener un conjunto de datos, relacionados dos a dos, que si los ordenamos en una tabla nos facilita su interpretación.

Una **tabla de valores** es una tabla en la que situamos ordenadamente las cantidades correspondientes de dos magnitudes relacionadas.

Ejemplo 5:

- Los 100 metros lisos es una carrera en la que se tiene que recorrer 100 metros, libres de todo obstáculo, con la mayor rapidez posible. Se considera, en general, como la competición de carreras de velocidad más importante.

  Los mejores atletas la realizan en un tiempo de alrededor de 10 segundos de duración corriendo cada 10 metros en un promedio de 1 segundo.

Longitud (m)	10	20	50	70	90	100
Tiempo (s)	1	2	5	7	9	10

Nota: La tabla también se puede poner en sentido vertical

longitud (m)	tiempo (s)
10	1
20	2
50	5
70	7
90	9
100	10

En algunas ocasiones la relación entre dos magnitudes nos la pueden indicar directamente mediante su tabla de valores

Ejemplo 6:

- *"La sopa estaba muy caliente, así que la dejé enfriar durante cinco minutos, la temperatura de la sopa, según se enfriaba, la indica la tabla siguiente"*

Tiempo (min)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	80	60	50	44	40	39

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo 7:

- Las notas de Matemáticas y Tecnología, en la segunda evaluación, de un grupo de 1º de E.S.O. fueron las recogidas en la siguiente tabla:

Matemáticas	6	7	10	6	5	6	9	7	5	8	3	8	9	1	5	5	4	6	5	9	6	10	6	3	4	1	8	6	9	7
Tecnología	5	6	7	8	6	8	7	6	4	10	2	8	10	1	5	6	7	10	3	5	8	10	9	3	5	1	6	5	5	8

En otras ocasiones desconocemos cuales son las magnitudes con las que estamos trabajando, tan solo conocemos los valores relacionados, y las solemos indicar con las letras X e Y

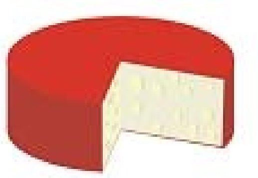
Ejemplo 8:

- En la tabla adjunta tenemos la relación entre la magnitud **X** y la magnitud **Y**

X	–2	–1	0	1	2	3
Y	2	3	4	5	6	7

Actividades resueltas

- El precio de un kilo de queso especial de cabra, de la sierra de Madrid, es de 18 € y se vende al peso. Construye una tabla de valores, con seis cantidades diferentes, que relacione el peso del queso con su precio.



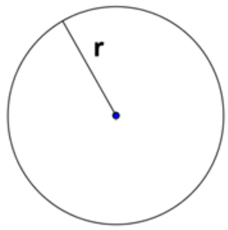
Solución

Como nos piden seis cantidades diferentes vamos a escoger algunas que nos parecen cotidianas hasta un kilo, por ejemplo, 100 g, 250 g (cuarto de kilo), 500 g (medio kilo), 625 g, 750 g y 1000 g.

Como el precio y el peso son magnitudes proporcionales sabemos (capítulo 10) completar la tabla.

Peso (g)	100	250	500	625	750	1000
Precio (€)	1,80	4,50	9	11,25	13,50	18

- Como sabes el área de un círculo se puede calcular mediante la fórmula $A = \pi r^2$, en donde r es el radio del círculo (utilizamos $\pi = 3{,}14$). Construye una tabla de valores desde un radio de 1 cm a uno de 5 cm, de centímetro en centímetro.



Solución

Nos piden que elaboremos una tabla para los valores del radio 1, 2, 3, 4 *y* 5.
Para ello sustituimos $\boldsymbol{r}$ *en la fórmula por cada uno de esos valores y obtenemos para*

$\boldsymbol{r} = 1 \rightarrow \boldsymbol{A} = 3{,}14 \cdot 1^2 = 3{,}14$; *para* $\boldsymbol{r} = 2 \rightarrow \boldsymbol{A} = 3{,}14 \cdot 2^2 = 12{,}56; \ldots$

Radio (cm)	1	2	3	4	5
Área (cm²)	3,14	12,56	28,26	50,24	78,50

Actividades propuestas

8. Construye una tabla de valores, con cinco cantidades diferentes, que relacione el consumo de un coche y los kilómetros que recorre sabiendo que su consumo medio es de 5 litros cada 100 kilómetros.

9. Construye una tabla de valores, con cinco cantidades diferentes, en que se relacione el lado de un cuadrado y su superficie.

10. Construye una tabla de valores, con seis cantidades diferentes, que represente la siguiente situación: *"Una compañía de telefonía cobra 5 céntimos de euro por establecimiento de llamada y 4 céntimos por minuto hablado"*

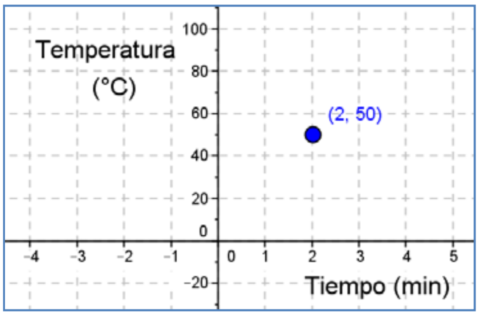
2.2. Representando puntos. Las gráficas.

Cada par de datos correspondientes de una relación entre dos magnitudes los podemos **representar** en un sistema cartesiano

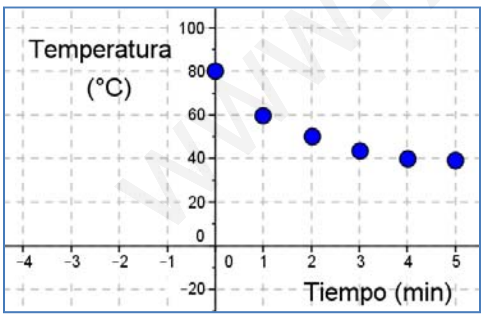
Ejemplo 9:

- En la relación del ejemplo 6 veíamos que a los 2 minutos, la sopa tenía una temperatura de 50 °C.

Este par de números son las coordenadas de un punto (2, 50) en un sistema de referencia cartesiano en el que en el eje de abscisas representamos la magnitud *Tiempo* medida en minutos y en el eje de ordenadas representamos la magnitud *Temperatura* medida en grados centígrados.



Si representamos en un sistema de referencia cartesiano todos los pares de datos de una tabla de valores obtenemos una **gráfica**.



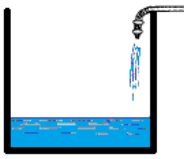
Si representamos todos los pares de datos de la tabla de valores del ejemplo anterior obtenemos la siguiente gráfica:

En ocasiones podríamos haber dado muchos más datos en la tabla de valores y al representarlos nos quedaría casi una línea. En estos casos la **gráfica**, **uniendo los puntos**, estaría constituida por **una línea** que en muchas situaciones sería continua.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

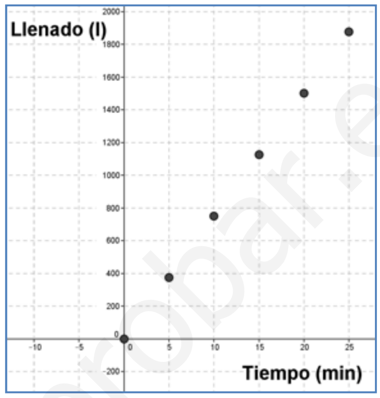
Ejemplo 10:

- Si llenamos un depósito de agua mediante un surtidor que vierte 75 litros de agua por minuto podemos calcular una tabla de valores con la cantidad de agua que va teniendo el depósito (llenado) en relación al tiempo que ha ido pasando.

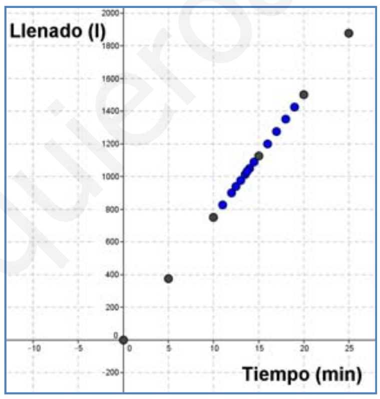


tiempo (min)	0	5	10	15	20	25
llenado (l)	0	375	750	1125	1500	1875

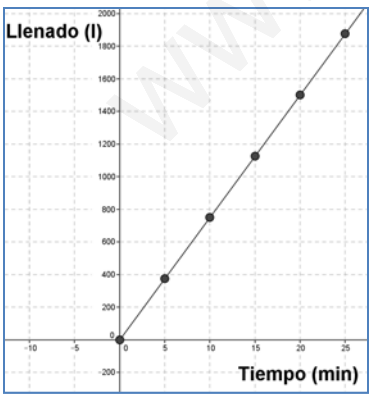
Dibujamos su gráfica a partir de esta tabla de valores



En esta ocasión tendría sentido medir la cantidad de agua que va teniendo el depósito cada menos tiempo. Si lo representamos podría quedar de la siguiente manera:



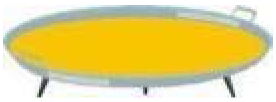
Si representáramos todos los posibles valores nos quedaría la siguiente gráfica:



Nota: La gráfica comienza, en el tiempo 0, en el instante en que empezamos a llenar el depósito. No hay gráfica en el tercer cuadrante porque no tiene sentido un tiempo negativo.

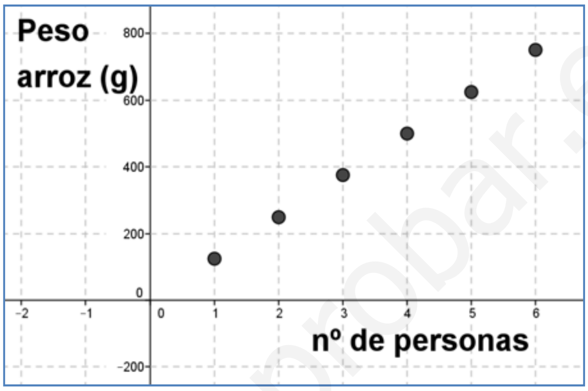
Ejemplo 11:

- En la siguiente situación: *"Una paella para seis personas necesita 750 g de arroz"* podemos construir una tabla de valores en la que se relacionan el número de personas y la cantidad de arroz que se necesita:



Número de personas	1	2	3	4	5	6
Peso arroz (g)	125	250	375	500	625	750

y podemos construir una gráfica de puntos con estos valores:

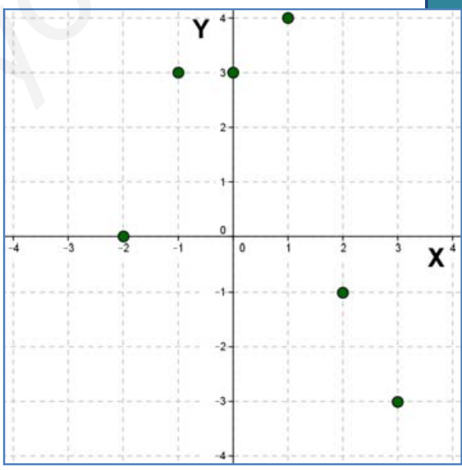


Sin embargo no podemos calcular valores intermedios (para dos personas y media por ejemplo), pues no podemos dividir a una persona y, por lo tanto, no tiene sentido unir los puntos de la gráfica.

Ejemplo 12:

- También podemos representar la relación entre las magnitudes **X** e **Y** del ejemplo 8 a partir de su tabla de valores:

X	–2	–1	0	1	2	3
Y	0	3	3	4	–1	–3

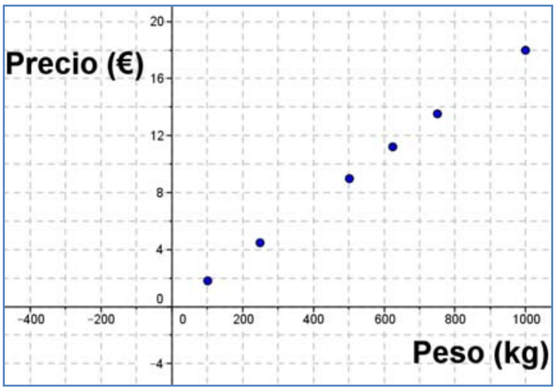


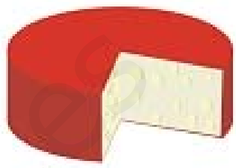
Nota: En este caso no podemos unir los puntos, pues al no conocer cuáles son las magnitudes ni cuál es la relación entre ellas, salvo en los puntos que vienen determinados por la tabla de valores, no podemos saber, por ejemplo, qué valor tendría la magnitud Y si la magnitud X valiese 1,5.

Actividades resueltas

- Construye una gráfica de puntos a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad resuelta 8 y, si es posible, une sus puntos:

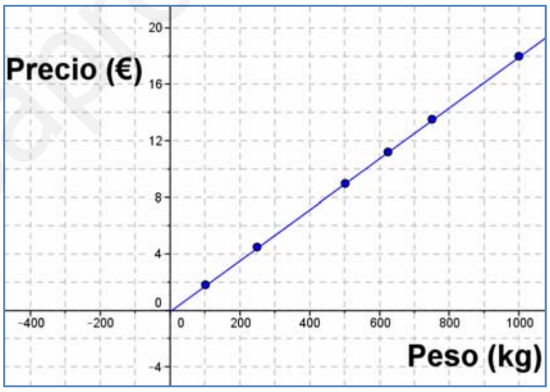
Solución





Sí, en este caso es posible porque podemos calcular el precio para cualquier peso (es una relación proporcional).

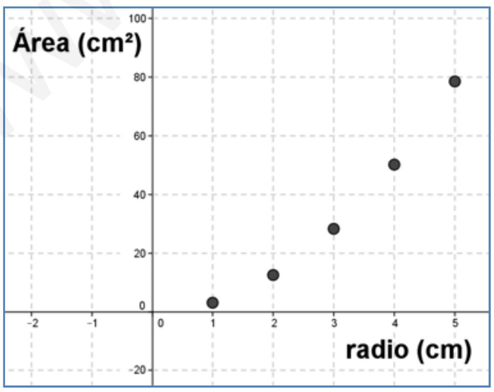
La gráfica quedaría:

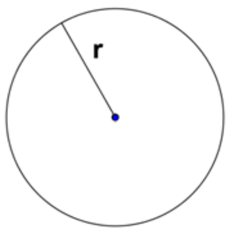


Nota: No hay gráfica en el tercer cuadrante porque no tiene sentido un peso negativo

- Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad resuelta 9 y, si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

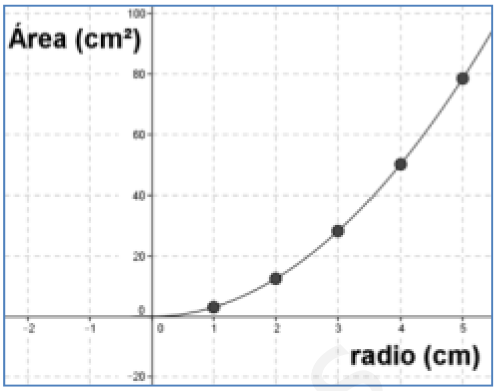
Solución:





Sí, es posible, porque podemos calcular el área para cualquier radio.

La grafica quedaría:



Nota: No hay gráfica en el tercer cuadrante porque no tiene sentido un radio negativo

Actividades propuestas

11. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre el consumo de un coche y los kilómetros que recorre sabiendo que su consumo es de 5 litros cada 100 kilómetros. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

12. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre la relación entre el lado de un cuadrado y su superficie. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

13. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre los costos en una *compañía de telefonía*. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

14. En un recibo del gas de la vivienda de Juan viene la siguiente distribución de gasto:

Consumo de gas: ....0,058 € por kw/h
Impuesto especial:........0,002 € por kw/h
Término fijo: ....4,30 € por mes
Alquiler de contador.... 2,55 €

La factura era de dos meses, había consumido 397 kw/h y el gasto ascendía a 34,97 €. Otra factura anterior el gasto era de 26,15 € con un consumo de 250 kw/h.

Construye una gráfica que relacione el consumo de gas y el gasto. ¿Tiene sentido unir los puntos?

2.3. Gráficas a partir de situaciones.

En la mayoría de las situaciones que hemos estudiado hasta ahora, hemos podido calcular los pares de valores relacionados, porque se trataban de relaciones de proporcionalidad o de relaciones dadas por una fórmula que conocíamos.

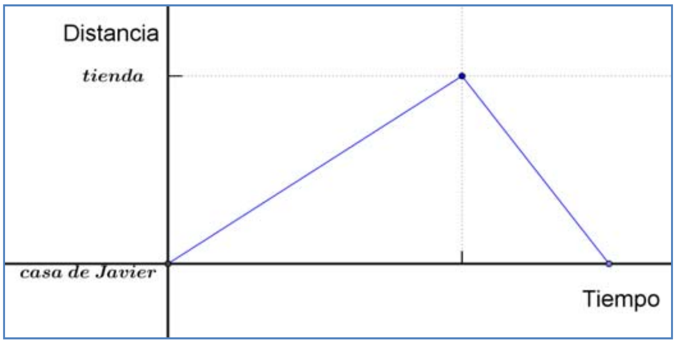
Esto no siempre ocurre. A veces nos encontrarnos con que nos describen una situación en la que nos dan una información entre dos magnitudes sin aportarnos apenas cantidades numéricas.

En muchas ocasiones **una situación cotidiana o relacionada con fenómenos naturales descrita verbalmente se puede representar mediante una gráfica** de manera directa.

Ejemplo 13:

- *Javier tiene que ir a comprar a una tienda algo alejada de su casa, como no tiene prisa decide ir dando un paseo. Justo cuando llega a la tienda se da cuenta de que se le ha olvidado la cartera y no tiene dinero para comprar. Corriendo vuelve a su casa a por la cartera.*

A partir de este enunciado podemos elaborar una grafica como esta:

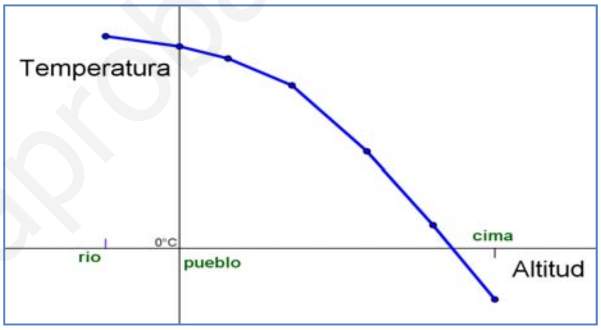


Nota: la distancia entre la casa de Javier y la tienda no la conocemos, pero sabemos que en la vuelta ha tardado menos tiempo que en la ida.

Ejemplo 14:

- *La temperatura en una montaña va descendiendo según ganamos en altitud. En la cima llegamos a temperaturas bajo cero.*

Podemos representar una situación en la que medimos la temperatura según subimos desde un pueblo a la cima de una montaña en una gráfica como la siguiente:



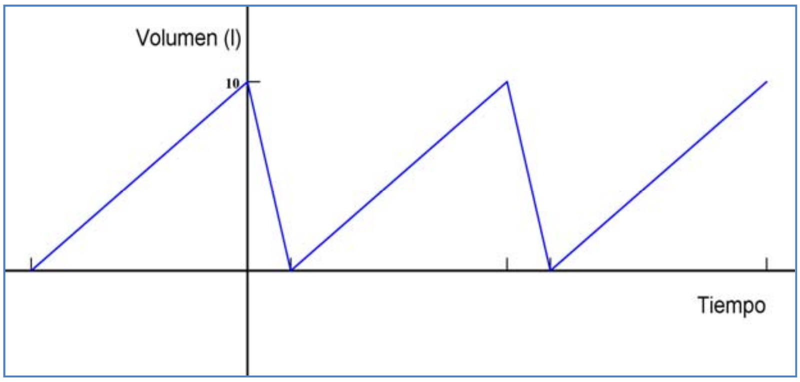
En el sistema de referencia cartesiano que hemos establecido, el origen está en el pueblo y es por ello por lo que el rio tiene abscisa negativa, porque está más bajo. En la cima la temperatura es negativa y por ello su ordenada es negativa.

Ejemplo 15:

- *En un establecimiento comercial, el depósito de agua de los servicios públicos va llenándose poco a poco hasta alcanzar los 10 L de agua y, en ese momento, se vacía regularmente. Cuando está vacío se repite el proceso. En llenarse tarda el quíntuple de tiempo que en vaciarse.*

Podemos hacer una gráfica que refleje la variación de la cantidad de agua (volumen) del depósito en función del tiempo, a partir de un momento en el que el depósito está lleno.

El origen de nuestro sistema de referencia cartesiano esta en un momento con el depósito lleno, el tiempo negativo significa que es anterior a ese momento.



Las **gráficas** nos dan una visión más clara de la situación que estamos estudiando, además de ellas podemos obtener una **tabla de valores** y así hacer una **interpretación** más precisa.

Ejemplo 16:

- En la situación anterior si consideramos que tarda un minuto en vaciarse el depósito, tardará cinco minutos en llenarse y podemos obtener la siguiente tabla de valores:

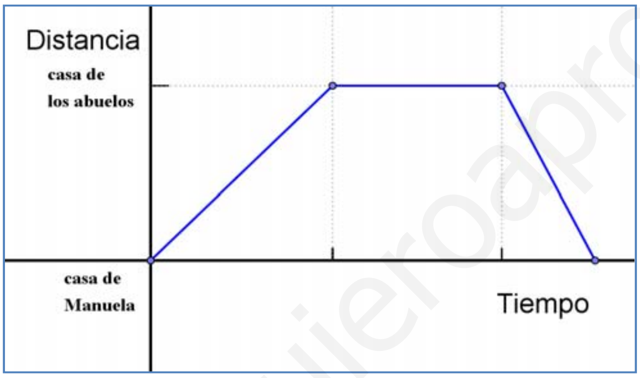
Tiempo (min)	–5	0	1	6	7	12
Volumen (l)	0	10	0	10	0	10

Nota: el valor negativo del tiempo quiere decir que el depósito comenzó a llenarse con anterioridad a la situación inicial (origen) en el que el depósito está lleno.

Actividades resueltas

- Manuela va algunas tardes a casa de sus abuelos donde pasa un buen rato con ellos. Después vuelve rápidamente a su casa para hacer los deberes antes de cenar. Construye una gráfica de esta situación

Solución:

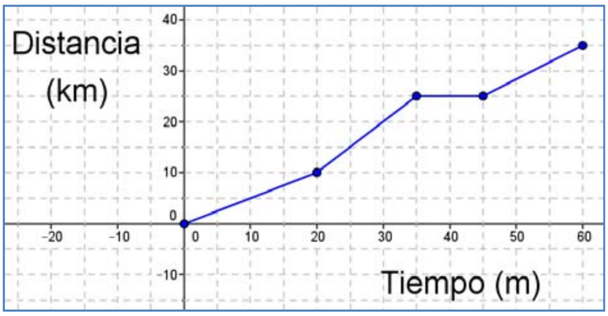


- "Este verano Juan fue en bicicleta a casa de sus abuelos que vivían en un pueblo cercano, a 35 kilómetros del suyo. A los 20 minutos había recorrido 10 km; en ese momento comenzó a ir más deprisa y tardó 15 minutos en recorrer los siguientes 15 km. Paró a descansar durante 10 minutos y, después, emprendió la marcha recorriendo los últimos 10 km en 15 minutos."

Construye una gráfica de esta situación y, a partir de ella, confecciona una tabla de valores.

Solución

La gráfica sería:



Y la tabla de valores:

Tiempo (min)	0	20	35	45	60
Distancia (km)	0	10	25	25	35

Actividades propuestas

15. *La familia de Joaquín fue un día de excursión al campo en coche; después de pasar el día volvieron y a mitad de camino pararon durante un buen rato a echar gasolina y tomar unos refrescos. Al final llegaron a casa.*
Construye una gráfica de esta situación.

16. *Vanesa salió a dar un paseo, primero fue a casa de su amiga Inés, que vive a 250 metros, y tardó 6 minutos en llegar. La tuvo que esperar otros 6 minutos en su portal y, después, tardaron 15 minutos en llegar al parque, que estaba a 600 m, donde merendaron y charlaron durante media hora. Por último Vanesa regresó a casa rápidamente, porque le había llamado su madre. Sólo tardó 5 minutos.*
Construye una gráfica de esta situación y, a partir de ella, confecciona una tabla de valores.

2. 4. Interpretación y lectura de gráficas.

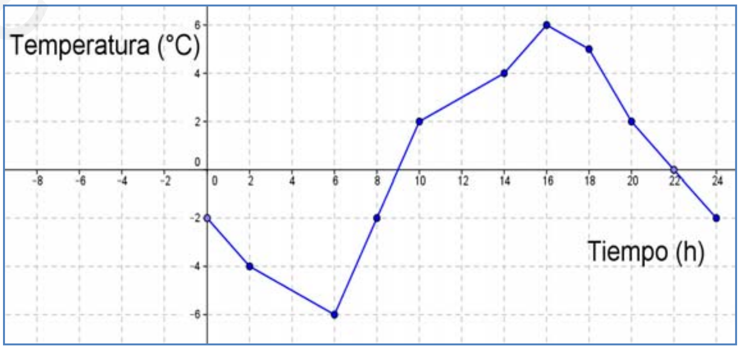
Las gráficas resumen de manera eficaz la información sobre la relación entre dos magnitudes, por ello se suelen emplear mucho, tanto en situaciones de carácter científico o social, como en la información que se emplea en los medios de comunicación. Su lectura e interpretación es pues de mucha utilidad.

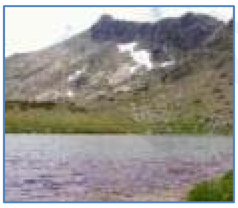
De las coordenadas de los puntos de una gráfica podemos extraer datos muy interesantes para la comprensión de la situación que nos muestra la gráfica (la ordenada más alta o más baja, como se relacionan las magnitudes,…)

Ejemplo 17:

- El gráfico adjunto muestra las temperaturas a lo largo de un día de invierno en el pico de Peñalara.

A partir de esta gráfica podemos obtener más información sobre la situación planteada. Así, por ejemplo podemos ver que la temperatura mínima que se alcanzó ese día fue de –6 °C a las 6 h de la mañana, nos lo indica el punto de coordenadas (6, –6) que tiene la ordenada menor de todos los puntos de la gráfica. Es un **mínimo**.





- Del mismo modo podemos ver que la temperatura más alta fue de 6 °C, que se obtuvo a las 16 h. El punto de coordenadas (16, 6) así nos lo indica. Es un **máximo**.

Podemos también afirmar que la temperatura fue subiendo desde las 6 h hasta las 16 h pues las ordenadas de los puntos cuya abscisa está entre esas horas van **creciendo**. Es creciente.

Así mismo el punto (10, 2) nos indica que a las 10 h de la mañana hacía una temperatura de 2 °C, temperatura que se alcanzó también a las 20 h, aunque esta vez bajando.

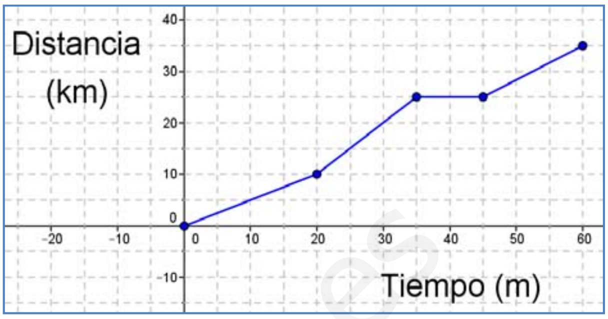
El hecho de que de 10 h a 14 h subiera la temperatura menos que en horas anteriores (gráfica menos inclinada) pudo ser debido a causas climatológicas concretas, como que se pusiera la niebla, y después, de 14 a 16 h, hay una subida rápida (pudo salir el sol). La gráfica nos indica que algo así pudo pasar.

A partir de las 16 horas la temperatura baja, la gráfica es **decreciente**.

La temperatura es de 0 ºC hacia las 9 horas y a las 22 horas. (0, 9) y (0, 22) Son los puntos en que la gráfica corta al eje de abscisas. Al eje de ordenadas lo corta en (-2, 0).

Ejemplo 18:

- La actividad resuelta que nos describe el recorrido de Juan de camino a casa de sus abuelos. La gráfica que dibujamos y resume el viaje era la que figura a la derecha.



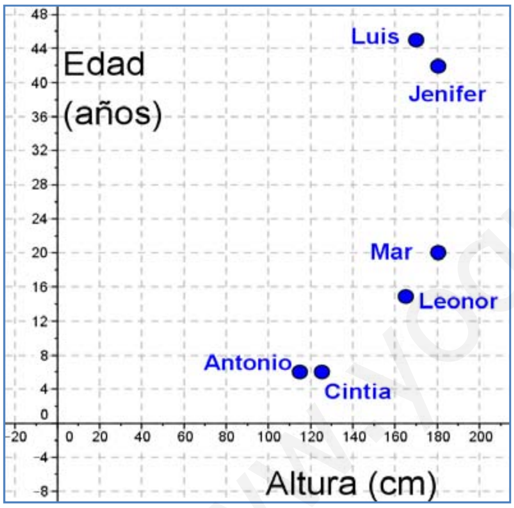
Viaje de Juan a casa de sus abuelos

De la gráfica, además de lo que ya conocíamos y que nos ayudo a dibujarla, podemos extraer, "de un simple vistazo" más información.

Por ejemplo, si miramos a la gráfica podemos observar que en el kilómetro 20 llevaba 30 minutos pedaleando, o que a los 10 minutos había recorrido 5 kilómetros, que el tramo más rápido fue de los 20 a los 35 minutos (se ve mayor inclinación), o que en el minuto 40 estaba parado.
Es una gráfica **continua**, pues podemos dibujarla sin levantar el lápiz.

Ejemplo 19:

- La gráfica siguiente nos indica la relación entre la edad y la estatura de los miembros de una familia.



Si observamos los puntos de esta grafica veremos que Jenifer y Luis son los puntos (180, 43) y (170, 45) y representan a los padres que tienen 43 y 45 años y miden 180 y 170 cm respectivamente.

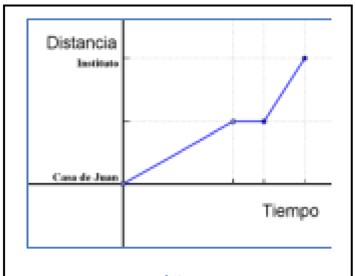
Los pequeños Antonio y Cintia son mellizos de 6 años y miden 115 y 125 centímetros. Mar tiene 20 años y mide 180 cm, representada por el punto (180, 20) y, por último Leonor mide 165 y tiene 15 años.

De la gráfica también podemos deducir que Mar y su madre, Jenifer, son los más altos de la familia, que Luis es el de más edad y que Cintia mide 10 centímetros más que su hermano mellizo.

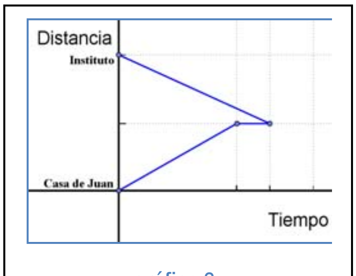
Actividades resueltas

- Observando las gráficas de debajo, determina cuál es la que mejor se ajusta a la situación siguiente:

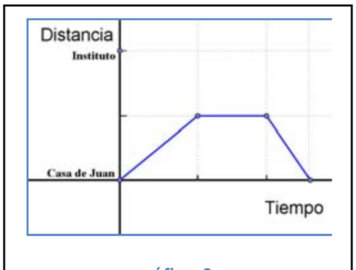
"Antonio va al Instituto cada mañana desde su casa, un día se encuentra con un amigo y se queda charlando un ratito. Como se la ha hecho tarde sale corriendo para llegar a tiempo a la primera clase"



gráfica 1



gráfica 2



gráfica 3

Solución

La gráfica 1 **es la que más se ajusta** pues: el segmento horizontal indica que durante un tiempo pequeño no avanzó en distancia, esto es que estaba parado, y la inclinación del tercer segmento es mayor que la del primero, lo que indica que en menos tiempo recorrió más distancia, esto es, que fue más rápido.

La gráfica 2 **no puede ser**, pues Juan no puede estar en dos sitios distintos, a la vez, en el mismo momento. Esta gráfica indica, por ejemplo, que en el instante inicial (tiempo 0) Juan está en su casa y en el instituto al mismo tiempo.

La gráfica 3 **no puede ser**, ya que la gráfica nos indica que Juan regresa a su casa después de charlar con su amigo y no va al instituto.

- La gráfica siguiente nos muestra la variación de la estatura de Laura con relación a su edad.

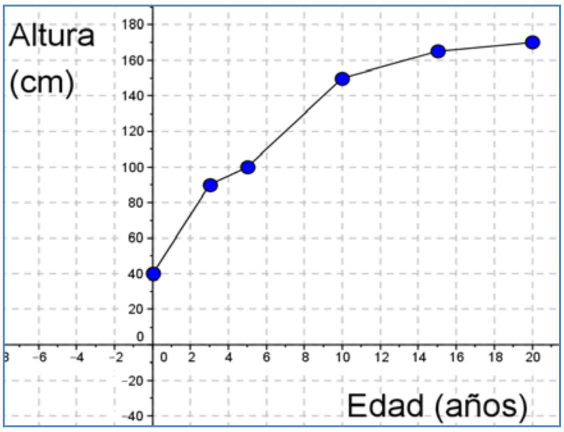
Observando la gráfica contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿A qué edad medía 1 metro?

b) ¿Cuánto medía al nacer?

c) ¿Cuánto medía a los 10 años? ¿Y a los 20?

d) ¿En qué periodo creció menos?



Solución:

a) Mirando a la gráfica observamos que el punto (5, 100) es el que nos piden pues la ordenada es 100 (1 metro), luego Laura tenía 5 años.

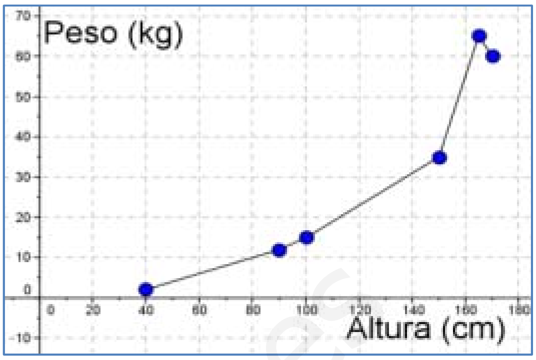
b) El punto que representa el nacimiento es el (0, 40) luego midió 40 centímetros

c) Del mismo modo observamos que a los 10 años medía 155 centímetros y a los 20 años 170.

d) En la gráfica observamos que el tramo menos inclinado es el que va de los 15 a los 20 años, eso quiere decir que en ese tramo Laura creció menos.

Actividades propuestas

17. La gráfica siguiente nos muestra la variación del peso de Laura con relación a su estatura a lo largo de su vida.



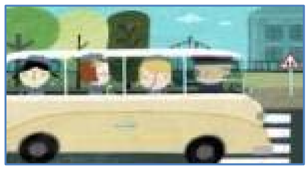
Analiza la gráfica, comenta la situación y responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto pesaba cuando medía un metro? ¿Y cuando medía 150 cm?

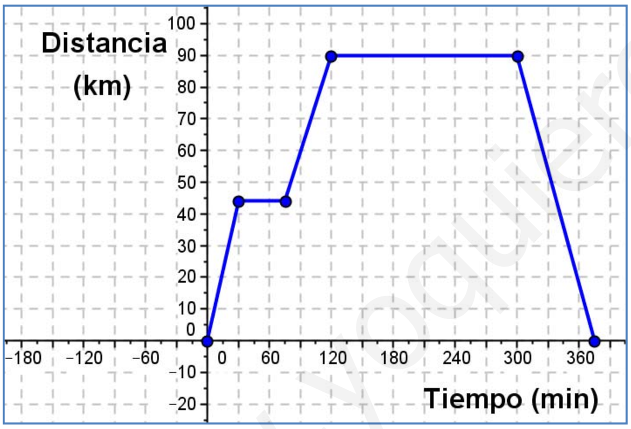
b) ¿Cuánto medía cuando pesaba 55 kg?

c) ¿A qué altura pesaba más? ¿Laura adelgazó en algún momento?

18. La siguiente gráfica representa una excursión en autobús de un grupo de 1º de E.S.O. a Toledo, pasando por Aranjuez.



Sabiendo que Toledo está a 90 km del Instituto y Aranjuez a 45 km:



a) ¿Cuánto tiempo pararon en Aranjuez? ¿y en Toledo?

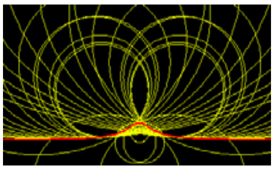
b) ¿Cuánto tiempo tardaron en llegar a Toledo? ¿y en regresar al Instituto?

c) Si salieron a las 9 h de la mañana ¿A qué hora regresaron? ¿A las diez y media dónde se encontraban?

d) Haz una descripción verbal del viaje

CURIOSIDADES. REVISTA

La Bruja de Agnesi

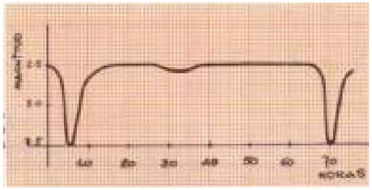


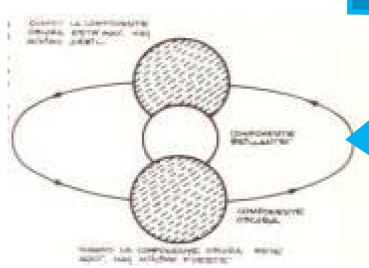
Existe una función que se llama la Bruja de Agnesi. María Gaetana Agnesi fue una matemática italiana que escribió un libro para que sus hermanos pudieran aprender matemáticas. ¡Eran 21 hermanos! Ese libro fue tan bueno, tan claro en sus explicaciones, que se usó durante mucho tiempo en las universidades de toda Europa. Para ello hubo que traducirlo. El traductor del italiano al inglés, que admiraba mucho a María Gaetana, hizo una mala traducción, y una de las funciones del libro apareció con el nombre de Bruja (en lugar de *versiera*). Desde entonces a esa función se la denomina "La Bruja de Agnesi".

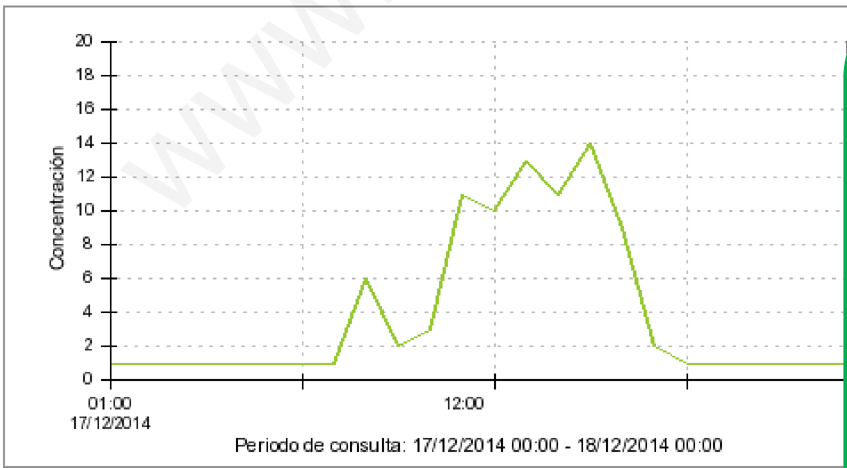
La luz de las estrellas

Los astrónomos deben deducir lo que saben de las estrellas midiendo la luz que nos llega de ellas. En la constelación de Perseo hay una estrella cuyo brillo varía según la gráfica adjunta con un periodo de 65 horas. Entonces han deducido que no se trata de una única estrella sino de una estrella doble, dos estrellas muy próximas, una más brillante y la otra más oscura que giran una alrededor de la otra.

Intenta ser un astrónomo o astrónoma y explicar el comportamiento de esa estrella doble.





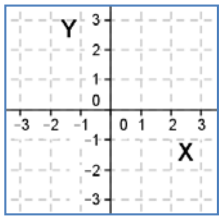
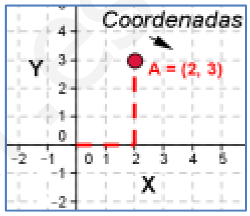
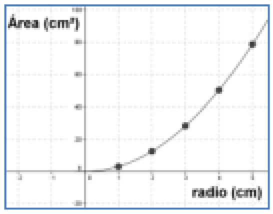
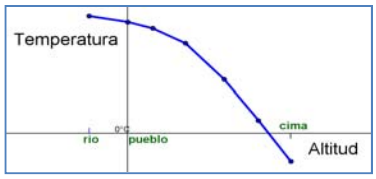


La gráfica indica la evolución del **ozono** en la estación de calidad del aire de Casa de Campo de Madrid durante un día, el 18 de diciembre de 2014. Observa como sube en las horas centrales del día.

En la página de la Comunidad de Madrid puedes conocer cómo está la calidad del aire en cada momento y saber cuáles son los valores umbrales que no se deberían rebasar.

Calidad del aire

RESUMEN

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td>Sistema de referencia cartesiano</td><td>Dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas Ejes, que se cortan en un punto llamado Origen. El eje horizontal se denomina eje de abscisas, y al eje vertical, eje de ordenadas.</td><td></td></tr>
<tr><td>Coordenadas</td><td>Es un par ordenado de números (x, y), que nos indica donde se encuentra el punto respecto al sistema de referencia cartesiano que estamos utilizando.</td><td></td></tr>
<tr><td>Tabla de valores</td><td>Tabla en la que situamos ordenadamente las cantidades correspondientes de dos magnitudes relacionadas.</td><td><table><tr><td>Tiempo (min)</td><td>0</td><td>30</td><td>80</td><td>100</td></tr><tr><td>Distancia (km)</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>Si representamos en un sistema de referencia cartesiano todos los pares de datos de una tabla de valores obtenemos una gráfica.</td><td></td></tr>
<tr><td>Gráficas a partir de situaciones</td><td>Una situación cotidiana o relacionada con fenómenos naturales descrita verbalmente se puede representar mediante una gráfica</td><td></td></tr>
</table>

EJERCICIOS Y PROBLEMAS de 1º de ESO

El plano cartesiano. Coordenadas

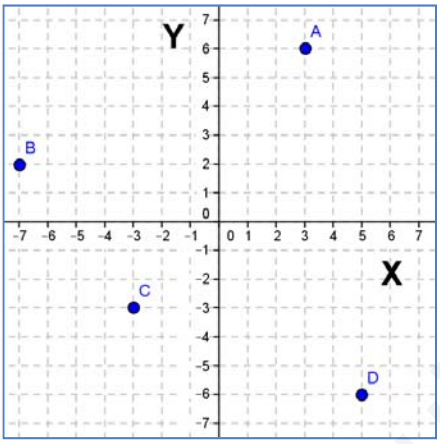
1. Representa en tu cuaderno los puntos siguientes en un sistema de referencia cartesiano:

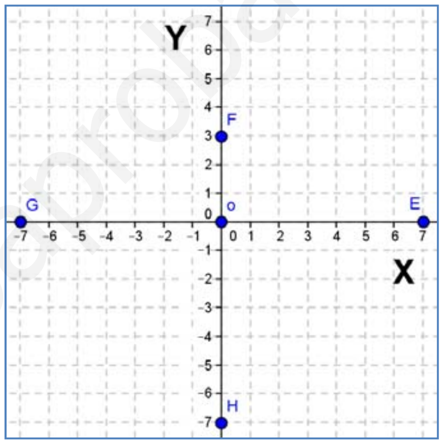
A = (3, 4)   B = (– 3, 1)   C = (– 1, – 3)   D = (4, – 2)   O = (0, 0)

2. Representa en tu cuaderno, en otro sistema éstos otros puntos:

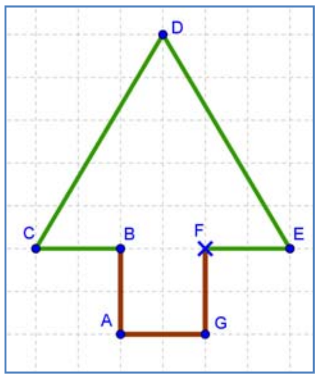
E = (6, 0)   F = (2, 0)   G = (– 3, 0)   H = (– 7, 0)

3. Escribe en tu cuaderno las coordenadas de los siguientes puntos:





Analiza las coordenadas de cada punto, sus signos, sus valores, etc. ¿Tienen algo especial las coordenadas de los puntos E, F, G y H? ¿Y el punto O tiene coordenadas? ¿Cómo se llama éste punto?



4. Dibuja, en el árbol del gráfico, un sistema de referencia cartesiano, con el origen en el punto F.

a) Indica las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico.

b) Indica en que cuadrante, o eje, está cada punto.

5. Representa los siguientes puntos en un sistema de referencia cartesiano:

M = (3, –10)   R = (–3, –10)   V = (–3, 10)   Z = (3, 10)

Une estos puntos en orden alfabético y finalmente une el último con el primero. ¿Qué polígono obtienes? Calcula el área y el perímetro de éste polígono.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

6. El dibujo muestra el mapa de Mesopotamia en la antigüedad.

a. Representa un sistema de referencia cartesiano, con origen en Babilonia.

b. Elige las unidades más adecuadas para cada eje.

c. Indica qué coordenadas tienen las ciudades de Jerusalén, Persépolis y Uruk.

7. Representa los siguientes puntos en un sistema de referencia cartesiano:

A = (–3, –2); B = (–3, –3); C = (–1, 5); D = (2, 3); E = (2, –2);

F = (–1, –2); G = (–1, 0); H = (–2, 0); I = (–2, –2)

a) Une estos puntos en orden alfabético y finalmente une el último con el primero.

b) Indica en que cuadrante, o eje, está cada punto.

8. En tu cuaderno, elige dos puntos en cada cuadrante y cuatro puntos en cada eje, dales un nombre y escribe las coordenadas que tiene cada punto.

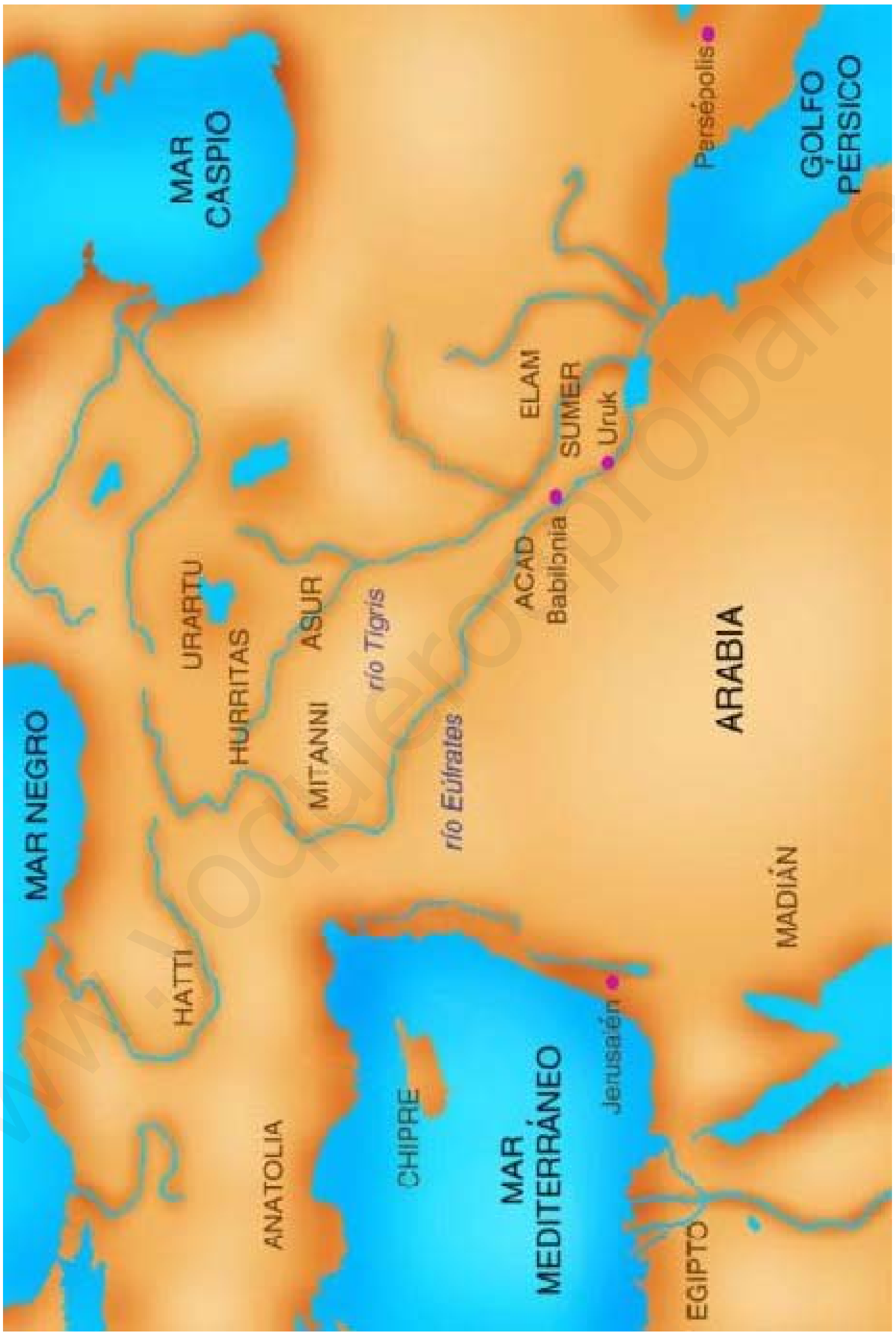
9. El gráfico muestra el plano de una ciudad. En él tienes marcado el sistema de coordenadas cartesianas y las unidades.

a. Indica las coordenadas del Centro Cultural y del Centro de Salud respecto a éstos ejes.

b. ¿Qué calle está en las coordenadas

(– 1, 3)? ¿Y en las coordenadas (0, –1)?

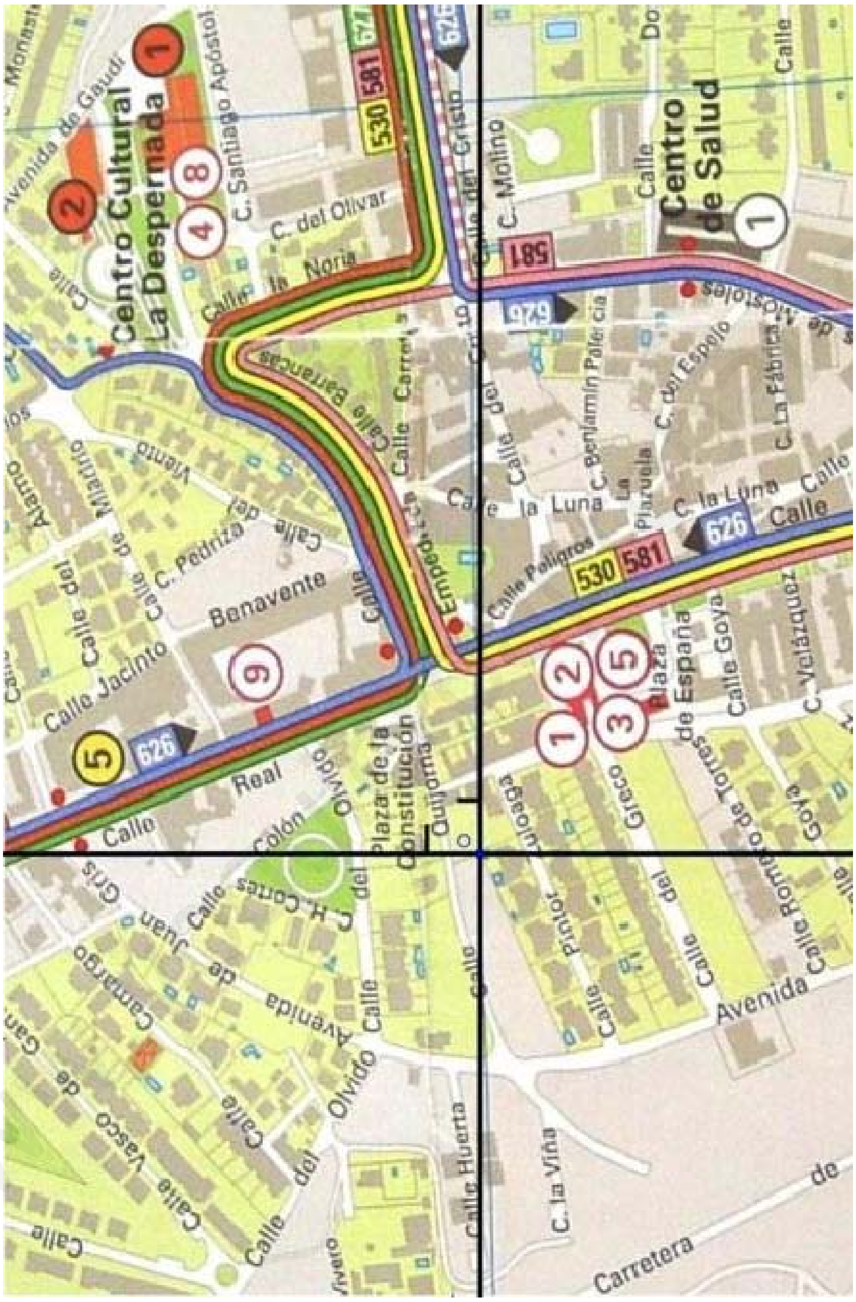
Material fotocopiable



Mapa de Mesopotamia

Fuente: Banco de Imágenes y sonidos del INTEF.

Material fotocopiable

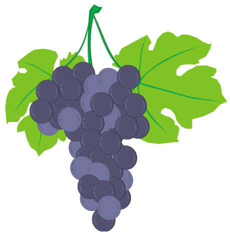


Plano de una ciudad

Fuente: Banco de Imágenes y sonidos del INTEF.

Tablas y Gráficas

10. La siguiente tabla de valores relaciona el peso en kilogramos de uvas y su precio en euros. Cópiala en tu cuaderno y complétala.



Peso (Kg)	1,5		3,6		6,5
Precio (€)	2,7	3,6		9	

11. Construye una gráfica de puntos a partir de los datos de la tabla de valores del ejercicio 10 y, si es posible, construye la gráfica uniendo sus puntos.

12. Construye tablas de valores, con cuatro cantidades diferentes, que nos expresen las siguientes relaciones:

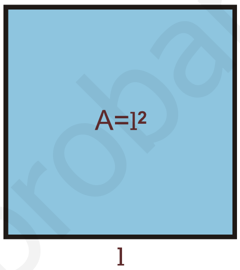
a. El lado de un cuadrado y su área

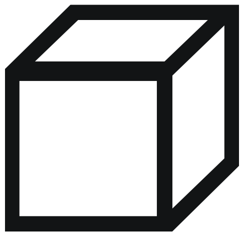
b. Un número y la cuarta parte de dicho número.

c. Un número y su número opuesto

d. Un número y su número inverso.

e. La arista de un cubo y su volumen





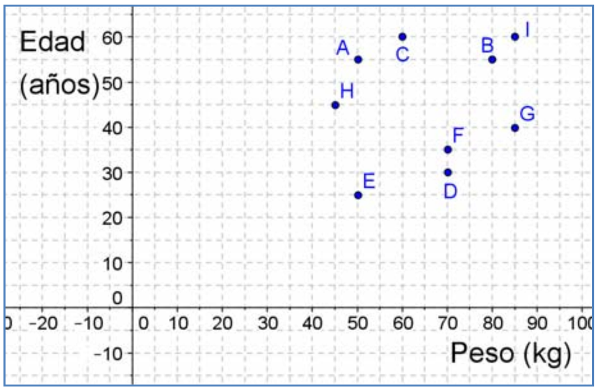
13. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla de valores sabiendo que las magnitudes P y Q son magnitudes directamente proporcionales:

P	0	1	2		7	9
Q				15	21	

14. La gráfica siguiente nos indica la relación entre la edad y el peso de los profesores de un grupo de 1º de E.S.O. de un Instituto de Madrid.

Sabemos que la profesora de Matemáticas es la más joven. La de Ciencias de la Naturaleza tiene 35 años. El profesor de Ciencias Sociales es de los mayores y de los que más pesan, y la de Educación Física es la más delgada.

Indica que punto de la gráfica corresponde a cada uno de estos cuatro profesores.



15. Haz una gráfica con los datos de la tabla siguiente:

X	0	1	2	5	7	9
Y	2	5	8	6	2	–2

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

16. Construye gráficas de puntos a partir de los datos de las tablas de valores que has realizado en el ejercicio 12 y, si es posible, construye las gráficas que resultan de unir sus puntos. En cada apartado, indica en qué cuadrantes es posible tener gráfica.

17. Construye una gráfica de puntos a partir de los datos de la tabla de valores que has completado en el ejercicio 13 y, si es posible, construye la gráfica uniendo sus puntos.

18. Inventa cuatro tablas de valores, con seis cantidades diferentes, y representa las gráficas correspondientes. Haz que dos tablas correspondan a situaciones reales y las otras dos no.

19. En un estudio del Instituto Nacional de Estadística del año 2012, nos indican el porcentaje de hogares españoles que tienen acceso a Internet en el periodo 2007 a 2012, estos datos vienen recogidos en la siguiente tabla:

Años	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Viviendas con acceso a Internet (%)	45	51	54	59	64	68

Representa estos datos en una gráfica de puntos. ¿Podríamos unir estos puntos?

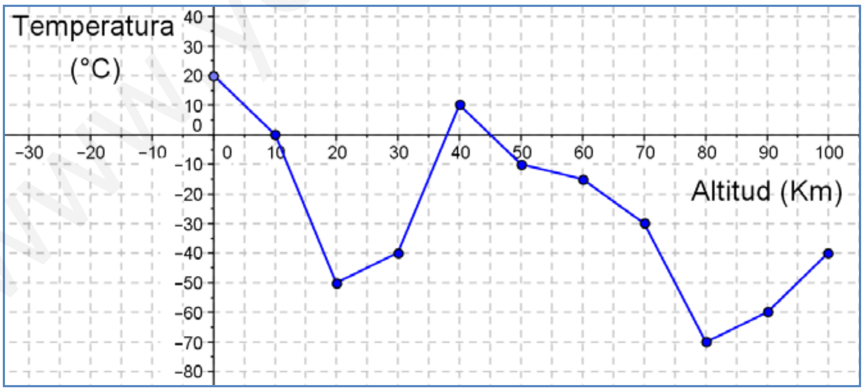
20. La gráfica siguiente muestra la temperatura que se ha medido, en la atmosfera, a distintas altitudes.

a. ¿A qué altitudes la temperatura es de 0 ºC?

b. ¿Cuál es la temperatura a los 30 km de altitud? ¿y a nivel del mar (0 km)?

c. ¿Cuál es la temperatura más alta que se ha medido? ¿a qué altitud?

d. ¿Cuál es la temperatura más baja que se ha medido? ¿a qué altitud?

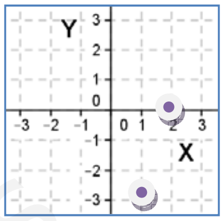


AUTOEVALUACIÓN de 1º de ESO

1) El punto de coordenadas A = (3, –1) está situado en el:

a) primer cuadrante b) segundo cuadrante c) tercer cuadrante d) cuarto cuadrante.

2) Las coordenadas de los puntos indicados son:



a) (2, 1), (1, –2) b) (2, 1), (–1, 2). c) (1, 2), (–2, 1) d) (–2, 1), (2, 2)

3) Indica qué afirmación es falsa:

e) El eje de abscisas es horizontal

f) El eje de ordenadas es vertical

g) El eje de abscisas es perpendicular al eje de ordenadas

h) El eje de abscisas es el eje Y

4) Los puntos de coordenadas A = (–3, 0), B = (–1, 0), C = (2, 0), D = (3, 0) están todos ellos en el:

a) eje de ordenadas b) primer cuadrante c) eje de abscisas d) segundo cuadrante

5) Los puntos de coordenadas A = (0, 0), B = (0, 1), C = (0, 2), D = (0, 3) están todos ellos en el:

a) eje de ordenadas b) primer cuadrante c) eje de abscisas d) segundo cuadrante

6) Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

Personas	1	4	8	
Kg de comida	3			27

a) 6, 12, 8 b) 12, 24, 9 c) 8, 16, 12 d) 16, 32, 7

7) La siguiente tabla de valores puede corresponder a:

X	3	9	15	27
Y	1	3	5	9

a) una proporcionalidad directa. b) una proporcionalidad inversa

c) la relación entre el lado de un cuadrado y su área. d) la relación entre el radio del círculo y su área

8) Indica en los casos siguientes aquel que NO es una función:

a) La temperatura de la sopa a lo largo del tiempo. b) Y = 2 X.

c) El área de un círculo como función del radio. d) El área de un cuadrado y su color

9) Indica qué afirmación es falsa:

a) El origen de coordenadas es la intersección entre el eje de abscisas y el de ordenadas

b) En una función a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente

c) En una función a cada valor de la variable dependiente le corresponde un único valor de la variable independiente.

PARA EL PROFESORADO

El concepto de función es uno de los conceptos básicos en Matemáticas y, al mismo tiempo, uno de los más difíciles de adquirir por los estudiantes de secundaria. Esto no es extraño si analizamos cómo ha evolucionado dicho concepto a lo largo de la historia.

En la historia de las Matemáticas comienza a plantearse el concepto de función hacia el siglo XIV y ha sido uno de los que ha presentado una mayor dificultad, siendo en el siglo XX uno de los ejes de la investigación matemática. Incluso para los matemáticos del siglo XVIII no estaba muy claro el concepto de función. Por ejemplo, en un artículo de *Jean Bernoulli* publicado en 1718 se encuentra esta primera definición: *"Una función de una variable es definida aquí como una cantidad compuesta de alguna manera por una variable y constantes"*. Los matemáticos estaban dispuestos a aceptar dos tipos de funciones, las que venían dadas por una fórmula o las que se trazaban arbitrariamente dibujando su gráfica. La idea abstracta de función como correspondencia tardó un tiempo en aparecer. Fue *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768 – 1830) en su obra *"La teoría analítica del calor"* el motor para la profundización del concepto de función. Recordemos que cuando Fourier expuso su desarrollo de una función en serie trigonométrica, empezó a discutirse sobre qué era una función, cuáles podían ajustarse a ese desarrollo, y este hecho fue un catalizador en la historia de las Matemáticas que, entre otras muchas cosas, llevó a formalizar este concepto. La noción moderna de función es muy reciente, podemos fecharla en la obra de *Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805-1859) de 1837, donde aparece la noción de función como correspondencia, independiente de una representación analítica o geométrica.

A lo largo de la historia, este concepto se ha ido desarrollando a partir del estudio de fenómenos del mundo que nos rodea y ha sido expresado en distintos lenguajes —verbal, gráfico, algebraico y numérico—. Por tanto, para poder conseguir una aproximación significativa al sentido de las funciones, es preciso estudiar este concepto desde distintos aspectos, utilizando diferentes lenguajes y trabajando en distintas situaciones.

Ya que las relaciones funcionales se encuentran con frecuencia en nuestro entorno, el estudio de funciones, por los estudiantes de 1º de E.S.O., debe comenzar con el tratamiento de aquellas situaciones que existen en su entorno, sin olvidar las relacionadas con otras áreas de conocimiento (las Ciencias de la Naturaleza, las Ciencias Sociales, etc.).

Desde el primer curso de la E.S.O. los estudiantes pueden ir aproximándose al concepto de función interpretando los significados de las distintas expresiones de las funciones. Estos procedimientos se han de trabajar a lo largo de toda la etapa, y se van adquiriendo a medida que aumenta la madurez cognitiva y el campo de experiencia del estudiante.

La dificultad de visualización de la representación gráfica de una función puede salvarse con la utilización de programas informáticos específicos como el Geogebra, o por aplicaciones elaboradas ya por algunos profesores y que están a disposición de todos, como las elaboradas dentro del Proyecto Gauss (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado) o en páginas personales de estos.

Bien utilizando un solo ordenador en el aula —con la PDi o mediante la proyección de la pantalla—, o bien con el uso de los ordenadores por los estudiantes en el aula de informática, estos pueden familiarizarse con la forma de las gráficas y la interpretación de sus puntos y es un apoyo inestimable para acercarse a la representación de funciones y al concepto de función.

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

Si quieres conocer la estatura o el peso de las personas que tienen entre 11 y 13 años en España, puedes recoger los datos de cada una de las personas de esas edades. Pero esto es muy laborioso. Lo que hace la Estadística es recoger una **muestra** que nos permita representar la totalidad de la población objeto de estudio.

La recogida de datos es muy antigua. El emperador Augusto mandó hacer un censo, (o recogida de datos) de todo su Imperio.

La Ciencia progresa deduciendo, mediante razonamientos lógicos correctos, e infiriendo, en que con unas observaciones experimentales, se induce algo más general.

Los juegos de azar, dados, cartas, lotería… hacen un buen uso de la Estadística y la Probabilidad.

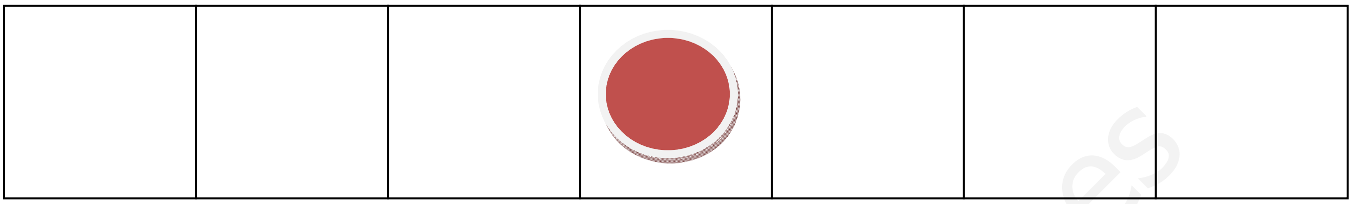
Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. EL AZAR Y LA PROBABILIDAD

1.1. Fenómenos o experimentos aleatorios

Un **fenómeno o experimento aleatorio** es aquel, que manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, el resultado no es siempre el mismo.

- ***Veamos un juego:*** Dibuja 3 casillas hacia la derecha, una casilla central y 3 casillas hacia la izquierda. Coloca una ficha en la casilla central. Tira una chincheta varias veces.



Si cae con la punta hacia arriba, avanza una casilla hacia la derecha, en caso contrario avanzas hacia la izquierda. Anota cuántas tiradas necesitas para llegar a una de las metas. Es un ***ejemplo*** de **fenómeno o experimento aleatorio** porque no se puede predecir el resultado.

- Sin embargo, calcular el coste de una mercancía, sabiendo el peso y el precio por kg, no es un experimento aleatorio. Tampoco lo es calcular el coste del recibo de la luz sabiendo el gasto.

Actividad resuelta

- Son experimentos aleatorios:

a) Lanzar una moneda y anotar si sale cara o cruz
b) Lanzar un dado
c) Si en una urna hay 5 bolas blancas y 3 rojas, sacamos una y anotamos el color.
d) Sacar una carta de una baraja
e) Abrir un libro y anotar la página por la que se ha abierto

- No son experimentos aleatorios

a) Si sales sin paraguas cuando llueve seguro que te mojas.
b) El precio de medio kilo de rosquillas si las rosquillas cuestan a 3 € el kilo.
c) Soltar un objeto y ver si cae

Actividades propuestas

1. Indica si es un fenómeno aleatorio:

a) La superficie de las comunidades autónomas españolas
b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada
c) El área de un cuadrado del que se conoce el lado
d) Tiramos dos dados y anotamos la suma de los valores obtenidos
e) Saber si el próximo año es bisiesto.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Frecuencia absoluta y relativa. Frecuencias acumuladas

Al realizar repetidas veces un experimento podemos anotar las veces en que se obtiene cada uno de los posibles resultados.

Ejemplo:

- Tiramos una moneda 100 veces y anotamos las veces en que nos ha salido cara y las veces en que nos ha salido cruz. Nos ha salido cara 56 veces, entonces decimos que la frecuencia absoluta de cara es 56.
- Al dividir la frecuencia absoluta por el número total de experimentos tenemos la frecuencia relativa, así la frecuencia relativa de cara es 56/100, o bien 0,56.

Posibles resultados	Número de veces
cara	56
cruz	44
Total	100

La **frecuencia absoluta** de un suceso es el número de veces que se ha obtenido ese suceso.

La **frecuencia relativa** de un suceso se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el número total de experimentos.

Posibles resultados	Frecuencias relativas
cara	0,56
cruz	0,44
Suma total	1

Si sumas las frecuencias relativas de todos los posibles resultados de un experimento, esa suma siempre es igual a 1.

Al conjunto de los posibles resultados y sus correspondientes frecuencias se le denomina **distribución de frecuencias.**

Actividades propuestas

2. Completa en la siguiente tabla las frecuencias relativas del experimento aleatorio tirar un dado:

Posibles resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
1	15	
2	18	
3	16	
4	17	
5	19	
6	15	
Suma total	100	1

3. Hemos tirado dos dados y anotado si la suma de sus caras superiores es menor, igual o mayor que 7. Escribe la tabla de frecuencias relativas de la tabla adjunta. Observa que la suma de las frecuencias relativas es 1.

Posibles resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
< 7	30	
7	38	
> 7	32	
Suma total	100	1

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Experimentos aleatorios. Sucesos

Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o **sucesos posibles**.

- Por ejemplo los posibles resultados al tirar una moneda son que salga *cara* o salga *cruz*.
- Los posibles resultados al tirar un dado es que nos salga 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

Al realizar el experimento siempre se obtendrá uno de los posibles resultados.

Al conjunto de resultados de un experimento aleatorio se le denomina **espacio muestral**.

A los elementos del espacio muestral se les llama **sucesos elementales**.

Un **suceso** es un subconjunto del espacio muestral.

Actividad resuelta

- El espacio muestral del experimento aleatorio:

a) Extraer una bola de una bolsa con 7 bolas blancas y 2 negras es {*blanca*, *negra*}

b) Sacar una carta de una baraja española y mirar el palo es {*oros*, *copas*, *bastos*, *espadas*}

c) Al sacar un papel de una bolsa donde se han puesto 5 papeles numerados del 1 al 5, es {1, 2, 3, 4, 5}

d) Tirar dos monedas es: {(*cara*, *cara*), (*cara*, *cruz*), (*cruz*, *cara*), (*cruz*, *cruz*)}

- Así, para el lanzamiento de un dado, aunque el espacio muestral habitual será {1, 2, 3, 4, 5, 6}, es posible que sólo sea de interés si el resultado obtenido es par o impar, en cuyo caso el espacio muestral sería {*par*, *impar*}. En el caso del lanzamiento consecutivo de dos monedas, el espacio muestral puede ser {{C, C}, {C, +}, {+, C}, {+, +}}, o bien: {*0 caras*, 1 *cara*, 2 *caras*}, si nos interesa únicamente el número de caras obtenidas.

- Algunos sucesos del experimento aleatorio tirar un dado son:

a) Sacar un número par {2, 4, 6}.

b) Sacar un número mayor que 3 {4. 5, 6}.

c) Sacar un número menor que 5 {1, 2, 3, 4}.

Actividades propuestas

4. Inventa cinco experimentos aleatorio y escribe el conjunto de posibles resultados

5. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar*"

6. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: "*Tirar una chincheta y anotar en que postura cae*"

7. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio de tirar dos monedas.

8. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.

9. En el juego de dominó, indica tres sucesos con fichas dobles.

10. Escribe tres sucesos aleatorios de sacar una carta de una baraja.

1.4. Probabilidad

Al realizar un experimento aleatorio no se puede predecir el resultado que se va a obtener. No obstante, habitualmente tenemos información sobre lo posible que es un determinado suceso. Así pues, el objetivo es cuantificar de alguna manera esta información, que se denomina la **probabilidad** del suceso.

Dados todos los sucesos posibles de un experimento aleatorio, asignaremos a cada suceso A, una cantidad que denotaremos por P[A] y que llamaremos la probabilidad del suceso A.

La probabilidad de que ocurra un cierto resultado al realizar el experimento, aunque ya se verá en otros cursos en detalle, se calcula como la frecuencia relativa de ese resultado repitiendo el experimento muchas veces.

Cuantas más veces repitas el experimento, más se aproximará la frecuencia relativa al valor de la probabilidad.

- ***Por ejemplo,*** si tiras una moneda al aire una sola vez y sale cara, parecerá que la probabilidad de sacar cara es 1, pero si repites más veces el experimento, la frecuencia relativa de sacar cara se irá acercando a 0,5 con el tiempo. Eso nos dice que la probabilidad de sacar cara es 0,5 o 1/2.

La probabilidad es un número entre 0 y 1. Es una medida de la *certeza* que tenemos que se verifique un suceso. Sirve para prevenir el futuro usando lo que se sabe sobre situaciones pasadas o presentes.

Pero la palabra "probable" es de uso común, por lo que siempre sabes si algo es "*muy probable*", "*bastante probable*", "*poco probable*" o "*muy improbable*".

- Si no has estudiado nada un examen es *bastante probable* que te suspendan, y si te lo sabes es *muy probable* que saques buena nota.
- Si una persona conduce habiendo bebido alcohol es *probable* que le pongan una multa.
- Es *poco probable* que al salir a la calle te caiga una cornisa encima.
- Es *seguro* que mañana amanecerá.
- Es *muy improbable* que mañana haya un terremoto en Madrid.

Para calcular probabilidades se usan dos técnicas, una **experimental**, analizando las frecuencias relativas de que ocurra el suceso, y la otra **por simetría**, cuando se sabe que los sucesos elementales son **equiprobables,** es decir, que **todos ellos tienen la misma probabilidad**, entonces **se divide el número de casos probables por el número de casos posibles.**

Actividad resuelta

- La probabilidad de que salga cara al tirar una moneda es 1/2, pues sólo hay dos casos posibles {*cara*, *cruz*} y suponemos que la moneda no está trucada.
- La probabilidad de que al cruzar la calle te pille un coche NO es 1/2, pues ya te habría pillado un montón de veces. Para calcular esa probabilidad se recogen datos de peatones atropellados.
- La probabilidad de sacar bola roja de una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas blancas es 7/10.
- La probabilidad de que un bebé sea niña es aproximadamente 0,5, pero al hacer el estudio con las frecuencias relativas se ha visto que es 0,49.

Actividades propuestas

11. Señala si son *poco probables* o *muy probables* los siguientes sucesos:

a) Cruzas la calle y te pilla un coche.

b) Hace una quiniela y le toca el premio máximo.

c) El lunes vas al colegio.

d) Le toca la lotería a Juan.

12. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea de oros.

13. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Si hacemos una representación gráfica de los datos podremos comprender su significado con mucha más facilidad que si, simplemente los dejamos en forma de tabla. Para ello, naturalmente, ya tendremos que haber recogido los datos y elaborado una tabla.

Vamos a estudiar cuatro tipos de representaciones, el diagrama de rectángulos, el diagrama de líneas, el pictograma y el diagrama de sectores, aunque hay algunas otras representaciones posibles.

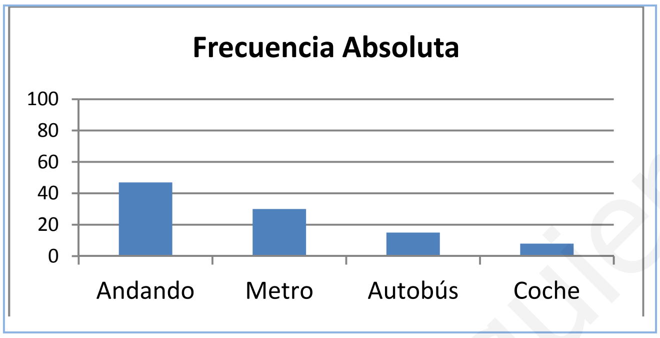
2.1. Diagrama de rectángulos o de barras

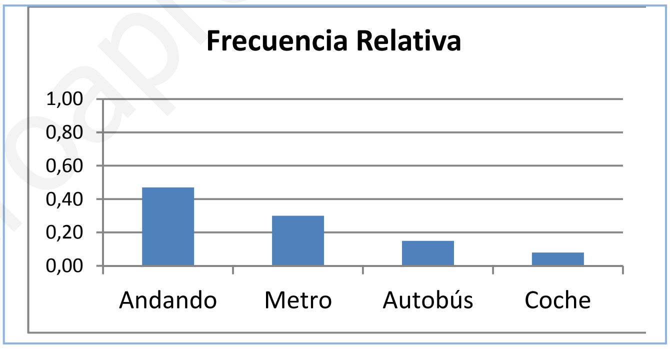
En un diagrama de rectángulos o de barras se indican en el eje horizontal todos los posibles resultados del experimento y en el eje vertical la frecuencia con la que dichos datos aparecen, por tanto podrá ser un diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas o de frecuencias relativas según la frecuencia utilizada.

Actividad resuelta

- Preguntamos a 100 estudiantes cuál es el medio de transporte que utilizan para ir a la escuela. Las respuestas aparecen en la tabla del margen. Dibujamos el diagrama de rectángulos.

Medio de transporte	Frecuencia Absoluta	Frecuencia relativa
Andando	47	0,47
Metro	30	0,3
Autobús	15	0,15
Coche	8	0,8





- Si queremos dibujar el diagrama de barras de frecuencias relativas, utilizamos la columna de frecuencias relativas para hacerlo, y se obtiene el diagrama denominado "*Frecuencia Relativa*". Si comparamos el diagrama de barras de frecuencias absolutas con el de relativas se observa que son iguales salvo en las unidades del eje de ordenadas, que en Frecuencias Absolutas llegan al total, 100, y en Frecuencias Relativas siempre llegan hasta 1.

Actividades propuestas

Posibles resultados	Número de veces
cara	56
cruz	44

14. Dibuja el diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas de la tabla adjunta. Representa también el diagrama de rectángulos de frecuencias relativas.

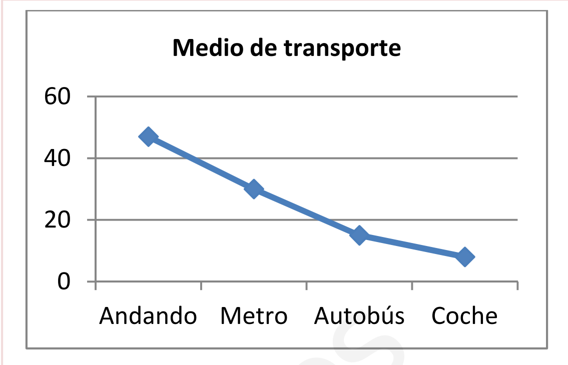
15. Dibuja el diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas de la tabla adjunta. Representa también el diagrama de rectángulos de frecuencias relativas.

Posibles resultados	Frecuencias absolutas
1	15
2	18
3	16
4	17
5	19
6	15

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.2. Diagrama de líneas

Igual que en el diagrama de rectángulos, se indica en el eje horizontal todos los posibles resultados del experimento y en el eje vertical las frecuencias. En lugar de dibujar barras, ahora simplemente se unen los puntos obtenidos con líneas.



Actividad resuelta

- El diagrama de líneas absolutas de la actividad resuelta anterior es el del margen:

Actividades propuestas

16. Dibuja los diagramas de líneas de frecuencias absolutas y frecuencias relativas del experimento tirar un dado de la actividad propuesta 15.

17. Dibuja los diagramas de líneas de frecuencias absolutas y relativas del experimento tirar una moneda de la actividad 14.

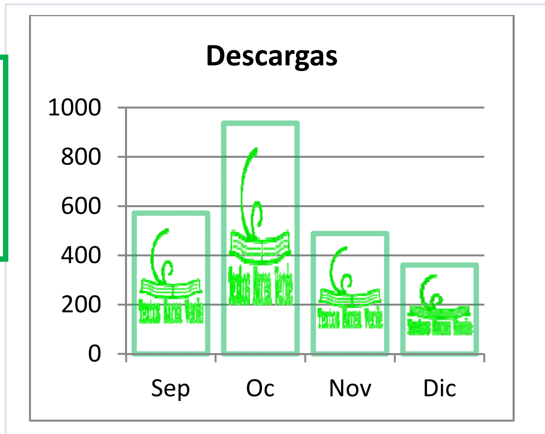
2.3. Pictograma

En los pictogramas se representan las frecuencias mediante una gráfica de barras rellenas de dibujos alusivos.

Actividad resuelta

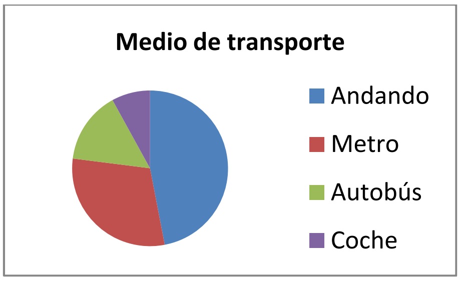
- Se han obtenido datos sobre el número de descargas que se han hecho de los Textos Marea Verde y se indican en la tabla. Se representan con un pictograma, sustituyendo el rectángulo por un dibujo alusivo.

Marea verde	Descargas
Septiembre	572
Octubre	937
Noviembre	489
Diciembre	361



2.4. Diagrama de sectores

En los diagramas de sectores las frecuencias se representan en un círculo que se divide en sectores de amplitudes proporcionales a las frecuencias.



Actividad resuelta

- El diagrama de sectores de la tabla sobre el medio de transporte utilizado es:

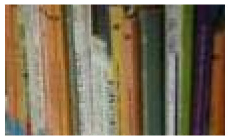
Puedes observa que con una simple mirada sabes que algo menos de la mitad de los estudiantes van andando y algo más de la cuarta parte van en metro.

Pero realizarlo a mano requiere un trabajo previo pues debes calcular los ángulos mediante una regla de tres: multiplicas por los 360º que mide un ángulo completo y divides por el número total que en este caso es 100.

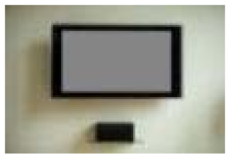
Medio de transporte	Frecuencia	Ángulo
Andando	47	47 · 360º / 100 = 47 · 3,6 = 169,2
Metro	30	30 · 360º / 100 = 108
Autobús	15	15 · 360º / 100 = 54
Coche	8	8 · 360º / 100 = 28,8
TOTAL	100	360º

Actividades propuestas

18. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de libros que leen al mes. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.



19. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de horas diarias que ven la televisión. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.



20. Haz un diagrama de sectores relativo al número de descargas de Textos Marea Verde del ejemplo visto en *Pictograma*.

21. Dibuja un diagrama de sectores de la actividad propuesta 14.

22. Dibuja un diagrama de sectores de la actividad propuesta 15.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

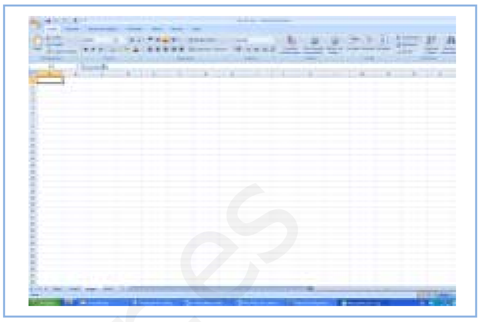
3. EL ORDENADOR Y LA ESTADÍSTICA

El ordenador puede ayudar mucho en los cálculos estadísticos. Hay muchos programas para ello. En particular son fáciles de usar las hojas de cálculo. Vamos a resolver un problema utilizando una de ellas.

Actividad resuelta

- Se conocen las cantidades de residuos sólidos recogidos en m^3/semana durante 12 semanas de una urbanización:

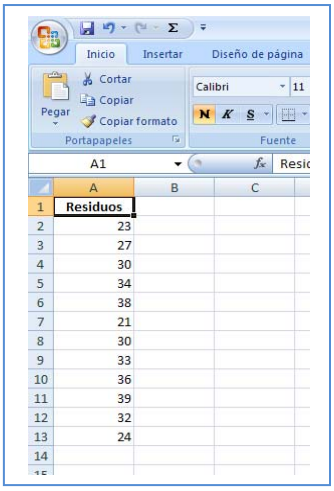
  23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24.



Queremos utilizar el ordenador para dibuja las representaciones gráficas de estos datos.

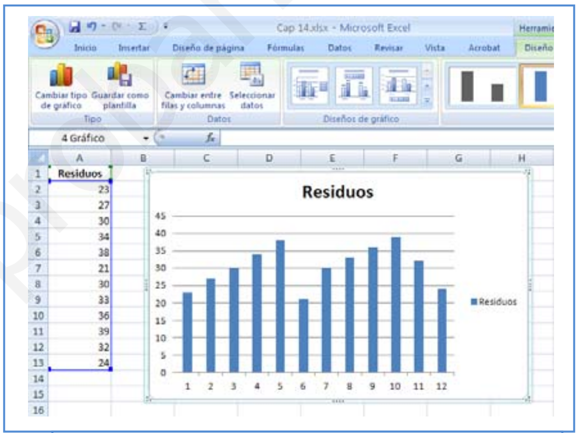
Abrimos una hoja de Excel.

Para que tenga sentido deberíamos agrupar los datos en una tabla. En la casilla A1 escribimos "Residuos", y en las casillas A2, ..., A13 copiamos los datos.



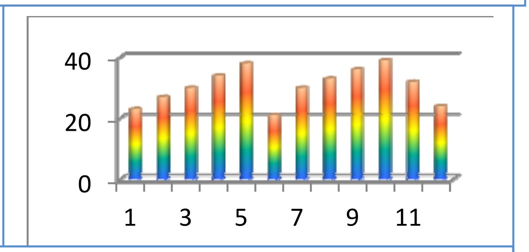
Para dibujar las gráficas se utiliza en Menú: Insertar.

En el menú *Insertar*, en *Gráficos*, desarrolla *Columnas*, elegimos Columna en 2 D, y obtenemos el diagrama de **barras** de la figura.

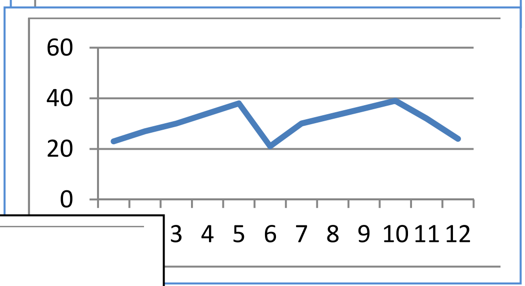


Podíamos haber elegido "Columnas en 3D", "Cilíndrico", "Cónico", "Pirámide", o modificar el color, añadir o quitar rótulos...

Vemos un diagrama de barras cilíndrico en varios colores.

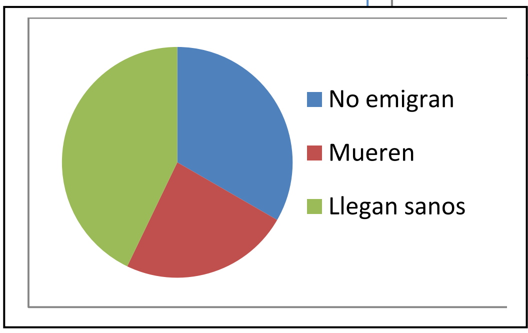


Ahora queremos representar un diagrama de **líneas** con los mismos datos. Volvemos al menú: Insertar, seleccionamos "Línea" y de nuevo tenemos varias opciones. Seleccionamos en nuestra hoja los datos, desde A2 hasta A13, y marcamos la primara línea 2D, y obtenemos:



Para hacer un diagrama de **sectores** hemos tomado datos sobre emigrantes africanos. Seleccionamos los datos, y en el menú Insertar simplemente elegimos "Circular" gráfico 2D, y ya obtenemos un gráfico de sectores.

	Datos %
No emigran	35
Mueren	25
Llegan sanos	45



CURIOSIDADES. REVISTA

Criptografía

Imagina que quieres descifrar un mensaje secreto y sospechas que ha sido cifrado cambiando las letras del alfabeto entre sí. ¿Qué puedes hacer para descifrarlo?

Si estudias, o buscas en Internet, las frecuencias relativas, y tienes una tabla con las frecuencias de cada letra pronto sabrás cual de las letras encriptadas corresponde a, por ejemplo, la letra A. Experimenta con esta idea.

Estadística

La palabra "**Estadística**" comenzó a usarse a mediados del siglos XVIII, y el nombre viene de su interés para tratar los asuntos de Estado. Se constituyó poco a poco en Ciencia independiente a principios del siglo XX.

La acepción vulgar del término Estadística hace referencia a una determinada información numérica, es decir, Estadística como método de descripción cuantitativa que utiliza los números como soporte objetivo.

Dados

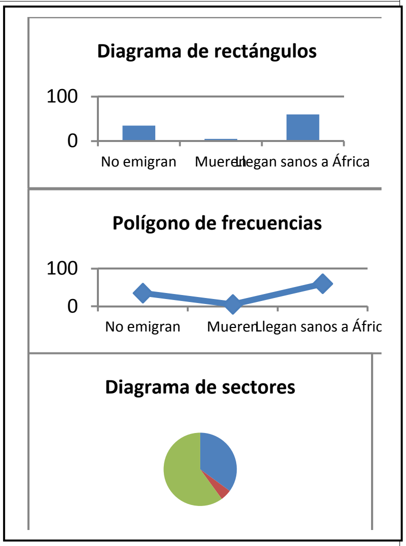
Se han encontrado dados en tumbas egipcias anteriores al año 2000 a. C. El juego de dados ha sido muy popular en muchos países en el mundo antiguo y la Edad Media.

La ruleta

William Jaggers llegó a Montecarlo con unos pocos francos en el bolsillo y, durante un mes anotó los números que salían en cada ruleta, y en cuatro días ganó dos millones cuatrocientos mil francos. Jaggers consiguió quebrar a la banca en Montecarlo analizando las frecuencias relativas de cada número de la ruleta y observando que se había desgastado algo del mecanismo de una de ellas, con lo que todos los valores no tenían igual probabilidad. Apostó a los números más probables y ganó.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Fenómeno o experimento aleatorio	Es aquel en el que no se puede predecir el resultado. Los datos estadísticos son los valores que se obtienen en un experimento.	Tirar una moneda y saber si va a salir cara o cruz
Frecuencia absoluta	Número de veces que se repite un dato estadístico	Si al tirar un dado hemos 2 veces el 3, 2 es la frecuencia absoluta de 3.
Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta dividido por el número de experimentos	Si se realiza un experimento 500 veces y la frecuencia absoluta de un suceso es 107, la frecuencia relativa es 107/500.
Suceso posible.	Posible resultado de un experimento aleatorio	En el experimento aleatorio tirar un dado el conjunto de posibles resultados, o el conjunto de sucesos elementales o espacio muestral es {1, 2, 3, 4, 5, 6}, por tanto, un posible resultado es, por ejemplo, 3.
Espacio muestral	Conjunto de resultados posibles	
Sucesos elementales	Elementos del espacio muestral	
Diagrama de rectángulos	Los datos se representan mediante rectángulos de igual base y de altura proporcional a la frecuencia. Se indica en el eje horizontal la variable y en el vertical las frecuencias.	
Diagrama de líneas	De unen los puntos superiores de un una diagrama de rectángulos	
Pictograma	Se sustituye los rectángulos por un dibujo representativo	
Diagrama de sectores	En un círculo se dibujan sectores de ángulos proporcionales a las frecuencias	

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS de 1º de ESO

El azar y la probabilidad

1. Miriam y Luis han escrito en tarjetas los 4 nombres que más les gustan para la hija que van a tener: Adela, Miriam, Amelia y Elena. Mezclan bien las tarjetas y extraen una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la niña se llame Amelia?

2. Se lanza una moneda 750 veces y se obtiene cara 360 veces. Expresa en una tabla las frecuencias absolutas, relativas y calcula también las frecuencias acumuladas absolutas y acumuladas relativas de caras y cruces en este experimento.

3. Se lanzar un dado 500 veces y se obtienen los siguientes resultados:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Número de veces	70	81	92	85		81

a) ¿Cuántas veces ha salido el 5?

b) Escribe en tu cuaderno una tabla con las frecuencias absolutas

c) Escribe en tu cuaderno una tabla con las frecuencias relativas

4. En una clase se ha medido el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) ¿Qué tamaño ha sido el valor mínimo? ¿Y el máximo?

b) Haz una tabla de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas.

5. Calcula la frecuencia absoluta de los datos de una encuesta en la que se ha elegido entre ver la televisión, t, o leer un libro, l:

t, l, t, t, t, l, t, t, l, t, l, t, l, t, t, t, l, l, t, l, t, l, t, l, t.

Gráficos estadísticos

6. Se ha preguntado en un pueblo de la provincia de Madrid el número de hermanos que tenían y se ha obtenido la siguiente tabla de frecuencias absolutas sobre el número de hijos de cada familia:

Número de hijos	1	2	3	4	5	6	7	8 o más
Número de familias	46	249	205	106	46	21	15	6

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias relativas.

b) Haz un diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas y otro de frecuencias relativas.

c) Haz un diagrama de líneas de frecuencias absolutas y otro de frecuencias relativas.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

7. Haz una encuesta con tus compañeros y compañeras de curso preguntando el número de hermanos y confeccionando una tabla sobre el número de hijos y el número de familias.

a) Haz una tabla de frecuencias relativas

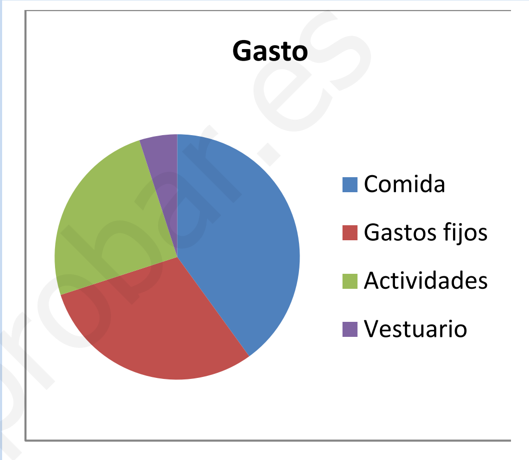
b) Haz un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas

c) Compara la tabla de frecuencias relativas y el diagrama de rectángulos de frecuencias relativas que obtengas con el obtenido en el ejercicio anterior.

8. Un batido de frutas contiene 25 % de naranja, 15 % de plátano; 50 % de manzana y, el resto de leche. Representa en un diagrama de sectores la composición del batido.

9. En un campamento de verano se han gastado diez mil euros. El gráfico muestra la distribución del gasto:

1. Comida: 40 %
2. Limpieza y mantenimiento: 30 %
3. Agua, gas, electricidad y teléfono: 25 %
4. Vestuario: ....



a) ¿Qué porcentaje se gastó en vestuario?

b) ¿Cuántos euros se gastaron en comida?

c) ¿Cuánto mide el ángulo del sector correspondiente a actividades?

10. Busca en revistas o periódicos dos gráficas estadísticas, recórtalas y pégalas en tu cuaderno. En muchas ocasiones estas gráficas tienen errores. Obsérvalas detenidamente y comenta las siguientes cuestiones:

a) ¿Está clara la variable a la que se refiere? ¿Y las frecuencias?

b) ¿Son correctas las unidades? ¿Pueden mejorarse?

c) Comenta las gráficas.

11. Se hace un estudio sobre el número de video juegos del alumnado de una clase. El resultado se representa en la tabla siguiente:

Número de video juegos	0	1	2	3	4	5
Número de estudiantes	3	4	3	5	9	7

a) Copia la tabla en tu cuaderno y haz una tabla de frecuencias relativas y de fecuencias relativas acumuladas.

b) ¿Qué porcentaje tienen menos de 3 video juegos?

c) Representa los datos en un diagrama de sectores y en un diagrama de líneas.

Ordenador

12. Introduce los datos de la encuesta sobre el número de hijos en el ordenador y vuelve a calcular la media.

13. Organiza los datos en una tabla calculando las frecuencias absolutas de 0, 1, 2, 3 y 4. Introduce esta tabla en el ordenador y haz una representación de barras, un diagrama de líneas y un diagrama de sectores.

14. Utiliza el ordenador para comprobar los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores.

15. Realiza una encuesta en tu clase y lleva los resultados a un ordenador para hacer un informe. La encuesta podría ser, por ejemplo, si le gusta o no una determinada serie de televisión, o un programa; o el número de días de la sema que hacen algún deporte, el tipo de música que les gusta; o… Piensa sobre qué podrías preguntar.

Problemas

16. Si escribimos la palabra PROBABILIDAD en una tira de papel, recortamos las letras de modo que quede una en cada papel y ponemos todos los papeles en una bolsa, ¿cuál es la probabilidad de obtener una B al extraer uno de los papeles?, ¿y la de extraer una A?, ¿Y la de una L?

17. Tira una chincheta 15 veces y anota las veces que cae con la punta hacia arriba y las que no. Construye luego dos tablas: una de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas. Representa el resultado en un diagrama de frecuencias y en un diagrama de líneas

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN de 1º de ESO

1. Indica la respuesta correcta: Los fenómenos aleatorios son

a) Los que suceden raras veces.

b) Los que suceden una vez de cada 100.

c) Aquellos en los que no se puede predecir el resultado.

d) Los que son equiprobables.

2. Indica cuál de los siguientes sucesos tiene una probabilidad 1/2. Observa que en todos los casos únicamente puede pasar ese suceso y lo contrario.

a) Al cruzar la calle nos atropelle un coche

b) El incendio ha sido intencionado

c) Sacar cara al tirar una moneda

d) Se hunda la casa mañana

3. Se extrae una carta de una baraja española. La probabilidad de que sea una copa es:

a) 1/40 b) 0,1 c) 4/40 d) 10/40

4. Indica cual es la frase que falta en la siguiente definición:

En un … … … … … … se sustituyen los rectángulos por un dibujo representativo

a) Diagrama de líneas b) Diagrama de rectángulos c) Pictograma d) Diagrama de sectores

5. Si en una tabla de frecuencias a un valor le corresponde una frecuencia relativa de 0,1, al dibujar un diagrama de sectores el ángulo correspondiente es de:

a) 36 º b) 30 º c) 3,6 º d) 72 º

6. En un diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas, la suma de sus alturas es igual a:

a) 100 b) 1 c) Total de datos d) Suma de sus bases

7. La media de los siguientes datos 3, 4, 6, 7, 5, 8, es:

a) 6 b) 7 c) 4,8 d) 5,5

8. Una determinada frecuencia absoluta es 4, y la suma total es 20, el porcentaje vale:

a) 20 b) 10 c) 25 d) 50

9. La media de 6 números es 4. Se añaden dos números más pero la media sigue siendo 4. ¿Cuánto sumas estos dos números?

a) 10 b) 8 c) 12 d) 4

10. De una baraja española se extrae al azar una carta. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de oros?

a) 3/4 b) 1/4 c) 2/3 d) 1/40

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1º DE ESO

ÍNDICE