1

EDUCACIÓN SECUNDARIA

Matemáticas

J. Colera, I. Gaztelu

ADAPTACIÓN CURRICULAR

Esta serie de **Matemáticas** responde a un proyecto pedagógico creado y desarrollado por Anaya Educación para la ESO. En su elaboración han participado:

Autores: José Colera e Ignacio Gaztelu

Coordinación editorial: Mercedes García-Prieto

Edición: Carlos Vallejo

Diseño de cubiertas e interiores: Miguel Ángel Pacheco y Javier Serrano

Tratamiento infográfico del diseño: Javier Cuéllar, Patricia Gómez y Teresa Miguel

Equipo técnico: Aurora Martín e Isabel Pérez

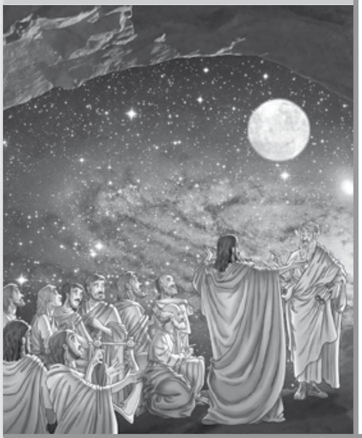
Corrección: Sergio Borbolla

Ilustraciones: Jesús Aguado y Tatio Viana

Edición gráfica: Nuria González y Mar Merino

Fotografías: Age Fotostock; Archivo Anaya: Candel, C.; Cosano, P.; Leiva, Á. de; López-Archilla, A.; Martin, J.; Martín, J.A.; Padura, S.; Ramón Ortega, P. – Fototeca de España; Rivera Jove. V.; 6 x 6 Producción Fotográfica; Valls, R.; 123 RF ; Cordon Press/Corbis; Getty Images; NASA; Prisma.

Índice



1 Los números naturales

Todas las civilizaciones han tenido un sistema de numeración. Estos han pasado de unos pueblos a otros y han evolucionado a lo largo del tiempo.

Desde la prehistoria hasta nuestros días, egipcios, babilonios, griegos, romanos, chinos, indios, árabes, mayas… han manejado sistemas muy diversos, con similitudes y diferencias.

Los sistemas de numeración sirven para escribir números y, así, recordarlos y transmitirlos. Pero deben servir, también, para operar con ellos. Piensa en el sistema de numeración romano (que ya conoces) e imagina cómo se las apañarían para efectuar sumas. Por ejemplo MCCCXLVI + DCCCXXXIV. Seguramente los agruparían en unidades, decenas, centenas…

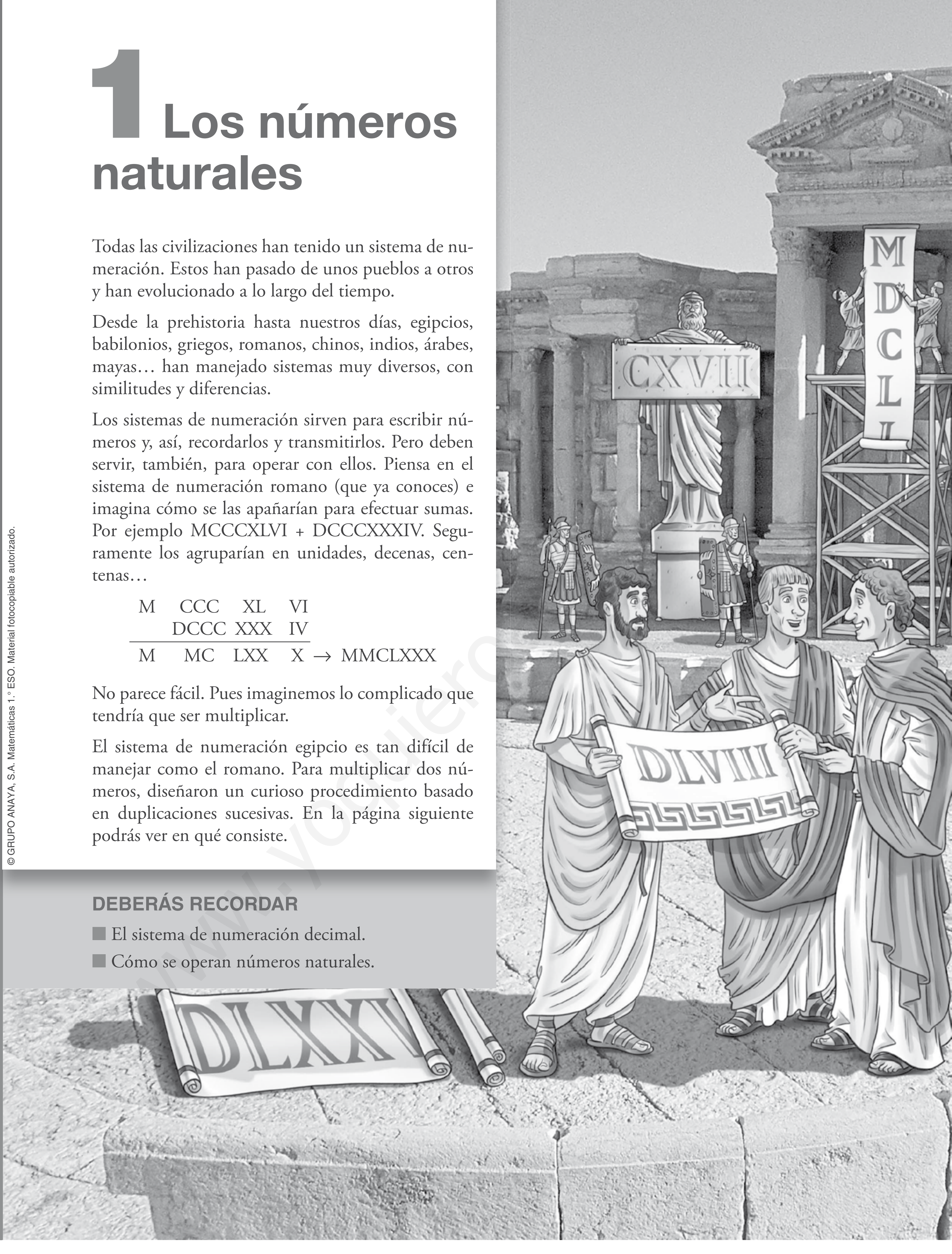
$$\begin{array}{cccc} \text{M} & \text{CCC} & \text{XL} & \text{VI} \\ & \text{DCCC} & \text{XXX} & \text{IV} \\ \hline \text{M} & \text{MC} & \text{LXX} & \text{X} \end{array} \rightarrow \text{MMCLXXX}$$

No parece fácil. Pues imaginemos lo complicado que tendría que ser multiplicar.

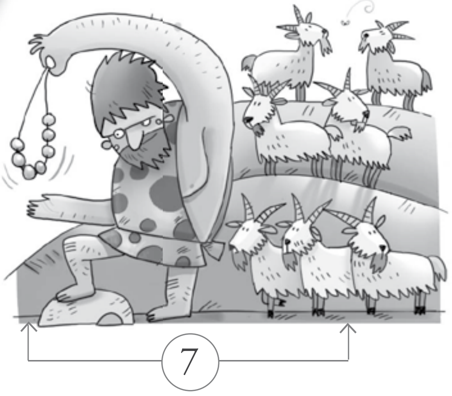
El sistema de numeración egipcio es tan difícil de manejar como el romano. Para multiplicar dos números, diseñaron un curioso procedimiento basado en duplicaciones sucesivas. En la página siguiente podrás ver en qué consiste.

DEBERÁS RECORDAR

- El sistema de numeración decimal.
- Cómo se operan números naturales.



1 Origen y evolución de los números



Los números surgen de la necesidad de contar.

Podemos imaginar al hombre primitivo haciendo muescas en su cayado o ensartando semillas en un collar para llevar la cuenta de las cabras de su rebaño.

Cuando la sociedad evoluciona (intercambios, comercio…) se hace necesario expresar números más grandes. Para eso hubo que inventar símbolos. Por ejemplo:

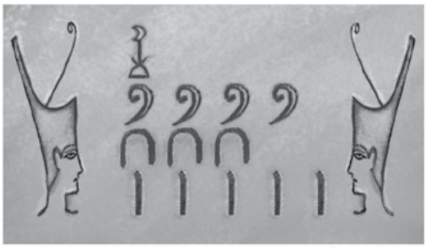
 → 5  → 20 (los 20 dedos de una persona)

Los símbolos utilizados por una cultura y sus normas de uso forman un **sistema de numeración.**

▼ **EJEMPLO**

Observa cómo se escribiría con los símbolos anteriores el número 47:

El sistema de numeración egipcio: un sistema aditivo



1 435

Los egipcios usaban estos símbolos:

UNO

DIEZ

CIEN

MIL

Se trata de un **sistema aditivo,** porque, para escribir un número, se van añadiendo (sumando) los símbolos necesarios hasta completar la cantidad deseada.

El sistema de numeración romano

Los romanos, como ya sabes, utilizaban algunas letras a las que daban valores numéricos:

I	V	X	L	C	D	M
UNO	CINCO	DIEZ	CINCUENTA	CIEN	QUINIENTOS	MIL

Estos símbolos se utilizaban también de forma aditiva, excepto para escribir 4, 9, 40, 90…; en estos casos se resta el signo menor colocado a la izquierda.

Por ejemplo:

$$\underbrace{\text{XIV}}_{14} \qquad \underbrace{\text{XC}}_{90} \qquad \underbrace{\text{CX}}_{110} \qquad \underbrace{\text{MCCLXXX}}_{1\,280}$$

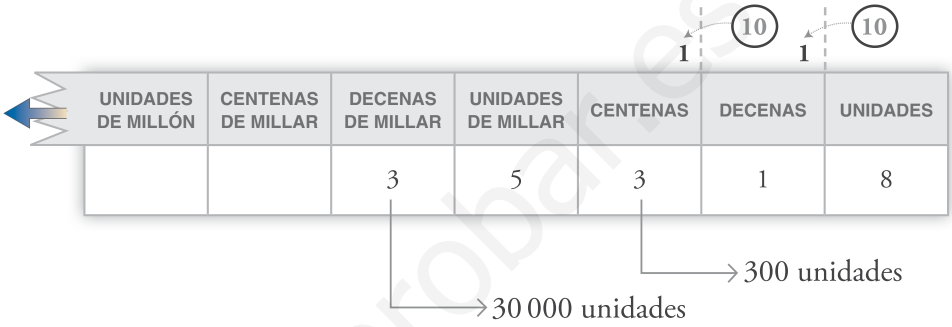
El sistema de numeración decimal: un sistema posicional

Nosotros usamos el sistema de numeración decimal, que nació en la India en el siglo VII y llegó a Europa por medio de los árabes.

Como sabes, utiliza solo diez símbolos o cifras:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cada cifra puede ocupar distintas posiciones, que son los diferentes órdenes o categorías de unidades.



UNIDADES DE MILLÓN	CENTENAS DE MILLAR	DECENAS DE MILLAR	UNIDADES DE MILLAR	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES
		3	5	3	1	8

DM	UM	C	D	U
3	0	0	0	0
	5	0	0	0
		3	0	0
			1	0
				8
3	5	3	1	8

En este sistema, diez unidades de un orden cualquiera hacen una unidad del orden inmediato superior. Así, el valor de una cifra depende del lugar que ocupa. Por eso decimos que es un **sistema posicional.**

Actividades

1 Escribe los números 14, 25, 28 y 52 en un sistema de numeración aditivo que utiliza estos símbolos:

 = 1  = 5  = 20

2 ¿Qué números representan estos grabados egipcios?:

3 Escribe en números romanos las siguientes cantidades:

a) 42 b) 159 c) 2 185

4 ¿Qué número se ha escrito en cada recuadro?:

a) XLIX b) CCLX c) MCCCVI

5 Observa y contesta:

$\overline{M}$	CM	DM	UM	C	D	U
			4	0		
			3	0	0	
2	0	0	0			
	5	0	0			

a) ¿Cuántos millares hay en 40 centenas?

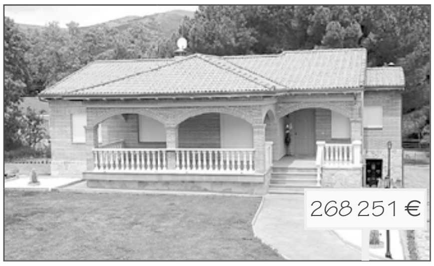
b) ¿Cuántas decenas son tres unidades de millar?

c) ¿Cuántos millares hay en dos millones?

d) ¿Cuántas unidades de millar forman medio millón?

2 Aproximación de números naturales por redondeo

Cuando un número tiene muchas cifras, es difícil de recordar e incómodo para operar. Por eso lo solemos sustituir por otro más manejable de valor aproximado, terminado en ceros.



▼ **EJEMPLOS**

268 251 → 270 000

6 035 192 → 6 000 000

La forma más frecuente y práctica de realizar aproximaciones es el redondeo.

Para **redondear** un número a un determinado orden de unidades:

- Se sustituyen por ceros todas las cifras a la derecha de dicho orden.
- Si la primera cifra sustituida es mayor o igual que cinco, se suma una unidad a la cifra anterior.

▼ **EJEMPLOS**

Aproximaciones del número 293 518:

- A las centenas de millar ⟶ $\overset{+1}{2}\,\vdots\,\underline{93\,518} \rightarrow 300\,000$
- A las decenas de millar ⟶ $29\,\vdots\,\underline{3\,518} \rightarrow 290\,000$
- A los millares ⟶ $29\overset{+1}{3}\,\vdots\,\underline{518} \rightarrow 294\,000$

Actividades

1 Redondea a las decenas los siguientes números:

a) 96 b) 299
c) 458 d) 553
e) 3 087 f) 4 906
g) 6 837 h) 9 060

2 Redondea a las centenas estas cantidades:

a) 3 502 b) 1 696
c) 2 724 d) 3 310
e) 6 193 f) 5 924
g) 6 508 h) 9 538

3 Redondea a los millares estos números:

a) 24 963 b) 7 280
c) 15 800 d) 59 300
e) 40 274 f) 55 555
g) 39 785 h) 99 399

4 Redondea a los millones las cantidades siguientes:

a) 4 356 000 b) 36 905 000
c) 1 584 390 d) 15 326 999
e) 74 825 048 f) 13 457 000
g) 89 245 321 h) 55 571 000

3 Operaciones con números naturales

Aunque ya sabes operar con números naturales, conviene que hagamos un rápido repaso de algunos conceptos y propiedades.

La suma

Recuerda que **sumar** es unir, juntar, añadir.

Por ejemplo, el equipo de ciclista que ves al margen cuesta, en total:

$$583 + 162 + 45 + 38 = 828 \text{ euros}$$

La resta

Recuerda que **restar** es quitar, suprimir, hallar lo que falta o lo que sobra; es decir, calcular la diferencia.

Por ejemplo, si disponemos de 693 €, para poder comprar el equipo de ciclista todavía nos faltan:

$$828 - 693 = 135 \text{ euros}$$

Uso del paréntesis

Observa dos expresiones formadas por los mismos números y las mismas operaciones, pero con resultados diferentes:

$$9 - 1 + 3 \qquad 9 - (1 + 3)$$

$$8 + 3 \qquad 9 - 4$$

$$11 \qquad 5$$

Como ves, en las expresiones con operaciones combinadas, los paréntesis empaquetan resultados parciales, modificando el orden en que han de hacerse las operaciones.

Ejemplos

Propiedad conmutativa

$$8 + 6 = 6 + 8$$

$$14 \qquad 14$$

Propiedad asociativa

$$(3 + 2) + 6 = 3 + (2 + 6)$$

$$5 + 6 \qquad 3 + 8$$

$$11 \qquad 11$$

Algunas propiedades de la suma

- **Propiedad conmutativa:** La suma no varía al cambiar el orden de los sumandos.

$$a + b = b + a$$

- **Propiedad asociativa:** El resultado de la suma es independiente de la forma en que se agrupen los sumandos.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Actividades

1 Opera mentalmente.

a) 20 + 6
b) 120 + 6
c) 68 + 10
d) 168 + 10
e) 64 + 54
f) 164 + 54
g) 73 + 71
h) 137 + 71
i) 37 + 20
j) 237 + 20
k) 61 + 16
l) 261 + 16
m) 48 + 7
n) 348 + 7
ñ) 98 + 29
o) 298 + 24

2 Calcula mentalmente.

a) 27 – 5
b) 27 + 10
c) 15 – 2
d) 15 – 10
e) 57 – 53
f) 57 – 53 – 3
g) 66 – 56
h) 66 – 56 – 5
i) 34 – 25
j) 34 – 25 – 5
k) 26 – 12
l) 26 – 12 – 7
m) 54 – 31
n) 54 – 31 – 10
ñ) 71 – 38
o) 71 – 38 – 10

3 Calcula.

a) 15 + 8 + 10
b) 15 + 8 + 20
c) 13 – 11 + 7
d) 13 – 11 + 17
e) 59 + 21 + 30
f) 59 + 21 + 40
g) 48 + 12 – 25
h) 48 + 12 – 35
i) 68 – 24 – 12
j) 68 – 24 – 22
k) 150 – 45 – 15
l) 150 – 45 – 5
m) 240 + 60 – 70
n) 240 + 60 – 60
ñ) 315 – 30 – 85
o) 315 – 30 – 75

4 Calcula con lápiz y papel.

a) 254 + 78 + 136
b) 1 480 + 237 + 48
c) 340 + 255 – 429
d) 1 526 – 831 + 63
e) 782 – 346 – 274
f) 1 350 – 1 107 – 58

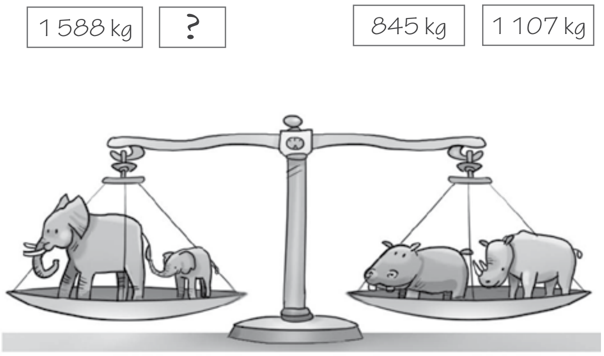
5 Opera y compara los resultados en cada caso:

a) 13 – 9 + 3
13 – (9 + 3)
b) 13 + 3 – 9
(13 + 3) – 9
c) 15 – 8 + 4
15 – (8 + 4)
d) 15 + 4 – 8
(15 + 4) – 8
e) 18 – 16 + 2
18 – (16 + 2)
f) 18 + 2 – 16
(18 + 2) – 16
g) 11 – 5 – 3
11 – (5 – 3)
h) 11 – 3 – 5
(11 – 3) – 5
i) 23 – 15 + 6
23 – (15 + 6)
j) 23 + 6 – 15
(23 + 6) – 15
k) 35 – 20 – 5
35 – (20 – 5)
l) 35 – 5 – 20
(35 – 5) – 20

6 Jorge compra una camisa de 54 € y unos pantalones de 79 €. En la camisa le rebajan 6 €, y en los pantalones, 15 €.

¿Cuánto gasta?

7 ¿Cuánto pesa el elefante pequeño?



8 Teresa gana 1 670 € al mes. Paga una letra de 384 € y, además, tiene unos gastos de 950 €.

¿Cuánto ahorra cada mes?

9 Para comprar un sofá de 1 458 € y un sillón de 324 €, la familia Antúnez entrega 750 € en efectivo y deja el resto aplazado.

¿A cuánto asciende la deuda contraída?

La multiplicación

Recuerda que **multiplicar** es una forma abreviada de realizar una suma repetida de sumandos iguales.

Por ejemplo, si una entrada para el circo cuesta 38 €, cinco entradas cuestan:

$$38 + 38 + 38 + 38 + 38 = 38 \cdot 5 = 190 \text{ €}$$

Propiedades de la multiplicación

- **Propiedad conmutativa:** El producto no varía al cambiar el orden de los factores.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- **Propiedad asociativa:** El resultado de una multiplicación es independiente de la forma en que se agrupen los factores.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Cálculo mental

22×45

$11 \times 2 \times 9 \times 5$

99×10

990

La propiedad asociativa nos permite reagrupar los términos, y la conmutativa, cambiarlos de orden.

▼ **EJEMPLOS**

Propiedad conmutativa:

$15 \cdot 4 = 4 \cdot 15$

$60 \qquad 60$

Propiedad asociativa:

$(3 \cdot 5) \cdot 4 = 3 \cdot (5 \cdot 4)$

$15 \cdot 4 \qquad 3 \cdot 20$

$60 \qquad 60$

- **Propiedad distributiva:** El producto de un número por una suma (o resta) es igual a la suma (o resta) de los productos del número por cada sumando.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Problema resuelto

Un fontanero trabaja cuatro horas por la mañana y tres por la tarde. Si cobra 15 euros la hora, ¿cuánto gana en el día?

Podemos resolver el problema de dos formas:

MAÑANA — TARDE

$15 \cdot (4 + 3)$

$15 \cdot 7$

105 €

MAÑANA — TARDE

$15 \cdot 4 + 15 \cdot 3$

$60 + 45$

105 €

Como ves, ambas expresiones coinciden, confirmando la propiedad distributiva.

$$15 \cdot (4 + 3) = 15 \cdot 4 + 15 \cdot 3$$

Actividades

10 Expresa los productos siguientes como sumas de sumandos repetidos:

a) $4 \cdot 6$ b) $10 \cdot 4$

c) $32 \cdot 3$ d) $28 \cdot 1$

e) $150 \cdot 2$ f) $1\,000 \cdot 3$

11 Opera mentalmente.

a) $8 \cdot 7$ b) $8 \cdot 7 \cdot 10$

c) $36 \cdot 3$ d) $36 \cdot 3 \cdot 10$

e) $70 \cdot 7$ f) $70 \cdot 7 \cdot 10$

g) $34 \cdot 4$ h) $34 \cdot 4 \cdot 10$

i) $60 \cdot 2$ j) $60 \cdot 2 \cdot 10$

k) $16 \cdot 5$ l) $16 \cdot 5 \cdot 10$

m) $15 \cdot 3$ n) $15 \cdot 3 \cdot 10$

ñ) $87 \cdot 8$ o) $87 \cdot 8 \cdot 10$

12 Copia y completa estas multiplicaciones:

$$\begin{array}{cccc} & & \square & 5 \\ & \times & 2 & \square \\ \hline & \square & \square & \square \\ & 9 & 0 & \\ \hline 1 & 2 & 6 & 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc} & 1 & \square & 8 \\ & \times & \square & 2 \\ \hline & \square & 9 & \square \\ \square & 4 & \square & \\ \hline 1 & \square & 7 & \square \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 9 & \square & 8 \\ & & \times & \square & \square \\ \hline & 2 & 8 & 7 & 4 \\ \square & \square & \square & \square & \\ \hline 6 & 9 & 9 & 3 & 4 \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc} & \square & \square & \square & \square \\ & & \times & 4 & 5 \\ \hline & 7 & 8 & 6 & 5 \\ \square & \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

13 Multiplica mentalmente por 9 y por 11 como se hace en los ejemplos.

- $\mathbf{23 \cdot 9 = 23 \cdot 10 - 23 = 230 - 23 = 207}$
- $\mathbf{23 \cdot 11 = 23 \cdot 10 + 23 = 230 + 23 = 253}$

a) $12 \cdot 9$ b) $12 \cdot 11$

c) $15 \cdot 9$ d) $15 \cdot 11$

e) $18 \cdot 9$ f) $18 \cdot 11$

g) $25 \cdot 9$ h) $25 \cdot 11$

i) $27 \cdot 9$ j) $27 \cdot 11$

k) $33 \cdot 9$ l) $33 \cdot 11$

14 Calcula y recuerda que para multiplicar por 10, 100, 1 000, … se añaden uno, dos, tres, … ceros.

a) $19 \cdot 10$ b) $12 \cdot 100$

c) $15 \cdot 1\,000$ d) $35 \cdot 10$

e) $41 \cdot 100$ f) $57 \cdot 1\,000$

g) $140 \cdot 10$ h) $230 \cdot 100$

i) $460 \cdot 1\,000$

15 Copia, completa y comprueba que los resultados coinciden.

16 Resuelve mentalmente.

a) En un bidón de agua caben 5 litros. ¿Cuántos litros hay en 20 bidones?

b) Un kilo de almendras cuesta 12 €. ¿Cuánto cuesta una bolsa de 5 kilos?

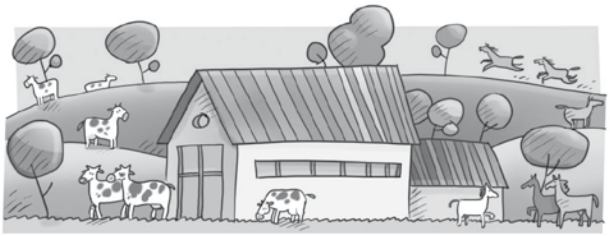
c) Una caja de refrescos contiene 24 botellas. ¿Cuántas botellas hay en 10 cajas?

d) ¿Cuánto cuesta cambiar las cubiertas de las cuatro ruedas de un coche a razón de 150 € cada una?

17 Un barco pesquero captura 240 kilos de merluza que se vende a 11 € el kilo. ¿Cuál es el valor total de la captura?

18 Un edificio tiene 27 plantas. En cada planta hay 12 viviendas, y en cada vivienda, 7 ventanas. ¿Cuántas ventanas hay en el edificio?

19 En una granja hay 38 vacas y 15 caballos. ¿Cuántas patas suman en total?



La división

Recuerda:

- Dividir es repartir en partes iguales. ¿Cuánto vale cada parte?

  Se distribuyen 150 bombones en 6 cajas iguales. ¿Cuántos bombones irán en cada caja?

$$\begin{array}{r|l} 150 & 6 \\ \cline{2-2} 30 & 25 \\ 0 & \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad 150 : 6 = 25 \text{ bombones por caja}$$

- Dividir es partir un todo en partes de un tamaño determinado. ¿Cuántas partes se obtienen?

  ¿Cuántas cajas de 25 bombones se llenan con 150 bombones?

$$\begin{array}{r|l} 150 & 25 \\ \cline{2-2} 00 & 6 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad 150 : 25 = 6 \text{ cajas}$$

Una división puede ser exacta o entera dependiendo del valor del resto:

- **División exacta** (el resto es cero).

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} 0 & c \end{array} \quad \rightarrow \quad \text{El dividendo es igual al divisor por el cociente.}$$

$$D = d \cdot c$$

- **División entera** (el resto es distinto de cero).

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} r & c \end{array} \quad \rightarrow \quad \text{El dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto.}$$

$$D = d \cdot c + r$$

Ejemplos

División exacta:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 8 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad 40 = 8 \cdot 5$$

División entera:

$$\begin{array}{r|l} 43 & 8 \\ \cline{2-2} 3 & 5 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad 43 = 8 \cdot 5 + 3$$

Orden en que han de hacerse las operaciones

Al resolver expresiones con operaciones combinadas, debes tener en cuenta las normas del lenguaje matemático. Estas normas aseguran que cada expresión tenga un significado y una solución únicos.

▼ **EJEMPLOS**

$$\begin{array}{c} 6 + 2 \cdot 4 \\ 6 + 8 \\ 14 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} (6 + 2) \cdot 4 \\ 8 \cdot 4 \\ 32 \end{array}$$

Estas dos expresiones tienen distinto significado a pesar de estar formadas por los mismos números y operaciones.

En las expresiones con operaciones combinadas, hemos de atender:

- Primero, a los paréntesis.
- Después, a las multiplicaciones y a las divisiones.
- Por último, a las sumas y a las restas.

Ejemplos

a) $2 + 3 \cdot 7 - 4 = 2 + 21 - 4 =$
$= 23 - 4 = 19$

b) $2 + 3 \cdot (7 - 4) = 2 + 3 \cdot 3 =$
$= 2 + 9 = 11$

c) $(2 + 3) \cdot 7 - 4 = 5 \cdot 7 - 4 =$
$= 35 - 4 = 31$

20 Divide mentalmente:

a) 46 : 46
b) 62 : 31
c) 280 : 40
d) 640 : 80
e) 360 : 40
f) 476 : 68
d) 168 : 56
e) 138 : 69

21 Averigua el cociente y el resto en cada división:

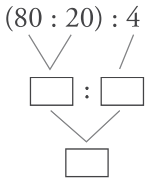
a) 96 : 13
b) 713 : 31
c) 5 309 : 7
d) 7 029 : 26
e) 49 896 : 162
f) 80 391 : 629

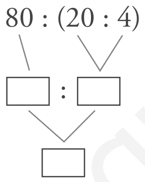
22 Calcula mentalmente, teniendo en cuenta que dividir entre 5 es igual que dividir entre 10 y, después, multiplicar por 2.

$$\begin{tikzcd} 90 \arrow[rr, ":5"] \arrow[d] & & 18 \\ {} \arrow[r, ":10"] & 9 \arrow[r, "\cdot 2"] & {} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

a) 60 : 5
b) 80 : 5
c) 120 : 5
d) 140 : 5
e) 170 : 5
f) 200 : 5
g) 210 : 5
h) 340 : 5
i) 420 : 5

23 Completa los ejemplos y, después, calcula.





a) (50 : 10) : 5
b) 50 : (10 : 5)
c) (36 : 6) : 2
d) 36 : (6 : 2)
e) (30 : 5) · 2
f) 30 : (5 · 2)
g) (36 : 6) · 3
h) 36 : (6 · 3)

24 Resuelve mentalmente.

a) ¿Cuántas docenas salen de una bandeja de 60 pasteles?

b) Un grupo de 120 excursionistas se reparte en tres autobuses. ¿Cuántos suben a cada autobús?

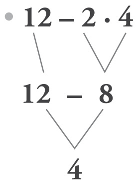
c) ¿Cuántas horas son 240 minutos?

d) Cincuenta caramelos pesan 450 gramos. ¿Cuánto pesa cada caramelo?

25 Un camión transporta 14 caballos que suponen una carga de 4 830 kilos. ¿Cuánto pesa, por término medio, cada caballo?

26 Cinco amigos ganan un premio de 13 285 € en las quinielas. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno?

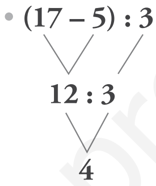
27 Calcula como en el ejemplo.



12 – 2 · 4 = 12 – 8 = 4

a) 8 + 5 · 2
b) 13 – 4 · 3
c) 5 + 6 : 3
d) 15 – 10 : 5
e) 4 · 2 + 7
f) 4 · 6 – 13
g) 15 : 3 + 10
h) 5 · 6 – 18

28 Opera como en el ejemplo.



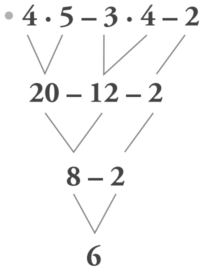
(17 – 5) : 3 = 12 : 3 = 4

a) (7 + 2) : 3
b) (8 – 5) · 2
c) (8 + 2) · 4
d) (13 – 5) : 4
e) 5 · (7 + 5)
f) 3 · (15 – 10)
g) 36 : (2 + 7)
h) 15 : (18 – 13)

29 Calcula mentalmente y compara los resultados.

a) 2 + 3 · 4	(2 + 3) · 4
b) 6 – 2 · 3	(6 – 2) · 3
c) 15 – 4 · 3	(15 – 4) · 3
d) 5 · 2 + 4	5 · (2 + 4)
e) 2 · 15 – 10	2 · (15 – 10)

30 Resuelve siguiendo los pasos del ejemplo.



4 · 5 – 3 · 4 – 2 =
= 20 – 12 – 2 =
= 8 – 2 = 6

a) 4 · 6 + 3 · 6 – 25
b) 3 · 5 – 12 + 3 · 6
c) 6 · 3 – 4 – 7
d) 28 – 4 · 5 + 3
e) 6 · 5 – 10 + 8 : 4
f) 19 + 10 : 2 – 8 · 3
g) 15 : 3 + 4 · 2 + 3 · 4
h) 4 · 7 – 4 · 2 – 3 · 5

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Sistemas de numeración

1 ▼▽▽ Escribe en el sistema aditivo egipcio cada uno de esos números:

a) 48 b) 235 c) 2 130

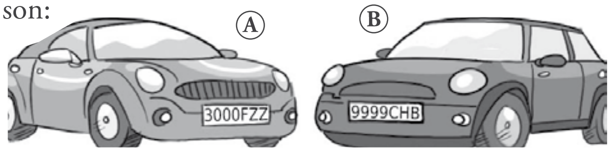
2 ▼▽▽ Traduce, al sistema decimal, estos números romanos:

a) XIV b) LXXIII c) LXIX

d) CCXVII e) DCXC f) MCMLVI

Utilidades de los números

3 ▼▽▽ Una familia tiene dos coches cuyas matrículas son:



a) ¿Cuál de los dos coches es más antiguo?

b) Escribe la matricula siguiente en cada caso (es decir, la del coche que se matriculó inmediatamente después).

c) Escribe dos matriculas consecutivas de manera que ninguna de las cifras de una y otra coincidan.

d) Escribe dos matriculas consecutivas que tengan diferentes las tres letras.

4 ▼▽▽ Estos son los números de varias habitaciones en un hotel de playa.

401	235
724	231

a) Una de ellas está al final del pasillo. ¿Cuál es?

b) Otra está en la última planta. ¿Qué número tiene?

c) ¿Cuáles de ellas están a la misma altura?

5 ▼▽▽ Lees, en un anuncio, que una vivienda se vende por 293 528 €. Unos días después lo comentas con un amigo, pero no te acuerdas exactamente del precio. ¿Cuál de las siguientes expresiones elegirías para transmitir la información? (Explica por qué.)

— Cuesta casi trescientos mil euros.

— Cuesta doscientos y pico mil.

— Cuesta doscientos noventa mil.

Operaciones

Sumas y restas

6 ▼▽▽ Calcula.

a) $5 + 7 - 3 - 4$ b) $18 - 4 - 5 - 6$

c) $10 - 6 + 3 - 7$ d) $8 + 5 - 4 - 3 - 5$

e) $12 + 13 + 8 - 23$ f) $40 - 18 - 12 - 6$

Multiplicación y división

7 ▼▽▽ Multiplica.

a) $16 \cdot 10$ b) $128 \cdot 10$ c) $60 \cdot 10$

d) $17 \cdot 100$ e) $85 \cdot 100$ f) $120 \cdot 100$

g) $22 \cdot 1\,000$ h) $134 \cdot 1\,000$ i) $140 \cdot 1\,000$

8 ▼▽▽ Calcula el cociente y el resto en cada caso:

a) $2\,647 : 8$ b) $1\,345 : 29$

c) $9\,045 : 45$ d) $7\,482 : 174$

e) $7\,971 : 2\,657$ f) $27\,178 : 254$

Operaciones combinadas

9 ▼▽▽ Opera:

a) $2 \cdot (4 + 6)$ b) $2 \cdot 4 + 6$

c) $8 : (7 - 5)$ d) $5 \cdot 7 - 5$

e) $(5 + 6) \cdot 4$ f) $5 + 6 : 3$

g) $(19 - 7) : 2$ h) $18 - 7 \cdot 2$

Interpreta, describe, exprésate

10 ▼▼▽ Escribe una única expresión aritmética que lleve a la solución de este problema:

Problema

Un hortelano lleva al mercado 85 kg de tomates y 35 kg de frambuesas. Si vende los tomates a 2 €/kg y las frambuesas a 3 €/kg, ¿cuánto obtendrá por la venta de la mercancía?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Resuelve problemas

1 ▼▽▽ La oca mediana pesa 850 g más que la pequeña y 1 155 g menos que la grande. ¿Cuánto pesan entre las tres?

2 ▼▽▽ Un camión de reparto transporta 15 cajas de refrescos de naranja y 12 cajas de limón. ¿Cuántas botellas lleva en total si cada caja contiene 24 unidades?

3 ▼▼▽ Un pueblo tiene dos mil habitantes, pero se espera que en los próximos diez años aumente su población en un 50%. ¿Qué población se espera para dentro de diez años?

4 ▼▼▼ Un mayorista de alimentación compra 150 sacos de patatas de 30 kg por 2 000 €.

Después, al seleccionar la mercancía, desecha 300 kg y envasa el resto en bolsas de 5 kg, que vende a 4 € la bolsa.

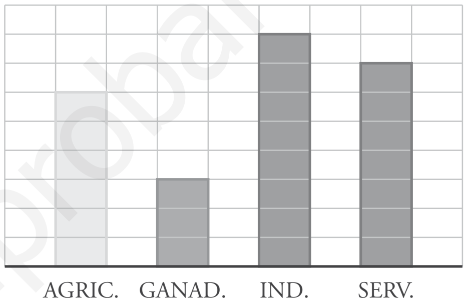
¿Qué ganancia obtiene?

5 ▼▼▼ Un apicultor tiene 187 colmenas con una producción de dos cosechas al año, a razón de 9 kilos de miel por colmena en cada cosecha.

La miel se envasa en tarros de medio kilo y se comercializa en cajas de seis tarros que se venden a 18 euros la caja.

¿Qué beneficio anual produce el colmenar?

6 ▼▼▼ Observa la gráfica correspondiente a la distribución, por sectores económicos, de los habitantes de una ciudad de 48 000 habitantes:

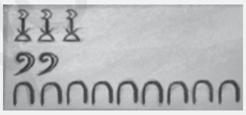


¿Cuántos habitantes de la ciudad pertenecen al sector servicios?

Autoevaluación

1 Aquí tienes una cantidad escrita en distintos sistemas de numeración:

3 290 ↔ MMMCCXC ↔



a) ¿Qué sistemas son?

b) Di sin son aditivos o posicionales.

2 Escribe las siguientes cantidades con letras o con cifras, según corresponda.

a) Ochocientos cuarenta y tres mil.

b) Trece millones doscientos ochenta mil.

c) 1 500 000

d) 350 000 000

3 Una ciudad tiene 839 000 habitantes. Expresa esa cantidad:

a) Redondeando a las centenas de millar.

b) Redondeando a las decenas de millar.

4 Calcula los términos que faltan en cada caso:

a) 143 + □ = 237

b) □ – 133 = 85

c) 25 · □ = 175

d) □ : 15 = 13

5 Coloca los paréntesis para que las siguientes igualdades sean ciertas:

a) 8 – 5 · 3 = 9

b) 8 · 4 – 5 = 12

c) 6 · 3 – 1 + 2 = 24

d) 6 · 3 – 1 + 2 = 14

6 Tienes un buen montón de monedas de 50, 20 y 10 céntimos. ¿De cuántas formas diferentes puedes juntar un euro? Justifica tu respuesta.

7 Un hortelano tiene dos campos con 160 y 213 manzanos, respectivamente. Espera cosechar, por término medio, 35 kg de manzanas por árbol. Al recoger la cosecha, la envasará en cajas de 10 kg.

a) ¿Cuántos kilos de manzanas espera recoger?

b) ¿Cuántas cajas de 10 kilos llenará?

2 Potencias y raíces

Las matemáticas siempre fueron una herramienta para resolver problemas cotidianos. ¿Cuánto mide este terreno? ¿Cómo hemos de repartirnos la cosecha? ¿Cómo utilizar las estrellas para orientarnos?

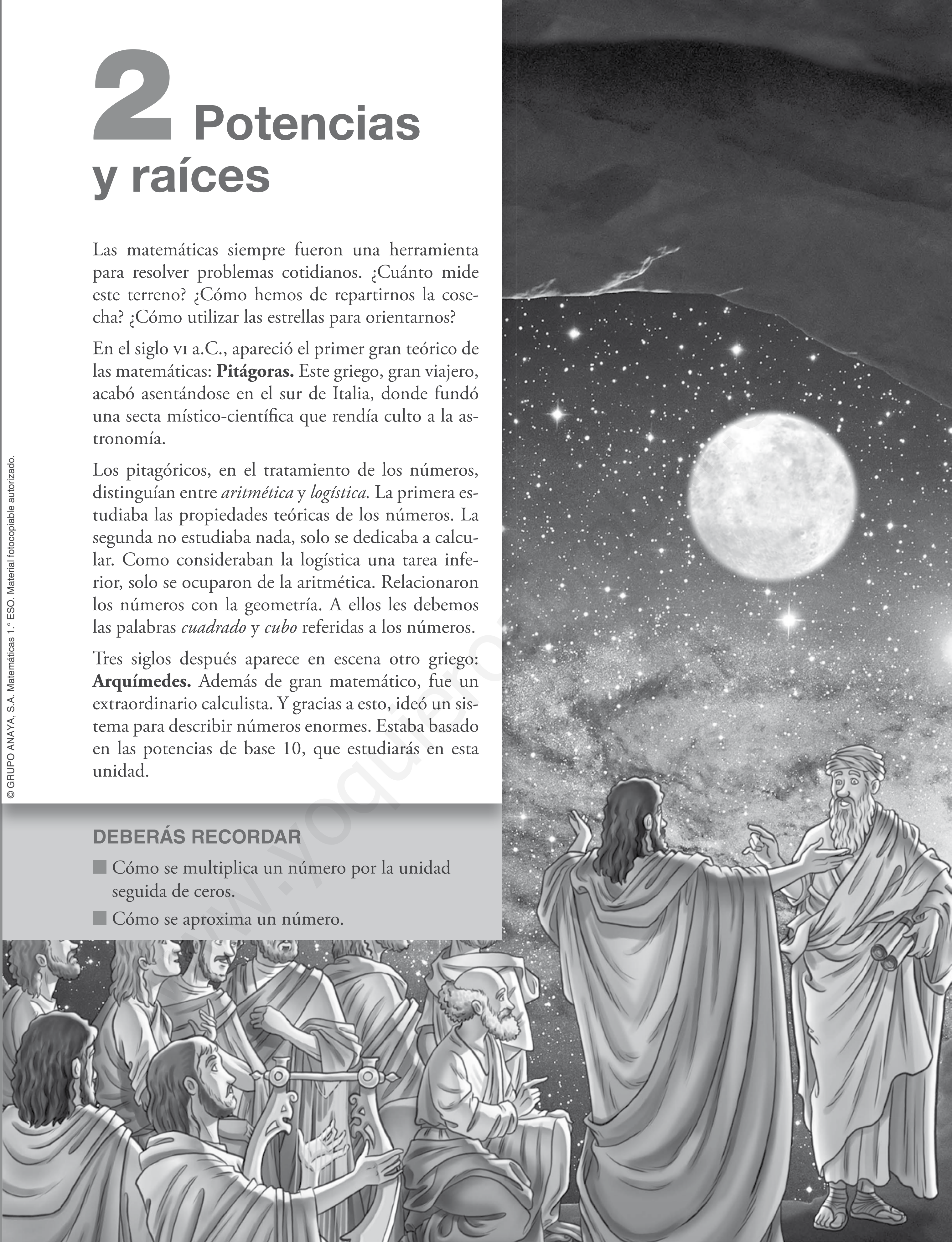
En el siglo VI a.C., apareció el primer gran teórico de las matemáticas: **Pitágoras.** Este griego, gran viajero, acabó asentándose en el sur de Italia, donde fundó una secta místico-científica que rendía culto a la astronomía.

Los pitagóricos, en el tratamiento de los números, distinguían entre *aritmética* y *logística.* La primera estudiaba las propiedades teóricas de los números. La segunda no estudiaba nada, solo se dedicaba a calcular. Como consideraban la logística una tarea inferior, solo se ocuparon de la aritmética. Relacionaron los números con la geometría. A ellos les debemos las palabras *cuadrado* y *cubo* referidas a los números.

Tres siglos después aparece en escena otro griego: **Arquímedes.** Además de gran matemático, fue un extraordinario calculista. Y gracias a esto, ideó un sistema para describir números enormes. Estaba basado en las potencias de base 10, que estudiarás en esta unidad.

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se multiplica un número por la unidad seguida de ceros.
- Cómo se aproxima un número.



1 Potencias

Una potencia es una forma abreviada de escribir un producto de factores iguales:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

En las potencias, el factor repetido se llama **base,** y el número de veces que se repite, **exponente.**

$$\overset{\text{EXPONENTE}}{\underset{\text{BASE}}{a^5}}$$

Se lee { *a* elevado a cinco. / o / *a* elevado a la quinta.

▼ **EJEMPLOS**

- Expresar en forma de potencia:

  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ $\qquad$ $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

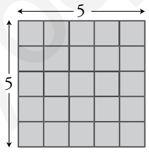
- Calcular:

  $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ $\qquad$ $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$

El cuadrado de un número

El **cuadrado** de un número es la potencia de exponente 2.

▼ **EJEMPLO**



El cuadrado de 5 es:

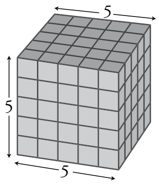
$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

(25 cuadraditos)

El cubo de un número

El **cubo** de un número es la potencia de exponente 3.

▼ **EJEMPLO**



El cubo de 5 es:

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

(125 cubitos)

No lo olvides

La potencia de exponente 0 de un número es igual a 1. Por ejemplo:

$5^0 = 1 \qquad 1^0 = 1 \qquad 134^0 = 1$

Las potencias en la calculadora

Las potencias, excepto en los casos más sencillos, arrojan como resultados números grandes.

▼ EJEMPLO

$$8^5 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 64 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512 \cdot 8 \cdot 8 = 4\,096 \cdot 8 = 32\,768$$

Como ves, los cálculos resultan rutinarios y molestos, por lo que se suelen hacer con una calculadora:

- En una calculadora científica utilizaremos la tecla $\boxed{x^y}$:

$$8^5 \longrightarrow 8\ \boxed{x^y}\ 5\ \boxed{=} \longrightarrow \boxed{32768}$$

- En las calculadoras sencillas, utilizaremos las teclas $\boxed{\times}$ e $\boxed{=}$:

$$8^5 \longrightarrow 8\ \boxed{\times}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$$

$$8^2 \longrightarrow \boxed{64}$$

$$8^3 \longrightarrow \boxed{512}$$

$$8^4 \longrightarrow \boxed{4096}$$

$$8^5 \longrightarrow \boxed{32768}$$

Actividades

1 Expresa con una potencia.

a) $6 \cdot 6$ b) $6 \cdot 6 \cdot 6$

c) $7 \cdot 7$ d) $5 \cdot 5$

e) $10 \cdot 10 \cdot 10$ f) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

g) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ h) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

2 Expresa las potencias siguientes como producto de factores repetidos:

a) 3^4 b) 2^7 c) 9^3 d) 15^2 e) 10^6 f) 20^4

3 Copia y completa.

a) $m \cdot m \cdot m = m^{\square}$ b) $x \cdot x = x^{\square}$

c) $a \cdot a \cdot a \cdot a = \square^4$ d) $y \cdot y = \square^2$

e) ………………… $= b^3$ f) ………………… $= n^5$

4 Completa la tabla.

POTENCIA	BASE	EXPONENTE
2^6		
	5	3
a^4		
	m	5

5 Calcula mentalmente.

a) 2^3 b) 5^2

c) 4^3 d) 20^3

e) 10^4 f) 11^2

6 Calcula con lápiz y papel.

a) 2^8 b) 3^5

c) 9^4 d) 15^2

e) 12^3 f) 30^4

g) 20^5 h) 85^2

i) 100^3 j) 324^2

k) 15^3 l) 9^5

7 Obtén el valor de estas potencias con ayuda de la calculadora:

a) 11^5 b) 37^4

c) 62^3 d) 136^3

e) 101^4 f) 140^4

g) 37^5 h) 14^7

i) 26^6 j) 33^3

2

Potencias de base 10. Aplicaciones

Ya sabes que para multiplicar por 10 basta añadir un cero. Teniendo esto en cuenta, el cálculo de las potencias de base 10 resulta sencillo y has de ser capaz de realizarlo mentalmente:

$10^2 = 10 \cdot 10 =$ 100

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 =$ 1 000

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \,.\, 10 =$ 10 000

$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$ 100 000

$\vdots \qquad \vdots$

$$10^9 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1\,\underbrace{000\,000\,000}_{\text{9 ceros}}$$

Observa que el número de ceros del resultado coincide con el exponente de la potencia.

> Una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente.
>
> $$10^7 = 1\overbrace{0\,000\,000}^{\text{7 ceros}}$$

Como puedes comprobar, escribir e interpretar números grandes utilizando potencias de base 10 es mucho más cómodo, pues su orden de magnitud ya nos viene dado por el exponente y no es necesario contar los ceros:

$$1\,000\,000\,000\,000 \;\Updownarrow\; 10^{12}$$

Actividades

1 Expresa con todas sus cifras.

a) 10^1 b) 10^6

c) 10^8 d) 10^9

e) 10^{10} f) 10^{11}

g) 10^{13} h) 10^{14}

i) 10^{15} j) 10^{17}

k) 10^{18} l) 10^{20}

2 Escribe como potencias de base 10.

a) Una decena.

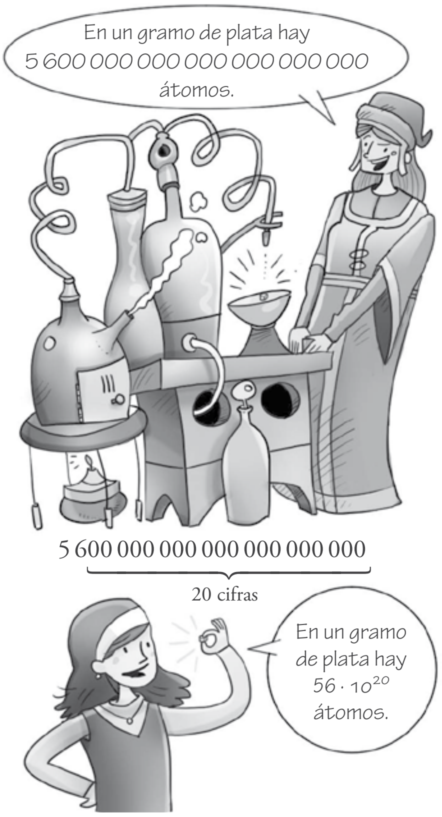
b) Una centena.

c) Un millar.

d) Un millón.

e) Mil millones.

f) Un billón.



Expresión abreviada de números grandes

Ya has observado que el tamaño de un número con muchos ceros se percibe mejor si se expresa con una potencia de base 10:

$$100\,000\,000\,000\,000 = 10^{14}$$

Ahora vamos a aprovechar este recurso para facilitar la expresión y la comprensión de números muy grandes.

▼ **EJEMPLO**

Un año luz equivale, aproximadamente, a 9 500 000 000 000 kilómetros.

Observa las transformaciones que proponemos para hacer esa cantidad más manejable:

$$\boxed{9\,500\,000\,000\,000}$$

$$\downarrow$$

- Descomposición en producto por la unidad seguida de ceros.

$$\boxed{95 \cdot 100\,000\,000\,000}$$

$$\downarrow$$

- Transformación del segundo factor en potencia de base 10.

$$\boxed{95 \cdot 10^{11}}$$

Diremos, entonces, que un año luz equivale a $95 \cdot 10^{11}$ kilómetros.

Como ves, se trata de una cantidad más fácil de leer, de escribir y de recordar.

Actividades

3 Transforma como en el ejemplo:

- **$240\,000 = 24 \cdot 10^4$**

a) 9 000
b) 72 000
c) 460 000
b) 24 000 000

4 Expresa con todas sus cifras.

a) $4 \cdot 10^5$
b) $7 \cdot 10^7$
c) $15 \cdot 10^9$
d) $18 \cdot 10^{12}$
e) $86 \cdot 10^{14}$
f) $91 \cdot 10^{18}$

5 El número de glóbulos rojos que un ser humano tiene en la sangre es veinticinco mil millones (25 000 000 000).

Expresa esa cantidad en forma abreviada.

6 El número de moléculas elementales en un litro de agua es 330 000 000 000 000 000 000 000 000, aproximadamente. Expresa esa cantidad en forma abreviada.

3 Raíz cuadrada

Calcular la raíz cuadrada es hacer la operación inversa de elevar al cuadrado.

$$b^2 = a \leftrightarrow \sqrt{a} = b$$

▼ **EJEMPLOS**

- $4^2 = 16 \rightarrow \sqrt{16} = 4$

  La raíz cuadrada de 16 es 4.

- $15^2 = 225 \rightarrow \sqrt{225} = 15$

  La raíz cuadrada de 225 es 15.

$$\underset{\uparrow\,\text{RADICANDO}}{\sqrt{a}} = \overset{\text{RAÍZ}\,\downarrow}{b} \longrightarrow$$ Se lee: la raíz cuadrada de *a* es igual a *b*.

Raíces exactas

Los números cuya raíz es exacta se llaman **cuadrados perfectos.** Por ejemplo, son cuadrados perfectos 36, 100 ó 400.

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{36} = 6 & \sqrt{100} = 10 & \sqrt{400} = 20 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 6^2 = 36 & 10^2 = 100 & 20^2 = 400 \end{array}$$

No lo olvides

TE CONVIENE MEMORIZAR LOS PRIMEROS CUADRADOS PERFECTOS

$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$
$7^2 = 49$
$8^2 = 64$
$9^2 = 81$
$10^2 = 100$
$11^2 = 121$
$12^2 = 144$
$13^2 = 169$
$14^2 = 196$
$15^2 = 225$
$16^2 = 256$
$17^2 = \ldots$
$18^2 = \ldots$

Raíces enteras

Para la mayoría de los números, la raíz no coincide con una cantidad exacta de unidades enteras.

Busquemos, por ejemplo, la raíz de 40:

$$\left.\begin{array}{l} 6^2 = 36 < 40 \\ 7^2 = 49 > 40 \end{array}\right\} \rightarrow 6 < \sqrt{40} < 7$$

La raíz cuadrada de 40 es un
número comprendido entre 6 y 7.

Al número natural que más se aproxima, por debajo, a la raíz, lo llamamos **raíz entera.**

$$\sqrt{40} \approx 6 \rightarrow \text{La raíz entera de 40 es 6.}$$

Ejercicios resueltos

1. Calcular mentalmente $\sqrt{900}$.

$x^2 = 900 \rightarrow 30^2 = 900 \rightarrow \sqrt{900} = 30 \rightarrow$ Raíz exacta

2. Teniendo en cuenta los datos del cuadro, calcular $\sqrt{1\,440}$, $\sqrt{1\,444}$ y $\sqrt{1\,580}$.

$37^2 = 1\,369$
$38^2 = 1\,444$
$39^2 = 1\,521$
$40^2 = 1\,600$

$\sqrt{1\,440} \approx 37 \rightarrow$ Raíz entera

$\sqrt{1\,444} = 38 \rightarrow$ Raíz exacta

$\sqrt{1\,580} \approx 39 \rightarrow$ Raíz entera

Actividades

1 Copia y completa como en el ejemplo.

- **$\sqrt{25} = 5 \rightarrow$ La raíz de 25 es igual a 5.**

a) $\sqrt{49} = 7 \rightarrow \ldots$

b) $\sqrt{64} = \ldots \rightarrow \ldots$

c) $\sqrt{81} = \ldots \rightarrow \ldots$

2 Calcula mentalmente.

a) $\sqrt{4}$
b) $\sqrt{9}$
c) $\sqrt{36}$
d) $\sqrt{400}$
e) $\sqrt{900}$
f) $\sqrt{3\,600}$
g) $\sqrt{4\,900}$
h) $\sqrt{6\,400}$
i) $\sqrt{8\,100}$
j) $\sqrt{10\,000}$

3 Calcula la raíz entera en cada caso:

a) $\sqrt{5}$
b) $\sqrt{10}$
c) $\sqrt{24}$
d) $\sqrt{32}$
e) $\sqrt{39}$
f) $\sqrt{50}$
g) $\sqrt{68}$
h) $\sqrt{92}$
i) $\sqrt{105}$
j) $\sqrt{110}$

4 Escribe los cuadrados perfectos comprendidos entre 200 y 900.

15^2	16^2	17^2	18^2	…	30^2
225	256	289	324	…	900

5 Calcula, teniendo en cuenta los resultados del ejercicio anterior.

a) $\sqrt{289}$
b) $\sqrt{361}$
c) $\sqrt{484}$
d) $\sqrt{576}$
e) $\sqrt{676}$
f) $\sqrt{841}$

6 Observa el cuadro y calcula indicando si la raíz es exacta o entera.

$50^2 = 2\,500$ $51^2 = 2\,601$ $52^2 = 2\,704$
$53^2 = 2\,809$ $54^2 = 2\,916$ $55^2 = 3\,025$

a) $\sqrt{2\,550}$
b) $\sqrt{2\,601}$
c) $\sqrt{2\,725}$
d) $\sqrt{2\,815}$
e) $\sqrt{2\,916}$
f) $\sqrt{2\,929}$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Cálculo de potencias

1 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) 2^4 b) 6^3 c) 3^5 d) 20^4 e) 30^0

2 ▼▽▽ Calcula con lápiz y papel.

a) 5^5 b) 9^5 c) 1^{10} d) 15^3 e) 16^4

3 ▼▽▽ Obtén con la calculadora.

a) 4^{12} b) 5^{10} c) 45^3 d) 67^4 e) 99^3

Potencias de base 10. Expresión abreviada de números grandes

4 ▼▽▽ Escribe con todas sus crifras.

a) 10^2 b) 10^6 c) 10^{10} d) 10^{12} e) 10^{16}

5 ▼▽▽ Expresa con todas sus cifras.

a) $13 \cdot 10^7$ b) $34 \cdot 10^9$ c) $62 \cdot 10^{11}$

6 ▼▽▽ Transforma como en el ejemplo.

- **$180\,000 = 18 \cdot 10^4$**

a) 5 000 b) 1 700 000 c) 4 000 000 000

Raíz cuadrada

7 ▼▽▽ Copia y completa como en el ejemplo.

- **$8^2 = 64 \leftrightarrow \sqrt{64} = 8$**

a) $\square^2 = 36 \leftrightarrow \sqrt{36} = \square$

b) $\square^2 = 256 \leftrightarrow \sqrt{256} = \square$

8 ▼▽▽ Calcula, por tanteo, la raíz exacta o la entera.

a) $\sqrt{90}$ b) $\sqrt{121}$ c) $\sqrt{1\,785}$

Resuelve problemas

9 ▼▽▽ Para cubrir el suelo de una habitación cuadrada, se han colocado 22 filas de 22 baldosas cada una. ¿Cuántas baldosas se han utilizado?

10 ▼▽▽ Marta ha construido un cubo grande, de 10 centímetros de arista juntando cubitos pequeños de madera, de 1 cm de arista. ¿Cuántos cubitos ha empleado?

11 ▼▼▽ Una finca cuadrada tiene una superficie de 900 metros cuadrados. ¿Cuántos metros lineales de alambrada habría que comprar para cercarla?

12 ▼▼▼ Observa el cubo de la ilustración formado por $5 \times 5 \times 5$ cubitos unitarios.

a) Supón que lo pintamos de rojo. ¿Cuántos cubitos unitarios habrían quedado parcialmente pintados?

b) Supón que lo queremos hacer más grande, recubriéndolo completamente con una capa de cubitos verdes. ¿Cuántos cubitos verdes necesitaríamos?

Autoevaluación

1 Calcula:

a) 7^2 b) 10^4

2 Completa:

a) $2^{\square} = 8$ b) $\square^2 = 36$

3 Calcula:

a) 10^3 b) 10^7

4 Escribe en la notación abreviada el número 45 000 000.

5 Completa:

a) $\sqrt{36} = \ldots$ b) $\sqrt{400} = \ldots$ c) $\sqrt{10\,000} = \ldots$

d) $\sqrt{\ldots} = 3$ e) $\sqrt{\ldots} = 8$ f) $\sqrt{\ldots} = 30$

6 ¿Cuántos cuadros de moqueta, de un metro de lado, necesitas para cubrir el suelo de una nave cuadrada de 30 metros de lado? (Haz un dibujo antes de resolverlo.)

7 Héctor quiere dibujar una cuadrícula, igual de ancha que de alta, que contenga 225 cuadros. ¿Cuántas filas y cuántas columnas debe poner?

3 Divisibilidad

Alejandría, fundada por Alejandro Magno en el siglo IV a.C., pasó a ser el centro cultural (científico, artístico) de la civilización griega.

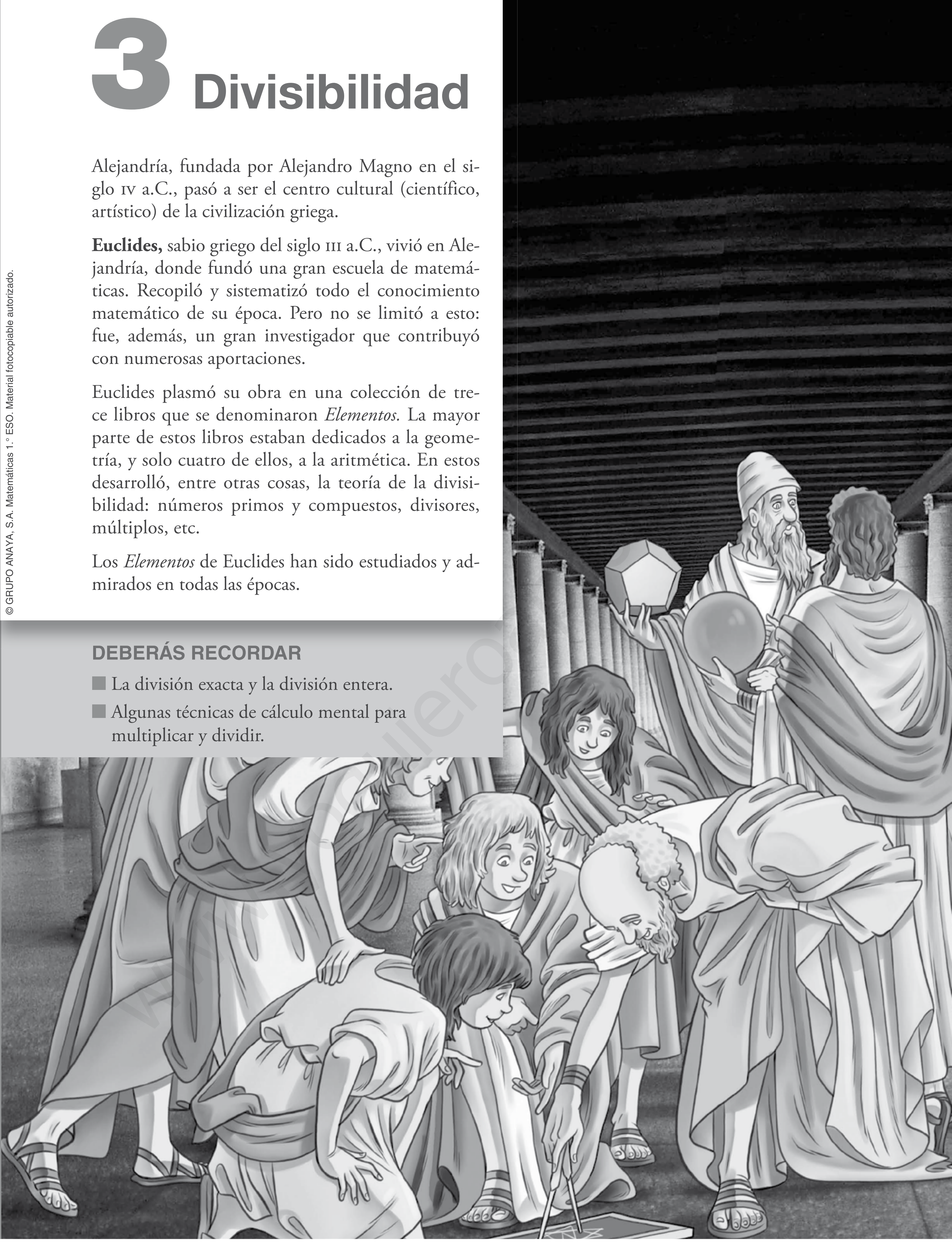
Euclides, sabio griego del siglo III a.C., vivió en Alejandría, donde fundó una gran escuela de matemáticas. Recopiló y sistematizó todo el conocimiento matemático de su época. Pero no se limitó a esto: fue, además, un gran investigador que contribuyó con numerosas aportaciones.

Euclides plasmó su obra en una colección de trece libros que se denominaron *Elementos.* La mayor parte de estos libros estaban dedicados a la geometría, y solo cuatro de ellos, a la aritmética. En estos desarrolló, entre otras cosas, la teoría de la divisibilidad: números primos y compuestos, divisores, múltiplos, etc.

Los *Elementos* de Euclides han sido estudiados y admirados en todas las épocas.

DEBERÁS RECORDAR

- La división exacta y la división entera.
- Algunas técnicas de cálculo mental para multiplicar y dividir.

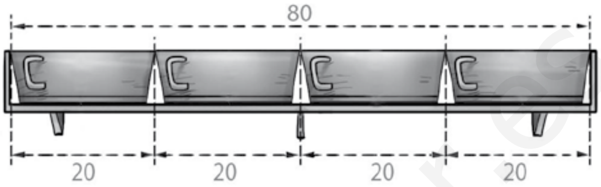


1 La relación de divisibilidad

Dos números están emparentados por la **relación de divisibilidad** cuando uno cabe en el otro una cantidad exacta de veces; es decir, cuando su **cociente es exacto.**

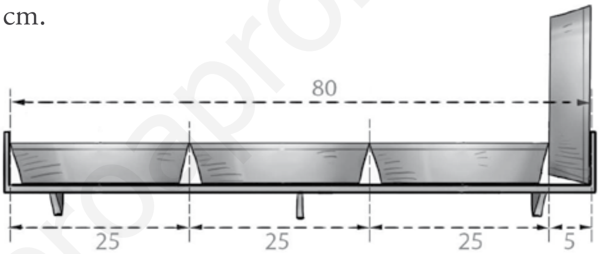
Observa los ejemplos siguientes:

- En una estantería de 80 cm caben, exactamente, cuatro cazuelas de 20 cm.



$\begin{array}{r|l} 80 & 20 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array}$ → 20 cabe un número exacto de veces en 80. → 80 es divisible entre 20.

- Sin embargo, en una estantería de 80 cm no encaja una cantidad exacta de fuentes de 25 cm.



$\begin{array}{r|l} 80 & 25 \\ \cline{2-2} 5 & 3 \end{array}$ → 25 no cabe en 80 un número exacto de veces. → 80 no es divisible entre 25.

Relación de divisibilidad

$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} 0 & c \end{array}$

división exacta.

⇩

a es divisible entre *b*.

⇩

a es múltiplo de *b*.

⇩

b es divisor de *a*.

Múltiplos y divisores

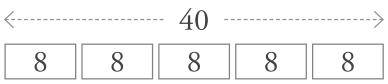
Cuando dos números están emparentados por la relación de divisibilidad, decimos que:

- El mayor es **múltiplo** del menor.
- El menor es **divisor** del mayor.

▼ **EJEMPLO**

$\begin{array}{r|l} 40 & 8 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$ → $40 = 8 \cdot 5$ → $\begin{cases} \text{40 es múltiplo de 8.} \\ \text{8 es divisor de 40.} \end{cases}$

división exacta



Ten en cuenta

Cada divisor de un número lleva otro emparejado.

$\begin{array}{r|l} 40 & 8 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 8 \end{array}$

8 es divisor de 40.
5 es divisor de 40.

- ***a* es múltiplo de *b***
  o lo que es igual
- ***b* es divisor de *a***

→ **si la división *a* : *b* es exacta.**

Actividades

1 Copia y completa.

- $\begin{array}{r|l} \mathbf{40} & \underline{\mathbf{8}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{array} \to$ **40 es divisible entre 5.**

a) $\begin{array}{r|l} 35 & \underline{8} \\ 3 & 4 \end{array} \to$ 35 no es…

b) $\begin{array}{r|l} 42 & \underline{6} \end{array} \to$ …

c) $\begin{array}{r|l} 100 & \underline{25} \end{array} \to$ …

d) $\begin{array}{r|l} 108 & \underline{18} \end{array} \to$ …

2 Di en cada caso si a es divisible entre b y justifica tu respuesta, como en el ejemplo:

- $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a = 78} \\ \boldsymbol{b = 6} \end{array}\right\} \begin{array}{r|l} \mathbf{78} & \underline{\mathbf{6}} \\ \mathbf{18} & \mathbf{13} \\ \mathbf{0} & \end{array} \to$ **78 es divisible entre 6, porque su cociente es exacto.**

a) $\left\{\begin{array}{l} a = 90 \\ b = 30 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} a = 185 \\ b = 15 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} a = 182 \\ b = 14 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} a = 2\,030 \\ b = 10 \end{array}\right.$

3 Di si los números de cada pareja están emparentados por la relación de divisibilidad:

a) 224 y 16

b) 420 y 35

c) 613 y 13

d) 513 y 19

e) 688 y 44

f) 2 070 y 46

4 Encuentra, al menos, cuatro parejas de números emparentados por la relación de divisibilidad.

420 13

90 70 11

18 9 156

6 21

5 ¿Verdadero o falso?

a) 15 está contenido exactamente 4 veces en 60.

b) 75 está contenido exactamente 3 veces en 225.

c) 42 es divisible entre 7.

d) 54 es divisible entre 8.

e) 65 contiene a 13 un número exacto de veces.

6 Copia y completa, como en el ejemplo.

- $\begin{array}{r|l} \mathbf{18} & \underline{\mathbf{3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} \end{array} \to \left\{\begin{array}{l} \textbf{18 es múltiplo de 6.} \\ \textbf{6 es divisor de 18.} \end{array}\right.$

a) $\begin{array}{r|l} 18 & \underline{9} \\ 0 & 2 \end{array} \to \left\{\begin{array}{l} \text{18 es … de 2.} \\ \text{2 es … de 18.} \end{array}\right.$

b) $\begin{array}{r|l} 20 & \underline{5} \\ 0 & 4 \end{array} \to \left\{\begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array}\right.$

c) $\begin{array}{r|l} 104 & \underline{13} \\ 00 & 8 \end{array} \to \left\{\begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array}\right.$

7 Explica con claridad por qué 518 es múltiplo de 37.

8 ¿Es 23 divisor de 345? Razona tu respuesta.

9 Busca:

a) Tres números que sean divisores de 40.

b) Tres números que sean múltiplos de 7.

c) Tres números que sean divisores de 770.

d) Tres números que sean múltiplos de 50.

10 Busca entre estos números:

5 10 15 20 30

35 45 60 75 90

a) Todos los que sean divisores de 90.

b) Todos los que sean múltiplos de 3.

11 Considera estos números:

8 10 20 24 30

45 60 75 95 120

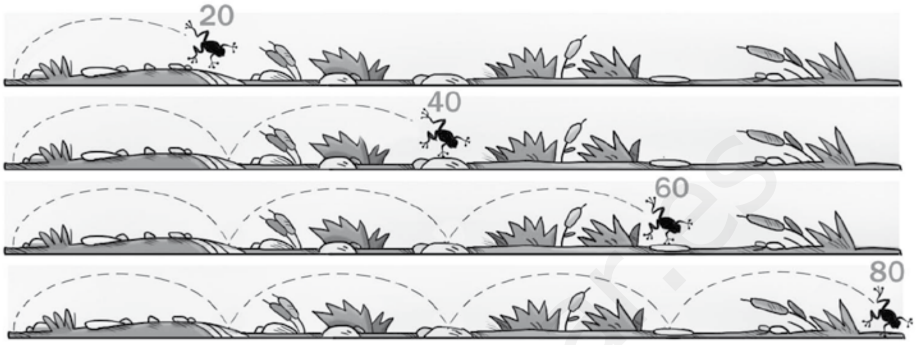
a) ¿Cuáles son múltiplos de 4?

b) ¿Cuáles son múltipos de 10?

c) ¿Cuáles son múltiplos de 15?

2 Múltiplos de un número

Los múltiplos de un número son otros números, de igual o mayor tamaño, que lo contienen una cantidad exacta de veces. Por ejemplo, observa la longitud recorrida por la rana en sucesivos saltos de 20 centímetros:



Múltiplos de 20

$20 \cdot 1 = 20$

$20 \cdot 2 = 40$

$20 \cdot 3 = 60$

$20 \cdot 4 = 80$

$\downarrow$

$20 \cdot k$

Los números 20, 40, 60, 80, … contienen a 20 una cantidad exacta de veces; es decir, todos ellos son múltiplos de 20.

Observa, también, que se obtienen multiplicando 20 por un número natural, y que la serie puede continuar indefinidamente.

$$20 \cdot 5 \to 100 \qquad 20 \cdot 6 \to 120 \qquad 20 \cdot 7 \to 140 \qquad 20 \cdot 8 \to 160 \quad \dots$$

Notación

Cuando nos referimos a un múltiplo de un número, podemos escribirlo con un punto encima, así:

$\dot{7}$ → múltiplo de 7

$\dot{a}$ → múltiplo de a

$18 = \dot{3}$ → 18 es múltiplo de 3.

- Los múltiplos de un número natural, a, se obtienen al multiplicar a por cualquier otro número natural k: $a \cdot k$ → **múltiplo de** a
- Todo número natural, a, es múltiplo de sí mismo y de la unidad. $\Big\}\ a \cdot 1 = a$
- Un número distinto de cero tiene infinitos múltiplos.

Actividades

1 Escribe.

a) Tres múltiplos de 5.
b) Tres múltiplos de 12.
c) Tres múltiplos de 19.
d) Tres múltiplos de 30.

2 Añade cuatro términos a cada una de estas series:

a) Múltiplos de 6 → 6, 12, 18, 24, …
b) Múltiplos de 15 → 15, 30, 45, 60, …
c) Múltiplos de 53 → 53, 106, 159, 212, …

3 Busca, entre estos números, los que sean múltiplos de 6:

10 12 16 30 42 54 60 76 90 148 174

4 Escribe los diez primeros múltiplos de 25.

5 Escribe los veinte primeros múltiplos de 5. Fíjate en la última cifra. ¿Qué observas? ¿Cómo sabes, de un vistazo, si un número es múltiplo de 5?

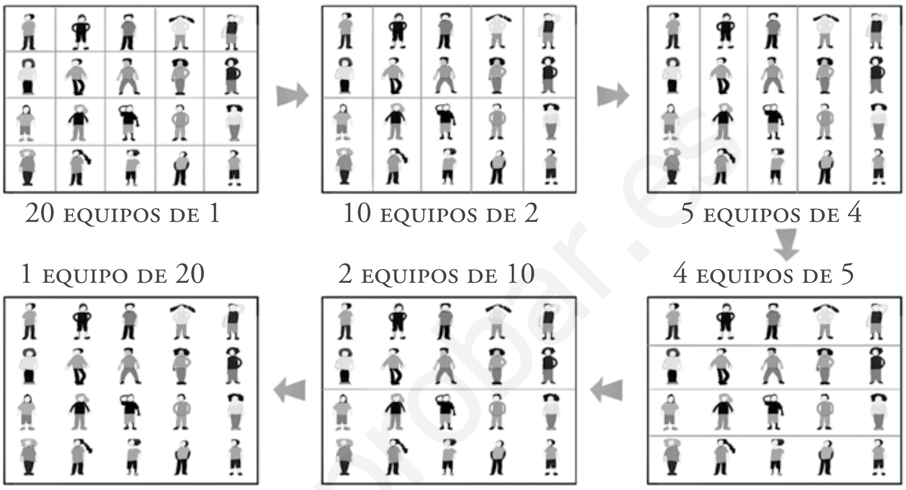
3 Divisores de un número

Los divisores de un número son otros números, de igual o menor tamaño, que están contenidos en él una cantidad exacta de veces.

Observa, por ejemplo, las distintas formas de dividir un grupo de 20 chicos y chicas en equipos iguales:

Divisores de 20

20 : 1 = 20
20 : 2 = 10
20 : 4 = 5
20 : 5 = 4
20 : 10 = 2
20 : 20 = 1



Cada uno de los números 1, 2, 4, 5, 10 y 20 está contenido en 20 una cantidad exacta de veces. Por tanto, todos ellos son divisores de 20.

Como puedes comprobar, forman parejas cuyo producto es 20:

$$1 \cdot 20 \qquad 2 \cdot 10 \qquad 4 \cdot 5$$

- Para obtener todos los divisores de un número, *a*, buscamos las divisiones exactas:

$$\left.\begin{array}{l} a : b = c \\ a : c = b \end{array}\right\} \rightarrow a = b \cdot c \rightarrow \text{Entonces } b \text{ y } c \text{ son } \textbf{divisores} \text{ de } a.$$

- Todo número es divisor de sí mismo. → $a : a = 1$
- El 1 es divisor de cualquier número. → $a : 1 = a$

Divisores de 30

Búsqueda de los divisores de 30:

30 : 1 = 30 → SÍ
30 : 2 = 15 → SÍ
30 : 3 = 10 → SÍ
30 : 4 → NO
30 : 5 = 6 → SÍ

Los divisores de 30 son:

1	2	3	5
↕	↕	↕	↕
30	15	10	6

Actividades

1 Encuentra todos los divisores de cada uno de los números siguientes:

a) 8 b) 12
c) 15 d) 28
e) 36 f) 55
g) 60 h) 80

2 Encuentra todos los divisores de:

a) 7 b) 13 c) 17 d) 29

¿Qué observas?

3 ¿De cuántas formas diferentes se pueden repartir en equipos iguales los 24 alumnos y alumnas de una clase? ¿Cuántos equipos salen en cada caso? (Por ejemplo, 3 equipos de 8 alumnos).

4 Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son reglas prácticas que sirven para descubrir si un número es divisible por 2, 3, 5 u otros números sencillos.

CÓMO AVERIGUAR SI UN NÚMERO ES MÚLTIPLO DE 2

Observa que todos los múltiplos de 2, y solo ellos, terminan en cifra par:

2	4	6	8	10
12	14	16	18	20
22	24	26	28	30
…	…	…	…	…

Un número es múltiplo de 2 si termina en cifra par:
0 - 2 - 4 - 6 - 8

Ejemplos

- 37⑧ → cifra par
  378 es múltiplo de 2.
- 45① → cifra impar
  451 no es múltiplo de 2.

CÓMO AVERIGUAR SI UN NÚMERO ES MÚLTIPLO DE 3

Toma cualquier múltiplo de 3 y suma sus cifras. Verás que la suma es un múltiplo de 3.

Múltiplo de 3 | Suma de las cifras

$3 \cdot 11 = 33 \rightarrow 3 + 3 = 6 \rightarrow \dot{3}$
$3 \cdot 24 = 72 \rightarrow 7 + 2 = 9 \rightarrow \dot{3}$
$3 \cdot 136 = 408 \rightarrow 4 + 0 + 8 = 12 \rightarrow \dot{3}$

Un número es múltiplo de 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Ejemplos

- $359 \rightarrow 3 + 5 + 9 = 17 \neq \dot{3}$
  359 no es múltiplo de 3.
- $252 \rightarrow 2 + 5 + 2 = 9 = \dot{3}$
  252 es múltiplo de 3.

CÓMO AVERIGUAR SI UN NÚMERO ES MÚLTIPLO DE 5

Contempla, ahora, los múltiplos de 5 y fíjate en que todos, y solo ellos, terminan en 0 o en 5:

5	10
15	20
25	30
35	40
…	…

Un número es múltiplo de 5 si su última cifra es un cero o un cinco.

Ejemplos

- 28⓪ → es múltiplo de 5.
- 55⑦ → no es múltiplo de 5.

Actividades

1 Copia y rodea los múltiplos de 2.

57 66 71 90 99
111 162 228 483 805

2 De los números siguientes, ¿cuáles son múltiplos de 3? Justifica tu respuesta.

173 186 390 510 555 679 754 1 023

3 Copia y rodea los múltiplos de 5.

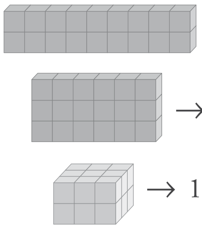
328 155 207 735
420 553 815

4 Escribe la sucesión de los veinte primeros múltiplos de 10. Obsérvalos. ¿Cómo sabes, de un vistazo, si un número es múltiplo de 10?

10 - 20 - 30 - 40 - …

5 Números primos y compuestos

Descomposiciones de 18



→ 18 = 2 · 9

→ 18 = 3 · 6

→ 18 = 2 · 3 · 3

Los divisores de un número permiten expresarlo en forma de producto.

▼ **EJEMPLO**

$$18 \rightarrow \begin{pmatrix} \text{DIVISORES} \\ 1 - 2 - 3 - 6 - 9 - 18 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 18 = 2 \cdot 9 \\ 18 = 3 \cdot 6 \\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \end{cases}$$

Los números, como 18, que se pueden descomponer en factores más sencillos se llaman **números compuestos.**

Sin embargo, hay números que solo tienen dos divisores (el mismo número y la unidad), lo cual impide su descomposición.

El 13 no se puede descomponer

13 = 13 · 1

▼ **EJEMPLO**

$$13 \rightarrow \begin{pmatrix} \text{DIVISORES} \\ 1 - 13 \end{pmatrix} \rightarrow 13 = 13 \cdot 1$$

Los números, como 13, que no se pueden descomponer en factores más sencillos se llaman **números primos.**

Un número primo **solo** tiene dos divisores: él mismo y la unidad.

El número 1, como solo tiene un divisor, no se considera primo.

En la tabla se han marcado:

— los múltiplos de 2, •, excepto el 2.

— los múltiplos de 3, •, excepto el 3.

— los múltiplos de 5, •, excepto el 5.

— … y así, sucesivamente, con los múltiplos de 7, ⊕; de 11, ∗; de 13, ▲; …

Los números que han quedado sin marcar son los primos menores que 30. Comprueba que ninguno de ellos se puede descomponer en factores.

1	②	③	4 •	⑤	6 ••
⑦	8 •	9 •	10 ••	⑪	12 ••
⑬	14 •⊕	15 ••	16 •	⑰	18 ••
⑲	20 ••	21 •⊕	22 •∗	㉓	24 ••
25 •	26 •▲	27 •	28 •⊕	㉙	30 •••

Actividades

1 Clasifica en primos y compuestos.

5 8 11 15 21

28 31 33 45 49

2 Entre estos números hay dos primos. Búscalos.

$\boxed{47}$ $\boxed{57}$

$\boxed{67}$

$\boxed{77}$ $\boxed{87}$

Expresa cada uno de los compuestos como un producto de dos factores.

3 Descompón en tres factores.

a) 16 b) 18 c) 40 d) 66

e) 72 f) 222 g) 500 h) 1 060

4 Descompón el número 100.

a) En dos factores.

b) En tres factores.

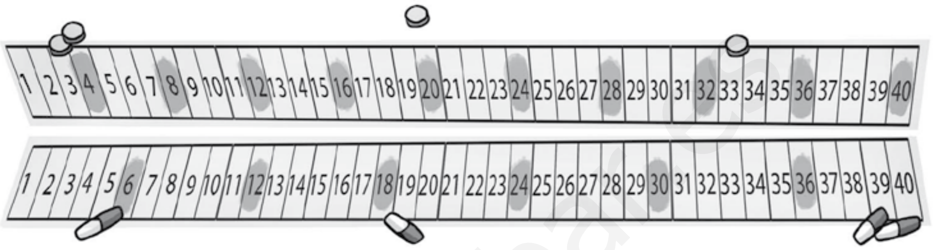
c) En el máximo número de factores que sea posible.

6 Mínimo común múltiplo de dos números

La resolución de ciertos problemas exige el manejo de los múltiplos comunes de varios números. Veamos un ejemplo:

▼ **EJEMPLO**

Doña Rosita toma una píldora para el reuma cada 4 días y una cápsula para el corazón cada 6 días.
¿Cada cuánto tiempo coinciden ambas tomas en el mismo día?



Ambas tomas coinciden en los días que son múltiplos comunes de 4 y 6, y se repiten cada 12 días.

$$12 \xrightarrow{+12} 24 \xrightarrow{+12} 36 \xrightarrow{+12} 48 \xrightarrow{+12} \ldots$$

El menor de estos múltiplos comunes es 12 y recibe el nombre de mínimo común múltiplo de 4 y 6.

El menor de los múltiplos comunes de dos o más números, *a, b, c,* … se llama **mínimo común múltiplo,** y se expresa así:

mín.c.m. (*a, b, c,* …)

Cálculo del mínimo común múltiplo (método artesanal)

Para obtener el mínimo común múltiplo de dos números:

- Escribimos los múltiplos de cada uno.
- Entresacamos los comunes.
- Tomamos el menor.

▼ **EJEMPLO**

Vamos a comprobar, siguiendo el método descrito, que el mínimo común múltiplo de 4 y 6 es, efectivamente, 12.

múltiplos de 4 → 4 - 8 - ⑫ - 16 - 20 - ㉔

múltiplos de 6 → 6 - ⑫ - 18 - ㉔ - 30 - ㊱

múltiplos comunes } → 12 - 24 - 36 - 48

mín.c.m. (4, 6) = 12

Ejercicio resuelto

Calcular mín.c.m. (10, 15).

Múltiplos de 10 → 10 20 $\enclose{circle}{30}$ 40 50 $\enclose{circle}{60}$ 70 …
Múltiplos de 15 → 15 $\enclose{circle}{30}$ 45 $\enclose{circle}{60}$ 75 90 105 …
Múltiplos comunes → 30 - 60 - 90 …

$$\left.\begin{array}{l}\text{El menor de los múltiplos}\\ \text{comunes de 10 y 15 es 30.}\end{array}\right\} \rightarrow \text{mín.c.m. (10, 15) = 30}$$

Actividades

1 Copia, observa y contesta.

$\dot{12}$ → 12 24 $\enclose{circle}{36}$ 48 60 $\enclose{circle}{72}$ 84 96 $\enclose{circle}{108}$…
$\dot{18}$ → 18 $\enclose{circle}{36}$ 54 $\enclose{circle}{72}$ 90 $\enclose{circle}{108}$ 126 …

a) Escribe los cuatro primeros múltiplos comunes de 12 y 18.

b) Escribe el mínimo común múltiplo de 12 y 18.

2 Copia, observa y completa a simple vista.

a) $\dot{6}$ → 6 12 18 $\enclose{circle}{24}$ 30 36 42 $\enclose{circle}{48}$ 54 …
$\dot{8}$ → 8 16 $\enclose{circle}{24}$ 32 40 $\enclose{circle}{48}$ 56 …
mín.c.m. (6, 8) = $\boxed{}$

b) $\dot{9}$ → 9 18 27 $\enclose{circle}{36}$ 45 54 63 $\enclose{circle}{72}$…
$\dot{12}$ → 12 24 $\enclose{circle}{36}$ 48 60 $\enclose{circle}{72}$ 84 …
mín.c.m. (9, 12) = $\boxed{}$

c) $\dot{15}$ → 15 30 45 60 75 90 105 …
$\dot{25}$ → 25 50 75 100 125 150 …
mín.c.m. (15, 25) = $\boxed{}$

3 Calcula por el método artesanal, igual que se ha hecho en el ejercicio anterior.

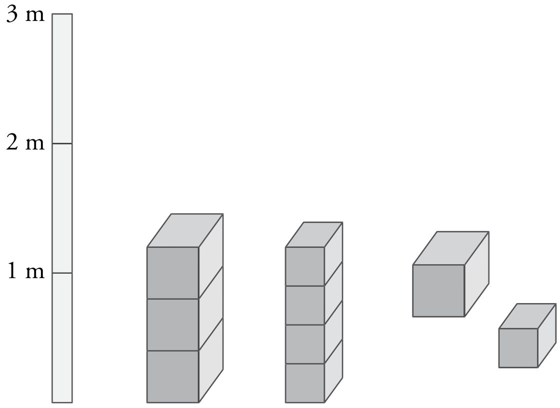
a) mín.c.m. (5, 8)
b) mín.c.m. (8, 12)
c) mín.c.m. (12, 24)
d) mín.c.m. (30, 40)
e) mín.c.m. (50, 75)
f) mín.c.m. (200, 300)

4 Calcula mentalmente.

a) mín.c.m. (2, 3)
b) mín.c.m. (4, 5)
c) mín.c.m. (6, 9)
d) mín.c.m. (6, 12)
e) mín.c.m. (5, 10)
f) mín.c.m. (15, 20)

5 Una fábrica envía mercancía a Valencia cada 6 días y a Sevilla cada 8 días. Hoy han coincidido ambos envíos. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que vuelvan a coincidir?

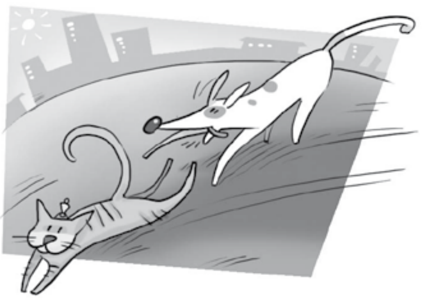
6 Se han construido dos columnas de igual altura: la primera apilando cubos de 40 cm de arista, y la segunda, con cubos de 30 cm de arista. ¿Qué altura alcanzarán sabiendo que superan los dos metros, pero no llegan a tres?



7 El autobús de la línea roja pasa por la parada, frente a mi casa, cada 20 minutos, y el de la línea verde, cada 30 minutos. Si ambos pasan juntos a las dos de la tarde, ¿a qué hora vuelven a coincidir?

7

Máximo común divisor de dos números



También encontrarás problemas que exigen el manejo de los divisores comunes a varios números. Veamos un ejemplo:

▼ **EJEMPLO**

Una sociedad protectora de animales ha recogido 8 gatos y 12 perros que se han de transportar en jaulas iguales, lo más grandes que sea posible, y de forma que en todas quepa el mismo número de individuos. ¿Cuántos animales irán en cada jaula?

Tanteando, se encuentran tres posibles soluciones:

- Primera solución: jaulas con un inquilino.

G	G	G	G	G	G	G	G

8 × 1

P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P

12 × 1

- Segunda solución: jaulas con dos inquilinos.

G G	G G	G G	G G

4 × 2

P P	P P	P P	P P	P P	P P

6 × 2

- Tercera solución: jaulas con cuatro inquilinos.

G G G G	G G G G

2 × 4

P P P P	P P P P	P P P P

3 × 4

Las soluciones coinciden con los divisores comunes de 8 y 12:

1 - 2 - 4

El mayor de estos divisores comunes es 4 y recibe el nombre de máximo común divisor de 8 y 12.

El mayor de los divisores comunes a dos o más números, a, b, c, … se llama **máximo común divisor,** y se expresa así:

máx.c.d. $(a, b, c, \ldots)$

Cálculo del máximo común divisor (método artesanal)

Para obtener el máximo común divisor de dos números:

- Escribimos los divisores de cada uno.
- Entresacamos los comunes.
- Tomamos el mayor.

▼ **EJEMPLO**

Vamos a comprobar, siguiendo el método descrito, que el máximo común divisor de 8 y 12 es, efectivamente, 4.

divisores de 8 → ① - ② - ④ - 8

divisores de 12 → ① - ② - 3 - ④ - 6 - 12

divisores comunes } → 1 - 2 - 4

máx.c.d. (8, 12) = 4

Ejercicio resuelto

Calcular máx.c.d. (20, 30).

Divisores de 20 → ① ② 4 ⑤ ⑩ 20
Divisores de 30 → ① ② 3 ⑤ 6 ⑩ 15 30

Divisores comunes → 1 - 2 - 5 - 10

El mayor de los divisores
comunes de 20 y 30 es 10. } → máx.c.d. (20, 30) = 10

Actividades

1 Copia, observa y contesta.

Div. de 12 → ① ② ③ 4 ⑥ 12
Div. de 18 → ① ② ③ ⑥ 9 18

a) Escribe los divisores comunes de 12 y 18.
b) Escribe el máximo común divisor de 12 y 18.

2 Copia, observa y completa a simple vista.

a) Div. de 12 → ① ② 3 ④ 6 12
Div. de 16 → ① ② ④ 8 16
máx.c.d. (12, 16) = ☐

b) Div. de 15 → ① 3 ⑤ 15
Div. de 20 → ① 2 4 ⑤ 10 20
máx.c.d. (15, 20) = ☐

c) Div. de 24 → ① ② ③ 4 ⑥ 8 12 24
Div. de 30 → ① ② ③ 5 ⑥ 10 15 30
máx.c.d. (24, 30) = ☐

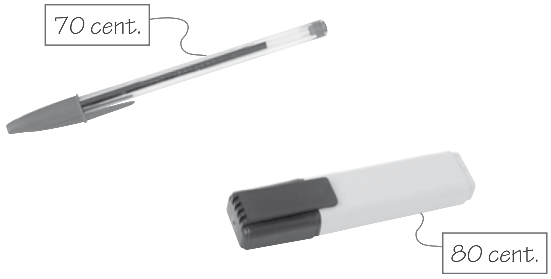
3 Calcula por el método artesanal, igual que se ha hecho en el ejercicio anterior.

a) máx.c.d. (6, 8)
b) máx.c.d. (8, 20)
c) máx.c.d. (10, 15)
d) máx.c.d. (12, 24)
e) máx.c.d. (18, 24)
f) máx.c.d. (40, 50)

4 Calcula mentalmente.

a) máx.c.d. (2, 3)
b) máx.c.d. (4, 5)
c) máx.c.d. (3, 9)
d) máx.c.d. (6, 9)
e) máx.c.d. (30, 40)
f) máx.c.d. (50, 75)

5 Rosa ha sacado de la hucha un montón de monedas, todas iguales, y ha comprado un bolígrafo. Después, ha vuelto a la tienda y ha comprado un rotulador.



¿Cuánto puede valer cada moneda? (Busca todas las soluciones posibles).

6 Un carpintero tiene dos listones de 180 cm y 240 cm, respectivamente, y desea cortarlos en trozos iguales, lo más largos que sea posible, y sin desperdiciar madera. ¿Cuánto debe medir cada trozo?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

La relación de divisibilidad

1 ▼▽▽ Reflexiona, contesta "Sí" o "No" y justifica tus respuestas:

a) ¿Se pueden guardar 300 litros de aceite en bidones de 15 litros sin que sobre nada?

b) Si sacas del horno 100 magdalenas, y las empaquetas por docenas, ¿queda alguna suelta?

c) ¿Se puede cortar un listón de 1,80 m en un número exacto de trozos de 20 cm?

d) ¿Hacen 100 minutos un número exacto de cuartos de hora?

2 ▼▽▽ Razona si existe relación de divisibilidad entre:

a) 20 y 300 b) 13 y 195 c) 38 y 138

d) 15 y 75 e) 23 y 203 f) 117 y 702

Múltiplos y divisores

3 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) Tres números contenidos una cantidad exacta de veces en 180.

b) Tres números que contengan a 15 una cantidad exacta de veces.

c) Tres divisores de 180.

d) Tres múltiplos de 15.

4 ▼▽▽ Escribe.

a) Los múltiplos de 20 comprendidos entre 150 y 210.

b) Un múltiplo de 13 comprendido entre 190 y 200.

5 ▼▼▽ Escribe.

a) Todos los pares de números cuyo producto es 80.

b) Todos los divisores de 80.

6 ▼▽▽ ¿Cuáles de estas cantidades de dinero puedes obtener juntando billetes de cinco euros?:

15 €	22 €	37 €	45 €	80 €	94 €	120 €	1 000 €

¿Y juntando billetes de 10 euros?

7 ▼▼▽ Busca todos los divisores de:

a) 10 b) 18 c) 20 d) 24

e) 30 f) 39 g) 45 h) 50

8 ▼▼▽ Describe todas las formas que hay de dividir una clase de 30 chicos y chicas en equipos iguales. Por ejemplo: 5 equipos de 6.

9 ▼▼▽ Busca todas las formas posibles de hacer montones iguales con 72 terrones de azúcar.

Criterios de divisibilidad

10 ▼▽▽ Sustituye cada letra por una cifra, para que el número resultante sea divisible entre 3.

A51 2B8 31C 52D 1E8

11 ▼▼▽ Busca, en cada caso, todos los valores posibles de *a* para que el número resultante sea, a la vez, múltiplo de 2 y de 3:

4 *a* 3 2 *a* 2 4 *a*

Números primos y compuestos

12 ▼▼▽ Separa los números primos de los compuestos.

14	17	28	29	47	53
57	63	71	79	91	99

13 ▼▼▼ Busca el primer número, mayor que 90, que no se pueda expresar como el producto de dos factores diferentes de él mismo y de la unidad.

14 ▼▼▼ Averigua si el número 113 es primo o compuesto. Justifica tu respuesta.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

15 ▼▼▽ Calcula.

a) mín.c.m. (4, 8) b) máx.c.d. (4, 8)

c) mín.c.m. (10, 20) d) máx.c.d. (10, 20)

e) mín.c.m. (20, 30) f) máx.c.d. (20, 40)

16 ▼▼▽ El mínimo común múltiplo de dos números es 15. ¿Cuáles pueden ser esos números?

Resuelve problemas

17 ▼▼▽ Antonio tiene entre 40 y 50 años, justo el triple que su hijo Julio, que tiene menos de 15. ¿Cuántos años tiene cada uno?

18 ▼▼▽ Ricardo puede ordenar su colección de cromos por parejas, por tríos y en grupos de cinco. ¿Cuántos cromos tiene Ricardo, sabiendo que son más de 80 y menos de 100?

19 ▼▼▽ Raquel ha envasado 64 mantecados en cajas iguales. ¿Cuántas cajas ha llenado? (Escribe todas las soluciones posibles).

20 ▼▼▽ En un almacén de maderas se han apilado tablones de pino, de un grosor de 35 mm, hasta alcanzar la misma altura que otra pila de tablones de roble, de 20 mm de gruesos. ¿Cuál será la altura de ambas pilas? (Busca, al menos, tres soluciones).

21 ▼▼▽ Un vaso pesa 75 gramos, y una taza, 60 gramos. ¿Cuántos vasos hay que colocar en uno de los platillos de una balanza, y cuántas tazas en el otro, para que la balanza quede equilibrada?

22 ▼▼▽ Un comerciante, en un mercadillo, intercambia con un compañero un lote de camisetas de 24 € la unidad por un lote de zapatillas de 30 € la unidad. ¿Cuántas camisetas entrega y cuántas zapatillas recibe?

23 ▼▼▼ Un grupo de 60 niños, acompañados de 36 padres, acuden a un campamento en la montaña. Para dormir, acuerdan ocupar cada cabaña con el mismo número de personas. Además, cuantas menos cabañas ocupen menos pagan. Por otro lado, ni los padres quieren dormir con niños ni los niños con padres. ¿Cuántos entrarán en cada cabaña?

☞ *Utiliza el máximo común divisor.*

Autoevaluación

1 Busca pares de números emparentados por la relación de divisibilidad:

6 10 30 80

2 Contesta sí o no y justifica tu respuesta.

a) ¿Es 60 divisible entre 15?

b) ¿Es 5 múltiplo de 15?

c) ¿Es 6 divisor de 30?

d) ¿Es 162 múltiplo de 8?

3 Escribe.

a) Los cinco primeros múltiplos de 6 comprendidos entre 50 y 70.

b) Todos los divisores de 30.

4 Completa.

a) Un número es múltiplo de 3 cuando …

b) Un número es divisible entre 5 cuando …

5 Separa los primos de los compuestos:

14 - 23 - 65 - 67 - 87 - 97 - 101 - 111

6 Calcula.

a) mín.c.m. (10, 15)

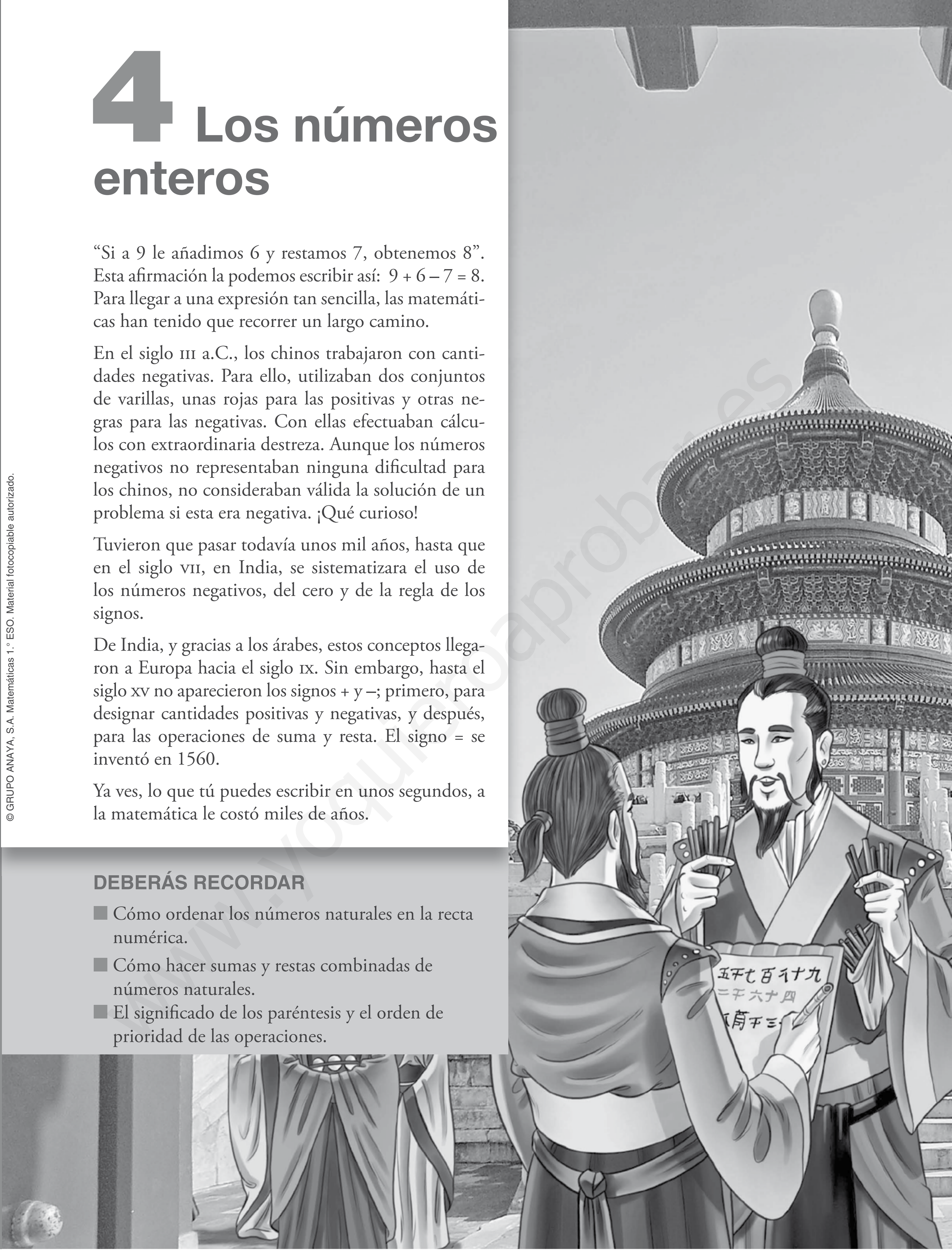
b) máx.c.d. (10, 15)

c) mín.c.m. (30, 40)

d) máx.c.d. (30, 40)

7 ¿De cuántas formas distintas se puede dividir una clase de 28 alumnos, en equipos con el mismo número de miembros, sin que sobre ninguno?

8 En un edificio de oficinas, el vigilante nocturno completa su ronda cada 30 minutos, y su compañero, que vigila el parque exterior, cada 40 minutos. Ambos inician su jornada a las diez de la noche. ¿A qué hora volverán a coincidir en el punto de partida?



4 Los números enteros

“Si a 9 le añadimos 6 y restamos 7, obtenemos 8”. Esta afirmación la podemos escribir así: $9 + 6 - 7 = 8$. Para llegar a una expresión tan sencilla, las matemáticas han tenido que recorrer un largo camino.

En el siglo III a.C., los chinos trabajaron con cantidades negativas. Para ello, utilizaban dos conjuntos de varillas, unas rojas para las positivas y otras negras para las negativas. Con ellas efectuaban cálculos con extraordinaria destreza. Aunque los números negativos no representaban ninguna dificultad para los chinos, no consideraban válida la solución de un problema si esta era negativa. ¡Qué curioso!

Tuvieron que pasar todavía unos mil años, hasta que en el siglo VII, en India, se sistematizara el uso de los números negativos, del cero y de la regla de los signos.

De India, y gracias a los árabes, estos conceptos llegaron a Europa hacia el siglo IX. Sin embargo, hasta el siglo XV no aparecieron los signos + y –; primero, para designar cantidades positivas y negativas, y después, para las operaciones de suma y resta. El signo = se inventó en 1560.

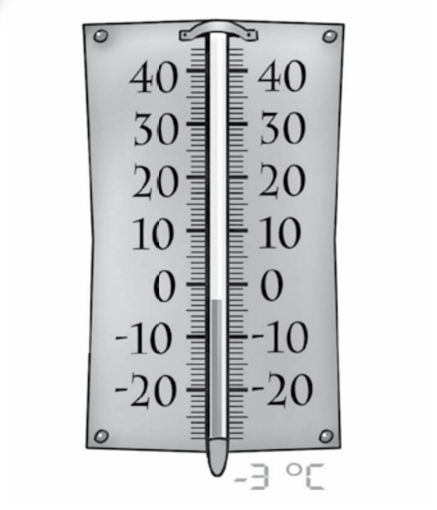
Ya ves, lo que tú puedes escribir en unos segundos, a la matemática le costó miles de años.

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo ordenar los números naturales en la recta numérica.
- Cómo hacer sumas y restas combinadas de números naturales.
- El significado de los paréntesis y el orden de prioridad de las operaciones.

1

Números positivos y negativos



Los números naturales se utilizan para expresar matemáticamente multitud de situaciones cotidianas. Sin embargo, a veces no sirven para cuantificar las situaciones opuestas asociadas. En esos casos, es necesaria la utilización de los números negativos.

Por ejemplo:

- Estamos a ocho grados centígrados. ⟶ $\boxed{+8}$ → N.º natural
  Estamos a ocho bajo cero. ⟶ $\boxed{-8}$ → N.º negativo
- Julián gana 20 euros. ⟶ $\boxed{+20}$ → N.º natural
  Julián gasta 20 euros. ⟶ $\boxed{-20}$ → N.º negativo

- Llamamos **números negativos** a los que están por debajo del cero.
- Los números negativos se escriben precedidos del signo **menos:**

$$-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$$

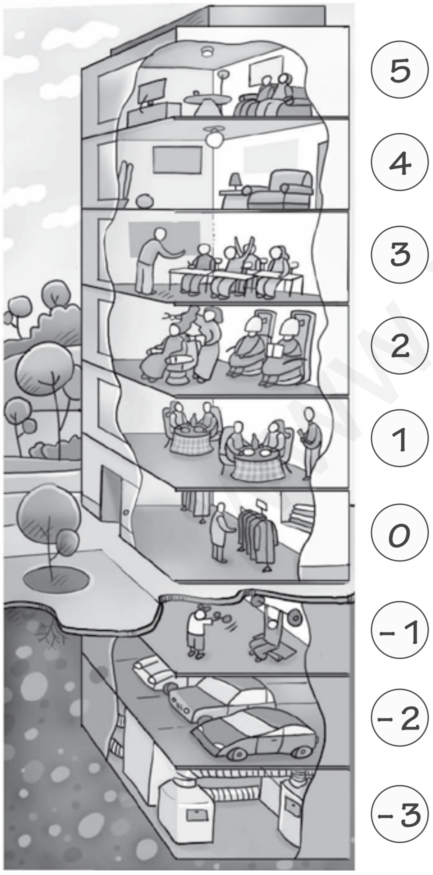
- Cuando un número no lleva signo, entendemos que es positivo:

$$3 = +3 \qquad\qquad +15 = 15$$

- Cuando se plantean operaciones con números negativos, estos se suelen escribir entre paréntesis:

$5 + (-2)$ → El número positivo 5 se suma con el negativo –2.

$(-4) \cdot (-3)$ → El número negativo –4 se multiplica por el negativo –3.



Utilidad de los números positivos y negativos

■ Los números positivos y los números negativos sirven para expresar cantidades o posiciones fijas.

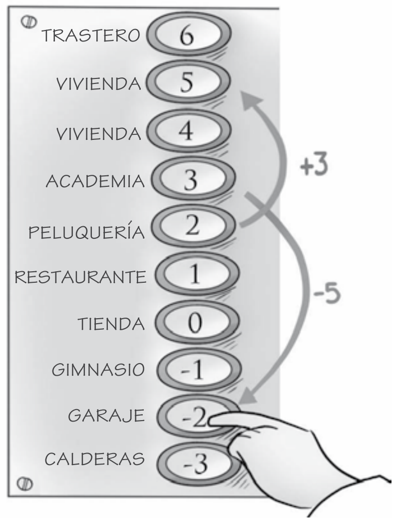
▼ **EJEMPLOS**

- En un edificio nos podemos encontrar en un piso sobre la calle o en un sótano:

  Sexto piso ⟶ +6
  Segundo sótano ⟶ –2

- Nuestro saldo en una cuenta bancaria puede ser positivo o estar en números rojos (negativo):

  Rosa tiene ciento cincuenta euros. ⟶ +150
  Francisco debe ochenta y cinco euros. ⟶ –85



■ Los números positivos y los negativos sirven para expresar variaciones de cantidad.

▼ **EJEMPLOS**

- Con el ascensor del edificio puedes subir o bajar a otra planta:
  - Subes del segundo al quinto (tres plantas). ⟶ +3
  - Bajas del tercer piso al segundo sótano (cinco plantas). ⟶ –5
- La temperatura que marca el termómetro sufre variaciones:
  - Hace más calor. El termómetro ha subido dos grados. ⟶ +2
  - Está refrescando. El termómetro ha bajado dos grados. ⟶ –2

Actividades

1 Describe tres situaciones en las que se hace necesario el uso de números negativos.

Por ejemplo, para expresar las lecturas del termómetro de ambiente.

2 Escribe tres elementos más en cada una de las siguientes series numéricas:

a) 0, 1, –1, 2, –2, …
b) 6, 4, 2, 0, –2, …
c) 20, 15, 10, 5, 0, …
d) –21, –20, –18, –15, –11, …
e) 8, 7, 5, 2, –2, …

3 Asocia un número positivo o negativo a cada uno de los enunciados siguientes:

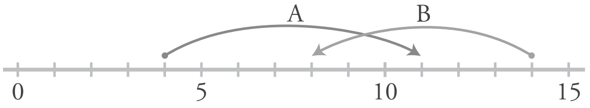
a) Mercedes tiene en el banco 2 500 euros.
b) Miguel debe 150 euros.
c) Vivo en el séptimo piso.
d) Tengo el coche aparcado en el segundo sótano.
e) El termómetro marca 18 °C.
f) El termómetro marca tres grados bajo cero.
g) Tengo un billete de 10 €.
h) Debo 2 € a un amigo.

4 Expresa numéricamente cada enunciado:

a) He ganado 60 € con una quiniela.
b) He pagado una factura de 60 €.
c) El termómetro ha subido cinco grados.
d) El termómetro ha bajado cinco grados.
e) El ascensor ha subido cuatro plantas.
f) El ascensor ha bajado cuatro plantas.
g) He perdido una moneda de 2 €.

5 Expresa con un número los saltos en cada escalera:

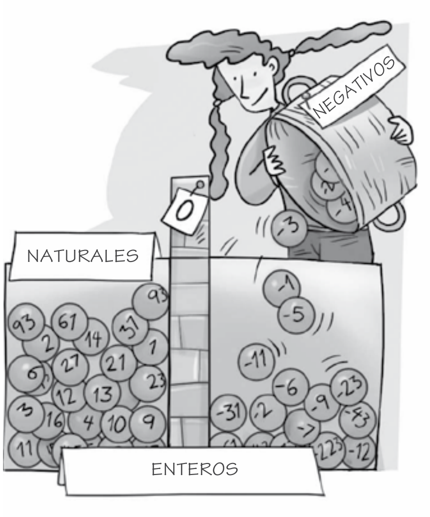
6 Escribe un número para cada movimiento en la recta:



7 Asocia un número a cada enunciado:

a) La temperatura ha bajado de 21 °C a 18 °C.
b) He subido del segundo sótano al segundo piso.
c) La semana pasada tenía 37 € en la hucha y ahora solo tengo 34 €.
d) Ha amanecido a dos grados bajo cero y ahora, a mediodía, tenemos 3 °C.

2 El conjunto de los números enteros



El conjunto ℤ

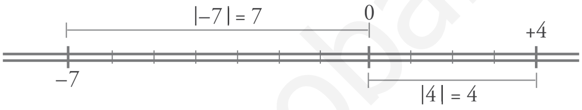
Si al conjunto ℕ de los números naturales le añadimos los correspondientes números negativos, obtenemos un nuevo conjunto que se conoce en matemáticas como **conjunto de los números enteros** y se designa por la letra ℤ.

Valor absoluto de un número entero

El valor absoluto de un número entero es la longitud del segmento que lo separa del cero en la recta numérica. Se expresa escribiéndolo entre barras:

El valor absoluto de –7 es 7 → $|-7| = 7$

El valor absoluto de +4 es 4 → $|+4| = 4$



El **valor absoluto** de un número entero es el número natural que resulta al quitarle el signo.

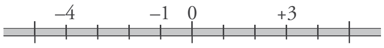
$$|a| \longrightarrow \text{valor absoluto de } a$$

Comparación de números enteros

- Si dos enteros son positivos, el mayor es el que tiene mayor valor absoluto. Por ejemplo: +20 > +8.
- Cualquier número positivo es mayor que el cero, y el cero es mayor que cualquier negativo. Por ejemplo: +8 > 0 > –8.
- Entre dos enteros negativos, es mayor el de menor valor absoluto. Por ejemplo: –8 > –20

Orden en la recta

Si un número, *a*, es menor que otro, *b*, entonces *a* esta a la izquierda de *b* en la recta.



$-4 < -1 < +3$

Actividades

1 Escribe el valor absoluto de:

a) –5 b) +8 c) –3

d) +4 e) –7 f) +1

2 Completa.

a) |–6| = … b) |+6| = … c) |–2| = …

d) |+9| = … e) |–11| = … f) |+10| = …

3 Escribe dos números distintos que tengan el mismo valor absoluto.

4 Representa en la recta y ordena de menor a mayor.

–7, +4, –1, +7, +6, –4, –5, +3, –11

5 Copia y coloca el signo < o el signo > según corresponda.

a) (+8) … (+3) b) (–8) … (+3) c) (+8) … (–3)

d) (–2) … (–5) e) (+2) … (–5) f) (–2) … (+5)

6 Ordena de menor a mayor.

a) +5, –3, –7, 0, +1, +6, –12, –5

b) –6, –3, –9, 0, –1, –5, –12, –4

3 Sumas y restas de números enteros

Empecemos aprendiendo a resolver las expresiones más sencillas, que son las que no tienen paréntesis.

Sumas y restas de dos números

LOS DOS NÚMEROS LLEVAN EL MISMO SIGNO

- Si me dan 4 y me dan 3, gano 7. ⟶ 4 + 3 = +7
- Si me quitan 3 y me quitan 8, pierdo 11. ⟶ –3 – 8 = –11

Cuando los dos números llevan el **mismo signo:**

- Se suman los valores absolutos.
- Se pone el mismo signo que tenían los números.

LOS DOS NÚMEROS TIENEN DISTINTO SIGNO

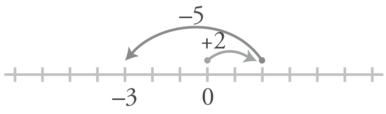
- Si me quitan 2 y me dan 8, gano 6. ⟶ –2 + 8 = +6
- Si me dan 4 y me quitan 9, pierdo 5. ⟶ +4 – 9 = –5

Cuando los dos números llevan **distinto signo:**

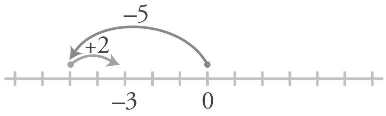
- Se restan los valores absolutos.
- Se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

Ten en cuenta

El orden no cuenta mientras cada número conserve su signo:



+2 – 5 = –3



–5 + 2 = –3

+2 – 5 = –5 + 2 = –3

Sumas y restas de más de dos números

Para resolver estas expresiones, puedes actuar de dos formas diferentes.

Ejercicio resuelto

Calcular: 3 – 8 + 6 – 4

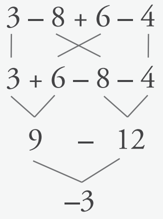
1.er método: Puedes ir operando, paso a paso, en el orden en que aparecen los números.

3 – 8 + 6 – 4
–5 + 6 – 4
1 – 4
–3

Se expresa así:

3 – 8 + 6 – 4 = –5 + 6 – 4 = 1 – 4 = –3

2.° método: Puedes sumar los positivos por un lado y los negativos por otro. Después, se restan los resultados.



Se expresa así:

3 – 8 + 6 – 4 = 3 + 6 – 8 – 4 = 9 – 12 = –3

Actividades

1 Copia y completa.

- Si me dan 6 y me dan 7, gano 13. → +6 + 7 = …
- Si me dan 3 y me quitan 8, pierdo … → +3 – 8 = …
- Si me quitan 4 y me dan 6, … → –4 + 6 = …
- Si me quitan 5 y me quitan 4, … → –5 – 4 = …

2 Calcula, teniendo en cuenta que ambos números tienen el mismo signo.

a) 6 + 5 b) +4 + 8 c) +10 + 7
d) –6 – 2 e) –4 – 6 f) –5 – 9
g) +8 + 7 h) –8 – 7 i) –12 – 4

3 Opera, teniendo en cuenta que los dos números llevan signos diferentes.

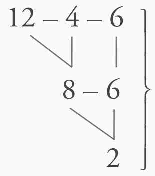
a) +9 – 5 b) +3 – 7 c) +6 – 10
d) –2 + 7 e) –15 + 5 f) –11 + 8
g) 7 – 12 h) 11 – 4 i) –18 + 10

4 Calcula.

a) +6 – 7 b) –8 + 7 c) –5 – 1
d) +8 + 2 e) +10 – 12 f) –16 + 20
g) +11 + 21 h) –13 – 12 i) –18 + 11

5 **Ejercicio resuelto**

Resolver, operando en el orden en que aparecen las operaciones: 12 – 4 – 6



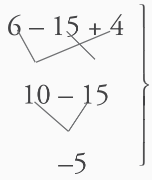
12 – 4 – 6 = 8 – 6 = 2

6 Opera, siguiendo los pasos del ejercicio resuelto anterior.

a) 10 – 3 – 5 b) 15 – 9 – 6 c) 5 – 8 + 4
d) 9 – 3 + 5 e) –2 + 2 + 7 f) –10 + 8 + 6
g) –10 – 3 + 8 h) –4 – 3 – 2 i) –1 – 5 – 7

7 **Ejercicio resuelto**

Resolver, sumando primero los números del mismo signo: 6 – 15 + 4



6 – 15 + 4 = 10 – 15 = – 5

8 Opera como en el ejercicio resuelto anterior.

a) 9 – 2 – 3 b) 12 – 4 – 6 c) 3 – 7 + 4
d) 5 – 9 + 8 e) –13 + 6 + 4 f) –2 + 10 – 15
g) –11 – 4 + 8 h) –5 – 3 – 4 i) –8 + 5 + 6

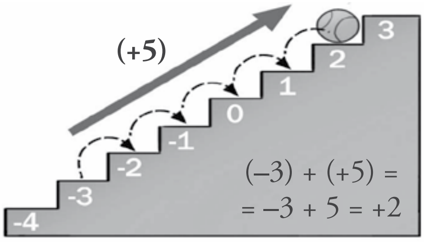
9 Resuelve juntando los positivos por un lado y los negativos por otro, como en el ejemplo.

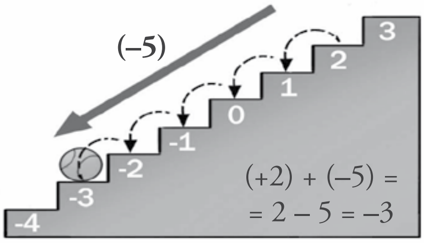
- **– 4 + 6 – 8 + 7 = 6 + 7 – 4 – 8 = 13 – 12 = 1**

a) 5 + 7 – 2 – 4
b) 2 – 6 + 4 – 9
c) 9 – 6 – 7 + 2
d) –4 – 5 + 3 + 8
e) –8 + 2 – 7 + 6
f) –1 + 5 + 6 – 7

4

Sumas y restas con paréntesis





Los números enteros, en las operaciones, se suelen presentar entre paréntesis. Ahora vas a aprender a suprimir esos paréntesis en las expresiones con sumas y restas. Así, se reducen a lo que ya sabes. Se presentan cuatro casos.

■ SUMAR UN NÚMERO POSITIVO

$$\underset{\text{AÑADIR}}{\overset{\uparrow}{+}}\ \underset{\text{GANANCIA}}{\overset{\uparrow}{(+5)}} = +5$$

Ingresar una ganancia es aumentar (ganar).

$8 + (+5) = 8 + 5 = 13$

■ SUMAR UN NÚMERO NEGATIVO

$$\underset{\text{AÑADIR}}{\overset{\uparrow}{+}}\ \underset{\text{DEUDA}}{\overset{\uparrow}{(-2)}} = -2$$

Ingresar una deuda es disminuir (perder).

$8 + (-2) = 8 - 2 = 6$

Para **sumar un número entero,** se quita el paréntesis y se deja el signo propio del número:

$+ (+a) = +a \qquad + (-a) = -a$

■ RESTAR UN NÚMERO POSITIVO

$$\underset{\text{EXTRAER}}{\overset{\uparrow}{-}}\ \underset{\text{GANANCIA}}{\overset{\uparrow}{(+5)}} = -5$$

Suprimir una ganancia es disminuir (perder).

$8 - (+5) = 8 - 5 = 3$

■ RESTAR UN NÚMERO NEGATIVO

$$\underset{\text{EXTRAER}}{\overset{\uparrow}{-}}\ \underset{\text{DEUDA}}{\overset{\uparrow}{(-2)}} = +2$$

Suprimir una deuda es aumentar (ganar).

$8 - (-2) = 8 + 2 = 10$

Para **restar un número entero,** se quita el paréntesis y se le pone al número el signo contrario al que tenía:

$-(+a) = -a \qquad -(-a) = +a$

Ejercicio resuelto

Calcular:

- $(+3) + (+5) = 3 + 5 = 8$
- $(+10) + (-3) = 10 - 3 = 7$
- $(-8) + (-4) = -8 - 4 = -12$
- $(-6) + (+3) = -6 + 3 = -3$
- $(+5) - (+8) = 5 - 8 = -3$
- $(+2) - (-6) = 2 + 6 = 8$
- $(-5) - (+6) = -5 - 6 = -11$
- $(-7) - (-3) = -7 + 3 = -4$

–[(–8) + (–10) + (–3)] =

= –[–8 – 10 – 3] = 8 + 10 + 3 = +21

Sumas y restas dentro de un paréntesis

El paréntesis empaqueta, en un solo bloque, todo lo que va en él. Por eso, el signo que lo precede afecta a todos los sumandos (o restandos) que haya en el interior. Se dan dos casos.

PARÉNTESIS PRECEDIDO DE SIGNO POSITIVO

$$+\underbrace{(+3-6+5)}_{\text{Me dan}} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Me dan } (+3)\\ \text{Me dan } (-6)\\ \text{Me dan } (+5)\end{array}\right\} \to +(+3)+(-6)+(+5) = 3-6+5$$

Los signos finales son los mismos que tenían los sumandos dentro del paréntesis.

PARÉNTESIS PRECEDIDO DE SIGNO NEGATIVO

$$-\underbrace{(+8-6-5)}_{\text{Me quitan}} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Me quitan } (+8)\\ \text{Me quitan } (-6)\\ \text{Me quitan } (-5)\end{array}\right\} \to -(+8)-(-6)-(-5) = -8+6+5$$

Los signos finales son los contrarios a los que había dentro del paréntesis.

- Al quitar un paréntesis precedido del signo +, los signos de los sumandos (restandos) interiores quedan como estaban.
- Al quitar un paréntesis precedido del signo –, cada uno de los signos de los sumandos (restandos) interiores se cambia por su opuesto.

Ejercicio resuelto

Operar la expresión siguiente:

$$\mathbf{12-[8-(7-10)+(2-6)]}$$

Podemos resolverla de dos formas diferentes:

a) Operar dentro de cada paréntesis, empezando por los más pequeños.

$$\begin{aligned}12-[8-(7-10)+(2-6)] &= 12-[8-(-3)+(-4)] =\\ &= 12-[8+3-4] =\\ &= 12-[+7] =\\ &= 12-7 = 5\end{aligned}$$

b) Quitar paréntesis, empezando por los más pequeños, y después operar.

$$\begin{aligned}12-[8-(7-10)+(2-6)] &= 12-[8-7+10+2-6] =\\ &= 12-8+7-10-2+6 =\\ &= (12+7+6)-(8+10+2) =\\ &= 25-20 = 5\end{aligned}$$

Actividades

1 Quita paréntesis.

a) +(–1)
b) –(+4)
c) +(+8)
d) –(+7)
e) +(–10)
f) –(–6)
g) +(–11)
h) –(–13)
i) +(–15)
j) –(+16)
k) +(–9)
l) –(–7)

2 Quita los paréntesis.

a) +(+2)
b) +(–8)
c) +(–4)
d) –(–9)
e) –(+5)
f) +(–12)
g) +(–14)
h) +(+15)
i) –(+25)
j) –(–2)

3 Opera y comprueba los resultados de las siguientes sumas y restas:

a) +(+8) – (+5)
b) –(+6) – (–2)
c) +(–2) + (–6)
d) +(+7) – (–3)
e) +(–9) – (+2)
f) –(+6) + (+4)

a) +3; b) –4; c) –8; d) +10; e) –11; f) –2

4 Quita paréntesis, calcula, y comprueba el resultado de cada operación:

a) +(5 + 3)
b) +(–6 – 3)
c) –(8 + 15)
d) –(–2 – 4)
e) +(9 – 7 – 2)
f) +(1 – 8 + 3)
g) –(–6 + 5 – 7)
h) –(7 – 5 + 4)
i) +(–3 – 1 – 4)
j) –(–2 –3 + 8)

a) +8; b) –9; c) –23; d) +6; e) 0;
f) –4; g) +8; h) –6; i) –8; j) –3

5 Quita el paréntesis y calcula igual que se ha hecho en el ejemplo.

- **16 – (–5) = 16 + 5 = 21**

a) 12 + (+4)
b) 8 + (+3)
c) 10 – (+8)
d) 15 – (–6)
e) 13 – (+9)
f) 9 + (–1)
g) 2 – (+8)
h) 3 – (–5)
i) 4 + (–10)
j) 10 – (+16)
k) 15 – (+25)
l) 30 – (–12)

6 Suprime los paréntesis y, después, opera, como en el ejemplo.

- **–(+14) – (–12) = –14 + 12 = –2**

a) +(+7) + (+6)
b) +(–5) + (–3)
c) +(–6) – (+8)
d) –(–7) + (–10)
e) –(–3) – (–5)
f) –(–2) – (+6)
g) +(–7) – (–3)
h) –(–5) + (+4)
i) +(–12) + (+10)
j) –(+6) – (+8)

7 Calcula.

a) 18 + (+12)
b) 22 – (+15)
c) 35 – (–15)
d) 30 + (–18)
e) –24 – (–20)
f) –15 – (+15)
g) –(+22) – 16
h) –(–27) – 30
i) +(–25) – 24
j) –(+36) + 26
k) –(+12) – (+13)
l) +(–16) + (–14)

8 Quita primero el paréntesis, como en el ejemplo, y después calcula.

- **15 – (+3 – 8) = 15 – 3 + 8 = 23 – 3 = 20**

a) 12 + (+3 – 5)
b) 14 + (+12 – 10)
c) 6 – (9 – 7)
d) 15 – (2 – 9)
e) 11 – (–6 + 3)
f) 10 – (–7 – 5)
g) 13 + (–8 + 2)
h) 17 + (–5 – 9)
i) 8 + (–8 + 8)
j) 9 – (–3 – 10)

9 Repite los ejercicios de la actividad anterior, operando en primer lugar dentro del paréntesis, como se hace en el ejemplo.

- **15 – (+3 – 8) = 15 – (–5) = 15 + 5 = 20**

Comprueba que obtienes los mismos resultados que eliminando primero los paréntesis.

10 Calcula quitando primero los paréntesis, como en el ejemplo.

- **(5 – 12) – (8 – 6) = 5 – 12 – 8 + 6 = 11 – 20 = –9**

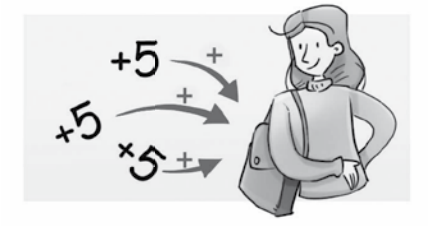
a) (7 – 4) + (9 – 5)
b) (2 + 6) + (5 – 8)
c) (5 – 9) + (2 – 12)
d) (7 + 3) – (5 + 4)
e) (8 – 12) – (2 – 5)
f) (10 – 7) – (–2 – 6)
g) –(8 + 4) + (5 – 9)
h) –(6 – 2) – (7 – 9)

5 Multiplicación y división de números enteros

Multiplicación de números enteros

Para multiplicar números enteros, actuaremos igual que para multiplicar números naturales, pero ahora, además, hemos de preocuparnos del signo.

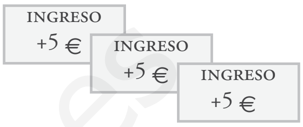
PRODUCTO DE DOS NÚMEROS POSITIVOS



Si obtengo 3 ingresos de 5 €, gano 15 €.

$+(+5) + (+5) + (+5) = 5 + 5 + 5 = +15$

$(+3) \cdot (+5) = +15$

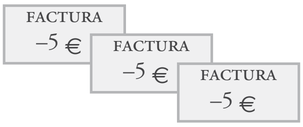


PRODUCTO DE UN NÚMERO POSITIVO POR OTRO NEGATIVO

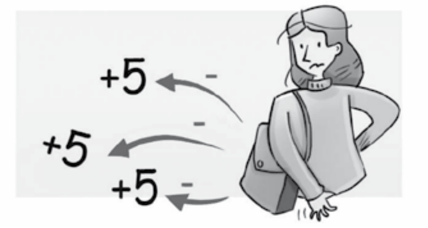
Si me llegan 3 facturas de 5 €, pierdo 15 €.

$+(-5) + (-5) + (-5) = -5 - 5 - 5 = -15$

$(+3) \cdot (-5) = -15$



PRODUCTO DE UN NÚMERO NEGATIVO POR OTRO POSITIVO



Si me anulan 3 ingresos de 5 €, pierdo 15 €.

$-(+5) - (+5) - (+5) = -5 - 5 - 5 = -15$

$(-3) \cdot (+5) = -15$

PRODUCTO DE DOS NÚMEROS NEGATIVOS

Si me anulan 3 facturas de 5 €, gano 15 €.

$-(-5) - (-5) - (-5) = +5 + 5 + 5 = +15$

$(-3) \cdot (-5) = +15$

Para automatizar la multiplicación de enteros, aplica la siguiente regla que te permite obtener el signo del producto sin necesidad de pararte a reflexionar.

REGLA DE LOS SIGNOS

Al multiplicar dos números enteros:

- Si los dos factores tienen el **mismo signo,** el **resultado** final es **positivo.**
- Si los dos factores tienen **distinto signo,** el **resultado** final es **negativo.**

$$\left.\begin{matrix}(+) \cdot (+) = + \\ (-) \cdot (-) = +\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(+) \cdot (-) = - \\ (-) \cdot (+) = -\end{matrix}\right.$$

Ten en cuenta

Para multiplicar tres enteros:

$$\underbrace{(-2) \cdot (-3)} \cdot (-5) = (+6) \cdot (-5) =$$
$$= -30$$

o bien:

$$(-2) \cdot \underbrace{(-3) \cdot (-5)} = (-2) \cdot (+15) =$$
$$= -30$$

La multiplicación de enteros cumple la **propiedad asociativa.**

División de números enteros

Igual que en la multiplicación, lo único nuevo que necesitas aprender para dividir enteros es la forma de calcular el signo del cociente. Con lo que ya sabes del producto, es fácil averiguar ese signo:

(+4) · (+5) = +20 → (+20) : (+4) = +5 → *Más entre más, más.*

(–4) · (–5) = +20 → (+20) : (–4) = –5 → *Más entre menos, menos.*

(+4) · (–5) = –20 → (–20) : (+4) = –5 → *Menos entre más, menos.*
→ (–20) : (–5) = +4 → *Menos entre menos, más.*

La **regla de los signos** para la división coincide con la del producto.

SIGNOS IGUALES
(+) : (+) = +
(–) : (–) = +

SIGNOS DIFERENTES
(+) : (–) = –
(–) : (+) = –

Ten en cuenta

No es lo mismo…

[(–60) : (+6)] : (–2)
[–10] : (–2)
+5

que…

(–60) : [(+6) : (–2)]
[–60] : (–3)
+20

La división de enteros **no es asociativa.**

▼ **EJEMPLOS**

(–12) : (+4) = –3 (+30) : (–5) = –6 (+18) : (+9) = +2 (–15) : (–3) = +5

Operaciones combinadas

En las expresiones con números enteros hemos de atender:

- Primero, a los paréntesis.
- Después, a la multiplicación y a la división.
- Por último, a la suma y a la resta.

▼ **EJEMPLO**

15 – 3 · [6 – (–12) : (+4)]
15 – 3 · [6 – (–3)]
15 – 3 · [+9]
15 – 27
–12

15 – 3 · [6 – (–12) : (+4)] = 15 – 3 · [6 – (–3)] =
= 15 – 3 · [6 + 3] =
= 15 – 3 · [+9] = 15 – 27 = –12

Actividades

1 Calcula estos productos:

a) 3 · (–2) b) 4 · (+5) c) 8 · (–6)
d) –5 · (+3) e) –2 · (–4) f) –6 · (+3)
g) (–4) · (+7) h) (+2) · (+6) i) (–5) · (–7)
j) (+3) · (–8) k) (–9) · (–3) l) (–6) · (+4)

2 Calcula el cociente entero, si existe.

a) (–8) : (+2) b) (+20) : (–10) c) (–12) : (–4)
d) (–4) : (+3) e) (+20) : (–7) f) (–1) : (+6)
g) (–15) : (–3) h) (+32) : (+8) i) (–36) : (+9)
j) (+42) : (–7) k) (–48) : (–8) l) (+54) : (+6)

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

El conjunto ℤ.

1 ▼▽▽ Expresa con la notación de los números enteros, como se hace en el ejemplo:

- **Antonio gana 15 € buzoneando propaganda.**

  +(+15) = +15

a) A Rosa le llega una factura de teléfono de 57 €.

b) Por no hacer la tarea, pierdo los dos positivos que tenía en Matemáticas.

c) He resuelto un problema complicado. El profesor me quita los dos negativos que tenía.

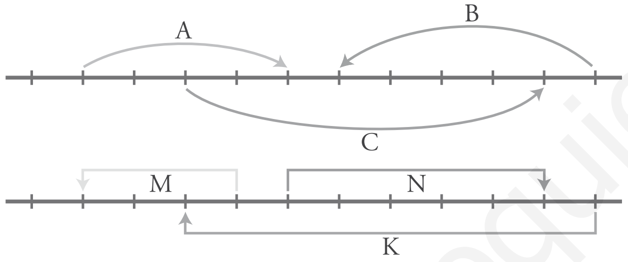
2 ▼▽▽ Ordena de menor a mayor.

a) +6, +2, 0, +4, –7, +3

b) –7, –2, 0, –1, –5, –9

c) –4, 0, +6, –8, +3, –5

3 ▼▼▽ Escribe un número entero para cada movimiento en la recta:



Suma y resta

4 ▼▼▽ Calcula.

a) 13 – 9 + 5 – 7

b) 6 – 8 – 6 + 5 + 4 – 6

c) –3 – 5 + 2 – 1 – 7 + 4

d) –8 – 7 + 2 + 9 – 10 + 18

5 ▼▼▽ Quita paréntesis y opera.

a) (+3) – (+8)

b) (–9) + (–6)

c) (–7) – (–7) – (+7)

d) (–11) + (+8) – (–6)

e) (+15) – (–12) – (+11) + (–16)

6 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

Calcular: 11 – (5 – 8 – 6 + 3)

Podemos operar antes o después de quitar los paréntesis:

- 11 – (5 – 8 – 6 + 3) = 11 – (5 + 3 – 8 – 6) =

  = 11 – (8 – 14) = 11 – (–6) = 11 + 6 = 17
- 11 – (5 – 8 – 6 + 3) = 11 – 5 + 8 + 6 – 3 =

  = 11 + 8 + 6 – 5 – 3 = 25 – 8 = 17

7 ▼▼▽ Calcula.

a) (4 + 8) – (3 – 9)

b) 10 + (8 – 15 + 2 – 6)

c) 12 – (7 + 11 – 14 – 8)

d) (6 – 12 + 2) – (11 – 4 + 2 – 5)

8 ▼▼▼ **Ejercicio resuelto**

[(+2) + (–12)] – [(3 – 7) – (7 – 2)] =

= [(+2) + (–12)] – [(–4) – (+5)] =

= [2 – 12] – [–4 – 5] = [–10] – [– 9] =

= –10 + 9 = –1

9 ▼▼▼ Calcula.

a) (5 – 7) – [(–3) + (–6)]

b) (–8) + [(+7) – (–4) + (–5)]

c) (+9) – [(+3) – (3 – 12) – (+8)]

d) [(+6) – (–8)] – [(–4) – (–10)]

e) [(2 – 8) + (5 – 7)] – [(–9 + 6) – (–5 + 7)]

Multiplicación y división

10 ▼▽▽ **Ejercicio resuelto**

(+48) : [(–6) · (+4)]

(+48) : (–24)

–2

(+48) : [(–6) · (+4)] =

= (+48) : [–24] = –2

[(+48) : (–6)] · (+4)

(–8) · (+4)

–32

[(+48) : (–6)] · (+4) =

= [–8] · (+4) = –32

11 ▼▽▽ Opera como en el ejercicio resuelto anterior.

a) (–18) : [(+6) · (–3)] b) [(–18) : (+6)] · (–3)

c) (+54) : [(–6) : (+3)] d) [(+54) : (–6)] : (+3)

12 ▼▼▼ **Ejercicio resuelto**

Calcular: (–3) · (–4) – (+2) · (–9) – (–7) · (–5)

(–3) · (–4) – (+2) · (–9) – (–7) · (–5)
(+12) – (–18) – (+35)
12 + 18 – 35
30 – 35
–5

(–3) · (–4) – (+2) · (–9) – (–7) · (–5) =
= (+12) – (–18) – (+35) = 12 + 18 – 35 =
= 30 – 35 = –5

13 ▼▼▼ Opera estas expresiones:

a) 35 + 7 · (6 – 11)

b) 60 : (8 – 14) + 12

c) (9 – 13 – 6 + 9) · (5 – 11 + 7 – 4)

d) (6 + 2 – 9 – 15) : (7 – 12 + 3 – 6)

e) –(8 + 3 – 10) · [(5 – 7) : (13 – 15)]

14 ▼▼▼ Calcula.

a) (–3) · [(–9) – (–7)]

b) 28 : [(–4) + (–3)]

c) [(–9) – (+6)] : (–5)

d) (–11) – (–2) · [15 – (+11)]

e) (+5) – (–18) : [(+9) – (+15)]

f) (–4) · [(–6) – (–8)] – (+3) · [(–11) + (+7)]

g) [(+5) – (+2)] : [(–8) + (–3) – (–10)]

Los números negativos en la calculadora

15 ▼▽▽ **Ejercicio resuelto**

Escribir el número –13 en la pantalla de una calculadora.

- Por medio de una resta:

  7 $\boxed{-}$ 20 $\boxed{=}$ → $\boxed{\;\;-13}$

- Con las teclas de memoria:

  13 $\boxed{M-}$ $\boxed{MR}$ → $\boxed{\;\;-13}$

16 ▼▽▽ Utilizando los mismos procedimientos que en el ejercicio anterior, escribe en tu calculadora:

a) –3 b) –12 c) –328 d) –1 000

Autoevaluación

1 Escribe un número entero que exprese el significado de cada enunciado:

a) Jorge ha gastado 35 euros en el supermercado.

b) Adela ha recibido 6 euros de paga.

c) Hace frío. Estamos a dos grados bajo cero.

d) Mi casa está en la cuarta planta.

2 Dibuja una recta numérica y representa sobre ella los números siguientes:

(+3), (–4), (+1), (–6), (–1), (+5), (–5)

3 Ordena de menor a mayor:

(+4), (–3), (+5), (–5), (+1), (–6), (+2), (–1)

4 Calcula:

a) 4 – 9 b) 3 – 8 + 1 c) –5 – 7 + 4 + 2

5 Calcula:

a) (–7) + (+4) b) (+2) – (–3) + (–5)

c) (–8) – (5 – 9) d) 20 – [(15 – 9) – (7 + 3)]

6 Resuelve:

a) 5 · (–2) b) (–3) · (–4) c) (–1) · (+3) · (–5)

d) 15 : (–3) e) (–18) : (–6) f) (–20) : [(+12) · (–3)]

7 Resuelve:

a) 3 · 4 – 2 · 7 b) 4 · 5 – 2 · 8

c) 3 · (5 – 7) d) (–2) · (6 – 8)

5 Los números decimales

La mayor parte de los sistemas de numeración de las antiguas civilizaciones son de base decimal: egipcios, griegos, romanos, chinos, indios, árabes... El uso de la base decimal proviene, sin duda, de contar con los dedos de las manos.

Los indios, en el siglo VII, añadieron a la base decimal una notación posicional. Para llegar a este grandioso avance, un paso importantísimo fue la invención del cero, pues con él se señalan las posiciones en las que no hay cantidad: esto que ahora nos resulta tan sencillo y natural, como poner 907 para indicar 9 centenas y 7 unidades, necesitó de muchísimos años para consolidarse.

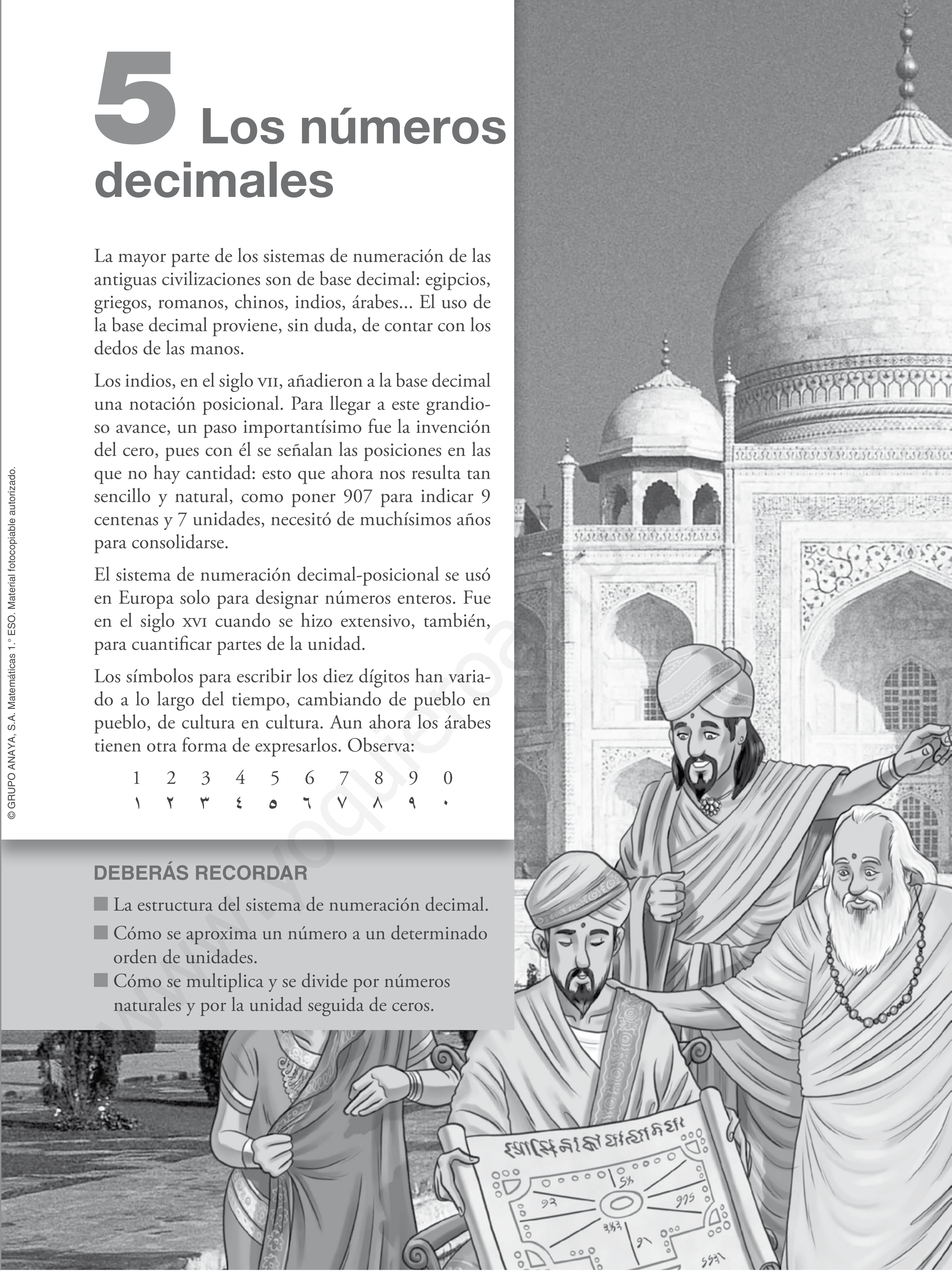
El sistema de numeración decimal-posicional se usó en Europa solo para designar números enteros. Fue en el siglo XVI cuando se hizo extensivo, también, para cuantificar partes de la unidad.

Los símbolos para escribir los diez dígitos han variado a lo largo del tiempo, cambiando de pueblo en pueblo, de cultura en cultura. Aun ahora los árabes tienen otra forma de expresarlos. Observa:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠

DEBERÁS RECORDAR

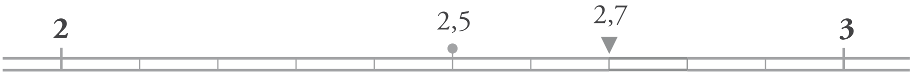
- La estructura del sistema de numeración decimal.
- Cómo se aproxima un número a un determinado orden de unidades.
- Cómo se multiplica y se divide por números naturales y por la unidad seguida de ceros.



Los órdenes de unidades decimales

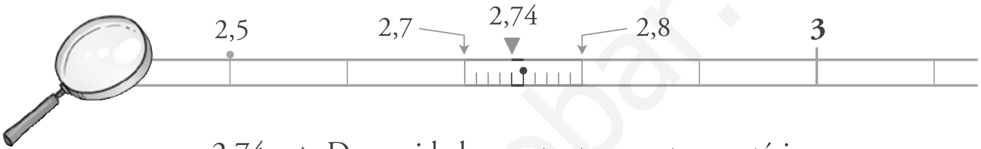
Para expresar cantidades más pequeñas que la unidad, utilizamos las cifras decimales.

- Al dividir la unidad en diez partes iguales, cada parte es una **décima.**



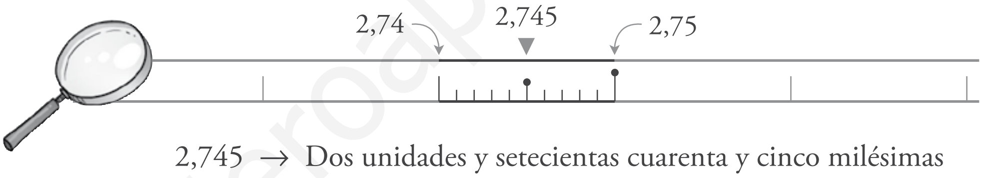
2,7 → Dos unidades y siete décimas

- Al dividir la décima en diez partes iguales, cada parte es una **centésima.**



2,74 → Dos unidades y setenta y cuatro centésimas

- Al dividir la centésima en diez partes iguales, cada parte es una **milésima.**



2,745 → Dos unidades y setecientas cuarenta y cinco milésimas

- En el sistema de numeración decimal, una unidad de cualquier orden se divide en diez unidades del orden inmediato inferior.

10 U = 10 d = 100 c = 1 000 m = …

DECENAS → D
UNIDADES → U,
DÉCIMAS → d
CENTÉSIMAS → c
MILÉSIMAS → m
DIEZMILÉSIMAS → dm
CIENMILÉSIMAS → cm
MILLONÉSIMAS → mm

…	D	U,	d	c	m	dm	cm	mm	…
	1	3,	0	5	7	4			

→ Trece unidades y quinientas setenta y cuatro diezmilésimas

- Para leer un número decimal:
  - — Se nombra la parte entera expresada en unidades.
  - — Se nombra la parte decimal expresada en el orden de unidades de la cifra decimal que queda a la derecha.

Ten en cuenta

Los ceros a la derecha de un número decimal no modifican el valor del número.

U,	d	c	m
2,	5		
2,	5	0	
2,	5	0	0

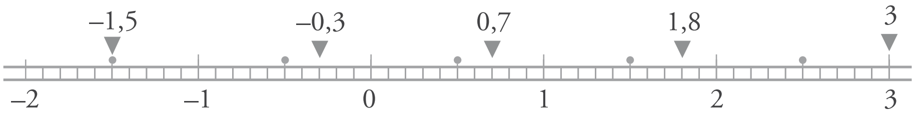
$2{,}5 = 2{,}50 = 2{,}500$

Fíjate

U,	d	c
5,	2	0
5,	2	3
5,	2	5
5,	2	8
5,	3	0

Orden en los números decimales

Los números decimales quedan ordenados en la recta numérica.



$$-1{,}5 < -0{,}3 < 0{,}7 < 1{,}8 < 3{,}0$$

Pero también puedes comparar números, sin acudir a la representación en la recta, observando las cifras y el lugar que ocupan:

- Para comparar dos números decimales, se compara la parte entera.

  Por ejemplo:

  $2{,}895 < 3{,}1 \longrightarrow$ porque 2 U < 3 U

  (dos “y pico” es menos que “tres y pico”)

U,	d	c	m
2,	8	9	5
3,	1	0	0

- Si los números tienen la misma parte entera, se iguala el número de cifras decimales poniendo ceros a la derecha y se compara la parte decimal.

  Por ejemplo:

  $5{,}04 < 5{,}4 \longrightarrow$ porque 4 c < 40 c

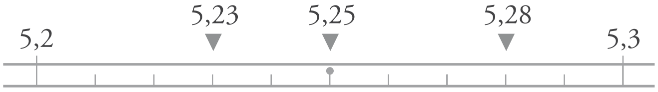
U,	d	c	m
5,	0	4	
5,	4	0	

Entre dos decimales siempre hay otros decimales

- Elijamos dos números cualesquiera; por ejemplo 5,1 y 5,4. Es evidente que entre ellos hay otros decimales:

$$5{,}1 < 5{,}2 < 5{,}3 < 5{,}4$$

- Busquemos, ahora, un número decimal comprendido entre 5,2 y 5,3. Estos dos números se diferencian en una décima, y esa décima se puede dividir en diez centésimas.



Añadiendo alguna de esas centésimas a 5,2, obtenemos decimales comprendidos entre 5,2 y 5,3.

$$5{,}2 = 5{,}20 < 5{,}23 < 5{,}25 < 5{,}28 < 5{,}30 = 5{,}3$$

El proceso puede continuar indefinidamente o repetirse para cualquier otro par de números.

- Los decimales se representan, ordenados, en la recta numérica.
- Entre dos decimales cualesquiera, siempre se pueden encontrar otros números decimales.

Aproximación por redondeo

En algunas ocasiones se nos presentan números con demasiadas cifras decimales y preferimos, o nos vemos obligados, a sustituirlos por otros más manejables de valor aproximado.

Problema resuelto

Los siete miembros de un equipo de atletismo deciden regalar a su entrenador un cronómetro que cuesta 30 €. ¿Cuánto debe aportar cada uno?

Para resolver el problema, divide con tu calculadora 30 : 7.

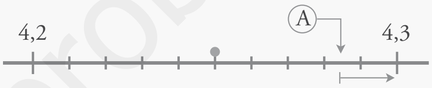
$$30 \boxed{\div} 7 \boxed{=} \rightarrow \boxed{4.2857142}$$

Como no tiene sentido dar como solución 4,2857… €, recurrimos a las aproximaciones:

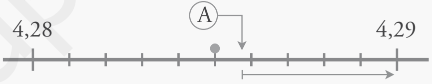
APROXIMACIONES DEL NÚMERO
A = 4,2857…

- Aproximación a las unidades → 4

- Aproximación a las décimas → 4,3



- Aproximación a las centésimas → 4,29



Como ves, en cada caso se toma la unidad, la décima o la centésima más cercana al número original.

Para aproximar un número a un determinado orden de unidades:

- Se suprimen todas las cifras a la derecha de dicho orden.
- Si la primera cifra suprimida es igual o mayor que cinco, se suma uno a la cifra anterior.

Ten en cuenta

Las cantidades de dinero, en el comercio, se redondean a las centésimas (céntimos de euro).

7,586 €
⇓
7,59 €

Ejercicios resueltos

1. **Redondear a las décimas los números siguientes:**

   a) 13,8271

   b) 24,1532

   a) $13{,}8\boxed{271} \xrightarrow{\text{APROXIMACIÓN}} 13{,}8$

   Observa que la primera cifra suprimida es 2 < 5.

   Por tanto, en la aproximación la cifra de las décimas no varía.

   b) $24{,}1\boxed{532} \xrightarrow{\text{APROXIMACIÓN}} 24{,}2$

   Observa que la primera cifra suprimida es 5 ≥ 5.

   Por tanto, sumamos una unidad a las décimas (1 + 1 = 2).

2. Redondear a las centésimas los números siguientes:

a) 13,8271

b) 24,1532

a) $13{,}82\boxed{71} \xrightarrow{\text{APROXIMACIÓN}} 13{,}83$

Observa que la primera cifra suprimida es 7 > 5.

Por tanto, sumamos una unidad a las centésimas (2 + 1 = 3).

b) $24{,}15\boxed{32} \xrightarrow{\text{APROXIMACIÓN}} 24{,}15$

Observa que la primera cifra suprimida es 3 < 5.

Por tanto, en la aproximación la cifra de las centésimas no varía.

Actividades

1 Escribe cómo se leen.

a) 0,7 b) 0,05 c) 0,002

d) 1,2 e) 12,56 f) 5,184

g) 1,06 h) 5,004 i) 2,018

2 Escribe con cifras.

a) Ocho décimas.

b) Dos centésimas.

c) Tres milésimas.

d) Trece milésimas.

e) Tres unidades y cuatro décimas.

f) Doce unidades y veinticinco centésimas.

g) Seis unidades y ocho centésimas.

h) Una unidad y trescientas once milésimas.

i) Cinco unidades y catorce milésimas.

3 Escribe cómo se leen.

a) 0,0007 b) 0,0042 c) 0,0583

d) 0,00008 e) 0,00046 f) 0,00853

g) 0,000001 h) 0,000055 i) 0,000856

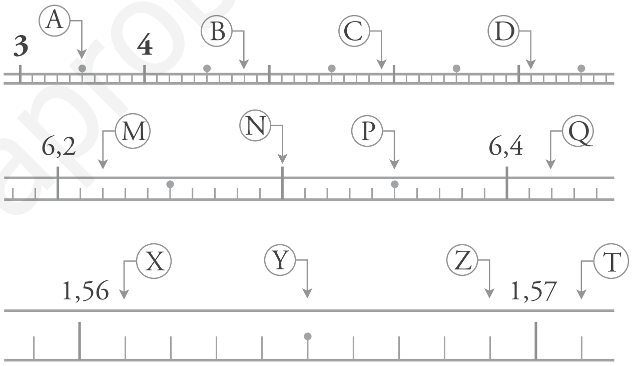
4 Escribe con cifras.

a) Quince diezmilésimas.

b) Ciento ochenta y tres cienmilésimas.

c) Cincuenta y ocho millonésimas.

5 Indica el valor que representa cada letra:



6 Dibuja una recta numérica y representa estos valores:

A = 3 B = 3,4 C = 3,75 D = 4

7 Ordena de menor a mayor.

a) 5,83 5,51 5,09 5,511 5,47

b) 0,1 0,09 0,099 0,12 0,029

c) 0,5 –0,8 –0,2 1,03 –1,1

8 Copia y escribe un número en cada casilla.

2,6 < □ < 2,8 7 < □ < 8

0,3 < □ < 0,5 0,4 < □ < 0,5

1,25 < □ < 1,27 3,42 < □ < 3,43

9 Aproxima a las unidades.

a) 5,18 b) 3,65 c) 9,95

d) 0,75 e) 1,099 f) 3,901

10 Aproxima a las centésimas.

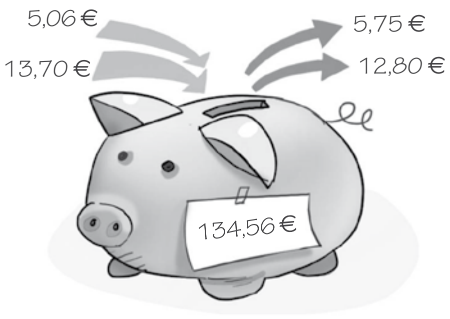
a) 0,574 b) 1,278 c) 5,099

d) 3,0051 e) 8,0417 f) 2,999

2 Operaciones con números decimales

Suma y resta

Ya conoces la suma y la resta de decimales. Por eso, nos limitaremos a repasarlas incorporando el manejo de los números negativos.



Problema resuelto

En la hucha de Iván había 134,56 €, pero ha tenido dos ingresos de 5,06 € y 13,70 €, respectivamente, y ha sufrido dos extracciones, una de 5,75 € y otra de 12,80 €. ¿Cuál es su saldo actual?

C	D	U,	d	c
1	3	4,	5	6
	1	3,	7	0
+		5,	0	6
1	5	3,	3	2

D	U,	d	c
1	2,	8	0
+	5,	7	5
1	8,	5	5

C	D	U,	d	c
1	5	3,	3	2
–	1	8,	5	5
1	3	4,	7	7

(134,56 + 13,70 + 5,06) – (12,80 + 5,75) = 153,32 – 18,55 = 134,77

Solución: El saldo actual de Iván es de 134,77 €.

Para sumar o restar números decimales:

- Se colocan en columna haciendo corresponder las comas.
- Se suman (o se restan) unidades con unidades, décimas con décimas, etc.

Todo lo que se dijo sobre los números negativos en las operaciones con enteros sirve también para las operaciones con decimales.

Actividades

1 Calcula mentalmente.

a) 0,8 + 0,4
b) 1 – 0,3
c) 1,2 + 1,8
d) 2,4 – 0,6
e) 3,25 + 1,75
f) 2,5 – 0,75
g) 4,08 + 0,12
h) 3 – 0,15

2 Calcula con lápiz y papel.

a) 6,12 + 0,87 + 1,342
b) 124,75 + 86,287 + 5,3408
c) 132 – 26,53
d) 12,8 – 1,937
e) 175,4 – 86,9207

3 Añade tres términos a estas series:

a) 3,25 – 4 – 4,75 – 5,5 – …
b) 8,65 – 8,5 – 8,35 – 8,2 – …
c) 1,5 – 1,62 – 1,74 – 1,86 – …

4 Recuerda las operaciones con números positivos y negativos y calcula.

a) 0,5 – 0,75
b) 1,2 – 1,5
c) 0,25 – 1
d) 2 – 1,95
e) 0,4 + 0,8 – 1,6
f) 2,7 – 0,95 – 1,04

5 Roberto mide 1,66 m; Macarena, 0,38 m más, y Miguel, 0,23 m menos que Macarena. ¿Cuánto mide Miguel?

Multiplicación

También conoces la multiplicación de decimales. Por eso, al igual que en la suma y en la resta, solo la repasaremos.

Problema resuelto

¿Cuánto paga Marta por una pieza de 3,5 m de tela que se vende a 12,85 € el metro?

$$\begin{array}{rl} 1\ 2,\ 8\ 5 & \longleftarrow \text{2 cifras decimales} \\ \times\ 3,\ 5 & \longleftarrow \text{1 cifra decimal} \\ \hline 6\ 4\ 2\ 5 & \quad\downarrow \\ 3\ 8\ 5\ 5 & \quad\downarrow \\ \hline 4\ 4,\ 9\ 7\ 5 & \longleftarrow 2 + 1 = 3 \text{ cifras decimales} \end{array}$$

Solución: 44,975 € $\xrightarrow{\text{REDONDEO}}$ 44,98 €. Marta paga 44,98 €.

Para multiplicar números decimales:

- Se multiplican como si fueran enteros.
- Se coloca la coma en el producto, apartando tantas cifras decimales como las que reúnan entre todos los factores.

Recuerda también que para multiplicar por 10, por 100, por 1000, …, se desplaza la coma hacia la *derecha* uno, dos, tres, … lugares.

▼ **EJEMPLOS**

2,45 · 10 = 24,5

2,45 · 100 = 245

2,45 · 1 000 = 2 450

2,45 · 10 000 = 24 500

Actividades

6 Copia y completa (no te olvides de las comas).

$$\begin{array}{r} \square,\ 6 \\ \times\ 1,\ \square \\ \hline 1\ 4\ 4 \\ \square\ \square \\ \hline 3\ \square\ \square \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3,\ 7\ 5 \\ \times\ \square,\square \\ \hline 3\ 3\ 7\ 5 \\ 7\ 5\ 0 \\ \hline \square\square\square\square\ \square \end{array}$$

7 Calcula.

a) 8 · 0,3

b) 5 · 0,5

c) 0,4 · 0,3

d) 0,75 · 2

e) 0,25 · 4

f) 0,25 · 5

g) (–0,1) · (+6)

h) 0,2 · (–0,4)

i) (–0,1) · (–0,2)

j) (–0,2) · (–0,2)

8 Multiplica.

a) 3,26 · 100

b) 35,29 · 10

c) 4,7 · 1 000

d) 9,48 · 1 000

e) –6,24 · 100

f) 0,475 · (–10)

9 Calcula con lápiz y papel.

a) 3,25 · 16

b) 2,6 · 5,8

c) 27,5 · 10,4

d) 3,70 · 1,20

e) 4,03 · 2,7

f) 5,14 · 0,08

10 Opera como en el ejemplo.

- **5,6 – 2,1 · (0,5 – 1,2) = 5,6 – 2,1 · (–0,7) =**
  = 5,6 + 1,47 = 7,07

a) 8,3 + 0,5 · (3 – 4,2)

b) 3,5 – 0,2 · (2,6 – 1,8)

c) (5,2 – 6,8) · (3,6 – 4,1)

d) (1,5 – 2,25) · (3,6 – 2,8)

11 Si el aceite está a 3,15 € el litro, ¿cuánto costará una botella de aceite de 0,75 litros?

3 División de números decimales

Divisor entero. Aproximación del cociente

Vamos a repasar la forma de obtener las cifras decimales del cociente hasta conseguir la aproximación deseada.

Problemas resueltos

1. **Cuatro hermanos quieren repartir la paga de 35 € que les ha dado su abuelo. ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno?**

35 3 ↓	4 8	→	El cociente entero deja un resto de 3 unidades.
35,0 3 0 ↓	4 8,	→	Para seguir dividiendo, transformamos las 3 unidades del resto en 30 décimas.
35,0 3 0 2 ↓	4 8,7	→	Ahora repartimos 30 décimas entre 4. Por eso, ponemos la coma decimal en el cociente. Sobran 2 décimas.
35,00 3 0 20 0	4 8,75	→	Para seguir dividiendo, se transforman las 2 décimas en 20 centésimas. *Solución:* A cada hermano le corresponden 8,75 €.

2. **Con una pieza de tela de 7,3 m de longitud, se han confeccionado tres vestidos iguales. ¿Qué longitud de tela se ha empleado en cada uno?**

7,3 1	3 2	→	7,3 1 3	3 2,	→	7,300… 1 3 10 10 1…	3 2,433…

La división no termina nunca. El cociente es periódico.

Solución: En cada vestido se han empleado 2,43 m de tela.

Para obtener el cociente decimal:

- Al bajar la cifra de las décimas del dividendo, se pone la coma decimal en el cociente y se continúa la división.
- Si no hay suficientes cifras decimales en el dividendo, se añaden los ceros necesarios para lograr la aproximación deseada.

Recuerda también que para dividir por 10, por 100, por 1000, …, se desplaza la coma hacia la *izquierda* uno, dos, tres, … lugares.

▼ **EJEMPLOS**

15,3 : 10 = 1,53 | 15,3 : 100 = 0,153

15,3 : 1 000 = 0,0153 | 15,3 : 10 000 = 0,00153

Actividades

1 Divide mentalmente.

a) 1 : 2 b) 5 : 2

c) 7 : 2 d) 1 : 4

e) 2 : 4 f) 5 : 4

g) 1,2 : 2 h) 1,2 : 3

i) 1,2 : 4 j) 0,6 : 3

k) 0,8 : 4 l) 0,9 : 9

2 Copia y completa.

$$\begin{array}{l|l} 3\;2\;4 & \underline{7\qquad} \\ \square\square & 46,\square\square \\ \quad\square\square & \\ \qquad\square\square & \\ \qquad\quad\square & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 1\;4,\;3\;4 & \underline{6\qquad} \\ \square\square & 2,\square\square \\ \quad\square\square & \\ \qquad\;\square & \end{array}$$

3 Calcula el cociente exacto.

a) 28 : 5 b) 53 : 4

c) 35 : 8 d) 7,5 : 3

e) 6,2 : 5 f) 12,5 : 4

4 Calcula el cociente sacando, como máximo, dos cifras decimales.

a) 47 : 3 b) 9 : 7

c) 169 : 11 d) 7,7 : 6

e) 14,3 : 9 f) 96,7 : 2

5 Calcula el cociente sacando, como máximo, dos cifras decimales.

a) 526 : 23 b) 6 321 : 145

c) 82,93 : 36 d) 1 245,4 : 263

6 Divide.

a) 5 : 10 b) 8 : 100

c) 2 : 1 000 d) 3,6 : 10

e) 5,7 : 100 f) 2,8 : 1 000

g) 2,54 : 10 h) 57,25 : 100

i) 0,3 : 1 000 j) 1,2 : 10 000

7 Observe el ejemplo y calcula el cociente con dos cifras decimales.

$$\bullet\ \mathbf{5 : 9} \rightarrow \begin{array}{r|l} \widehat{5} & \underline{9\;\;} \\ & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} \widehat{5,0} & \underline{9\;\;} \\ 5 & 0,5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} \widehat{5,00} & \underline{9\;\;} \\ 50 & 0,55 \\ 5 & \end{array}$$

a) 1 : 4 b) 3 : 5

c) 30 : 8 d) 2 : 9

e) 6 : 11 f) 5 : 234

8 Observa el ejemplo y calcula el cociente con dos cifras decimales.

$$\bullet\ \mathbf{0,8 : 6} \rightarrow \begin{array}{r|l} \widehat{0},8 & \underline{6\;\;} \\ & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} \widehat{0,8} & \underline{6\;\;} \\ 2 & 0,1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} \widehat{0,80} & \underline{6\;\;} \\ 20 & 0,13 \\ 2 & \end{array}$$

a) 0,9 : 5 b) 0,5 : 4

c) 0,3 : 9 d) 1,2 : 7

e) 0,08 : 2 f) 0,02 : 5

9 Arancha ha gastado 51,60 € en los diez días que ha estado de vacaciones en la playa.

¿Cuánto ha gastado, por término medio, al día?

10 Los seis botes iguales de refresco que hemos comprado pesan, en total, 2,07 kg.

¿Cuánto pesa cada bote?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

El sistema de numeración decimal

1 ▼▽▽ Escribe cómo se leen.

a) 13,4 b) 0,23 c) 0,145
d) 0,0017 e) 0,0006 f) 0,000148

2 ▼▽▽ Escribe con cifras.

a) Treinta y siete unidades y dos décimas.
b) Ocho centésimas.
c) Cinco unidades y cuarenta y dos milésimas.
d) Ciento veinte cienmilésimas.

3 ▼▽▽ Escribe con cifras.

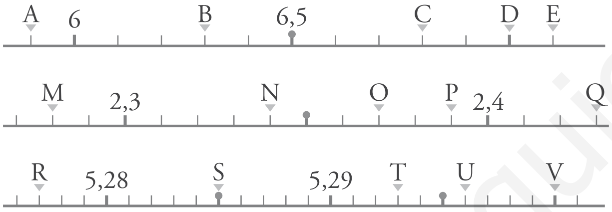
a) Media unidad. b) Media décima.
c) Media centésima. d) Un cuarto de unidad.

Orden. Representación. Redondeo

4 ▼▽▽ Ordena de menor a mayor en cada caso:

a) 1,4 1,390 $1{,}3\widehat{9}$ 1,399 1,41
b) –0,6 0,9 –0,8 2,07 –1,03

5 ▼▽▽ Asocia a cada letra un número:



6 ▼▽▽ **Ejercicio resuelto**

Aproximar 4,7998 a las…

Décimas → 4,8 Centésimas → 4,80
Milésimas → 4,800

7 ▼▽▽ Aproxima, en cada caso, a las unidades, a las décimas y a las centésimas:

a) 2,499 b) 1,992 c) 0,999

Operaciones

Sumas y restas

8 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) ¿Cuánto le falta a 4,7 para valer 5?
b) ¿Cuánto le falta a 1,95 para valer 2?
c) ¿Cuánto le falta a 7,999 para llegar a 8?

9 ▼▽▽ Realiza estas operaciones:

a) 13,04 + 6,528
b) 2,75 + 6,028 + 0,157
c) 4,32 + 0,185 – 1,03
d) 6 – 2,48 – 1,263

Multiplicación y división

10 ▼▽▽ Multiplica.

a) 0,6 · 0,4 b) 0,03 · 0,005
c) 1,3 · 0,08 d) 15 · 0,007
e) 2,65 · 1,24 f) 0,25 · 0,16

11 ▼▽▽ Multiplica y divide mentalmente.

a) 0,12 · 10 b) 0,12 : 10
c) 0,002 · 100 d) 0,002 : 100
e) 0,125 · 1 000 f) 0,125 : 1 000

12 ▼▽▽ Multiplica, fíjate en los resultados y reflexiona.

a) 6 · 0,5 b) 10 · 0,5
c) 22 · 0,5 d) 0,8 · 0,5
e) 1,4 · 0,5 f) 4,2 · 0,5

¿Qué observas?

Interpreta y exprésate

13 ▼▼▼ Un mayorista de frutas compra a pie de huerta una carga de 12 800 kg de peras a 0,45 €/kg.

Una vez en el almacén, al seleccionar la mercancía aparta 300 kg de piezas defectuosas y envasa el resto, distribuyéndolo en el mercado minorista a 0,90 €/kg.

Los gastos de envasado y comercialización ascienden a 1 300 €.

a) ¿Cuál de las siguientes expresiones utilizarías para calcular la ganancia obtenida?

I. (12 800 – 300) · 0,90 – 12 800 · 0,45 – 1 300

II. (12 800 – 300) · (0,9 – 0,45) – 1 300

III. 12 800 · (0,90 – 0,45) – 1 300 – 300

b) ¿Cuál será la expresión de dicha ganancia si la fruta apartada se vende a un fabricante de mermeladas a 0,20 €/kg?

Resuelve problemas

14 ▼▽▽ Patricia colecciona monedas de 10 y de 20 céntimos. Tiene 87 de las primeras y 52 de las segundas. ¿Cuál es el valor de su colección?

15 ▼▽▽ Con una cinta de 20 metros se han confeccionado 25 lazos iguales.

¿Cuánto mide el trozo de cinta que lleva un lazo?

16 ▼▽▽ ¿Cuántos litros de perfume se necesitan para llenar 1 000 frascos de 33 mililitros?

17 ▼▼▽ Diez canicas de cristal pesan 88 gramos, y nueve canicas de cerámica, 80 gramos.

¿Qué pesa más, una canica de cristal o una de cerámica?

18 ▼▼▽ El Atlético de Villarrobles C.F. lleva jugados cinco partidos con los siguientes resultados:

	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º
GOLES A FAVOR	3	2	2	0	1
GOLES EN CONTRA	1	2	1	1	1

a) ¿Cuál es la media de goles conseguidos?

b) ¿Cuál es la media de goles recibidos?

19 ▼▼▽ Raquel ha hecho este trimestre tres exámenes de matemáticas. En el primero ha sacado un 5,5; en el segundo, un 7, y en el tercero, un 2,40. ¿Cuál es su nota media?

20 ▼▼▽ Rosa y Javier compran en el supermercado:

— Cinco cajas de leche a 1,05 € la caja.

— Una bolsa de bacalao de 0,920 kg a 13,25 €/kg.

— Un paquete de galletas que cuesta 2,85 €.

— Un cuarto de kilo de jamón a 38,40 €/kg.

¿Cuánto pagan en caja por la compra?

21 ▼▼▼ Martina tiene dos teléfonos móviles contratados en dos compañías diferentes, A y B. La compañía telefónica A cobra 30 céntimos por establecimiento de llamada y 20 céntimos al minuto. La compañía B no cobra establecimiento de llamada, pero cobra 25 céntimos por minuto.

a) ¿Cuánto cuesta una llamada de 10 minutos en cada teléfono?

b) ¿Cuántos minutos dura una llamada que tiene el mismo coste en ambas compañías?

c) Explica brevemente qué teléfono le conviene usar a Martina, dependiendo del tiempo previsto para la llamada.

Autoevaluación

1 Escribe con cifras.

a) Veintiocho milésimas.

b) Dos unidades y siete centésimas.

c) Ciento treinta y dos diezmilésimas.

d) Nueve millonésimas.

2 Ordena de menor a mayor y representa en la recta.

2,07 – 0,27 – 2,71 – 2,7 – 2,17

3 Completa con un número decimal en cada caso:

a) 2 < … < 3 b) 4,5 < … < 4,6 c) 0,1 < … < 0,11

4 Redondea a las décimas y a las centésimas.

a) 2,726 b) $5,\overset{\frown}{6}$

5 Calcula.

a) 2,8 – 3,75 + 1,245

b) 2,8 · 3,75

c) 3 · 2,6 – 1,75 · 4,2

6 Calcula con dos cifras decimales.

a) 7 : 13

b) 54,5 : 12

7 El melón se vende a 1,75 €/kg. ¿Cuánto costará un melón de 2,800 kilos?

6 El Sistema Métrico Decimal

El intercambio de mercancías, el comercio, obliga a disponer de un sistema de medidas que sirva de referencia. Desde siempre, cualquier grupo humano de cierto nivel de civilización tuvo un sistema de medidas.

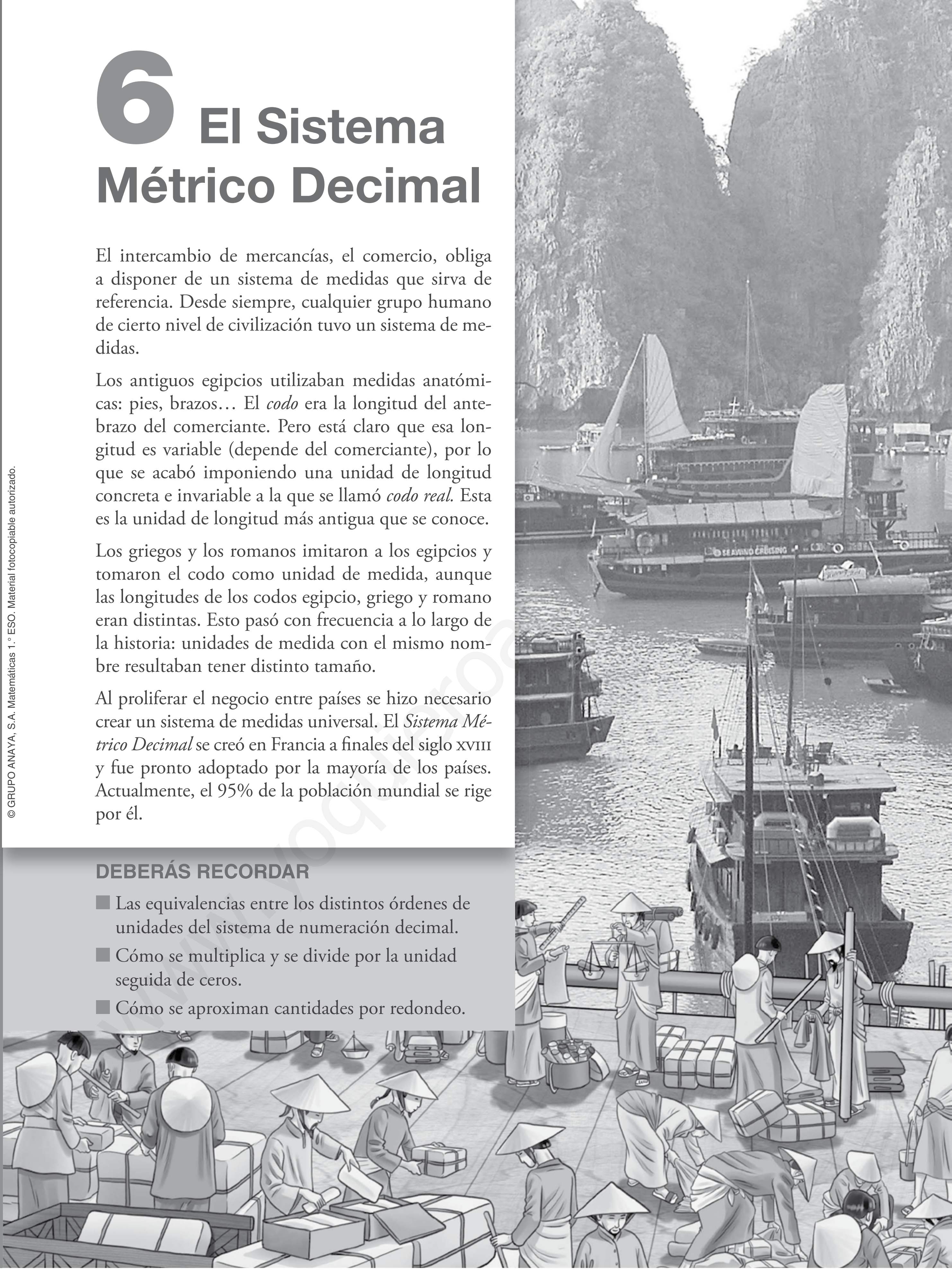
Los antiguos egipcios utilizaban medidas anatómicas: pies, brazos… El *codo* era la longitud del antebrazo del comerciante. Pero está claro que esa longitud es variable (depende del comerciante), por lo que se acabó imponiendo una unidad de longitud concreta e invariable a la que se llamó *codo real.* Esta es la unidad de longitud más antigua que se conoce.

Los griegos y los romanos imitaron a los egipcios y tomaron el codo como unidad de medida, aunque las longitudes de los codos egipcio, griego y romano eran distintas. Esto pasó con frecuencia a lo largo de la historia: unidades de medida con el mismo nombre resultaban tener distinto tamaño.

Al proliferar el negocio entre países se hizo necesario crear un sistema de medidas universal. El *Sistema Métrico Decimal* se creó en Francia a finales del siglo XVIII y fue pronto adoptado por la mayoría de los países. Actualmente, el 95% de la población mundial se rige por él.

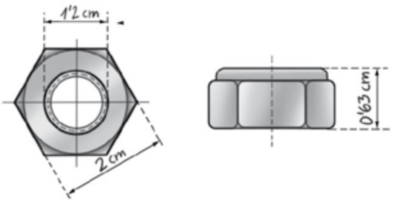
DEBERÁS RECORDAR

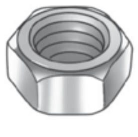
- Las equivalencias entre los distintos órdenes de unidades del sistema de numeración decimal.
- Cómo se multiplica y se divide por la unidad seguida de ceros.
- Cómo se aproximan cantidades por redondeo.



1 Las magnitudes y su medida

Para recopilar y transmitir información relativa a los objetos, nos fijamos en sus cualidades y propiedades características.





MATERIA	Hierro
COLOR	Gris metálico
PESO	15,7 g
FORMA	Prisma

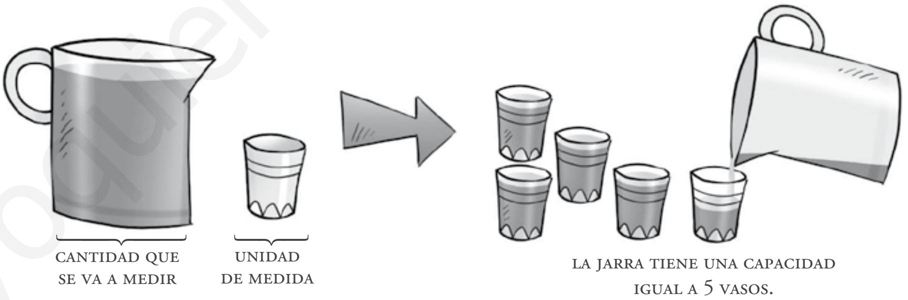
MATERIA	Orgánica
COLOR	Anaranjado
PESO	187 g
FORMA	Esfera

Algunas de esas cualidades se pueden medir y cuantificar de forma numérica. Son las **magnitudes.**

Ejemplos de magnitudes: peso, longitud, superficie, capacidad, temperatura…

Qué es medir una magnitud

Medir una cantidad de una magnitud es compararla con otra cantidad fija y predeterminada llamada **unidad de medida.**



Una magnitud se puede medir en distintas unidades. Para que la información que aporta una medida sea significativa, la unidad utilizada ha de ser conocida y aceptada por toda la comunidad. Es decir, debe ser **convencional** y estandarizada.

Actividades

1 Copia y completa con un par de unidades de medida en cada caso:

MAGNITUD	LONGITUD	CAPACIDAD	PESO	DINERO
UNIDADES DE MEDIDA	metro centímetro			

2 Mide el largo y el ancho de tu mesa, tomando como unidad de medida:

a) El palmo. b) Tu lapicero.

3 ¿Qué magnitudes se miden con estas unidades?:

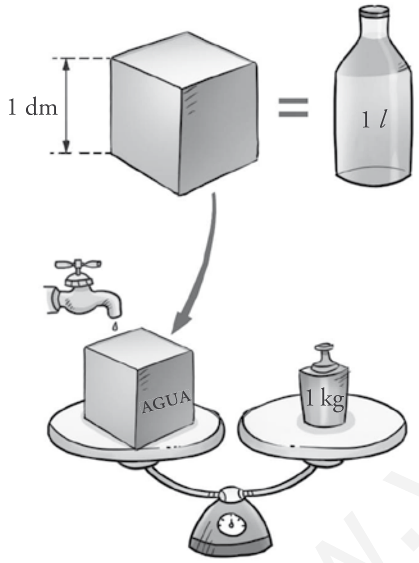
a) Segundo b) Bit c) Grado centígrado
d) Gramo e) Voltio f) Metro cuadrado

2 El Sistema Métrico Decimal

MERIDIANO TERRESTRE = 40 000 km

A lo largo de la historia, cada región, cada país, cada grupo cultural ha adoptado sus propias unidades de medida, diferentes en cada caso.

La diversidad de unidades dificultaba la comunicación entre las distintas comunidades. Así surgió la necesidad de crear un sistema de medidas que fuera conocido y adoptado por todos los países. A finales del siglo XVIII (en 1792), la Academia de Ciencias de París propuso para tal fin el Sistema Métrico Decimal.



El **Sistema Métrico Decimal** (S.M.D.) es un conjunto de unidades de medida relacionadas por las magnitudes fundamentales:

MAGNITUD		UNIDAD		
LONGITUD	→	EL METRO	→	Es la diezmillonésima parte de un cuadrante del meridiano terrestre.
CAPACIDAD	→	EL LITRO	→	Es la capacidad de un cubo de un decímetro de arista.
PESO	→	EL GRAMO	→	Es el peso de un centímetro cúbico de agua.

Además, cada unidad posee un juego de múltiplos y submúltiplos que se designan con los prefijos siguientes:

MÚLTIPLOS						SUBMÚLTIPLOS		
KILO	HECTO	DECA	←	UNIDAD	→	DECI	CENTI	MILI
1 000 U	100 U	10 U		1 U		0,1 U	0,01 U	0,001 U

Actividades

1 Nombra:
- a) Los múltiplos del metro.
- b) Los múltiplos del gramo.
- c) Los submúltiplos del litro.
- d) Los submúltiplos del gramo.
- e) Los múltiplos del litro.
- f) Los submúltiplos del metro.

2 Recuerda y contesta.
- a) ¿Cuántos metros hay en un hectómetro?
- b) ¿Cuántos litros hay en un decalitro?
- c) ¿Cuántos gramos hay en un kilogramo?
- d) ¿Cuántos decilitros hay en un litro?
- e) ¿Cuántos centímetros hay en un metro?
- f) ¿Cuántos miligramos hay en un gramo?

3 Medida de la longitud

Como sabes, la unidad fundamental en el S.M.D. para medir longitudes es el **metro.** Recuerda sus múltiplos y submúltiplos:

$\xrightarrow{10}$ $\xrightarrow{10}$ $\xrightarrow{10}$ $\xrightarrow{10}$ $\xrightarrow{10}$ $\xrightarrow{10}$

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1 000 m	100 m	10 m		0,1 m	0,01 m	0,001 m

Observa que diez unidades de un orden cualquiera hacen una unidad del orden inmediato superior. Por eso, decimos que las unidades de longitud *van de diez en diez.*

Cambios de unidad

Para cambiar de unidad cantidades de longitud, conviene que te organices utilizando una tabla de múltiplos y submúltiplos. Así, el cambio de unidad se reduce a un movimiento de la coma decimal.

▼ **EJEMPLOS**

		km	hm	dam	m	dm	cm	mm	
15 km →	1	$5\cancel{,}$	0	0	0,				→ 15 000 m
0,062 dam →				$0\cancel{,}$	0	6,	2		→ 6,2 dm
1,28 m →					$1\cancel{,}$	2	8	0,	→ 1 280 mm
243 cm →					2,	4	$3\cancel{,}$		→ 2,43 m

Cantidades complejas e incomplejas

Cuando una cantidad de longitud viene expresada en varias unidades, decimos que está en **forma compleja.**

Cuando viene en una sola unidad, decimos que está en **forma incompleja.**

FORMA COMPLEJA		FORMA INCOMPLEJA		FORMA INCOMPLEJA
2 m 5 dm	⟷	2,5 m	⟷	250 cm

Observa cómo transformamos cantidades de longitud de una forma a la otra.

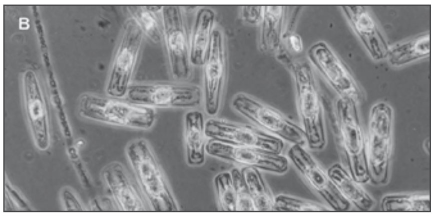
Ejercicio resuelto

a) Pasar a forma compleja: 12,06 hm

b) Pasar a metros: 3 dam 8 m 7 cm

	km	hm	dam	m	dm	cm	mm	
12,06 hm →	1	2,	0	6				→ 1 km 2 hm 6 m
3 dam 8 m 7 cm →			3	8,	0	7		→ 38,07 m

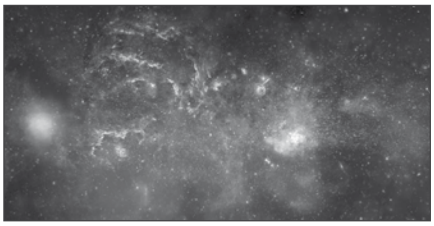
Unidades para medir longitudes muy pequeñas


Algas diatomeas al microscópico óptico.

Hay unidades de longitud más pequeñas que el milímetro:

- La **micra** → 1 μm = 0,001 mm (milésima de milímetro)
  Se utiliza para medir microorganismos (microbios, bacterias, etc.).
- El **nanómetro** → 1 nm = 0,000001 mm (millonésima de milímetro)
- El **ángstrom** → 1 Å = 0,000000001 mm
  Se usa para medir distancias atómicas.

Unidades para medir longitudes muy grandes


Centro de la Vía Láctea.

Hay otras unidades, superiores al kilómetro, que sirven para medir distancias entre los astros:

- La **unidad astronómica** → 1 UA ≈ 150 millones de kilómetros → Es la distancia media de la Tierra al Sol y se usa para medir distancias entre planetas.
- El **año luz** → 1 año luz ≈ 9,5 billones de kilómetros → Es la distancia que recorre la luz en un año. Se usa para medir distancias entre galaxias.

Actividades

1 Copia la tabla y coloca en ella estas cantidades:

a) 6,4 km
b) 146,5 m
c) 0,82 hm
d) 38,92 dm
e) 27 dam
f) 636 mm

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
	1	4	6,	5		

→ 146,5 m

2 Expresa en metros:

a) 18 km
b) 16 dm
c) 0,4 hm
d) 500 cm
e) 5,6 dam
f) 2 340 mm

3 Expresa en centímetros.

a) 0,06 hm
b) 0,8 dm
c) 1,2 m
d) 40 mm
e) 25 dm
f) 39 mm

4 Copia y completa.

a) 2 462 m = ... km
b) 1,6 km = ... dam
c) 4,2 dam = ... hm
d) 0,52 hm = ... m
e) 256 cm = ... m
f) 5,4 m = ... cm
g) 400 mm = ... dm
h) 1 año luz = ... UA

5 Expresa en forma compleja.

a) 2 368 m
b) 15,46 m
c) 0,0465 dam
d) 52,6 hm
e) 12,83 dm
f) 3 064 mm

6 Expresa en metros.

a) 6 km 4 hm 8 dam
b) 5 hm 3 m 6 dm
c) 5 m 4 dm 7 cm
d) 3 dam 7 cm 1 mm

4 Medida de la capacidad

La unidad fundamental del S.M.D. para medir capacidades es el **litro,** que coincide con la capacidad de un recipiente de un decímetro de arista.

Recuerda los múltiplos y los submúltiplos del litro:

10 10 10 10 10 10

kl	*hl*	*dal*	*l*	*dl*	*cl*	*ml*
1 000 *l*	100 *l*	10 *l*		0,1 *l*	0,01 *l*	0,001 *l*

Igual que en las unidades de longitud, cada unidad de capacidad equivale a diez unidades del orden inmediato inferior. Es decir, las unidades de capacidad *van de diez en diez.*

Cambios de unidad

Para pasar una cantidad de capacidad de una unidad a otra, utilizaremos la tabla que ya conocemos.

▼ **EJEMPLOS**

	kl	***hl***	***dal***	***l***	***dl***	***cl***	***ml***		
2,73 *kl* →	2~~,~~	7	3	0,					→ 2 730 *l*
560 *l* →		5,	6	0~~,~~					→ 5,6 *hl*
0,0268 *l* →				0~~,~~	0	2	6,	8	→ 26,8 *ml*
60 *cl* →				0,	6	0~~,~~			→ 0,6 *l*

Observa que actuamos de la misma forma que lo hacíamos con las unidades de longitud, y que la coma decimal se desplaza tantos lugares como saltos hay en la tabla entre la unidad inicial y la final.

Paso de forma compleja a incompleja, y viceversa

Ejercicios resueltos

a) Pasar a litros 3 *kl* 2 *dal* 6 *l* 5 *dl*.

b) Pasar a forma compleja 807,4 litros.

	kl	***hl***	***dal***	***l***	***dl***	***cl***	***ml***	
3 *kl* 2 *dal* 6 *l* 5 *dl* →	3	0	2	6,	5			→ 3 026,5 *l*
807,4 *l* →		8	0	7,	4			→ 8 *hl* 7 *l* 4 *dl*

Entrénate

1 Indica la unidad más apropiada para expresar la capacidad de los recipientes siguientes:

a) El depósito de agua de una población.

b) Un camión cisterna.

c) Una garrafa de agua.

d) Un frasco de champú.

e) Un frasquito de perfume.

2 Reproduce la tabla y coloca en ella estas cantidades:

a) 0,046 *kl* b) 0,07 *l*

c) 2,75 *hl* d) 15,28 *dl*

kl	***hl***	***dal***	***l***	***dl***	***cl***	***ml***

3 Expresa en litros.

a) 2,75 *kl* b) 42,6 *dl*

c) 74,86 *hl* d) 350 *cl*

e) 1,46 *dal* f) 3 800 *ml*

4 Expresa en litros.

a) 1 *kl* 6 *hl* 7 *dal*

b) 6 *hl* 5 *l* 6 *dl*

c) 2 *dl* 7 *cl* 8 *ml*

d) 3 *hl* 5 *dl* 9 *ml*

5 Medida del peso

La unidad principal del S.M.D. para medir pesos es el **gramo,** que coincide con el peso del agua que cabe en un cubo de un centímetro de arista. Como es una unidad muy pequeña, en la práctica se utiliza fundamentalmente el kilogramo.

Igual que en las unidades de longitud y de capacidad, los múltiplos y los submúltiplos del gramo *aumentan y disminuyen de diez en diez*.

10 10 10 10 10 10

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
1 000 g	100 g	10 g		0,1 g	0,01 g	0,001 g

Para medir pesos grandes, se añaden dos múltiplos del kilogramo:

- El **quintal métrico** (q) → 1 q = 100 kg
- La **tonelada métrica** (t) → 1 t = 1 000 kg

Cambios de unidad

Actuaremos como en la longitud y la capacidad.

Ejercicios resueltos

Transformar estas cantidades en la unidad indicada:

a) 0,0583 kg, a gramos; b) 630 cg, a gramos; c) 13 500 kg, a toneladas

a) tres saltos

kg	hg	dag	g	dg
0,	0	5	8,	3

0,0583 kg = 0,0583 · 1 000 = 0,058,3 g

b) 630 cg = 630 : 100 = 6,30, g

c) 13 500 kg = 13 500 : 1 000 = 13,500, t

Paso de forma compleja a incompleja, y viceversa

Ejercicios resueltos

a) Pasar a gramos 8 hg 6 g 7 dg 5 cg.

b) Pasar a forma compleja 1 206 gramos.

	kg	hg	dag	g	dg	cg	
8 hg 6 g 7 dg 5 cg →		8	0	6,	7	5	→ 806,75 g
1 206 g →	1	2	0	6			→ 1 kg 2 hg 6 g

Entrénate

1 Indica la unidad más apropiada para expresar el peso de los siguientes objetos:

a) La carga de un camión.
b) Una cabra.
c) Una manzana.
d) Una lenteja.
e) Los componentes de un medicamento.

2 Expresa en gramos.

a) 4,08 kg
b) 0,7 hg
c) 25 dag
d) 58 dg
e) 2 cg
f) 5 300 mg

3 Expresa en gramos.

a) 6 kg 5 hg 8 dag
b) 2 kg 4 dag 9 g
c) 8 dag 5 g 6 dg
d) 3 g 5 dg 7 cg

4 Un perro pesaba 4 kg 50 g. Se le ha cortado el pelo y ahora pesa 3 985 g. ¿Cuánto pesa el pelo cortado?

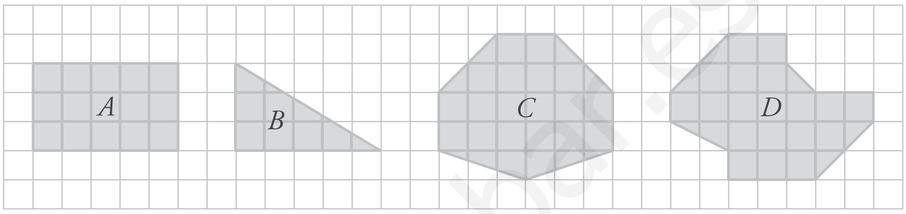
6 Medida de la superficie

Medida directa de superficies

Para medir superficies, tomaremos como unidad una cantidad de superficie con forma de cuadrado (unidad cuadrada). Así, medir una superficie será averiguar cuántas unidades cuadradas contiene.

▼ **EJEMPLOS**

▢ → UNIDAD CUADRADA → 1 u.c.



$S_A = 15$ u.c. $S_B = 7{,}5$ u.c. $S_C = 23$ u.c. $S_D = 22{,}5$ u.c.

Unidades de superficie del Sistema Métrico Decimal

La unidad principal de medida de superficie es el **metro cuadrado,** que se complementa con sus correspondientes múltiplos y submúltiplos.

100 100 100 100 100 100

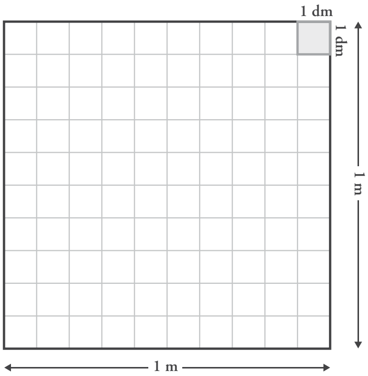
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2		0,01 m^2	0,0001 m^2	0,000001 m^2
	ha	a	ca			

Unidades agrarias

Se utilizan para medir campos (agro = = campo).

- **Hectárea** (ha)
  1 ha = 10 000 m^2 = 1 hm^2
- **Área** (a)
  1 a = 100 m^2 = 1 dam^2
- **Centiárea** (ca)
  1 ca = 1 m^2

Para comprender las equivalencias entre estas unidades, observa la figura siguiente, que representa un metro cuadrado y su descomposición en decímetros cuadrados:

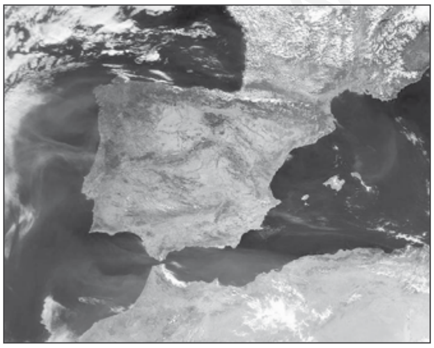


- El metro cuadrado se divide en 10 filas de 10 decímetros cuadrados.

  Por tanto:

  $$1 \text{ m}^2 = 10 \times 10 \text{ dm}^2 = 100 \text{ dm}^2$$

- Lo mismo pasa con cada unidad respecto de la siguiente. Por eso decimos que las unidades de superficie *aumentan y disminuyen de cien en cien*.



La Península Ibérica tiene una superficie aproximada de 600 000 km^2 = = 60 000 000 ha.

Cambios de unidad

Para pasar cantidades de superficie de una unidad a otra, tendremos en cuenta que las unidades de superficie aumentan y disminuyen de cien en cien.

Ejercicio resuelto

Pasar estas medidas a las unidades indicadas:

a) 47 200 m^2 = … hm^2

b) 6,2 dm^2 = … cm^2

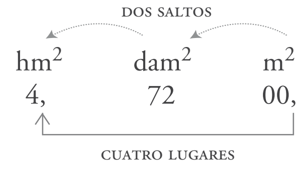
c) 1,25 a = … m^2

d) 252 800 m^2 = … ha

	km^2	hm^2 ha	dam^2 a	m^2 ca	dm^2	cm^2	mm^2	
47 200 m^2 →		4,	7 2	0 0,				→ 4,72 hm^2
6,2 dm^2 →					6,	2 0,		→ 620 cm^2
1,25 a →			1,	2 5,				→ 125 m^2
252 800 m^2 →		2 5,	2 8	0 0,				→ 25,28 ha

Observa que por cada salto de unidad en la tabla, la coma decimal se desplaza **dos lugares.**

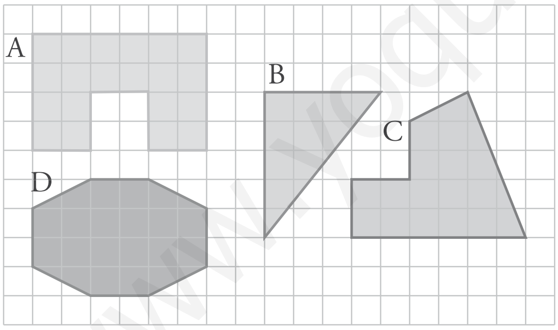
Observa



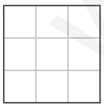
47 200 m^2 = 47 200 : 10 000 =
= 4,72 hm^2

Actividades

1 Calcula la superficie de estas figuras tomando como unidad el cuadrado de la cuadrícula:



2 ¿Cuántas pulgadas cuadradas tiene un cuadrado que mide 3 pulgadas de lado?



3 Indica la unidad más apropiada para expresar las superficies siguientes:

a) La extensión de Portugal.
b) La extensión de un pantano.
c) La superficie de una vivienda.
d) La superficie de una hoja de papel.

4 Expresa en metros cuadrados.

a) 0,006 km^2
b) 5,2 hm^2
c) 38 dam^2
d) 70 dm^2
e) 12 800 cm^2
f) 8 530 000 mm^2

5 Expresa en centímetros cuadrados.

a) 0,06 dam^2
b) 5,2 m^2
c) 0,47 dm^2
d) 8 mm^2

6 Copia y completa.

a) 5,1 km^2 = ... hm^2
b) 825 hm^2 = ... km^2
c) 0,03 hm^2 = ... m^2
d) 53 000 m^2 = ... dam^2
e) 420 cm^2 = ... mm^2
f) 52 800 mm^2 = ... dm^2

7 Expresa en metros cuadrados.

a) 5 km^2 48 hm^2 25 dam^2
b) 6 dam^2 58 m^2 46 dm^2
c) 5 m^2 4 dm^2 7 cm^2

8 Pasa a forma compleja.

a) 587,24 hm^2
b) 587 209,5 m^2
c) 7 042,674 dm^2

Ejercicios y problemas

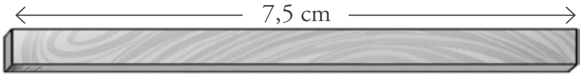
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Unidades de longitud

1 ▼▽▽ Indica en cada longitud la unidad adecuada para expresarla:

a) Longitud de un lapicero.
b) Radio de un átomo.
c) Altura de una casa.
d) Distancia entre dos estrellas.

2 ▼▽▽ Expresa en metros, en decímetros y en centímetros la longitud del listón.



3 ▼▽▽ Copia y completa.

a) 2,7 hm = … km = … dam = … dm
b) 2 380 m = … km = … hm = … cm
c) 47 m = … dam = … dm = … hm
d) 382 cm = … m = … dm = … mm

4 ▼▽▽ Expresa en metros.

a) 3 km 8 hm 5 dam
b) 8 dam 5 m 7 cm
c) 1 m 4 dm 6 cm 7 mm

5 ▼▽▽ Expresa en centímetros.

a) 5 dam 6 m 3 dm 4 cm
b) 3 m 8 dm 7 cm 9 mm
c) 2 m 5 cm 4 mm

Unidades de peso

6 ▼▽▽ Nombra la unidad adecuada para expresar el peso de:

a) La carga de un barco.
b) Un elefante.
c) Un bolígrafo.
d) Un grano de arroz.

7 ▼▽▽ Expresa en kilos y en gramos el peso de cada fruta:

8 ▼▽▽ Pasa a gramos.

a) 1,37 kg
b) 0,7 kg
c) 0,57 hg
d) 1,8 dag
e) 0,63 dag
f) 5 dg
g) 18,9 dg
h) 480 cg
i) 2 500 mg
j) 385 cg

9 ▼▽▽ Expresa en toneladas.

a) 15 000 kg
b) 8 200 kg
c) 400 kg
d) 1 kg

10 ▼▽▽ Copia y completa.

a) 5,4 t = … kg = … hg = … dag
b) 0,005 kg = … g = … mg = … dag
c) 7 hg = … dag = … g = … dg
d) 42 g = … dag = … cg = … mg

11 ▼▽▽ Expresa en gramos.

a) 4 kg 5 hg 2 dag 3 g
b) 9 hg 8 dag 5 g 4 dg
c) 6 dag 8 g 6 dg 8 cg
d) 7 dg 6 mg

12 ▼▽▽ Pasa a forma compleja.

a) 4,225 kg
b) 38,7 g
c) 1 230 cg
d) 4 623 mg

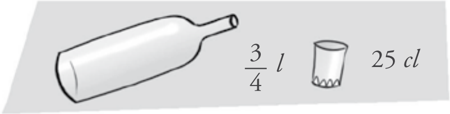
Unidades de capacidad

13 ▼▽▽ Nombra la unidad adecuada para medir la capacidad de:

a) Un dedal.
b) Un cántaro.
c) Un bote de refresco.
d) Un camión cisterna.

14 ▼▽▽ Expresa en centilitros la cantidad de agua que hay en la jarra, y en mililitros, la cantidad de aceite que hay en la probeta.

15 ▼▽▽ Expresa en decilitros la capacidad de la botella, y con una fracción de litro, la capacidad del vaso.



16 ▼▽▽ Copia y completa.

a) 1 *kl* = ... *l*   b) 1 *hl* = ... *l*

c) 1 *dal* = ... *l*   d) 1 *dl* = ... *l*

e) 1 *cl* = ... *l*   f) 1 *ml* = ... *l*

17 ▼▽▽ Expresa en centilitros.

a) 0,15 *hl*   b) 0,86 *dal*   c) 0,7 *l*

d) 1,3 *l*   e) 26 *dl*   f) 580 *ml*

18 ▼▽▽ Copia y completa.

a) 4,52 *kl* = ... *hl*   b) 0,57 *hl* = ... *dal*

c) 15 *dal* = ... *l*   d) 0,6 *l* = ... *cl*

e) 850 *ml* = ... *dl*   f) 1 200 *cl* = ... *l*

g) 2 000 *ml* = ... *dl*   h) 380 *dal* = ... *kl*

19 ▼▽▽ Traduce a litros.

a) 8 *kl* 6 *hl* 3 *l*

b) 5 *hl* 2 *dal* 7 *l* 2 *dl*

c) 1 *dal* 9 *l* 6 *dl* 3 *cl*

d) 4 *l* 2 *dl* 5 *cl* 7 *ml*

Unidades de superficie

20 ▼▽▽ Asocia cada superficie con la unidad adecuada para expresar su medida:

a) Una hoja de papel.	km^2
b) El suelo de una vivienda.	cm^2
c) El ala de una abeja.	m^2
d) La Península Ibérica.	mm^2

21 ▼▽▽ Copia y completa.

a) 1 km^2 = ... m^2 b) 1 m^2 = ... dm^2

c) 1 hm^2 = ... m^2 d) 1 m^2 = ... cm^2

e) 1 dam^2 = ... m^2 f) 1 m^2 = ... mm^2

22 ▼▽▽ Copia y completa.

a) 4 km^2 = ... dam^2 b) 54,7 hm^2 = ... m^2

c) 0,005 dam^2 = ... dm^2 d) 0,7 dm^2 = ... mm^2

e) 5 400 m^2 = ... hm^2 f) 174 cm^2 = ... dm^2

23 ▼▽▽ Pasa a decímetros cuadrados.

a) 0,146 dam^2 b) 1,4 m^2 c) 0,36 m^2

d) 1 800 cm^2 e) 544 cm^2 f) 65 000 mm^2

24 ▼▽▽ Expresa en forma compleja.

a) 248 750 dam^2 b) 67 425 m^2

c) 83 545 cm^2 d) 2 745 600 mm^2

25 ▼▽▽ Expresa en hectáreas.

a) 572 800 a   b) 50 700 m^2

c) 25,87 hm^2 d) 6,42 km^2

Autoevaluación

1 ¿Dónde y cuándo nació el S.M.D.?

2 Indica la unidad adecuada, en cada caso, para medir:

a) La anchura de un campo de fútbol.

b) El grosor de un folio.

c) La capacidad de un frasco de perfume.

d) El peso de la carga de un camión.

3 Completa.

a) 5,2 km = … m   b) 7 hm = … m

c) 13 dm = … m   d) 250 cm = … m

4 Completa.

a) 3 hm 8 dam 4 m 5 dm = … m

b) 5 *l* 6 *dl* 7 *cl* = … *l*

c) 5 kg 3 hg 7 dag 8 g = ... g

5 Pasa a metros cuadrados.

a) 5 hm^2 = … m^2

b) 13 dam^2 = … m^2

c) 4 800 cm^2 = … m^2

d) 79 000 000 dm^2 = ... m^2

7 Las fracciones

Los egipcios, en el siglo XVII a.C., manejaban las fracciones de forma muy curiosa: solo admitían aquellas cuyo numerador es 1 (fracciones unitarias):

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

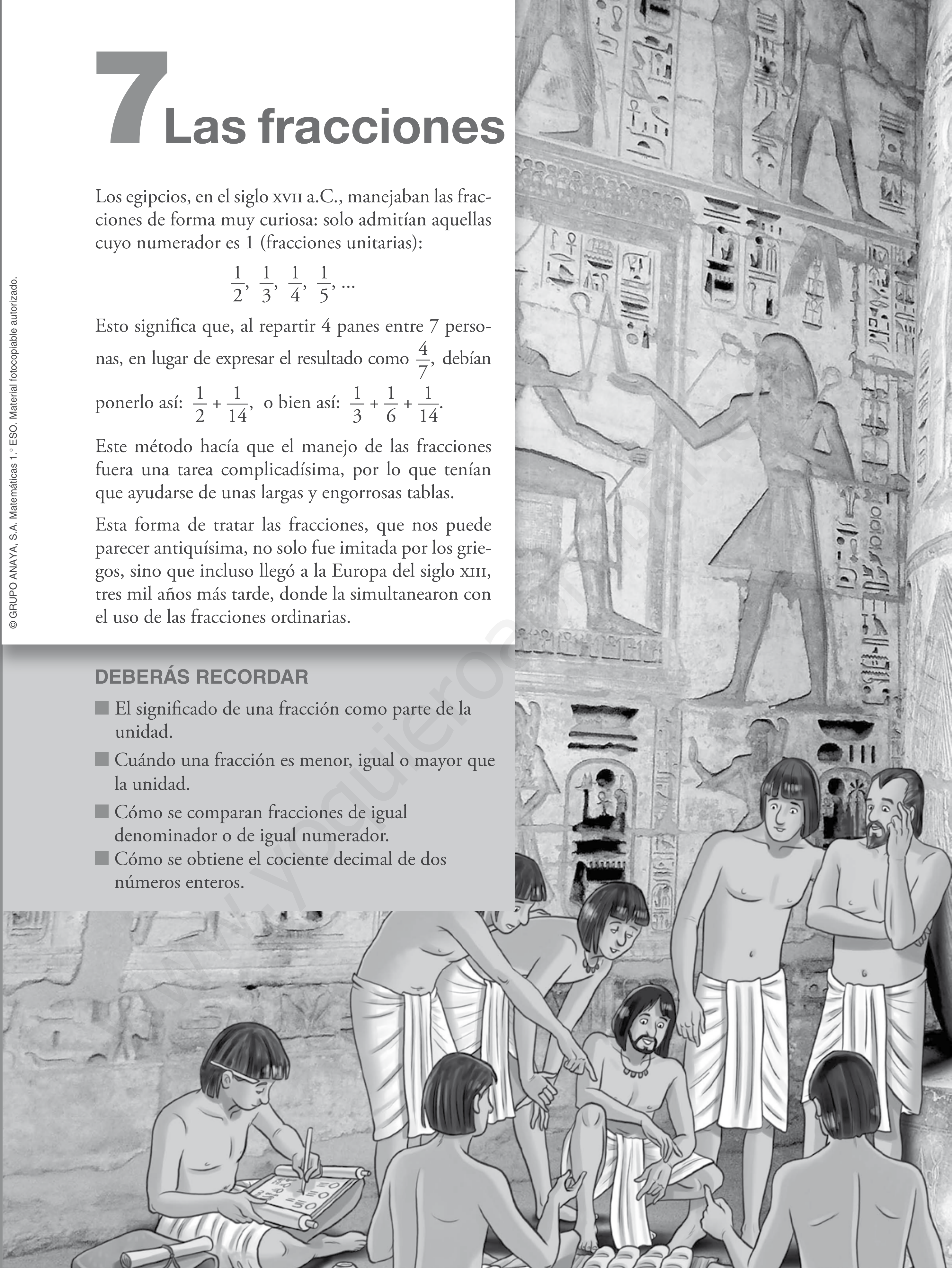
Esto significa que, al repartir 4 panes entre 7 personas, en lugar de expresar el resultado como $\frac{4}{7}$, debían ponerlo así: $\frac{1}{2} + \frac{1}{14}$, o bien así: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{14}$.

Este método hacía que el manejo de las fracciones fuera una tarea complicadísima, por lo que tenían que ayudarse de unas largas y engorrosas tablas.

Esta forma de tratar las fracciones, que nos puede parecer antiquísima, no solo fue imitada por los griegos, sino que incluso llegó a la Europa del siglo XIII, tres mil años más tarde, donde la simultanearon con el uso de las fracciones ordinarias.

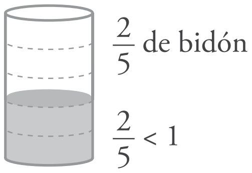
DEBERÁS RECORDAR

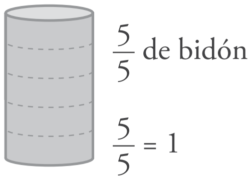
- El significado de una fracción como parte de la unidad.
- Cuándo una fracción es menor, igual o mayor que la unidad.
- Cómo se comparan fracciones de igual denominador o de igual numerador.
- Cómo se obtiene el cociente decimal de dos números enteros.

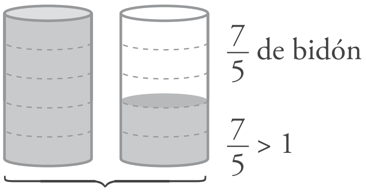


1 El significado de las fracciones

Una fracción se puede contemplar como una parte de la unidad, como un operador o como una división. Ahora vamos a profundizar en esos tres significados de las fracciones.

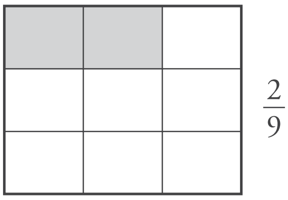


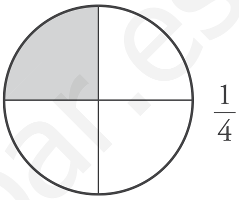




Las fracciones expresan partes de la unidad

Un todo se toma como unidad y se divide en porciones iguales. Una fracción indica una determinada cantidad de esas porciones.





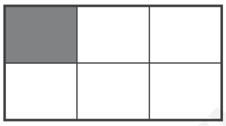
Términos de una fracción:

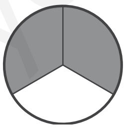
$$\frac{a}{b} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{NUMERADOR} \\ \longleftarrow \text{DENOMINADOR} \end{array}$$

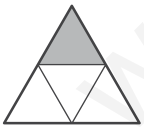
- El **numerador** indica el número de porciones que se toman.
- El **denominador** indica el número total de porciones en que se ha dividido la unidad.

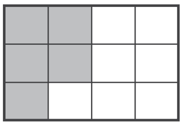
Actividades

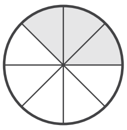
1 Escribe la fracción que representa la parte coloreada en cada figura:

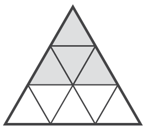
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

2 Representa las fracciones siguientes:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{8}$

3 Escribe una fracción para indicar la cantidad de pizza que ha comprado cada uno:

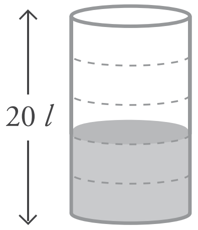
4 Indica, para cada fracción, si es menor, igual o mayor que la unidad:

a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{6}{6}$ d) $\frac{8}{5}$ e) $\frac{3}{3}$ f) $\frac{5}{6}$

Las fracciones son operadores

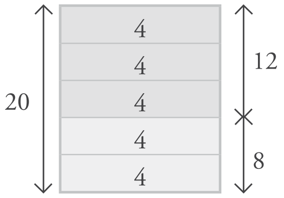
Una fracción es un número que opera a una cantidad y la transforma.

Por ejemplo, si el bidón tiene una capacidad de 20 litros:



$$\rightarrow \text{ Aquí hay } \frac{2}{5} \text{ de 20 litros } \begin{cases} \frac{1}{5} \text{ de } 20 = 20 : 5 = 4 \\ \frac{2}{5} \text{ de } 20 = 4 \cdot 2 = 8 \end{cases}$$

$$\frac{2}{5} \text{ de 20 litros} = (20 : 5) \cdot 2 = 8 \text{ litros}$$



$\frac{2}{5}$ de 20 = 8

$\frac{3}{5}$ de 20 = 12

Para calcular la **fracción de un número,** se divide el número entre el denominador, y el resultado se multiplica por el numerador.

Actividades

5 Calcula mentalmente.

a) $\frac{1}{4}$ de 8 b) $\frac{1}{3}$ de 12 c) $\frac{1}{5}$ de 20

$\frac{3}{4}$ de 8 $\frac{2}{3}$ de 12 $\frac{3}{5}$ de 20

d) $\frac{1}{6}$ de 18 e) $\frac{1}{7}$ de 14 f) $\frac{1}{8}$ de 40

$\frac{5}{6}$ de 18 $\frac{2}{7}$ de 14 $\frac{5}{8}$ de 40

6 Calcula.

a) $\frac{2}{5}$ de 15 b) $\frac{3}{4}$ de 12 c) $\frac{3}{7}$ de 21

d) $\frac{2}{3}$ de 30 e) $\frac{4}{5}$ de 30 f) $\frac{3}{8}$ de 24

g) $\frac{3}{4}$ de 48 h) $\frac{2}{3}$ de 72 i) $\frac{3}{5}$ de 85

7 Opera.

a) $\frac{1}{4}$ de 384 b) $\frac{3}{5}$ de 715 c) $\frac{5}{7}$ de 483

8 De una caja de 24 bombones se ha consumido 1/6.

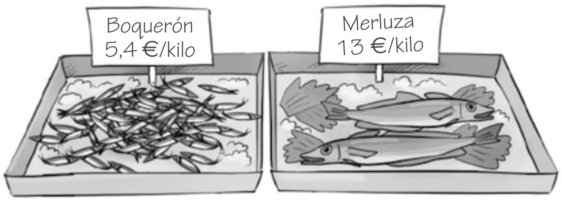
¿Cuántos bombones se han consumido? ¿Cuántos quedan?

9 En mi clase, entre chicos y chicas, somos 27. Las chicas representan los 4/9 del total. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en clase?

10 En un campamento internacional de verano hay 280 campistas, de los que 3/7 son españoles. ¿Cuántos españoles hay en el campamento?

11 De las 40 bolas que hay en un frasco, 3/10 son rojas. ¿Cuántas bolas rojas hay?

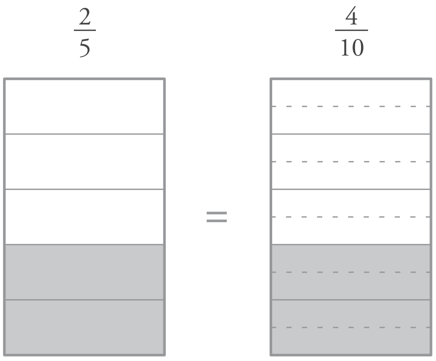
12 ¿Cuánto cuesta 1/4 kg de boquerones? ¿Y 3/4 kg de merluza?



Las fracciones son divisiones indicadas

Una fracción equivale al cociente del numerador entre el denominador. Por tanto, una fracción se puede expresar con un número decimal.

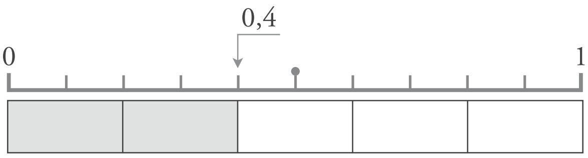
Observa, por ejemplo, que $\frac{2}{5}$ de unidad equivalen al valor decimal 0,4:



$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

↑

(cuatro décimas)



$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0{,}4$

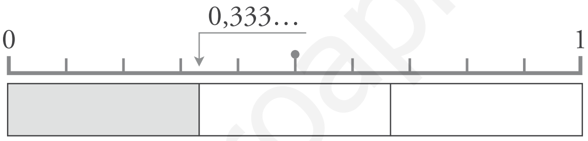
$$\begin{array}{r|l} 2{,}0 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 0{,}4 \end{array}$$

Paso de fracción a decimal

Para transformar una fracción en un número decimal, se divide el numerador entre el denominador.

Algunas fracciones generan decimales periódicos.

Por ejemplo, observa que $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\widehat{3}$:



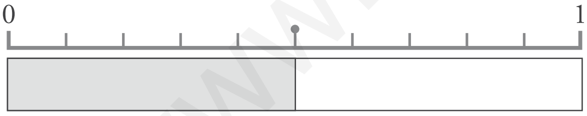
$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}3333\ldots$

En estos casos, la fracción resulta más exacta y precisa que la expresión en forma de número decimal.

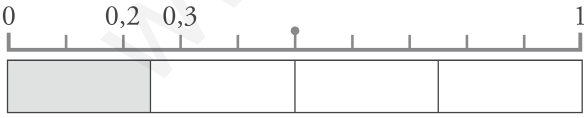
Actividades

13 Expresa en forma de fracción y en forma decimal el número representado en cada caso:

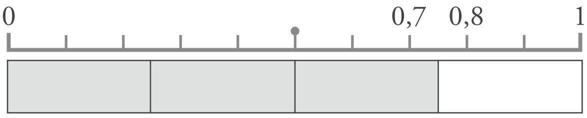
a)



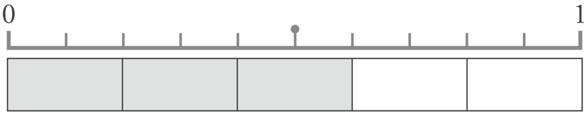
b)



c)



d)



14 Copia y completa con un número decimal.

a) $\frac{1}{8} = 1 : 8 = \ldots$

b) $\frac{7}{9} = 7 : 9 = \ldots$

c) $\frac{3}{10} = 3 : 10 = \ldots$

d) $\frac{5}{12} = 5 : 12 = \ldots$

15 Divide y expresa en forma decimal.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{4}{2}$

e) $\frac{1}{5}$ f) $\frac{2}{5}$ g) $\frac{3}{5}$ h) $\frac{4}{5}$

16 Pasa a forma decimal.

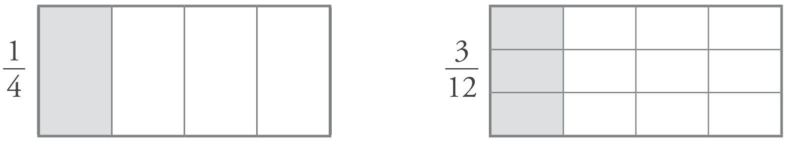
a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{5}{2}$

e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{1}{6}$ g) $\frac{5}{6}$ h) $\frac{4}{9}$

2 Fracciones equivalentes

Fracciones diferentes con el mismo valor

Observa:



$$\underbrace{\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25} \qquad \underbrace{\frac{3}{12} = 3 : 12 = 0{,}25}$$

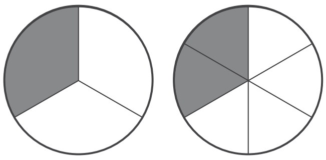
$$\longrightarrow \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \longleftarrow$$

Las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{12}$ son equivalentes.

> Decimos que dos **fracciones** son **equivalentes** cuando expresan la misma porción de unidad; es decir, cuando tienen el mismo valor numérico.

Ejemplo

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$



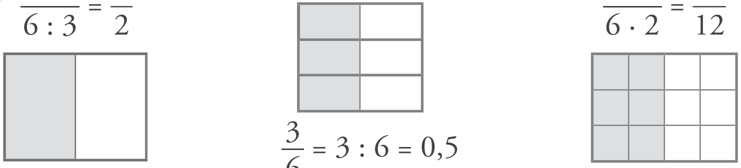
$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}333\ldots \\ \frac{2}{6} = 2 : 6 = 0{,}333\ldots \end{array}\right\} \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Cómo obtener fracciones equivalentes

Observa que al multiplicar o al dividir los dos términos de una fracción por el mismo número, la porción de unidad representada no varía.

$$\frac{3}{6}$$

$$\frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{2} \qquad \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{6}{12}$$



$$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5 \qquad \frac{3}{6} = 3 : 6 = 0{,}5 \qquad \frac{6}{12} = 6 : 12 = 0{,}5$$

Como ves, las tres fracciones de la ilustración son equivalentes. $\left\}\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}\right.$

> **Propiedad fundamental de las fracciones**
>
> Si se multiplican, o se dividen, los dos términos de una fracción por el mismo número, se obtiene otra fracción equivalente a la primitiva. Es decir, el valor de la fracción no varía.

EJEMPLOS

- $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$

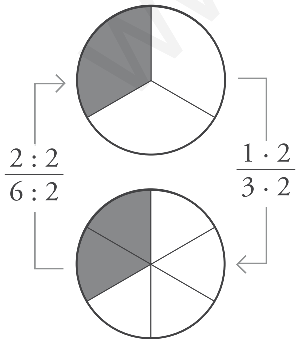
  $\frac{3}{4}$ es equivalente a $\frac{15}{20}$.

- $\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$

  $\frac{12}{18}$ es equivalente a $\frac{2}{3}$.

Ejemplo

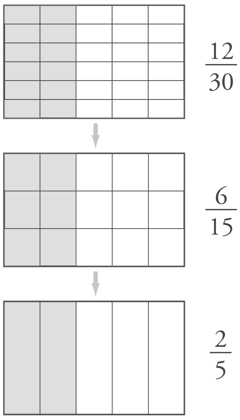
$\frac{1}{3}$



$\frac{2}{6}$

Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción es sustituirla por otra equivalente con los términos más sencillos. Esto se consigue **dividiendo** los dos términos por el mismo número.



▼ **EJEMPLO**

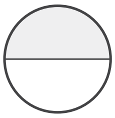
$$\mathbf{\frac{12}{30}} = \frac{12:2}{30:2} = \mathbf{\frac{6}{15}} = \frac{6:3}{15:3} = \mathbf{\frac{2}{5}} \leftarrow \boxed{\text{Fracción irreducible}}$$

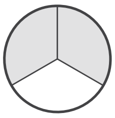
Observa que hemos dividido dos veces por divisores comunes de 12 y 30.

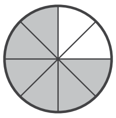
- Para simplificar una fracción, se dividen el numerador y el denominador por el mismo número.
- Una fracción que no se puede simplificar se dice que es **irreducible.**

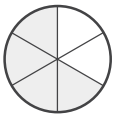
Actividades

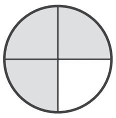
1 Busca, entre estas, tres pares de fracciones equivalentes.

$\frac{1}{2}$ 

$\frac{2}{3}$ 

$\frac{6}{8}$ 

$\frac{4}{6}$ 

$\frac{3}{4}$ 

$\frac{3}{6}$ 

2 Di si son equivalentes las fracciones de cada pareja hallando su valor numérico:

a) $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ b) $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{8}$

c) $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$ d) $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{9}$

3 Busca tres pares de fracciones equivalentes.

$\frac{2}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{5}{15}$ $\frac{9}{12}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{10}{18}$

4 Copia y completa para obtener fracciones equivalentes.

a) $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$

b) $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot \square}{5 \cdot 3} = \frac{\square}{\square}$

c) $\frac{18}{30} = \frac{18 \cdot 2}{30 \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$

d) $\frac{18}{30} = \frac{18 : \square}{30 : 3} = \frac{\square}{\square}$

5 Escribe, en cada caso, dos fracciones equivalentes:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{15}{20}$ d) $\frac{18}{24}$

6 Simplifica.

a) $\frac{15}{20}$ → dividiendo entre 5.

b) $\frac{20}{30}$ → dividiendo entre 2 y, después, entre 5.

7 Simplifica cada una de estas fracciones:

a) $\frac{6}{8}$ b) $\frac{3}{6}$

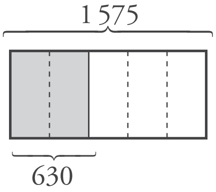
c) $\frac{5}{10}$ d) $\frac{9}{12}$

e) $\frac{10}{18}$ f) $\frac{21}{28}$

g) $\frac{33}{22}$ h) $\frac{13}{26}$

3 Algunos problemas con fracciones

Estudia detenidamente los procesos seguidos en los problemas que vienen a continuación. Te servirán para resolver otros muchos problemas similares con fracciones.



CÁLCULO DE LA FRACCIÓN

De los 1 575 volúmenes que tiene la biblioteca del colegio, en este momento están prestados 630.

¿Qué fracción de libros está prestada?

$$\left.\begin{array}{l}\text{PRESTADOS} \longrightarrow 630\\ \text{TOTAL} \longrightarrow 1\,575\end{array}\right\}\ \text{FRACCIÓN PRESTADA} \longrightarrow \frac{630}{1\,575}$$

Simplificando entre 3, 3, 5 y 7:

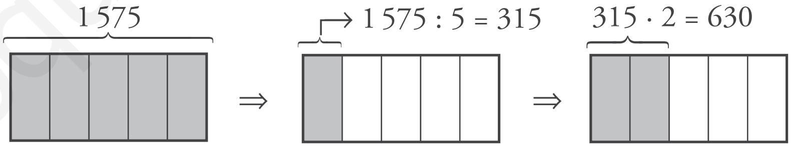
$$\frac{630}{1\,575} = \frac{630:3}{1\,575:3} = \frac{210}{525} = \frac{210:3}{525:3} = \frac{70}{175} = \frac{70:5}{175:5} = \frac{14}{35} = \frac{14:7}{35:7} = \frac{2}{5}$$

Solución: Están en préstamo $\frac{2}{5}$ de los libros.

FRACCIÓN DE UN NÚMERO: PROBLEMA DIRECTO

En la biblioteca del colegio hay 1 575 volúmenes, de los que están en préstamo dos quintas partes.

¿Cuántos libros hay prestados?



$$\frac{1}{5} \text{ de } 1\,575 = 1\,575 : 5 = 315 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{5} \text{ de } 1\,575 = 315 \cdot 2 = 630$$

Solución: Hay prestados 630 libros.

En la práctica, este problema se resolvería así:

$$\frac{2}{5} \text{ de } 1\,575 = (1\,575 : 5) \cdot 2 = 315 \cdot 2 = 630$$

Actividades

1 De los 1800 € que gana un empleado al mes, dedica 540 € a pagar la hipoteca del piso. ¿Qué fracción de lo que gana al mes utiliza para abonar la hipoteca?

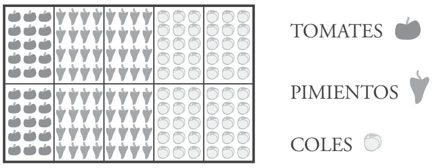
2 Un empleado gana 1 800 € al mes y dedica tres décimas partes a pagar la hipoteca del piso. ¿Cuánto paga mensualmente de hipoteca?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

La fracción: parte de la unidad

1 ▼▽▽ Observa la distribución de la huerta de Adrián:



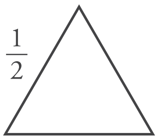
a) ¿Qué fracción de la superficie de la huerta está plantada de tomates?

b) ¿Qué fracción está sembrada de pimientos?

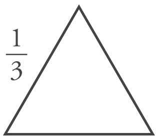
c) ¿Qué fracción no está sembrada de pimientos?

2 ▼▽▽ Colorea en cada triángulo la fracción indicada.

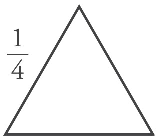
$\frac{1}{2}$



$\frac{1}{3}$



$\frac{1}{4}$



3 ▼▽▽ ¿Qué fracción de semana ocupan los días hábiles? ¿Qué fracción ocupa el fin de semana?

L - M - X - J - V - S - D

La fracción de un número

4 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) $\frac{2}{3}$ de 9 b) $\frac{4}{5}$ de 20

c) $\frac{3}{4}$ de 80 d) $\frac{2}{7}$ de 14

e) $\frac{5}{6}$ de 60 f) $\frac{5}{8}$ de 400

5 ▼▽▽ Calcula.

a) $\frac{2}{3}$ de 192 b) $\frac{4}{5}$ de 375

c) $\frac{3}{7}$ de 749 d) $\frac{3}{4}$ de 332

e) $\frac{5}{8}$ de 1 096 f) $\frac{4}{9}$ de 153

Fracciones y números decimales

6 ▼▽▽ Transforma cada fracción en número decimal.

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{17}{10}$ d) $\frac{7}{2}$ e) $\frac{5}{4}$ f) $\frac{5}{8}$

7 ▼▽▽ Asocia las cantidades correspondientes.

La cuarta parte de un euro	0,75 €
Tres cuartos de euro	0,25 €
La quinta parte de un euro	0,05 €
Un veinteavo de euro	0,01 €
Un céntimo de euro	0,20 €

Fracciones equivalentes

8 ▼▽▽ Busca pares de fracciones equivalentes.

$\frac{1}{4}$ $\frac{12}{15}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{12}{28}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{15}{20}$

9 ▼▽▽ Simplifica.

a) $\frac{2}{4}$ b) $\frac{10}{14}$

c) $\frac{5}{15}$ d) $\frac{18}{22}$

e) $\frac{5}{25}$ f) $\frac{6}{27}$

g) $\frac{21}{28}$ h) $\frac{22}{33}$

10 ▼▽▽ Obtén la fracción irreducible.

a) $\frac{30}{45}$ b) $\frac{20}{60}$ c) $\frac{56}{80}$ d) $\frac{165}{330}$

11 ▼▼▽ Estas son las notas de los 25 estudiantes de una clase en un control de Ciencias Sociales:

6,25	5	8	7,50	5,25
5	1,75	6,75	4,50	5,5
5,50	6	6,25	8,25	3,75
3,25	9,75	6,75	6	5
7,75	8,25	10	4,25	6,25

a) ¿Qué fracción de la clase ha aprobado?

b) ¿Qué fracción ha suspendido?

12 ▼▼▽ Expresa, en cada caso, como una fracción de hora:

a) 15 minutos. b) 30 minutos.

c) 10 minutos. d) 6 minutos.

Resuelve problemas

13 ▼▽▽ Con un bidón de 20 litros se llenan 200 frascos de agua de colonia.

¿Qué fracción de litro entra en cada frasco?

14 ▼▽▽ Francisco y Carmen compran una tableta de chocolate cada uno. Francisco come 1/4, y Carmen, 2/8.

¿Cuál de los dos ha comido un trozo más grande? Justifica tu respuesta.

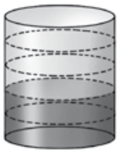
15 ▼▽▽ De un pilón de riego de 45 000 litros, se han consumido siete octavas partes.

¿Cuántos litros quedan en el depósito?

16 ▼▼▽ Julia compró un queso de 2 kilos y 800 gramos, pero ya ha consumido dos quintos.

¿Cuánto pesa el trozo que queda?

17 ▼▼▽ En este bidón hay 8 litros de agua.



¿Cuántos litros caben en total en el bidón?

18 ▼▼▽ He comprado 2/5 de una empanada que han pesado 300 gramos. ¿Cuánto pesaba la empanada completa?

19 ▼▼▼ Se han sembrado de alfalfa los 4/5 de la superficie de una finca, y aún quedan 600 metros cuadrados sin sembrar.

¿Cuál es la superficie total de la finca?

20 ▼▼▼ Rosario ha sacado 3/5 del dinero que tenía en la hucha y aún le quedan 14 euros.

¿Cuánto tenía antes de abrirla?

Autoevaluación

1 ¿Qué fracción de hora son 12 minutos?

2 Representa en un gráfico la fracción 8/9.

3 En un concurso oposición aprueban 15 candidatos y suspenden 35. ¿Qué fracción de los opositores ha aprobado?

4 Calcula.

a) Tres cuartos de 240 b) $\frac{2}{5}$ de 80

5 Expresa en forma decimal.

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{8}$

6 Empareja fracciones equivalentes.

$$\frac{12}{18} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{5}{25} \quad \frac{4}{14} \quad \frac{8}{12} \quad \frac{6}{21}$$

7 Simplifica.

a) $\frac{9}{21}$ b) $\frac{20}{30}$ c) $\frac{36}{48}$

8 En una de las estanterías de la biblioteca hay 300 libros. Las cinco sextas partes son novelas.

¿Cuántas novelas hay en la estantería?

8 Operaciones con fracciones

Los griegos tomaron de los egipcios el uso de las fracciones unitarias. Hacia el siglo IV a.C. empezaron a utilizar fracciones ordinarias, aunque el resultado de sus operaciones lo expresaban mediante fracciones unitarias.

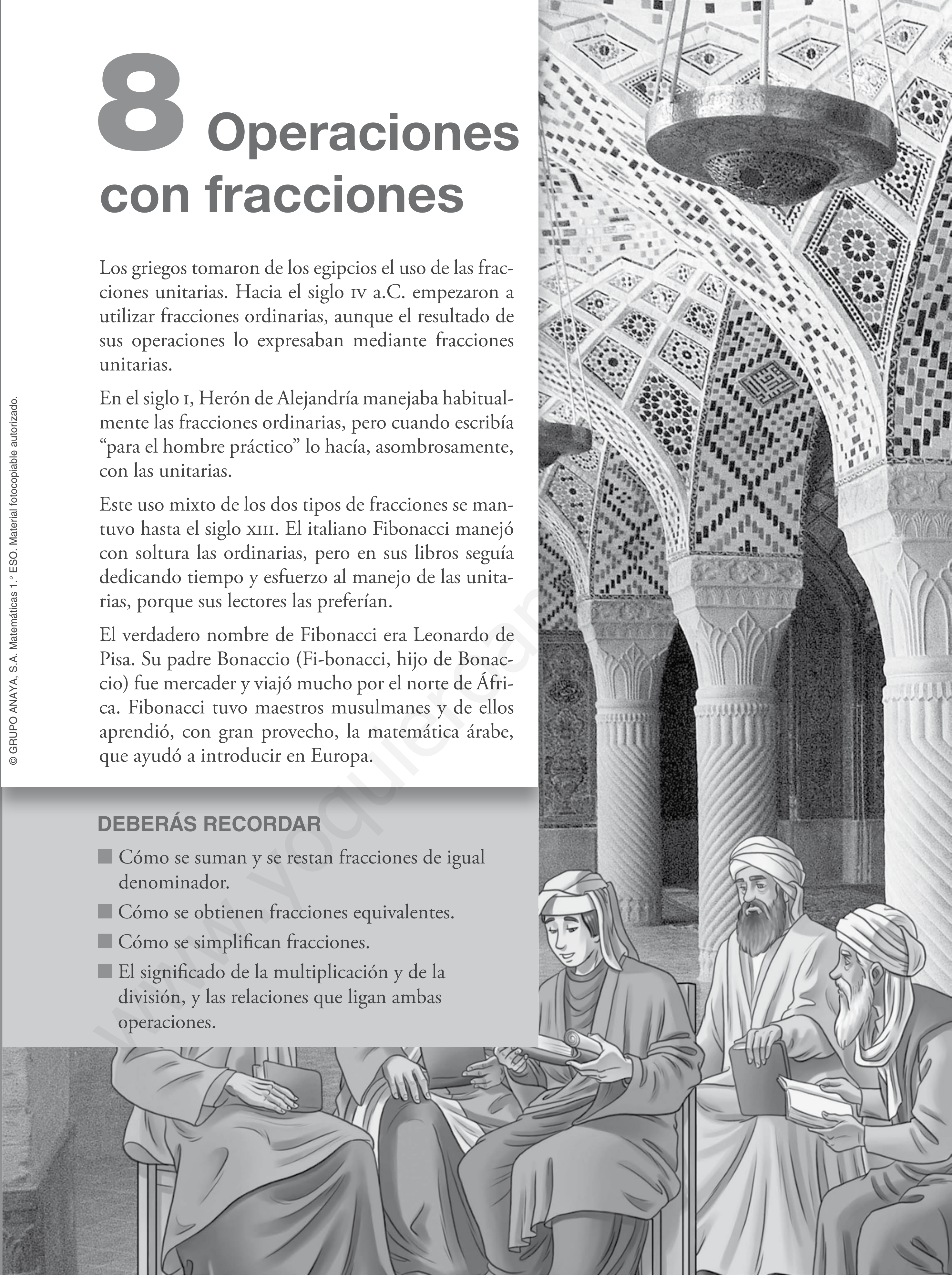
En el siglo I, Herón de Alejandría manejaba habitualmente las fracciones ordinarias, pero cuando escribía "para el hombre práctico" lo hacía, asombrosamente, con las unitarias.

Este uso mixto de los dos tipos de fracciones se mantuvo hasta el siglo XIII. El italiano Fibonacci manejó con soltura las ordinarias, pero en sus libros seguía dedicando tiempo y esfuerzo al manejo de las unitarias, porque sus lectores las preferían.

El verdadero nombre de Fibonacci era Leonardo de Pisa. Su padre Bonaccio (Fi-bonacci, hijo de Bonaccio) fue mercader y viajó mucho por el norte de África. Fibonacci tuvo maestros musulmanes y de ellos aprendió, con gran provecho, la matemática árabe, que ayudó a introducir en Europa.

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se suman y se restan fracciones de igual denominador.
- Cómo se obtienen fracciones equivalentes.
- Cómo se simplifican fracciones.
- El significado de la multiplicación y de la división, y las relaciones que ligan ambas operaciones.



Reducción a común denominador

Algunas operaciones con fracciones (comparar, sumar…) resultan más sencillas cuando las fracciones tienen denominadores iguales. Por ejemplo:

— Ordenar $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$ y $\frac{5}{7}$ es obvio → $\frac{1}{7} < \frac{2}{7} < \frac{5}{7}$

— Sin embargo, ordenar $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$ y $\frac{5}{6}$ no es tan sencillo a simple vista. Se hace necesario reducir a común denominador.

Ejemplo

Vamos a reducir a común denominador $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{12}$.

mín.c.m. (8, 4, 12) = 24

$$\begin{array}{ccc}
\frac{5}{8} & \frac{3}{4} & \frac{7}{12} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
24 : 8 = 3 & 24 : 4 = 6 & 24 : 12 = 2 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} & \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} & \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\frac{15}{24} & \frac{18}{24} & \frac{14}{24}
\end{array}$$

Reducir fracciones a común denominador es sustituirlas por otras equivalentes con el mismo denominador.

Método para reducir fracciones a común denominador

Fíjate en el ejemplo del margen mientras sigues el proceso que se expone a continuación.

Para reducir fracciones a común denominador

- Calcula el mínimo común múltiplo, m, de los denominadores.
- Transforma cada fracción en otra equivalente que tenga por denominador m.

  Para ello, se multiplican los dos miembros de cada fracción por el número que resulta de dividir m entre el denominador.

Actividades

1 Ejercicio resuelto

Reducir a común denominador $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$, poniendo de denominador común 12.

$$12 : 4 = 3 \quad \to \quad \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

$$12 : 6 = 2 \quad \to \quad \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12}$$

2 Reduce al denominador común que se indica.

a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ (denominador común 6)

b) $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$ (denominador común 6)

c) $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$ (denominador común 10)

d) $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ (denominador común 12)

e) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ (denominador común 12)

f) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{8}$ (denominador común 8)

3 Reduce a denominador común.

a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$

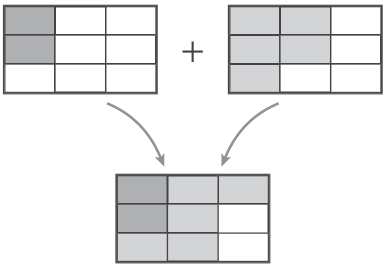
b) $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{9}$

c) $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$

d) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$ y $\frac{7}{20}$

2 Suma y resta de fracciones

Vamos a recordar los distintos casos que pueden presentarse al sumar o al restar fracciones.



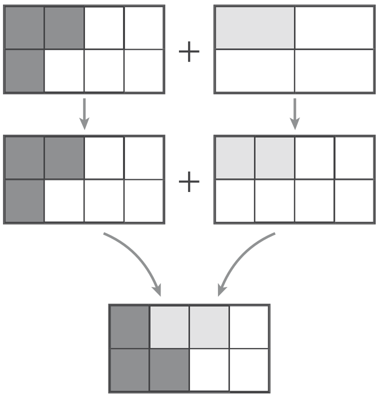
$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$

Con igual denominador

Para sumar o restar fracciones de igual denominador, se suman o se restan los numeradores, dejando el mismo denominador.

▼ **EJEMPLO**

$$\frac{5}{9} + \frac{8}{9} - \frac{7}{9} = \frac{5 + 8 - 7}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$



$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

Con distinto denominador

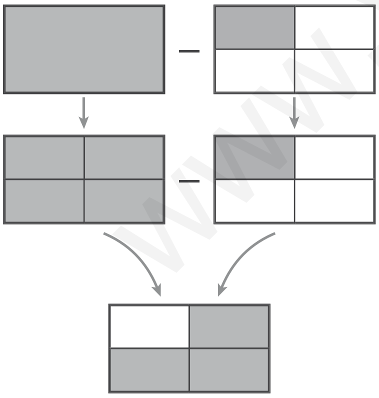
Cuando las fracciones tienen denominadores diferentes, las reduciremos, primero, a común denominador.

▼ **EJEMPLO**

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \begin{cases} \text{mín.c.m. } (4, 5, 10) = 20 \\ \text{Tomaremos 20 como denominador común.} \end{cases}$$

$$= \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 2}{10 \cdot 2} = \frac{5}{20} + \frac{12}{20} - \frac{2}{20} =$$

$$= \frac{5 + 12 - 2}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$



$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Suma de fracciones con números enteros

Si alguno de los sumandos es un número entero, se le trata como una fracción con denominador la unidad.

▼ **EJEMPLO**

$$2 - \frac{7}{3} + \frac{5}{6} = \left(\text{Cambiamos 2 por la fracción } \frac{2}{1}\right).$$

$$= \frac{2}{1} - \frac{7}{3} + \frac{5}{6} = \begin{cases} \text{mín.c.m. } (1, 3, 6) = 6 \\ \text{Tomaremos 6 como denominador común.} \end{cases}$$

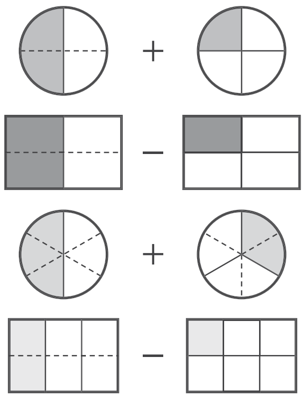
$$= \frac{2 \cdot 6}{1 \cdot 6} - \frac{7 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{5}{6} = \frac{12}{6} - \frac{14}{6} + \frac{5}{6} =$$

$$= \frac{12 - 14 + 5}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Observa que en las operaciones con fracciones, se deben simplificar siempre los resultados, entregando una fracción irreducible.

Actividades

1 Observa y calcula mentalmente.



$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$

2 Calcula, reduciendo primero a común denominador.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$　b) $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$

c) $\frac{5}{3}+\frac{1}{6}$　d) $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}$

e) $\frac{1}{6}+\frac{7}{8}$　f) $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$

g) $\frac{3}{10}+\frac{2}{15}$　h) $\frac{3}{8}-\frac{1}{6}$

3 Transforma cada entero en una fracción de denominador la unidad y opera:

a) $1+\frac{1}{5}$　b) $1-\frac{3}{5}$

c) $2+\frac{2}{7}$　d) $2-\frac{5}{3}$

4 Opera y simplifica los resultados.

a) $\frac{2}{9}+\frac{5}{18}$　b) $\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$

c) $\frac{3}{10}+\frac{8}{15}$　d) $\frac{3}{5}-\frac{1}{10}$

e) $\frac{2}{5}+\frac{7}{20}$　f) $\frac{5}{6}-\frac{3}{10}$

g) $\frac{1}{10}+\frac{1}{6}$　h) $\frac{13}{18}-\frac{1}{6}$

i) $\frac{5}{8}+\frac{1}{24}$　j) $\frac{13}{15}-\frac{7}{10}$

5 Calcula.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$　b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$

c) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$　d) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-1$

e) $\frac{7}{4}-\frac{5}{8}-\frac{2}{3}$　f) $\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-2$

g) $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}$　h) $\frac{3}{5}-\frac{5}{8}+\frac{7}{20}$

6 Calcula y simplifica los resultados.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$　b) $\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{4}{5}$

c) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{3}{5}$　d) $\frac{1}{4}+\frac{3}{10}-\frac{1}{20}$

e) $1-\frac{3}{10}-\frac{8}{15}$　f) $1-\frac{4}{15}-\frac{2}{5}$

g) $\frac{5}{2}-2+\frac{1}{10}$　h) $\frac{1}{4}+\frac{3}{10}-\frac{1}{20}$

i) $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}$　j) $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}$

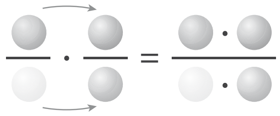
7 Nuria ha gastado 3/4 del dinero que tenía en un libro y 1/5 en un refresco. ¿Qué parte del dinero ha gastado? ¿Qué parte le queda?

8 Marta ha comprado tres cuartos de kilo de queso y le da a su vecina un tercio de kilo. ¿Qué fracción de kilo le queda?

9 En un crucero de recreo, 2/5 de los pasajeros son europeos; 1/6, africanos, y 1/15, asiáticos. El resto son americanos. ¿Qué fracción de los viajeros son americanos?

10 Con una botella que contiene dos litros de agua, se llenan dos vasos de cuarto de litro y un botellín de un tercio de litro. ¿Qué fracción de litro queda en la botella?

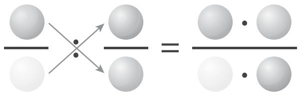
3 Multiplicación y división de fracciones



Para multiplicar fracciones

- Se multiplican los numeradores ⟶
- Se multiplican los denominadores →

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$



Para dividir dos fracciones, se multiplican los términos cruzados. $\Big\} \rightarrow \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Actividades

1 Calcula y, si es posible, simplifica.

a) $5 \cdot \frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{4} \cdot 3$

c) $\frac{3}{4} \cdot 2$ d) $(-5) \cdot \frac{3}{10}$

e) $6 \cdot \frac{1}{8}$ f) $\frac{3}{4} \cdot (-4)$

2 Multiplica y, si es posible, simplifica.

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}$

c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{11}$

e) $\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{15}$ f) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9}$

g) $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}$ h) $\frac{10}{3} \cdot \frac{3}{5}$

i) $\frac{12}{5} \cdot \frac{5}{18}$ j) $\frac{15}{8} \cdot \frac{2}{3}$

3 Expresa con una fracción.

a) El triple de dos séptimos.

b) La mitad de la mitad.

c) La mitad de un cuarto.

d) La cuarta parte de un tercio.

e) Un tercio de tres cuartos.

4 Luis avanza $\frac{3}{4}$ de metro con cada paso. ¿Cuántos metros avanza con mil pasos?

5 Un bote de refresco de naranja contiene un tercio de litro.

¿Cuántos litros se necesitan para llenar 60 botes?

6 Divide y, si es posible, simplifica.

a) $5 : \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2} : 5$ c) $\frac{3}{2} : 6$

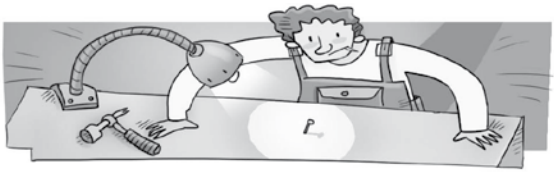
d) $7 : \frac{14}{3}$ e) $\frac{2}{5} : 3$ f) $5 : \frac{10}{3}$

7 Divide.

a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{5} : \frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{7} : \frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{7} : \frac{5}{2}$ e) $\frac{2}{11} : \frac{1}{5}$ f) $\frac{7}{4} : \frac{5}{3}$

8 Un clavo penetra 3/4 de centímetro con cada martillazo. ¿Cuántos golpes de martillo se necesitan para que penetre 6 centímetros?



9 Con 3/4 de kilo de café se han llenado 5 bolsas. ¿Qué fracción de kilo contiene cada una?

4

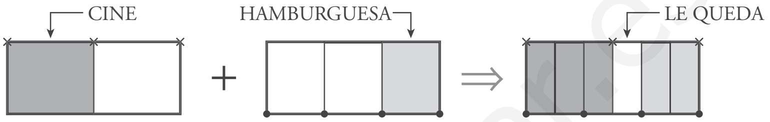
Algunos problemas con fracciones

Analiza los problemas siguientes, observa sus diferencias y reflexiona sobre los procesos seguidos en su resolución. Te ayudarán en muchos problemas con fracciones.

Suma de fracciones

PROBLEMA 1

Manuel gasta la mitad de su dinero en el cine y la tercera parte en una hamburguesa. ¿Qué fracción del dinero que tenía ha gastado? ¿Qué fracción le queda?



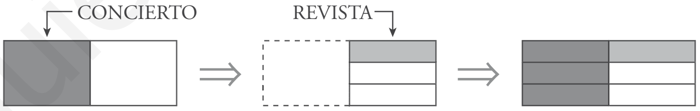
GASTA → $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$ → LE QUEDA → $\frac{1}{6}$

Solución: Manuel ha gastado $\frac{5}{6}$ de su dinero y le queda $\frac{1}{6}$.

Fracción de otra fracción

PROBLEMA 2

Marta gasta la mitad de su dinero en un concierto y la tercera parte "de lo que le quedaba" en una revista. ¿Qué fracción de su dinero ha gastado? ¿Qué fracción le queda?



CONCIERTO: Gasta → $\frac{1}{2}$. Queda → $\frac{1}{2}$.

REVISTA: Gasta → $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$. Quedan → $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{6}$.

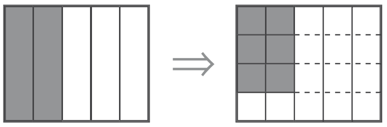
Solución: Ha gastado $\frac{4}{6}$ de su dinero y le quedan $\frac{2}{6}$ (simplifica estos resultados).

Ten en cuenta

Para calcular la fracción de otra fracción, se multiplican ambas fracciones.

Por ejemplo:

$\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$



$\frac{2}{5} \longrightarrow \frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}=\frac{6}{20}$

$\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{20}$

Actividades

1 Andrea ha gastado 2/3 de su dinero en un vestido y 1/5 en un pañuelo. ¿Qué fracción del dinero le queda?

2 Si a Andrea le quedan 20 €, ¿cuánto tenía al principio?

3 Iván ha gastado 2/3 de su dinero en una camisa y 1/5 de lo que le quedaba en una corbata. ¿Qué fracción del dinero le queda?

4 Si a Iván le quedan 20 €, ¿cuánto tenía al principio?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Operaciones con fracciones

Suma y resta

1 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) $1-\frac{1}{2}$ b) $1-\frac{1}{4}$ c) $1-\frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$

2 ▼▽▽ Opera.

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{3}+\frac{8}{9}-\frac{25}{27}$

c) $2-\frac{3}{2}+\frac{1}{6}$ d) $\frac{3}{4}-\frac{7}{5}+\frac{3}{10}$

e) $\frac{2}{5}+\frac{7}{10}-\frac{11}{15}$ f) $\frac{8}{5}-1+\frac{13}{15}$

g) $\frac{1}{6}+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$ h) $\frac{5}{9}+\frac{1}{4}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$

3 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

Calcular: $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=$

a) Podemos operar, primero, en los paréntesis.

$$=\frac{6+5}{15}-\frac{5-2}{10}=\frac{11}{15}-\frac{3}{10}=\frac{22-9}{30}=\frac{13}{30}$$

b) O podemos quitar, primero, los paréntesis.

$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{12+10-15+6}{30}=\frac{13}{30}$$

Multiplicación y división

4 ▼▽▽ Multiplica y reduce.

a) $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}$ c) $\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{8}$ d) $\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{8}$

e) $\frac{12}{5}\cdot\frac{7}{12}$ f) $\frac{10}{7}\cdot\frac{7}{15}$ g) $\frac{7}{15}\cdot\frac{5}{14}$ h) $\frac{2}{7}\cdot\frac{21}{16}$

5 ▼▽▽ Divide y simplifica.

a) $\frac{2}{5}:\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{3}:\frac{2}{6}$ c) $\frac{1}{3}:\frac{1}{7}$ d) $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$ f) $\frac{15}{12}:\frac{3}{10}$ g) $\frac{5}{3}:\frac{1}{6}$ h) $\frac{2}{7}:\frac{6}{14}$

6 ▼▼▽ Opera como en el ejemplo y compara los resultados de cada apartado.

- $\mathbf{\frac{2}{5}:\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}:\frac{3}{10}=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}}$

a) $\frac{3}{4}:\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\right)$ $\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{5}$

b) $\frac{2}{5}:\left(\frac{3}{5}:\frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{2}{5}:\frac{3}{5}\right):\frac{1}{2}$

Operaciones combinadas

7 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

Calcular: $\frac{5}{11}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{5}\right)=$

$$=\frac{5}{11}\cdot\frac{15-4}{10}=\frac{5}{11}\cdot\frac{11}{10}=\frac{5\cdot\cancel{11}}{\cancel{11}\cdot 10}=\frac{1}{2}$$

8 ▼▼▽ Calcula.

a) $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ b) $\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

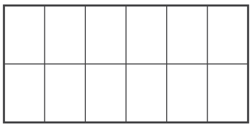
c) $2\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right)$ d) $\frac{1}{10}:\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)$

e) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)$ f) $\frac{7}{9}:\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{9}\right)$

Reflexiona, decide y aplica

9 ▼▼▽ Una bolsa contiene canicas. La cuarta parte son rojas; la tercera parte, verdes, y el resto, blancas.

a) Representa los colores en el gráfico.



b) ¿Qué fracción de las canicas de la bolsa son blancas?

c) ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones responden a la pregunta anterior?:

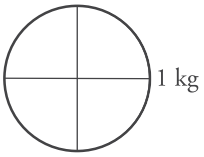
I. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ II. $1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)$

III. $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$ IV. $\left(1-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{3}$

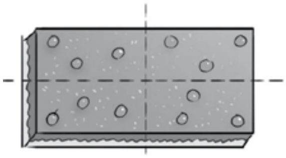
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Resuelve problemas



10 ▼▽▽ Rosa ha comprado un queso de tres cuartos de kilo y le ha dado a su hija medio kilo. ¿Cuánto pesa el trozo que se ha quedado ella?



11 ▼▽▽ Hoy ha sido la fiesta de cumpleaños de Marta. Su madre había comprado una tarta muy grande de la que se ha consumido la mitad. Después, han apartado una cuarta parte para los abuelos, que no han podido venir. El resto nos lo comeremos mañana. ¿Qué parte de la tarta ha quedado para mañana?

12 ▼▽▽ La mitad de los habitantes de una aldea viven de la agricultura; la tercera parte, de la ganadería, y el resto, de los servicios.

¿Qué fracción de la población vive de los servicios?

13 ▼▽▽ Un peregrino recorre 1/6 del camino en la primera semana, 1/3 en la segunda semana y 2/9 en la tercera. ¿Qué fracción del camino le queda por recorrer al principio de la cuarta semana?

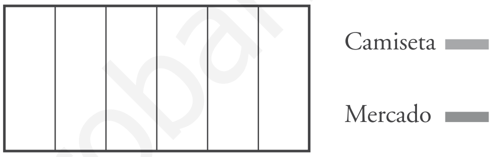
14 ▼▽▽ Una furgoneta de reparto carga 40 cajas de vino. Cada caja contiene 12 botellas de tres cuartos de litro.

¿Cuántos litros de vino van en la furgoneta?

15 ▼▽▽ ¿Cuántos litros de perfume se necesitan para llenar 100 frasquitos de 3/20 de litro?

16 ▼▼▽ Marta ha gastado la mitad del dinero que llevaba en una camiseta; la tercera parte, en el mercado, y aún le quedan 10 euros.

a) Representa la situación sobre el gráfico.



b) ¿Cuánto dinero llevaba?

17 ▼▼▼ De un listón de madera, cortamos la tercera parte para hacer una banderola. Después, cortamos la mitad de lo que queda para arreglar la valla del jardín. El trozo que sobra mide 40 centímetros.

¿Cuánto medía el listón antes de cortarlo?

Autoevaluación

1 Reduce a común denominador:

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$$

2 Ordena de menor a mayor las tres fracciones del ejercicio anterior.

3 Calcula.

a) $\frac{3}{4} - \frac{7}{12}$

b) $1 + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$

4 Calcula y simplifica.

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$

b) $\frac{4}{15} : \frac{2}{3}$

5 En casa de Raquel compran una tarta. Al mediodía consumen la mitad de la tarta, y en la cena, la tercera parte.

¿Qué porción de tarta han consumido?

¿Qué porción queda?

6 Julián avanza 4/5 de metro en cada paso.

¿Cuánto avanza en 10 pasos?

7 Un botellín de agua contiene 1/3 de litro.

¿Cuántos botellines se llenan con 30 litros?

9 Proporcionalidad y porcentajes

Los matemáticos de los pueblos primitivos se ocuparon, entre otras cosas, de resolver problemas de proporcionalidad (repartos, herencias…). Así fue en el antiguo Egipto y en Babilonia.

Sin embargo, los griegos fueron más allá, prestando atención a lo que llamaron *la teoría de las proporciones,* con un enfoque más teórico que práctico.

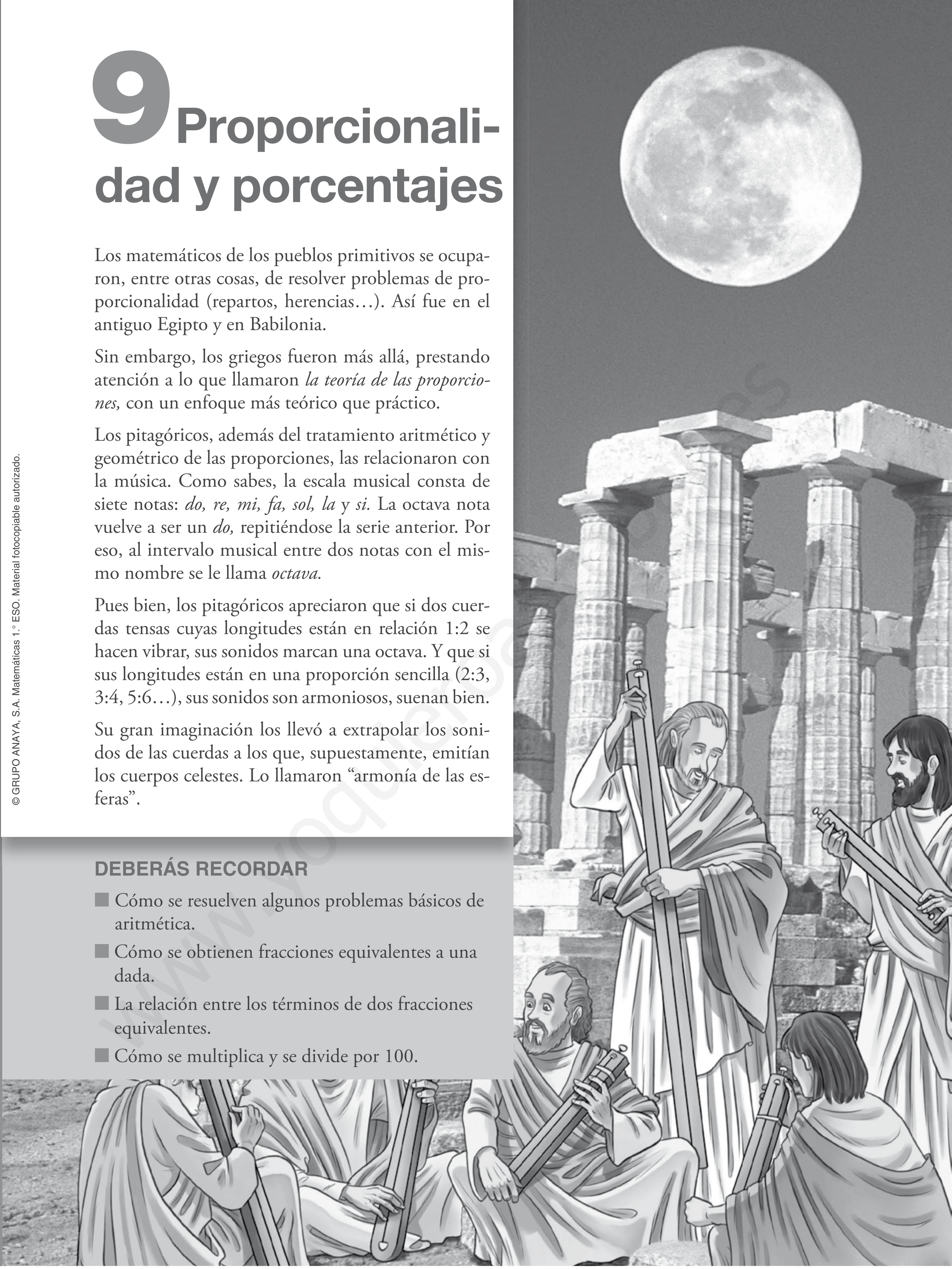
Los pitagóricos, además del tratamiento aritmético y geométrico de las proporciones, las relacionaron con la música. Como sabes, la escala musical consta de siete notas: *do, re, mi, fa, sol, la* y *si.* La octava nota vuelve a ser un *do,* repitiéndose la serie anterior. Por eso, al intervalo musical entre dos notas con el mismo nombre se le llama *octava.*

Pues bien, los pitagóricos apreciaron que si dos cuerdas tensas cuyas longitudes están en relación 1:2 se hacen vibrar, sus sonidos marcan una octava. Y que si sus longitudes están en una proporción sencilla (2:3, 3:4, 5:6…), sus sonidos son armoniosos, suenan bien.

Su gran imaginación los llevó a extrapolar los sonidos de las cuerdas a los que, supuestamente, emitían los cuerpos celestes. Lo llamaron "armonía de las esferas".

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se resuelven algunos problemas básicos de aritmética.
- Cómo se obtienen fracciones equivalentes a una dada.
- La relación entre los términos de dos fracciones equivalentes.
- Cómo se multiplica y se divide por 100.

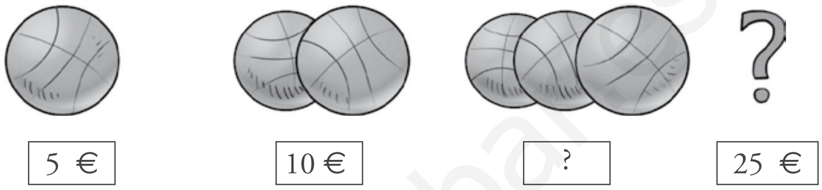


1 Relación de proporcionalidad entre magnitudes

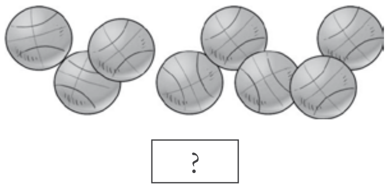
Llamamos magnitud a cualquier cualidad de los objetos que se pueda medir. Así, la longitud, el peso o el precio son magnitudes. A veces, entre las magnitudes se dan relaciones muy útiles para la resolución de problemas, como la relación de proporcionalidad que vas a estudiar ahora en sus dos modalidades: directa e inversa.

Relación de proporcionalidad directa

Observa la ilustración y calcula mentalmente los datos que faltan.



Aquí aparecen dos magnitudes, el número de balones y el coste (euros), y podemos construir una tabla con los valores correspondientes:



N.° DE BALONES	1	2	3	4	?	…	8
COSTE (EUROS)	5	10	15	20	25	…	?

Es evidente que existe una relación entre ambas magnitudes, lo que nos permite completar la tabla. Diremos que esa relación es de proporcionalidad directa.

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** cuando:

- Al multiplicar una (doble, triple, …), la otra se multiplica de la misma manera (doble, triple, …).
- Al dividir una (mitad, tercio, …), la otra se divide de la misma forma (mitad, tercio, …).

Actividades

1 Lola ha comprado cinco cromos por cuarenta céntimos. Completa la tabla, sabiendo que todos los cromos de la colección tienen el mismo precio.

N.° DE CROMOS	1	2	3	4	5	6	10	15	20
COSTE (EUROS)					0,40				

2 Dos paquetes de galletas pesan 0,5 kg. Completa la tabla que relaciona el número de paquetes con su peso.

N.° DE PAQUETES	1	2	3	4	
PESO (kg)		0,500			2

3 Di cuáles de los siguientes pares de magnitudes son directamente proporcionales:

a) El peso de una sandía y su precio.

b) La edad de una persona y su altura.

c) El tiempo que caminas a velocidad constante y la distancia que recorres.

d) La talla de un pantalón y su precio.

e) El tiempo que permanece abierto un grifo y la cantidad de agua que arroja.

f) El precio de un libro y su número de páginas.

Relación de proporcionalidad inversa

Reflexiona, ahora, sobre la relación que existe entre el número de caballos que tiene un granjero y los días que le dura una carga de heno.

Observa que cuantos *más* caballos hay en la granja *menos* dura la carga de heno; y cuantos *menos* sean los caballos *más* dura la carga de heno.

La relación existente entre las dos magnitudes (el número de caballos y el número de días que dura el heno) nos permite completar los valores de la tabla siguiente:

N.° DE CABALLOS	4	2	1	3	6
N.° DE DÍAS	15	30	60	20	?

Diremos que esta relación es de proporcionalidad inversa.

Dos **magnitudes** son **inversamente proporcionales** cuando:

- Al multiplicar una (doble, triple, …), se divide la otra (mitad, tercio, …).
- Al dividir una (mitad, tercio, …), la otra se multiplica (doble, triple, …).

Actividades

4 Di cuáles de las magnitudes siguientes son inversamente proporcionales:

a) El número de operarios que desacargan un camión y el tiempo que tardan.

b) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en cubrir la distancia entre dos ciudades.

c) El precio de las manzanas y los kilos que puedo comprar con el dinero que llevo.

d) La capacidad de un vaso y el número de vasos necesarios para llenar una determinada jarra.

5 Una cuadrilla de cinco operarios municipales limpia el polideportivo en 6 horas.

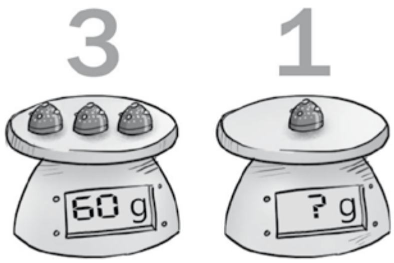
Completa la tabla siguiente con los tiempos que tardarían en hacer el mismo trabajo otras cuadrillas con distinto número de trabajadores:

N.° DE OPERARIOS	1	2	3	5	6	10
TIEMPO (HORAS)	30			6		

¿Qué relación existe entre las dos magnitudes consideradas? Justifica tu respuesta.

2

Problemas de proporcionalidad directa



REDUCCIÓN A LA UNIDAD

De las relaciones de proporcionalidad se derivan herramientas que facilitan la resolución de algunos tipos de problemas aritméticos. Esas herramientas se concretan en dos métodos de resolución: la reducción a la unidad y la regla de tres.

Método de reducción a la unidad

▼ **EJEMPLO**

Tres chocolatinas pesan 60 gramos. ¿Cuánto pesan cuatro chocolatinas?

MAGNITUDES

N.º DE CHOCOLATINAS → PESO (g)

3 → 60

REDUCCIÓN A LA UNIDAD ⇒ 1 → ? → 60 : 3 = 20 g

4 → ? → 20 · 4 = 80 g

Solución: Cuatro chocolatinas pesan 80 gramos.

Método de reducción a la unidad

Consiste en calcular, primero, el valor asociado a la unidad.

Conociendo ese valor, es fácil completar cualquier par de valores correspondientes.

Problema resuelto

Un manantial arroja un caudal de 6 litros por minuto. ¿Cuánto tardará en llenar una garrafa de 20 litros?

CANTIDAD (*l*) TIEMPO (s)

6 → 60

1 → ? → 60 : 6 = 10 s

20 → ? → 10 · 20 = 200 s = = 3 min 20 s

Solución: Se tardan 3 min y 20 s en llenar una garrafa de 20 litros.

Fracciones equivalentes en las tablas de valores directamente proporcionales

Tomemos la tabla de valores del ejemplo anterior, que relaciona el número de chocolatinas con su peso.

N.º DE CHOCOLATINAS	PESO (gramos)
1	20
2	40
3	60
4	80

Observa que con dos pares de valores correspondientes se construyen dos fracciones equivalentes:

$$\frac{1}{2} = \frac{20}{40} \Leftrightarrow \frac{\underbrace{1 \cdot 40}}{40} = \frac{\underbrace{2 \cdot 20}}{40}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{60}{80} \Leftrightarrow \frac{\underbrace{3 \cdot 80}}{240} = \frac{\underbrace{4 \cdot 60}}{240}$$

Comprueba que ocurre lo mismo con nuevos valores de la tabla.

Nos apoyaremos en esta propiedad para justificar un nuevo método para la resolución de problemas de proporcionalidad: **la regla de tres.**

Regla de tres directa

Hemos visto que dos pares de valores correspondientes forman dos fracciones equivalentes. Esto nos permite calcular uno de los cuatro valores si se conocen los otros tres.

Regla de tres directa

Consiste en formar una pareja de fracciones equivalentes con los tres datos y la incógnita.

MAGNITUD 1		MAGNITUD 2
a	⟶	m
b	⟶	x

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{x}$$

$$a \cdot x = b \cdot m \rightarrow x = \frac{b \cdot m}{a}$$

▼ **EJEMPLO**

Tres chocolatinas pesan 60 gramos. ¿Cuánto pesan ocho chocolatinas?

MAGNITUDES

N.º DE CHOCOLATINAS		PESO (g)
3	⟶	60
8	⟶	x

Con estos dos pares de valores formamos dos fracciones equivalentes:

$$\frac{3}{8} = \frac{60}{x} \rightarrow 3 \cdot x = 60 \cdot 8 \rightarrow x = \frac{60 \cdot 8}{3} = 160 \text{ g}$$

Solución: Ocho chocolatinas pesan 160 gramos.

Actividades

1 Resuelve por reducción a la unidad: Tres kilos de manzanas cuestan 3,75 €. ¿Cuánto cuestan 4 kilos?

KILOS		EUROS
3	⟶	3,75
1	⟶	?
4	⟶	?

2 Dos kilos de peras cuestan 1,80 €.

a) ¿Cuánto cuesta un kilo?

b) ¿Cuánto cuestan tres kilos?

3 Resuelve por reducción a la unidad.

a) Dos kilos de patatas cuestan 0,80 €. ¿Cuánto cuestan cinco kilos?

b) Un canguro avanza 12 metros en cuatro saltos. ¿Cuánto avanza en 10 saltos?

c) Tres barras de pan pesan 600 gramos. ¿Cuánto pesan dos barras?

d) Por el alquiler de una bicicleta durante dos horas pago 3 €. ¿Cuánto pagaré si la alquilo durante siete horas?

e) Un grifo abierto durante cinco minutos hace que el nivel de un depósito suba 20 centímetros. ¿Cuánto subirá el nivel en siete minutos?

f) Por un gasto de 20 € te dan 3 cupones-descuento. ¿Cuántos cupones te darán por un gasto de 140 €?

4 Calcula x en cada caso, como en el ejemplo:

- $\mathbf{\frac{4}{6} = \frac{14}{x} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 14}{4} = 21}$

a) $\frac{1}{3} = \frac{5}{x}$

b) $\frac{6}{9} = \frac{10}{x}$

c) $\frac{2}{6} = \frac{5}{x}$

d) $\frac{5}{6} = \frac{7}{x}$

e) $\frac{10}{12} = \frac{4}{x}$

f) $\frac{5}{3} = \frac{1}{x}$

g) $\frac{1{,}2}{3} = \frac{0{,}6}{x}$

h) $\frac{1{,}6}{0{,}8} = \frac{1}{x}$

i) $\frac{0{,}5}{0{,}6} = \frac{7{,}5}{x}$

j) $\frac{0{,}4}{1{,}8} = \frac{3{,}2}{x}$

5 Resuelve con una regla de tres: Si 100 g de salmón ahumado cuestan 2,40 €, ¿cuánto costarán 260 g?

GRAMOS		EUROS
100	⟶	2,40
260	⟶	x

6 Un trozo de queso de 400 gramos cuesta 4,60 €. ¿Cuánto costará otro pedazo del mismo queso de 320 gramos?

7 Un motorista que transita por una autopista ha recorrido 4,8 km en los últimos 3 minutos. Si no varía la velocidad, ¿qué distancia recorrerá en los próximos 10 minutos?

3 Porcentajes

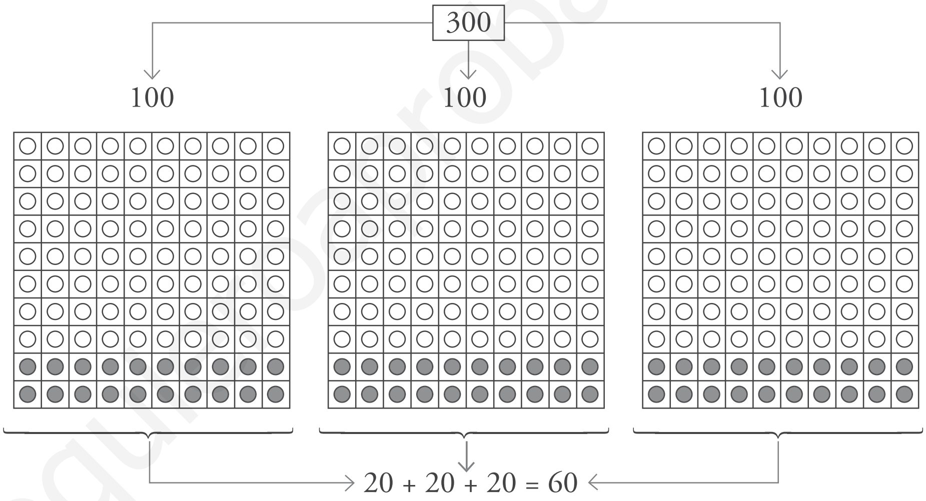
Seguramente, habrás escuchado frases como “hay un ochenta por ciento de posibilidades”, “me han hecho una rebaja del diez por ciento” o “el banco cobra un cuatro y medio por ciento”. Son expresiones muy usadas en el lenguaje corriente y, sobre todo, en el lenguaje comercial.

Concepto de tanto por ciento

Tomar un determinado tanto por ciento de un total equivale a partir el total en porciones de cien unidades y tomar de cada porción el tanto indicado.

▼ **EJEMPLO**

En un aparcamiento hay 300 coches. El 20% son rojos. ¿Cuántos coches rojos hay?



Para calcular el 20%, partimos el total en paquetes de 100 y tomamos 20 de cada paquete. $\Big\}$ 300 : 100 = 3 → 3 · 20 = 60

Ten en cuenta

a% de N = (N : 100) · a

Ejemplo:

35% de 240 = (240 : 100) · 35 =

= 2,4 · 35 = 84

- El símbolo % se lee **por ciento:** 20% → veinte por ciento.
- Para calcular un determinado **tanto por ciento de una cantidad,** dividimos la cantidad entre 100 y multiplicamos por el tanto.

▼ **EJEMPLO**

Vamos a calcular el 65% de 540:

65% de 540 = (540 : 100) · 65 =

= 5,4 · 65 =

= 351

Ejercicios resueltos

1. Calcular:

a) 12% de 380 **b) 40% de 65**

a) 12% de 380 = (380 : 100) · 12 = 3,8 · 12 = 45,6

b) 40% de 65 = (65 : 100) · 40 = 0,65 · 40 = 26

2. Una tienda vende el 45% de los 800 balones de su almacén. ¿Cuántos ha vendido?

45% de 800 = (800 : 100) · 45 = 8 · 45 = 360

Solución: Ha vendido 360 balones.

Actividades

1 Calcula mentalmente en el orden en que aparecen:

a) 30% de 100
30% de 200
30% de 300

b) 8% de 100
8% de 200
8% de 300

c) 15% de 200
15% de 300
15% de 400

d) 5% de 200
5% de 400
5% de 600

2 Calcula mentalmente.

a) 12% de 400
b) 7% de 300
c) 25% de 300
d) 6% de 800
e) 40% de 200
f) 10% de 500

3 Calcula con lápiz y papel.

a) 4% de 175
b) 9% de 1 200
c) 10% de 820
d) 12% de 425
e) 17% de 560
f) 25% de 1 480
g) 32% de 625
h) 44% de 10 000
i) 63% de 830
j) 90% de 451

4 Calcula.

a) 10% de 30
b) 10% de 82
c) 15% de 40
d) 15% de 68
e) 20% de 50
f) 20% de 34
g) 35% de 80
h) 35% de 48
i) 50% de 24
j) 50% de 31

5 Reflexiona y contesta.

a) El 80% de los frutales de una huerta son manzanos, y el resto, perales. ¿Cuál es el porcentaje de perales?

b) El 92% de los alumnos han aprobado un examen. ¿Qué porcentaje no ha aprobado?

c) El 10% de los empleados de una empresa están de vacaciones. ¿Qué porcentaje está trabajando?

d) Si al comprar un jersey me rebajan el 15%, ¿qué porcentaje pago?

6 El 90% de los 430 empleados de una fábrica trabajan en turno de día. ¿Cuántos trabajan de día?

7 En una clase de 30 alumnos, el 80% votaron a la actual delegada. ¿Cuántos votos recibió la delegada?

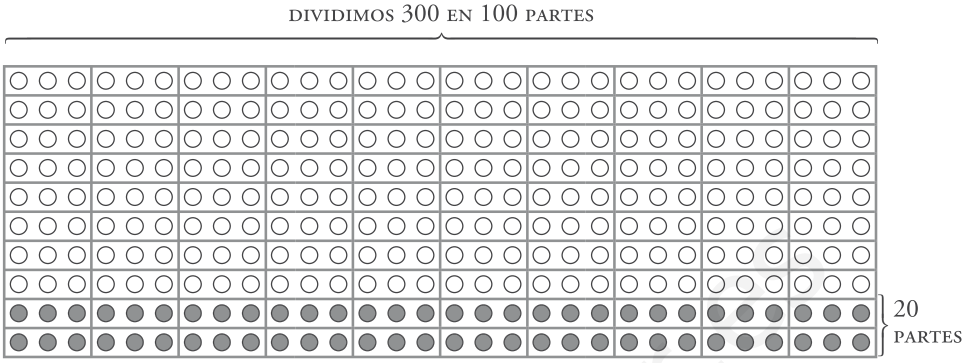
8 El 30% de los 560 árboles que hay en un parque se plantaron el invierno pasado.
¿Cuántos árboles se plantaron el último invierno?

9 En el estante de los zumos de un supermercado hay 900 botellas. Un 25% son de zumo de tomate; un 45%, de naranja; un 20%, de pera, y el resto, de melocotón.
¿Cuántas botellas hay de cada sabor?

10 Una familia compra un frigorífico que cuesta 840 € pagando el 30% al contado y el resto en 6 plazos mensuales sin recargo.
¿Cuál es el importe de cada plazo?

Un porcentaje es una fracción

Recuerda que para calcular el 20% de una cantidad, tomábamos 20 unidades de cada 100. Pero obtenemos el mismo resultado si dividimos el total en 100 partes iguales y tomamos 20 de esas partes; esto es, si tomamos 20/100 de la cantidad.



$$\left.\begin{array}{l} 20\% \text{ de } 300 = \\ \dfrac{20}{100} \text{ de } 300 = \end{array}\right\rangle (300 : 100) \cdot 20 = 3 \cdot 20 = 60$$

Recuerda

$a\%$ de $N = \dfrac{a}{100}$ de N

Ejemplo:

15% de $240 = \dfrac{15}{100}$ de $240 =$

$= (240 : 100) \cdot 15 = 2{,}4 \cdot 15 = 36$

Como ves, calcular un tanto por ciento es calcular una fracción del total.

Un tanto por ciento equivale a una fracción que tiene por numerador el tanto y por denominador 100. $\Big\}\ a\% \longleftrightarrow \dfrac{a}{100}$

▼ **EJEMPLO**

Vamos a calcular el 15% de 80:

$$15\% \text{ de } 80 = \frac{15}{100} \text{ de } 80 = (80 : 100) \cdot 15 = 0{,}8 \cdot 0{,}15 = 12$$

Ejercicio resuelto

Calcular los porcentajes siguientes:

a) 65% de 590

b) 8% de 475

a) $65\% \text{ de } 590 = \dfrac{65}{100} \text{ de } 590 = (590 : 100) \cdot 65 =$

$= 5{,}9 \cdot 65 = 383{,}5$

b) $8\% \text{ de } 475 = \dfrac{8}{100} \text{ de } 475 = (475 : 100) \cdot 8 =$

$= 4{,}75 \cdot 8 = 38$

Porcentajes con calculadora

Para calcular porcentajes con la calculadora, puedes utilizar la tecla $\boxed{\%}$.

$$15\% \text{ de } 240$$
$$\Downarrow$$
$$240\ \boxed{\times}\ 15\ \boxed{\%} \rightarrow \boxed{\qquad 36}$$

Algunos porcentajes especiales

Con un poco de ingenio, y basándote en la simplificación de fracciones, el cálculo de algunos porcentajes te resultará muy sencillo.

Veamos algunos ejemplos.

EL 50%

$$50\% \text{ de } 80 = \frac{50}{100} \text{ de } 80 = \frac{1}{2} \text{ de } 80 = 80 : 2 = 40$$

El 50% es la mitad. Para hallar el 50%, se divide entre 2.

EL 25%

$$25\% \text{ de } 60 = \frac{25}{100} \text{ de } 60 = \frac{1}{4} \text{ de } 60 = 60 : 4 = 15$$

El 25% es la cuarta parte. Para hallar el 25%, se divide entre 4.

EL 20%

$$20\% \text{ de } 40 = \frac{20}{100} \text{ de } 40 = \frac{1}{5} \text{ de } 40 = 40 : 5 = 8$$

El 20% es la quinta parte. Para calcular el 20%, se divide entre 5.

EL 10%

$$10\% \text{ de } 70 = \frac{10}{100} \text{ de } 70 = \frac{1}{10} \text{ de } 70 = 70 : 10 = 7$$

El 10% es la décima parte. Para calcular el 10%, se divide entre 10.

Actividades

11 Calcula mentalmente.

a) 50% de 18
b) 50% de 84
c) 25% de 20
d) 25% de 48
e) 20% de 35
f) 20% de 55
g) 10% de 190
h) 10% de 240

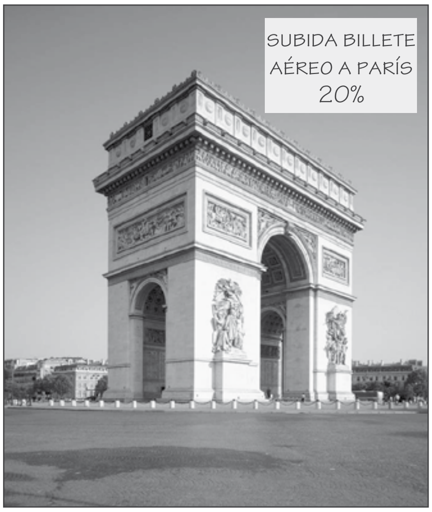
12 Reflexiona y justifica los cálculos realizados en cada caso:

a) 10% de 260 = 260 : 10 = 26
b) 5% de 260 = 26 : 2 = 13
c) 20% de 55 = 55 : 5 = 11
d) 40% de 55 = 11 · 2 = 22
e) 25% de 84 = 84 : 4 = 21
f) 75% de 84 = 21 · 3 = 63
g) 50% de 348 = 348 : 2 = 174
h) 5% de 348 = 174 : 10 = 17,4

4 Aumentos y disminuciones porcentuales

Veamos dos tipos de problemas que encontrarás con frecuencia en el mundo real. Analízalos con detenimiento y aprende los métodos de resolución.

Aumentos porcentuales



Un billete de avión a París costaba, el verano pasado, 460 €, pero desde entonces ha subido un 20%.

¿Cuál es el precio actual del billete?

- **Resolución**

$$\text{Precio antiguo} \longrightarrow 460\ €$$
$$\text{Aumento} \longrightarrow 20\%\ \text{de}\ 460 = \frac{20 \cdot 460}{100} = 92\ €$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{PRECIO}\\\text{NUEVO}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{PRECIO}\\\text{ANTIGUO}\end{array}} + \boxed{\text{AUMENTO}} \rightarrow 460 + 92 = 552\ €$$

Por tanto, el precio actual del billete asciende a 552 €.

Disminuciones porcentuales

Una tienda de electrodomésticos saca en oferta, con una rebaja del 15%, un televisor que antes costaba 900 €.

¿Cuánto cuesta, ahora, el televisor?

- **Resolución**

$$\text{Precio antiguo} \longrightarrow 900\ €$$
$$\text{Rebaja} \longrightarrow 15\%\ \text{de}\ 900 = \frac{15 \cdot 900}{100} = 135\ €$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{PRECIO}\\\text{FINAL}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{PRECIO}\\\text{ANTIGUO}\end{array}} - \boxed{\text{REBAJA}} \rightarrow 900 - 135 = 765\ €$$

Por tanto, ahora el televisor cuesta 765 €.

Actividades

1 Rosa pide un préstamo de 4 000 € para devolverlo al cabo de un año.

¿Qué cantidad deberá devolver si el banco le cobra un interés del 5%?

2 Una aldea tenía, tras el último censo, 250 habitantes, pero desde entonces su población ha disminuido un 8%.

¿Cuál es la población actual?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Las relaciones de proporcionalidad

1 ▼▽▽ Indica los pares de magnitudes que son directamente proporcionales (D), los que son inversamente proporcionales (I) y los que no guardan proporcionalidad (X).

a) El tiempo que está encendida una farola y la cantidad de energía que gasta.

b) El número de páginas de un periódico y su precio.

c) La velocidad de un tren y el tiempo que tarda en ir de Córdoba a Badajoz.

d) El peso de un queso y su coste.

e) El caudal de una fuente y el tiempo que tarda en llenar un cántaro.

f) El número de asas de un jarro y su capacidad.

2 ▼▽▽ Calcula en cada caso el término desconocido:

a) $\frac{6}{10} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{21}{24} = \frac{28}{x}$

c) $\frac{17}{24} = \frac{51}{x}$ d) $\frac{14}{21} = \frac{x}{69}$

e) $\frac{x}{63} = \frac{65}{91}$ f) $\frac{39}{x} = \frac{13}{17}$

g) $\frac{x}{18} = \frac{18}{81}$ h) $\frac{5}{9} = \frac{1}{x}$

i) $\frac{3}{2{,}4} = \frac{35}{x}$ j) $\frac{0{,}63}{0{,}56} = \frac{2{,}7}{x}$

Problemas de proporcionalidad

3 ▼▽▽ Resuelve mentalmente.

a) Dos cajas de galletas cuestan 4 €. ¿Cuánto costarán tres cajas?

b) Doscientos gramos de mortadela cuestan 1,80 €. ¿Cuánto cuestan 300 gramos?

c) Dos jardineros siegan un parque en 3 horas. ¿Cuánto tardaría uno solo? ¿Y tres jardineros?

d) Un ciclista, a 20 km/h, tarda 30 minutos en cubrir cierto recorrido. ¿Cuánto tardará una moto a 60 km/h?

4 ▼▼▽ Cuatro cajas de galletas pesan 2,4 kg. ¿Cuánto pesarán cinco cajas iguales a las anteriores?

5 ▼▼▽ Una fuente arroja 42 litros de agua en 6 minutos. ¿Cuántos litros arrojará en 15 minutos?

6 ▼▼▽ Un empleado recibió la semana pasada 60 € por 5 horas extraordinarias de trabajo. ¿Cuánto recibirá esta semana por solo 3 horas?

7 ▼▼▽ Las grosellas se venden a 2,30 euros el cuarto. ¿Cuánto cuesta cuarto y mitad?

8 ▼▼▽ Un besugo de un kilo y doscientos gramos ha costado 14,40 €. ¿Cuánto costará otro besugo de ochocientos gramos?

9 ▼▼▽ Un grifo, con un caudal de 12 litros por minuto, ha tardado tres cuartos de hora en llenar un depósito.

¿Cuál deberá ser el caudal para llenar el mismo depósito en 20 minutos?

10 ▼▼▼ Un mayorista de frutos secos compra una producción de nueces y las envasa, ya sin cáscara, en 1 500 bolsas de cuarto de kilo.

¿Cuántas bolsas habría llenado si hubiera puesto 300 gramos por bolsa?

11 ▼▼▼ Un club de montañismo tiene 280 socios. Por cada cinco hombres, hay tres mujeres. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres tiene el club?

Porcentajes

12 ▼▽▽ Observa una forma rápida de calcular los tantos por ciento, y completa las casillas vacías de la tabla.

20% de 350 = $\frac{350 \cdot 20}{100}$ = 70	**350 · 0,20 = 70**
13% de 200 = $\frac{200 \cdot 13}{100}$ = 26	**200 · 0,13 = 26**
85% de 420 = $\frac{420 \cdot 85}{100}$ = 357	
6% de 500 = $\frac{500 \cdot 6}{100}$ = 30	
35% de 400 = $\frac{400 \cdot 35}{100}$ = 140	
8% de 350 = $\frac{350 \cdot 8}{100}$ = 28	

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

13 ▼▽▽ Completa cada casilla con un número decimal y, después, calcula el resultado:

a) 20% de 560 = ☐ · 560 = …

b) 16% de 1 250 = ☐ · 1 250 = …

c) 72% de 925 = ☐ · 925 = …

d) 9% de 700 = ☐ · 700 = …

e) 2% de 650 = ☐ · 650 = …

14 ▼▽▽ Observa la tabla y comprueba los valores con la calculadora.

	40	45	70	200	280	426
10%	4	4,5	7	20	28	42,6
5%	2	2,25	3,5	10	14	21,3

Copia y completa:

a) Para calcular el 10% de una cantidad, se divide entre …

b) Para calcular el 5%, se divide primero entre … y después entre …

15 ▼▽▽ El 50% de algo es su mitad, es decir, 1/2.

a) ¿Qué fracción es el 10%?

b) ¿Qué fracción es el 30%?

Razona tus respuestas.

16 ▼▼▽ Completa con el porcentaje adecuado en cada caso:

a) ☐ % de 70 = 35

b) ☐ % de 230 = 115

c) ☐ % de 800 = 200

d) ☐ % de 370 = 37

e) ☐ % de 56 = 5,6

f) ☐ % de 30 = 6

17 ▼▼▽ Calcula mentalmente.

a) El 50% de un número es 16. ¿Cuál es el número?

b) El 25% de un número es 9. ¿Cuál es el número?

c) El 75% de un número es 15. ¿Cuál es el número?

d) El 20% de un número es 7. ¿Cuál es el número?

Problemas de porcentajes

18 ▼▽▽ El camión de reparto deja en el supermercado 580 cajas de leche. El 15% son de leche desnatada. ¿Cuántas cajas de leche desnatada se han recibido?

19 ▼▽▽ El banco me hace esta oferta: si deposito 4 000 euros durante un año, me dan un 4,5% de intereses. ¿Qué beneficio obtendría en la operación?

Autoevaluación

1 Indica si hay relación de proporcionalidad directa o inversa en los siguientes pares de magnitudes:

a) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en llegar a su destino.

b) El peso de un libro y su precio.

c) El número de horas trabajadas y el pago recibido.

2 Completa esta tabla de proporcionalidad:

PROPORCIONALIDAD DIRECTA			
1	2	3	4
	30		

3 Resuelve por reducción a la unidad:
Una fuente arroja 22 litros de agua en 4 minutos. ¿Cuántos litros arrojará en 5 minutos?

4 Resuelve con ayuda de la regla de tres:
Un trozo de queso de 375 gramos ha costado 4,50 €. ¿Cuánto costará otro trozo de 200 gramos?

5 Completa:

a) Para calcular el 50%, se divide entre…

b) Para calcular el …%, se divide entre 4.

6 Calcula.

a) 10% de 48 b) 30% de 350 c) 65% de 520

7 Un colegio tiene 585 estudiantes. El 60% se queda al comedor. ¿Cuántos estudiantes usan ese servicio?

8 Marta ha comprado una blusa que costaba 35 €, pero estaba rebajada un 20%. ¿Cuánto ha pagado finalmente por la blusa?

10 Álgebra

¿Cuánto vale el montón si el montón y un séptimo del montón es igual a 24? Este es un problema algebraico que se encuentra planteado y resuelto en un papiro egipcio del año 1650 a.C. Los egipcios llamaban a la incógnita “el montón”, y para resolver este tipo de problemas seguían un proceso muy laborioso.

Ahora, simplemente, ponemos $x + \frac{x}{7} = 24$.

Y lo resolvemos por un método muy sencillo, como veremos en esta unidad. Pero hasta llegar aquí, el camino ha sido largo.

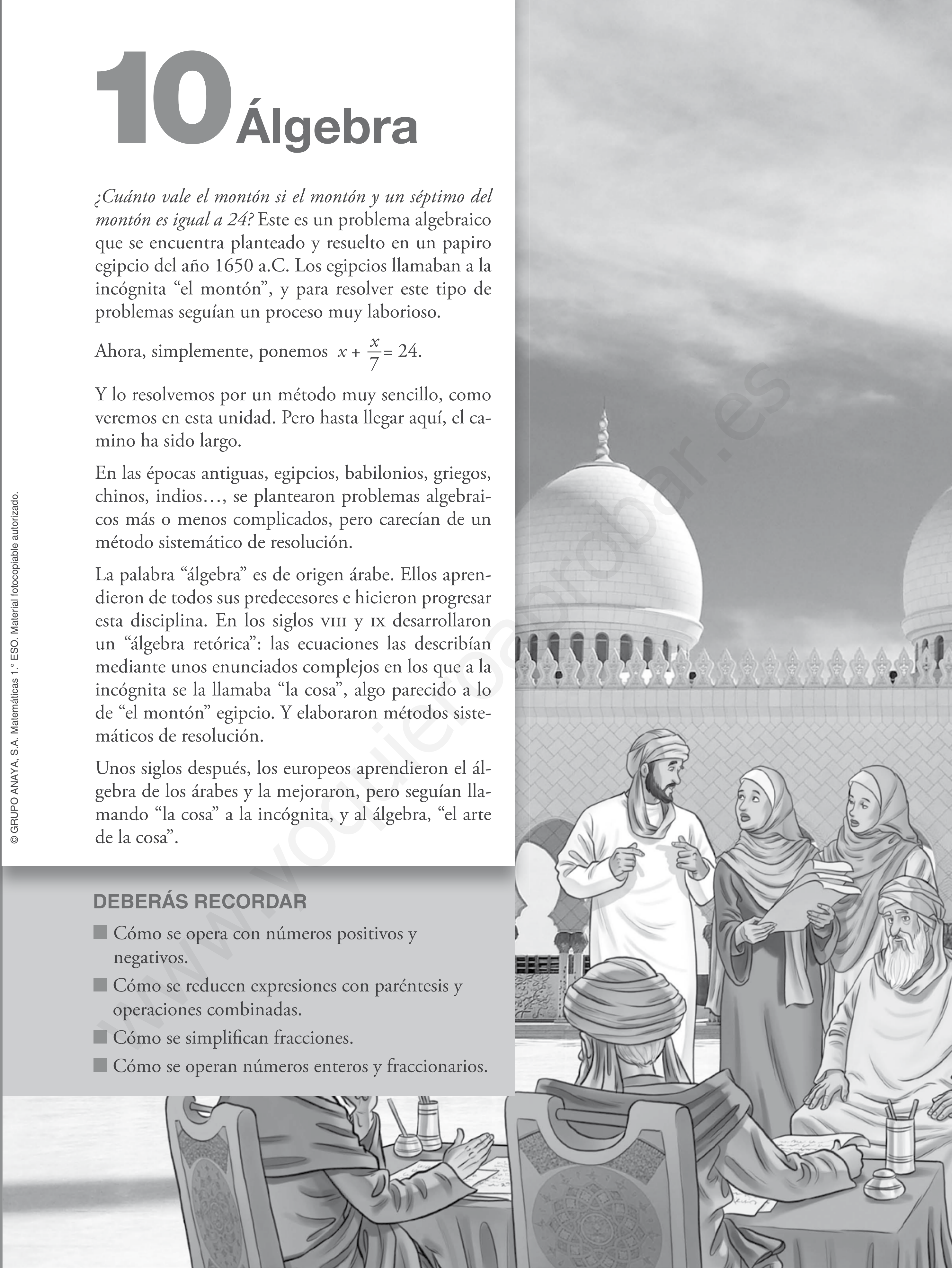
En las épocas antiguas, egipcios, babilonios, griegos, chinos, indios…, se plantearon problemas algebraicos más o menos complicados, pero carecían de un método sistemático de resolución.

La palabra “álgebra” es de origen árabe. Ellos aprendieron de todos sus predecesores e hicieron progresar esta disciplina. En los siglos VIII y IX desarrollaron un “álgebra retórica”: las ecuaciones las describían mediante unos enunciados complejos en los que a la incógnita se la llamaba “la cosa”, algo parecido a lo de “el montón” egipcio. Y elaboraron métodos sistemáticos de resolución.

Unos siglos después, los europeos aprendieron el álgebra de los árabes y la mejoraron, pero seguían llamando “la cosa” a la incógnita, y al álgebra, “el arte de la cosa”.

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se opera con números positivos y negativos.
- Cómo se reducen expresiones con paréntesis y operaciones combinadas.
- Cómo se simplifican fracciones.
- Cómo se operan números enteros y fraccionarios.



1 Letras en vez de números

En muchas tareas de las matemáticas es preciso trabajar con números de valor desconocido o indeterminado. En esos casos, los números se representan por letras y se operan con las mismas leyes y propiedades que en las expresiones numéricas.

Veamos algunos casos.

Representar números en clave

CLAVE

$a \rightarrow 20$

$b \rightarrow 5$

$c \rightarrow 1$

$a + a + a \longrightarrow 60$

$a + b + b \longrightarrow 30$

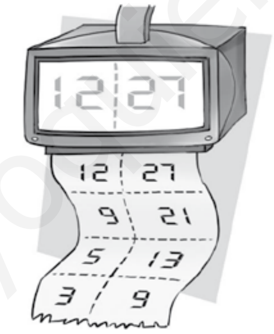
$a + a + b + c + c \longrightarrow 47$

71 céntimos

$a + a + a + b + b + c = 71$

Generalizar relaciones

La máquina de la ilustración asocia a cada número su doble más tres unidades.



Vamos a comprobar algunos casos:

$$3 \xrightarrow{\cdot\, 2} 6 \xrightarrow{+\, 3} 9$$

$$5 \xrightarrow{\cdot\, 2} 10 \xrightarrow{+\, 3} 13$$

Para expresar de forma general esta correspondencia, llamamos n a un número cualquiera:

$$\boxed{n} \longrightarrow \boxed{2n + 3}$$

Otro ejemplo

$n \longrightarrow \frac{n-1}{4}$

$9 \longrightarrow 2$

$17 \longrightarrow 4$

$21 \longrightarrow ?$

Expresar propiedades numéricas

- El orden de los sumandos no altera la suma (propiedad conmutativa).

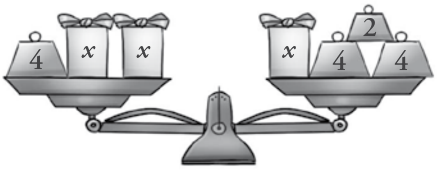
$$a + b = b + a$$

- Un múltiplo de un número, a, se obtiene al multiplicar a por cualquier número n.

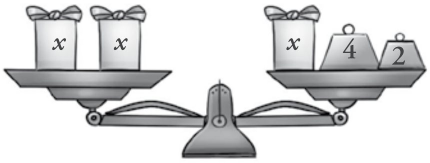
$$a \cdot n \longrightarrow \text{múltiplo de } a$$

- Multiplicar un número por una suma equivale a multiplicar por cada sumando y sumar los productos parciales (propiedad distributiva).

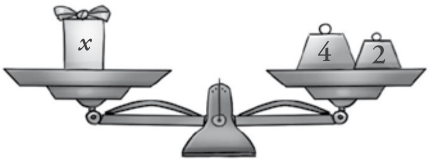
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$



$4 + 2x = x + 10$



$2x = x + 6$



$x = 6$

Expresar y operar números desconocidos

Empleando una letra, podemos representar un número cuyo valor aún no conocemos, operar con él y relacionarlo con otros números.

- La edad de Juan ⟶ x
- La edad que tendrá dentro de 15 años ⟶ $x + 15$
- El doble de la edad que tenía el año pasado ⟶ $2 \cdot (x - 1)$

Codificar matemáticamente un problema y facilitar su resolución

Problema resuelto

La edad de Juan dentro de 15 años será igual al doble de la que tenía el año pasado. ¿Cuál es su edad actual?

EDAD DENTRO DE 15 AÑOS = 2 · EDAD QUE TENÍA EL AÑO PASADO

$$\Downarrow$$

$$x + 15 = 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow \boxed{x = 17}$$

Solución: Juan tiene 17 años.

- Cuando las letras expresan números, las trataremos como tales en cuanto a las operaciones y sus propiedades.
- La parte de las matemáticas que se ocupa de estudiar el comportamiento de las expresiones con letras y números se denomina **álgebra.**

Actividades

1 Calcula el valor de a en la suma, y de b, en la resta.

$$\begin{array}{r} 2\,\boxed{a} \\ +\ 3\,\boxed{a} \\ \hline \boxed{a}\,2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\,\boxed{b} \\ -\ \boxed{b}\,4 \\ \hline \boxed{b}\,9 \end{array}$$

2 Completa, teniendo en cuenta que $a = 5$.

⑬ ⟶ $\boxed{2 \cdot a + 3}$ ○ ⟶ $\boxed{2 \cdot a - 3}$

⑯ ⟶ $\boxed{}$ ○ ⟶ $\boxed{10 \cdot a + 7}$

3 Copia y completa la tabla siguiente:

1	2	3	4	5	10	…	n
1	4	9	16			…	

4 Escribe una expresión para cada enunciado.

a) El doble de x.
b) El anterior de x.
c) El siguiente de x.
d) El doble del siguiente de x.
e) La mitad de x.
f) La mitad de x, más seis unidades.

2 Expresiones algebraicas

Ejemplos

- Un número $\longrightarrow x$
- Su siguiente $\longrightarrow x + 1$
- El doble de su siguiente $\longrightarrow 2 \cdot (x + 1)$
- El cociente entre el número y el doble de su siguiente $\longrightarrow \dfrac{x}{2 \cdot (x + 1)}$

Las expresiones algebraicas surgen al traducir a lenguaje matemático situaciones en las que aparecen datos desconocidos o indeterminados que se representan por letras.

Son expresiones algebraicas:

$$3x - 5 \qquad x^2 + 1 \qquad \frac{(a + 1) \cdot b}{5} \qquad \frac{(t + 1)^2}{3} \qquad \frac{a + b}{a}$$

Las operaciones, al incluir valores que no se conocen, quedan necesariamente indicadas.

Monomios

Ten en cuenta

En un monomio no se suelen incluir los signos de producto.

$$5 \cdot x \cdot y^3$$
$$\Downarrow$$
$$5xy^3$$

Cuando encontramos un número seguido de una o varias letras, entendemos que están multiplicados.

Las expresiones algebraicas más simples, formadas por productos de letras y números, se llaman **monomios.**

Un monomio consiste en el producto de un número conocido **(coeficiente)** por una o varias letras **(parte literal).**

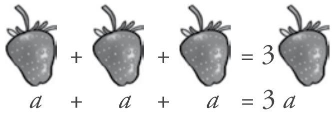
Por ejemplo:

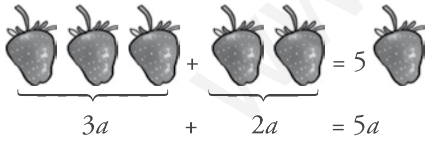
$$\underbrace{-4}_{\text{COEFICIENTE}} \cdot \underbrace{x}_{\text{PARTE LITERAL}} \qquad \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{COEFICIENTE}} \cdot \underbrace{a^2 \cdot b}_{\text{PARTE LITERAL}}$$

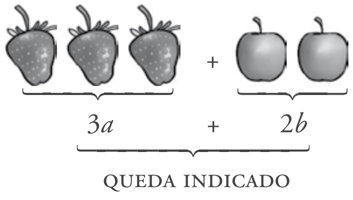
Suma y resta de monomios

Los monomios solo se pueden sumar (o restar) cuando son semejantes, es decir, cuando tienen la misma parte literal.

Cuando no son semejantes, la operación se deja indicada.







Observa los distintos casos que se presentan en los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1 $a + a + a = 3a$	EJEMPLO 2 $4x + 2x = 6x$
EJEMPLO 3 $5x - 3x = 2x$	EJEMPLO 4 $a^2 + a^2 = 2a^2$
EJEMPLO 5 $3a + 2b \Rightarrow$ queda indicada	EJEMPLO 6 $x^2 + x \Rightarrow$ queda indicada
EJEMPLO 7 $7x - (2x + x) = 7x - 3x = 4x$	EJEMPLO 8 $5a - (a - 4a) = 5a - (-3a) = 5a + 3a = 8a$

Como puedes ver, las expresiones algebraicas se operan con las mismas leyes y propiedades que las expresiones numéricas.

Multiplicación de monomios

Un monomio es un producto. Por tanto, al multiplicar dos monomios obtendrás otro producto con más factores; es decir, otro monomio.

No lo olvides

Para multiplicar dos potencias de la misma base, se suman los exponentes. Por ejemplo:

$$x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$$

▼ **EJEMPLOS**

- $(2x) \cdot (4y) = 2 \cdot x \cdot 4 \cdot y = 2 \cdot 4 \cdot x \cdot y = 8xy$
- $(-2a) \cdot 5a = (-2) \cdot a \cdot 5 \cdot a = (-2) \cdot 5 \cdot a \cdot a = -10a^2$
- $\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot (6xy) = \frac{1}{3} \cdot x \cdot 6 \cdot x \cdot y = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot x \cdot x \cdot y = \frac{6}{3}x^2y = 2x^2y$

El producto de dos monomios es siempre otro monomio.

Multiplicación de un monomio por una suma

Cuando uno de los factores es una suma, aplicamos la propiedad distributiva; es decir, multiplicamos por cada sumando.

▼ **EJEMPLOS**

- $5 \cdot (2a + 3b) = 5 \cdot 2a + 5 \cdot 3b = 10a + 15b$
- $2x \cdot (x^2 + 2y^2) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot 2y^2 = 2x^3 + 4xy^2$

Actividades

1 Reduce las expresiones siguientes:

a) $x + x$ b) $a + a + a + a$

c) $m + m - m$ d) $k + k + k - k$

e) $a + a + b + b$ f) $x + x + y + y + y$

2 Opera.

a) $2x + 5x$ b) $7a - 3a$

c) $4a + 3a$ d) $9x - 5x$

e) $2x + 3x + 4x$ f) $6a + 2a - 5a$

g) $4a - 3a + a$ h) $10x - 3x - x$

3 Iguala cada expresión con su reducida:

$x + x + 1$

$x^2 + x^2 + x$

$3x^2 - 2x^2 + 5$

$x^2 + x^2 + x + x$

$2x^2 + 4x - 2x + 3$

$9x^2 - 5x^2 + 3 + x + 1$

$\boxed{2x^2 + 2x + 3}$ $\boxed{x^2 + 5}$ $\boxed{2x + 1}$ $\boxed{2x^2 + x}$ $\boxed{2x^2 + 2x}$ $\boxed{4x^2 + x + 4}$

4 Reduce.

a) $x^2 + x^2$ b) $4a^2 - 2a^2$

c) $5a^2 + 2a^2$ d) $7x^2 - 5x^2$

e) $4x^2 + 3x^2 - 2x^2$ f) $8a^2 - 3a^2 - a^2$

5 Reduce.

a) $3x - (4x - 3x)$ b) $5x - (2x + 1)$

c) $8x - (3x + 2x)$ d) $2x - (4 - x)$

e) $(x + 4x) - (5x - 3x)$ f) $(6x - 4) - (2x - 1)$

6 Multiplica el número por el monomio.

a) $3 \cdot 2x$ b) $5 \cdot 3a$ c) $2 \cdot 4m$

d) $(-3) \cdot 5x$ e) $2 \cdot (-2a)$ f) $(-3) \cdot (-4m)$

g) $\frac{1}{2} \cdot 6x$ h) $4 \cdot \frac{1}{6}a$ i) $(-2) \cdot \frac{6}{8}m$

7 Multiplica los monomios siguientes:

a) $x \cdot 2x$ b) $5a \cdot a$ c) $m \cdot 2m^2$

d) $2x \cdot 5x$ e) $3a \cdot 4a^2$ f) $2m^2 \cdot 5m^2$

g) $3x^2 \cdot 2x^3$ h) $4a \cdot 2a^4$ i) $2m^2 \cdot 2m^4$

j) $x^3 \cdot (-2x)$ k) $(-5a^2) \cdot 3a^3$ l) $2m^3 \cdot (-4m^3)$

3 Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas. Sin embargo, no todas las igualdades algebraicas son ecuaciones, como verás a continuación.

Igualdades algebraicas: ecuaciones e identidades

Observa la diferencia entre las igualdades siguientes:

$3x - 4 = 8$	$6x - 4x = 2x$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
La igualdad se cumple solamente para $x = 4$. (Es una ecuación).	La igualdad se cumple para cualquier valor de x. (Es una identidad).

- Una **ecuación** es una igualdad entre expresiones algebraicas que se cumple solamente para ciertos valores de las letras.
- Una **identidad** es una igualdad algebraica que se cumple siempre, independientemente de los valores que tomen las letras.

Elementos de una ecuación

Para poder manejar las ecuaciones, es necesario que sepas nombrar sus elementos:

- **Miembros:** son las expresiones que aparecen a cada lado del signo de igualdad.
- **Términos:** son los sumandos que forman los miembros.

$$\overbrace{\underset{\uparrow}{4x} - \underset{\uparrow}{5}}^{\text{PRIMER MIEMBRO}} = \overbrace{\underset{\uparrow}{2x} + \underset{\uparrow}{1}}^{\text{SEGUNDO MIEMBRO}}$$

TÉRMINOS

- **Incógnitas:** son las letras que aparecen en los términos.
- **Soluciones:** son los valores que han de tomar las letras para que se cumpla la igualdad.

$$4x - 5 = 2x + 1 \begin{cases} \text{ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA} \\ \text{SOLUCIÓN: } x = 3, \text{ ya que } 4 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot 3 + 1 \end{cases}$$

Actividades

1 Busca, por tanteo, una solución para cada ecuación:

a) $5x - 8 = 7$　b) $2x + 3 = 5x - 3$　c) $2(x - 1) = 8$　d) $10 - (x - 3) = 6$　e) $\frac{3 - x}{2} = 1$　f) $\frac{5 + x}{6} = 2$

g) $\frac{x - 1}{4} = 5$　h) $\frac{x + 2}{3} = 1$　i) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$　j) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = 7$　k) $x + x^2 + x^3 = 3$　l) $\sqrt{x + 5} = 3$

4 Primeras técnicas para la resolución de ecuaciones

Ahora vas a estudiar los procedimientos básicos para resolver ecuaciones. Aunque los ejemplos son muy sencillos y la solución salta a la vista, sigue las técnicas que se exponen, pues te servirán para resolver casos más complejos.

Resolución de la ecuación $x + a = b$

En la práctica

REGLA

Lo que está sumando en uno de los miembros, pasa restando al otro.

EJEMPLOS

a) $x + 4 = 7 \;\downarrow\; x = 7 - 4 \;\downarrow\; x = 3$

b) $x + 5 = 1 \;\downarrow\; x = 1 - 5 \;\downarrow\; x = -4$

▼ **EJEMPLO:** $x + 4 = 7$

$$x + 4 = 7$$
$$\downarrow$$
$$x + \cancel{4} - \cancel{4} = 7 - 4$$
$$\downarrow$$
$$x = 3$$

- Restando 4 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 3$.

Para resolver la ecuación $x + a = b$, restamos a en ambos miembros.

$$x + a = b \;\rightarrow\; x + \cancel{a} - \cancel{a} = b - a \;\rightarrow\; x = b - a$$

Resolución de la ecuación $x - a = b$

En la práctica

REGLA

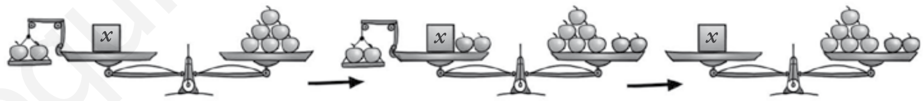
Lo que está restando en uno de los miembros, pasa sumando al otro.

EJEMPLOS

a) $x - 2 = 6 \;\downarrow\; x = 6 + 2 \;\downarrow\; x = 8$

b) $5 - x = 2 \;\downarrow\; 5 - 2 = x \;\downarrow\; x = 3$

▼ **EJEMPLO:** $x - 2 = 6$



$$x - 2 = 6$$
$$\downarrow$$
$$x - \cancel{2} + \cancel{2} = 6 + 2$$
$$\downarrow$$
$$x = 8$$

- Sumando 2 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 8$.

Para resolver la ecuación $x - a = b$, sumamos a en ambos miembros.

$$x - a = b \;\rightarrow\; x - \cancel{a} + \cancel{a} = b + a \;\rightarrow\; x = b + a$$

Actividades

1 Resuelve aplicando las técnicas recién aprendidas.

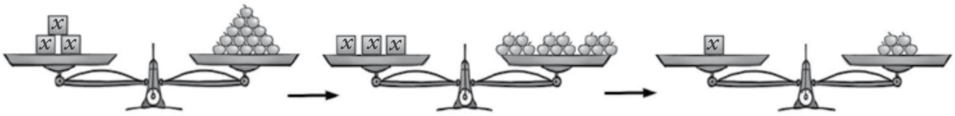
a) $x + 3 = 4$ b) $x - 1 = 8$ c) $x + 5 = 11$
d) $x - 7 = 3$ e) $x + 4 = 1$ f) $x - 2 = -6$
g) $9 = x + 5$ h) $5 = x - 4$ i) $2 = x + 6$

2 Resuelve aplicando las técnicas anteriores.

a) $x + 6 = 9$ b) $x - 4 = 5$ c) $2 - x = 4$
d) $5 + x = 4$ e) $3 + x = 3$ f) $6 = x + 8$
g) $0 = x + 6$ h) $1 = 9 - x$ i) $4 = x - 8$

Resolución de la ecuación $a \cdot x = b$

▼ **EJEMPLO:** $3x = 15$



$$\begin{array}{c} 3x = 15 \\ \downarrow \\ \dfrac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \dfrac{15}{3} \\ \downarrow \\ x = 5 \end{array}$$

- Dividiendo por 3 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 5$.

En la práctica

REGLA: Lo que está multiplicando a un miembro (a todo él) pasa dividiendo al otro.

EJEMPLOS

a) $3x = 15 \;\rightarrow\; x = \dfrac{15}{3} \;\rightarrow\; x = 5$

b) $7x = 2 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2}{7}$

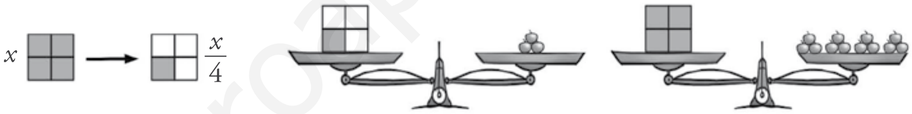
Para resolver la ecuación $ax = b$, dividimos ambos miembros por a. $\Big\}$ $ax = b \;\rightarrow\; \dfrac{\cancel{a}x}{\cancel{a}} = \dfrac{b}{a} \;\rightarrow\; x = \dfrac{b}{a}$

Casos especiales

- La ecuación $0 \cdot x = 6$ no tiene solución. No hay ningún número que multiplicado por cero dé seis.
- La ecuación $0 \cdot x = 0$ tiene infinitas soluciones. Cualquier número multiplicado por cero da cero.

Resolución de la ecuación $x/a = b$

▼ **EJEMPLO:** $\dfrac{x}{4} = 3$



$$\begin{array}{c} \dfrac{x}{4} = 3 \\ \downarrow \\ \dfrac{x}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} = 3 \cdot 4 \\ \downarrow \\ x = 12 \end{array}$$

- Multiplicando por 4 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 12$.

En la práctica

REGLA: Lo que está dividiendo a un miembro (a todo él) pasa multiplicando al otro.

EJEMPLOS

a) $\dfrac{x}{4} = 3 \;\rightarrow\; x = 3 \cdot 4 \;\rightarrow\; x = 12$

b) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{7}{10} \;\rightarrow\; x = \dfrac{7}{10} \cdot 2 \;\rightarrow\; x = \dfrac{7}{5}$

Para resolver la ecuación $\dfrac{x}{a} = b$, multiplicamos ambos miembros por a. $\Big\}$ $\dfrac{x}{a} = b \;\rightarrow\; \dfrac{x}{\cancel{a}} \cdot \cancel{a} = b \cdot a \;\rightarrow\; x = b \cdot a$

Actividades

3 Resuelve con las técnicas que acabas de aprender.

a) $4x = 20$ b) $\dfrac{x}{2} = 1$ c) $3x = 12$

d) $\dfrac{x}{5} = 2$ e) $8 = 4x$ f) $4 = \dfrac{x}{2}$

4 Resuelve combinando las técnicas anteriores.

a) $3x - 2 = 0$ b) $4x + 5 = 13$ c) $2x - 5 = 9$

d) $8 - 3x = 2$ e) $\dfrac{x}{2} + 4 = 7$ f) $\dfrac{x}{3} - 2 = 3$

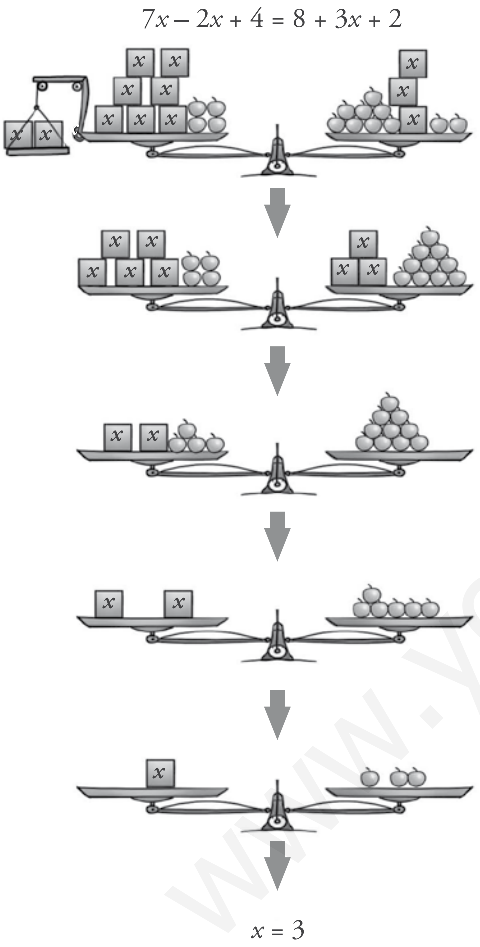
5

Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Para resolver una ecuación, la iremos transformando, mediante sucesivos pasos, en otras equivalentes cada vez más sencillas, hasta despejar la incógnita; es decir, hasta que quede sola en un miembro y en el otro un número conocido.

Para transformar una ecuación en otra equivalente, utilizaremos dos recursos:

- Reducir sus miembros.
- Transponer sus términos, de un miembro al otro.



▼ EJEMPLO

Vamos a resolver la ecuación: $7x - 2x + 4 = 8 + 3x + 2$

$$7x - 2x + 4 = 8 + 3x + 2$$

REDUCIR

$$5x + 4 = 10 + 3x$$

TRANSPONER
(Restamos $3x$ en ambos miembros).

$$5x + 4 - 3x = 10$$

REDUCIR

$$2x + 4 = 10$$

TRANSPONER
(Restamos 4 en ambos miembros).

$$2x = 10 - 4$$

REDUCIR

$$2x = 6$$

TRANSPONER
(Dividimos a ambos miembros por 2).

$$x = \frac{6}{2}$$

REDUCIR

$$x = 3$$

Comprobación: Sustituimos x por 3 en la ecuación primitiva y comprobamos que la igualdad se cumple.

$$\boxed{x = 3}$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{array}{lll} 7x - 2x + 4 & \rightarrow & 7 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 4 = 21 - 6 + 4 = 19 \\ 8 + 3x + 2 & \rightarrow & 8 + 3 \cdot 3 + 2 = 8 + 9 + 2 = 19 \end{array}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{7 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 4}_{19} = \underbrace{8 + 3 \cdot 3 + 2}_{19}$$

Ejercicio resuelto

Resolver esta ecuación:

$$\mathbf{5 - 4x = 7 + 8x - 6}$$

$$\begin{tikzcd}
5 - 4x = 7 + 8x - 6 \arrow[d] & 5 = 1 + 8x + 4x \arrow[d] & 5 - 1 = 12x \arrow[d] & \frac{4}{12} = x \arrow[d] \\
5 - 4x = 1 + 8x \arrow[ur] & 5 = 1 + 12x \arrow[ur] & 4 = 12x \arrow[ur] & x = \frac{1}{3}
\end{tikzcd}$$

Práctica en la resolución de ecuaciones

Los ejercicios que siguen te ayudarán a tomar confianza en la resolución de ecuaciones. Abórdalos en el orden en que aparecen y aplicando las técnicas que has aprendido: *reducir los miembros-transponer los términos*.

Para que puedas evaluar tu trabajo, encontrarás las soluciones al final de la página.

Actividades

1 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x + 1 = 6$ b) $x + 8 = 3$
c) $7 = x + 3$ d) $5 = 11 + x$
e) $x + 1 = -2$ f) $x + 5 = -2$
g) $5 + x = 7$ h) $4 + x = 4$
i) $8 + x = 1$ j) $-3 = 2 + x$

2 Resuelve estas ecuaciones:

a) $x - 2 = 4$ b) $x - 6 = 7$
c) $2 = x - 2$ d) $5 = x - 1$
e) $x - 4 = -1$ f) $x - 5 = -3$
g) $-4 = x - 2$ h) $-8 = x - 1$
i) $4 - x = 1$ j) $5 - x = 6$
k) $8 = 13 - x$ l) $15 = 6 - x$

3 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $5x - 4x = 9$ b) $7x - 2x = 15$
c) $x - 2x = 7$ d) $2x - 6x = 12$
e) $2x - 5x = -3$ f) $4x - 6x = -8$
g) $6x - 4x = 1$ h) $11x - 5x = 2$
i) $2x - 7x = 4$ j) $3x - x = -8$

4 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $8x - 5x = x + 8$
b) $3x + 6 = 2x + 13$
c) $5x - 7 = 2 - 4x$
d) $3x + x + 4 = 2x + 10$
e) $4x + 7 - x = 5 + 2x$
f) $8 - x = 3x + 2x + 5$

SOLUCIONES

1. a) 5
b) –5
c) 4
d) –6
e) –3
f) –7
g) 2
h) 0
i) –7
j) –5

2. a) 6
b) 13
c) 4
d) 6
e) 3
f) 2
g) –2
h) –7
i) 3
j) –1
k) 5
l) –9

3. a) 9
b) 3
c) –7
d) –3
e) 1
f) 4
g) 1/2
h) 1/3
i) –4/5
j) –4

4. a) 4
b) 7
c) 1
d) 3
e) –2
f) 1/2

6 Resolución de problemas con ayuda de las ecuaciones

Problemas resueltos

$$\boxed{x+7} = \left\{ \begin{array}{c} \boxed{x-5} \\ + \\ \boxed{x-5} \\ + \\ \boxed{x-5} \end{array} \right.$$

1. Si a un número le sumas 7, obtienes el triple que si le restas 5. ¿De qué número se trata?

a) Deja claro lo que conoces y da nombre a lo que no conoces.

- El número ⟶ x
- El número más 7 ⟶ $x + 7$
- El número menos 5 ⟶ $x - 5$

b) Relaciona, con una igualdad, los elementos conocidos y los desconocidos.

$$\boxed{\text{EL NÚMERO MÁS 7}} = \text{EL TRIPLE DE} \boxed{\text{EL NÚMERO MENOS 5}}$$

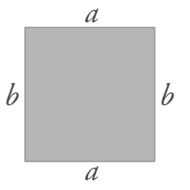
$$x + 7 = 3 \cdot (x - 5)$$

c) Resuelve la ecuación: $x + 7 = 3x - 15 \;\rightarrow\; 22 = 2x \;\rightarrow\; x = 11$

d) Expresa la solución en el contexto del problema y compruébala.

SOLUCIÓN: El número buscado es 11.

COMPROBACIÓN: $11 + 7 = 3 \cdot (11 - 5)$



PERÍMETRO = $a + b + a + b$

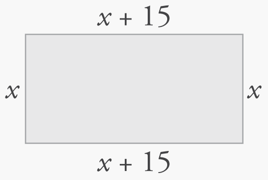
2. Una parcela rectangular es 15 metros más larga que ancha. La valla que la rodea tiene una longitud de 150 metros. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

a) Los datos:

ANCHO ⟶ x

LARGO ⟶ $x + 15$

PERÍMETRO ⟶ 150



b) La ecuación: $x + (x + 15) + x + (x + 15) = 150$

c) Resuelve la ecuación: $4x + 30 = 150 \;\rightarrow\; 4x = 120 \;\rightarrow\; x = 30$

d) SOLUCIÓN: La parcela mide 30 m de ancho y 30 + 15 = 45 m de largo.

COMPROBACIÓN: $30 + 45 + 30 + 45 = 150$

Actividades

1 Un número y su siguiente suman 53. ¿Qué números son?

EL NÚMERO → x

SU SIGUIENTE → $x + 1$

$$\boxed{\text{EL NÚMERO}} + \boxed{\text{SU SIGUIENTE}} = 53$$

2 ¿Cuántas vacas tiene un granjero sabiendo que entre cuernos y patas contamos 222?

VACAS → x

$$\left. \begin{array}{l} \text{CUERNOS} \rightarrow 2x \\ \text{PATAS} \rightarrow 4x \end{array} \right\} \boxed{\text{CUERNOS}} + \boxed{\text{PATAS}} = 222$$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Lenguaje algebraico

1 ▼▽▽ Haz corresponder cada enunciado con su expresión algebraica:

a) La distancia recorrida en x horas por un camión que va a 60 km/h.

b) El coste de x kilos de peras que están a 0,80 €/kg.

c) El área de un triángulo de base 0,80 m y altura x metros.

d) La edad de Pedro, siendo x la de su abuelo, que tenía 60 años cuando nació Pedro.

$\boxed{0{,}8x}$ $\boxed{60x}$ $\boxed{x - 60}$ $\boxed{\dfrac{0{,}8 \cdot x}{2}}$

2 ▼▽▽ Copia y completa la tabla, atendiendo a los siguientes enunciados:

- Cristina tiene x años.
- Alberto, su esposo, tiene 3 años más.
- Javier, su padre, le dobla la edad.
- Marta, su madre, tiene 5 años menos que su padre.
- Loli y Mar son sus hijas gemelas. Las tuvo con 26 años.
- Javi, el pequeño, tiene la mitad de años que las gemelas.

	EDAD
CRISTINA	x
ALBERTO	
JAVIER	
MARTA	
LOLI Y MAR	
JAVI	

3 ▼▼▽ Siguiendo la lógica de cada tabla, completa las casillas vacías:

1	2	3	5	8	10	15	20	25	30	*a*	*x*
3	5	7	11	17				51			

1	2	3	5	8	10	15	20	25	30	*a*	*x*
0	5	10	20	35				120			

Monomios y operaciones

4 ▼▽▽ Opera.

a) $3x + 2x + x$
b) $10x - 6x + 2x$
c) $5a - 7a + 3a$
d) $a - 5a + 2a$
e) $-2x + 9x - x$
f) $-5x - 2x + 4x$

5 ▼▽▽ Suprime los paréntesis y reduce.

a) $3x - (x + 1)$
b) $x + (2 - 5x)$
c) $4a - (3a - 2)$
d) $2a + (1 - 3a)$
e) $(x - 4) + (3x - 1)$
f) $(6x - 3) - (2x - 7)$

6 ▼▽▽ Divide.

a) $(6x) : 3$
b) $(-8) : (2a)$
c) $(-15a) : (-3)$
d) $(2x) : (2x)$
e) $(6a) : (-3a)$
f) $(-2x) : (-4x)$
g) $(15a^2) : (3a)$
h) $(-8x) : (4x^2)$
i) $(10a) : (5a^3)$

7 ▼▽▽ Quita paréntesis.

a) $5 \cdot (1 + x)$
b) $(-4) \cdot (2 - 3a)$
c) $3a \cdot (1 + 2a)$
d) $x^2 \cdot (2x - 3)$
e) $x^2 \cdot (x + x^2)$
f) $2a \cdot (a^2 - a)$

8 ▼▼▽ Quita paréntesis y reduce.

a) $x + 2(x + 3)$
b) $7x - 3(2x - 1)$
c) $4 \cdot (a + 2) - 8$
d) $3 \cdot (2a - 1) - 5a$
e) $2(x + 1) + 3(x - 1)$
f) $5(2x - 3) - 4(x - 4)$

Ecuaciones

9 ▼▽▽ Resuelve.

a) $2x + 5 - 3x = x + 19$

b) $7x - 2x = 2x + 1 + 3x$

c) $11 + 2x = 6x - 3 + 3x$

d) $7 + 5x - 2 = x - 3 + 2x$

e) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

f) $5x = 4 - 3x + 5 - x$

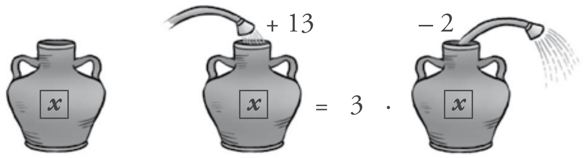
Resuelve problemas

10 ▼▽▽ ¿Cuál es el número que sumado con su anterior y su siguiente da 117?

EL ANTERIOR	EL NÚMERO	EL POSTERIOR
$x - 1$	x	$x + 1$

11 ▼▽▽ La suma de tres números consecutivos es 84. ¿Qué números son?

12 ▼▽▽ Si a este cántaro le añadieras 13 litros de agua, tendría el triple que si le sacaras dos. ¿Cuántos litros de agua hay en el cántaro?



13 ▼▽▽ En mi colegio, entre alumnos y alumnas somos 624. El número de chicas supera en 36 al de chicos. ¿Cuántos chicos hay? ¿Y chicas?

CHICOS $\longrightarrow x$ CHICAS $\longrightarrow x + 36$

$\boxed{\text{CHICOS}} + \boxed{\text{CHICAS}} = 624$

14 ▼▽▽ Sabiendo que un yogur de frutas es 5 céntimos más caro que uno natural, y que seis de frutas y cuatro naturales me han costado 4,80 €, ¿cuánto cuesta un yogur natural? ¿Y uno de frutas?

NATURAL $\longrightarrow x$€ FRUTAS $\longrightarrow (x + 0{,}05)$€

15 ▼▽▽ Roberta tiene un año menos que su hermana Marta, y ya tenía cinco cuando nació Antonio, el más pequeño. ¿Cuál es la edad de cada uno, sabiendo que entre los tres, ahora, suman 35 años?

ROBERTA $\rightarrow x$ MARTA $\rightarrow x + 1$ ANTONIO $\rightarrow x - 5$

16 ▼▽▽ Un kilo de chirimoyas cuesta el doble que uno de naranjas. Por tres kilos de chirimoyas y cuatro de naranjas se han pagado 11 €. ¿A cómo están las unas y las otras?

Autoevaluación

1 En una granja hay vacas (V) y avestruces (A).

a) ¿Cuál de las siguientes expresiones indica el número de cabezas?

b) ¿Y el número de alas?

c) ¿Y el número de patas?

$\boxed{2V + A}$ $\boxed{4V + 2A}$ $\boxed{V + A}$ $\boxed{2A}$ $\boxed{V - 2A}$

2 Completa la tabla siguiente:

n	1	2	3	5	10	15
$n^2 + 3$				28		

3 Reduce.

a) $2x + x$ b) $3a + 5a$

c) $x + 5 + 2x$ d) $2a + 3 + 4a - 1$

4 Resuelve estas ecuaciones:

a) $x + 2 = 8$ b) $x - 4 = 3$

c) $3x = 12$ d) $\frac{x}{5} = 2$

5 Resuelve:

a) $3x - 5 = 4$ b) $6x - 1 = 5x$

c) $3x - 5 + 2x = x + 3$

6 ¿Cuántas vacas tiene un granjero sabiendo que entre cuernos y patas contamos 120?

Vacas $\longrightarrow x$
Cuernos $\longrightarrow 2x$
Patas $\longrightarrow 4x$

$\boxed{\text{CUERNOS}} + \boxed{\text{PATAS}} = 120$

7 Por tres kilos de naranjas y dos de peras, he pagado 6,40 €. ¿A cómo está el kilo de cada una de esas frutas, si el de peras es veinte céntimos más caro que el de naranjas?

Precio del kilo de naranjas $\longrightarrow x$
Precio del kilo de peras $\longrightarrow x + 0{,}20$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{COSTE}\\ 3\text{ kg}\\ \text{NARANJAS}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{COSTE}\\ 2\text{ kg}\\ \text{PERAS}\end{array}} = 6{,}40$

11 Rectas y ángulos

Los historiadores griegos antiguos atribuyeron a los egipcios la invención de la geometría. Es muy conocido el hecho de que cada año, debido a las crecidas del río Nilo, las lindes de los campos de cultivo se borraban y debían ser restauradas al retirarse las aguas. Los funcionarios del faraón se encargaban de esta tarea.

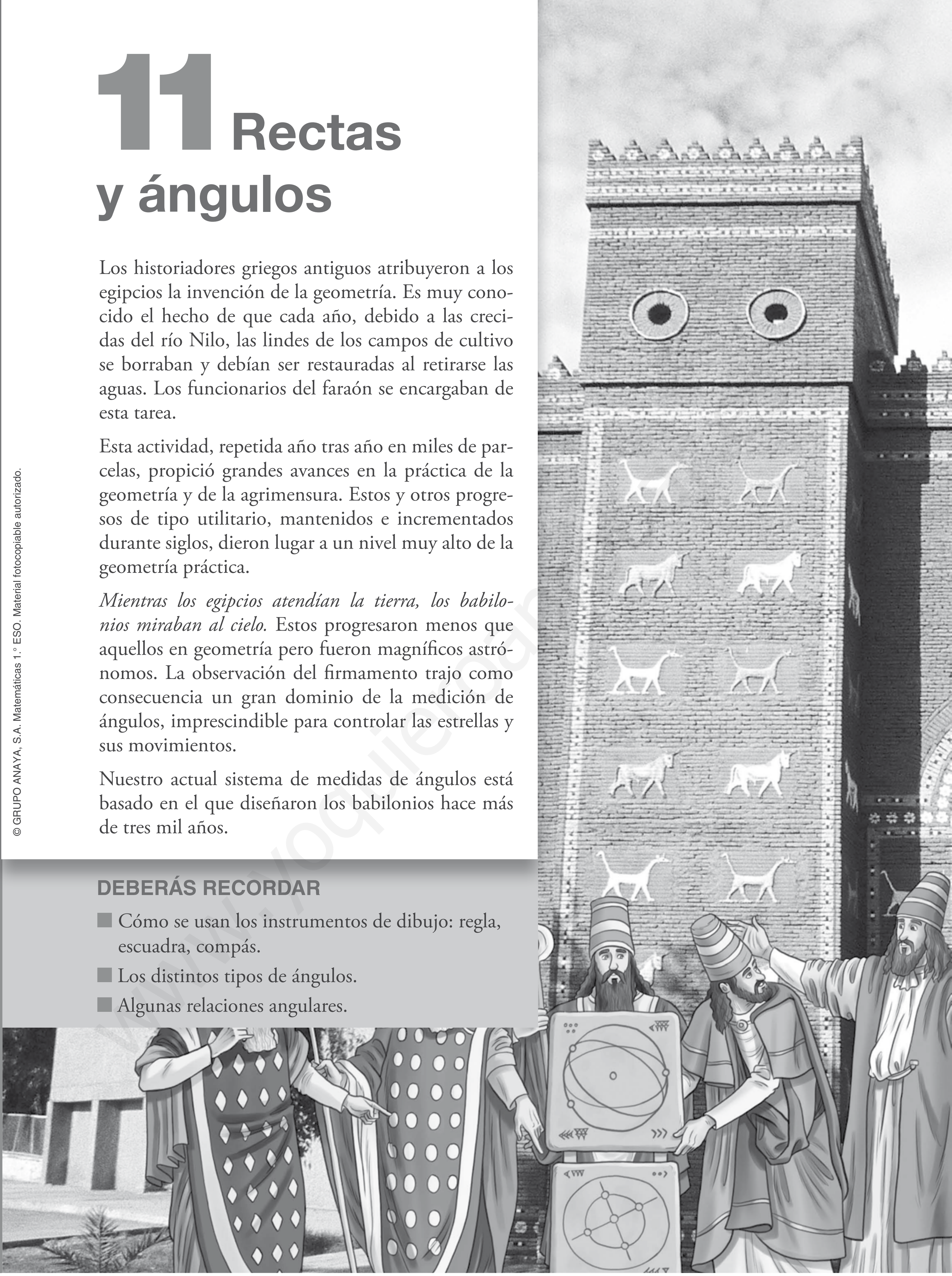
Esta actividad, repetida año tras año en miles de parcelas, propició grandes avances en la práctica de la geometría y de la agrimensura. Estos y otros progresos de tipo utilitario, mantenidos e incrementados durante siglos, dieron lugar a un nivel muy alto de la geometría práctica.

Mientras los egipcios atendían la tierra, los babilonios miraban al cielo. Estos progresaron menos que aquellos en geometría pero fueron magníficos astrónomos. La observación del firmamento trajo como consecuencia un gran dominio de la medición de ángulos, imprescindible para controlar las estrellas y sus movimientos.

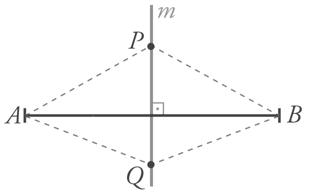
Nuestro actual sistema de medidas de ángulos está basado en el que diseñaron los babilonios hace más de tres mil años.

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se usan los instrumentos de dibujo: regla, escuadra, compás.
- Los distintos tipos de ángulos.
- Algunas relaciones angulares.



Mediatriz y bisectriz



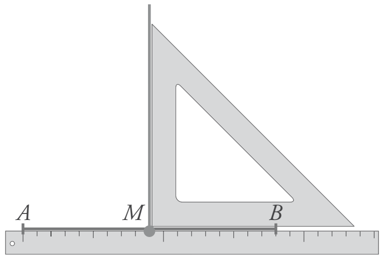
Mediatriz de un segmento

La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio. Los puntos de la mediatriz equidistan (están a igual distancia) de los extremos del segmento:

$$\overline{PA} = \overline{PB} \qquad \overline{QA} = \overline{QB}$$

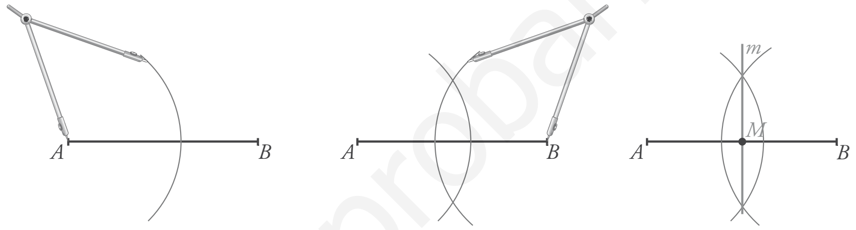
PA es el segmento cuyos extremos son P y A.

$\overline{PA}$ es la longitud de ese segmento.

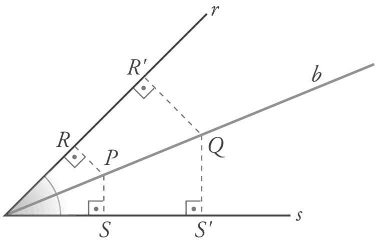


Trazado de la mediatriz con regla y escuadra.

Observa cómo se construye la mediatriz con regla y compás:



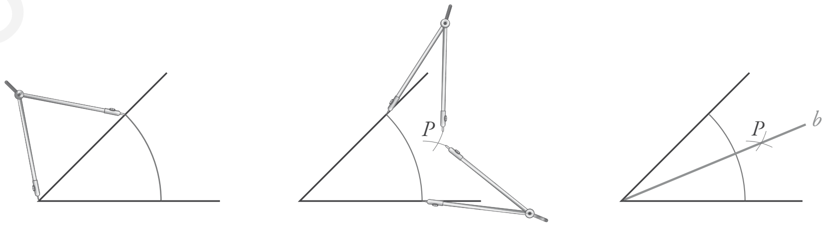
Bisectriz de un ángulo



La **bisectriz** de un ángulo es una semirrecta que divide al ángulo en otros dos ángulos iguales. Los puntos de la bisectriz equidistan (están a igual distancia) de los lados del ángulo:

$$\overline{PR} = \overline{PS} \qquad \overline{QR'} = \overline{QS'}$$

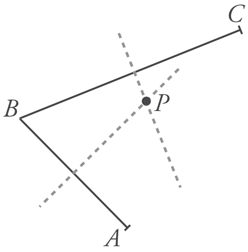
Observa cómo se traza la bisectriz con regla y compás:



Actividades

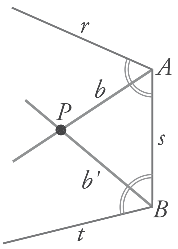
1 Dibuja dos segmentos concatenados, AB y BC. Traza sus mediatrices y llama P al punto en que se cortan.

- — Comprueba que $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$.
- — Razona por qué P está a la misma distancia (equidista) de A, de B y de C.



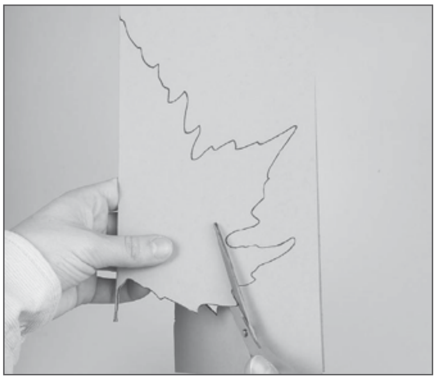
2 Dibuja en tu cuaderno dos ángulos $\widehat{rs}$ y $\widehat{st}$ como se ve en la figura.

- — Traza sus bisectrices, b y b', que se cortan en un punto P.
- — Razona que las distancias del punto P a las rectas r, s y t coinciden.



2 Simetrías en las figuras planas

Pliega una hoja de papel.



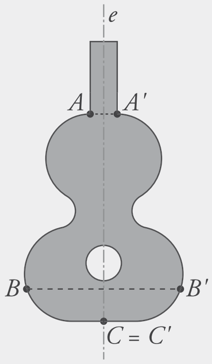
Recorta cualquier motivo.

Al desplegar, obtendrás una figura simétrica.

En la naturaleza, en la tecnología, en el arte, en nuestro mundo cotidiano, estamos rodeados de figuras simétricas. Su estudio es interesante.

Eje de simetría de una figura

Una figura plana es simétrica respecto a un eje (una recta) si al doblarla por ella las dos mitades coinciden.

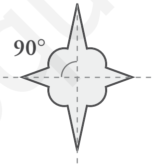


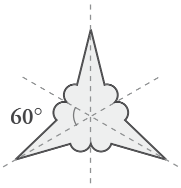
En una **simetría respecto a un eje** o **simetría axial:**

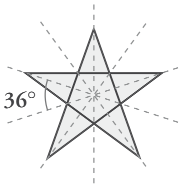
- La recta e se llama **eje de simetría.**
- A y A' son simétricos respecto a e, porque e es la mediatriz del segmento AA'. Lo mismo ocurre con B y B'.
- Cada punto del eje es simétrico de sí mismo: $C = C'$.

La simetría de las figuras planas se aprecia a simple vista, y su eje de simetría suele ser sencillo de identificar. No obstante, puede ser de gran ayuda **valerse de un espejo** para comprobar si una cierta recta es o no eje de simetría de una figura.

Las siguientes figuras tienen dos, tres y cinco ejes de simetría, respectivamente:





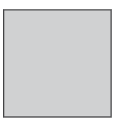


Si una figura tiene n ejes de simetría, estos se cortan en un punto, y cada dos ejes contiguos forman un ángulo de $\frac{180°}{n}$.

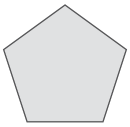
Actividades

1 Di cuáles de las siguientes figuras son simétricas respecto a algún eje. Dibuja el eje de simetría y, si tienes un pequeño espejo a mano, comprueba que lo es.

a)



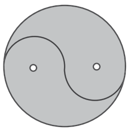
b)



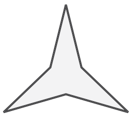
c)

d)

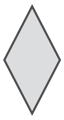
e)



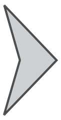
f)



g)



h)



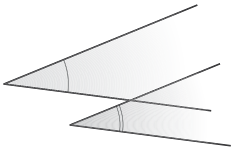
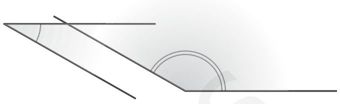
3 Relaciones angulares

Recuerda

Dos ángulos suplementarios suman 180°.

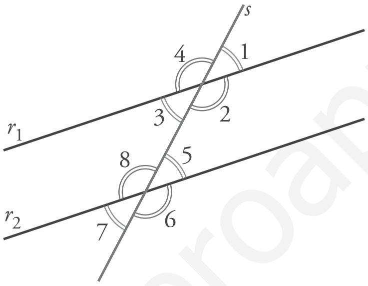
Ángulos de lados paralelos

Dos ángulos cuyos lados son paralelos o son iguales o son suplementarios.

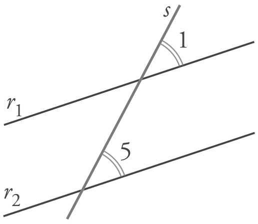
Ángulos que se forman cuando una recta corta a otras dos rectas paralelas entre sí

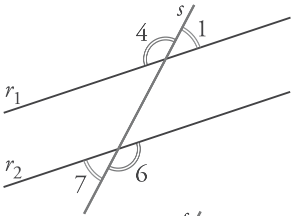
Si dos rectas paralelas son cortadas por otra recta, se forman ocho ángulos, muchos de los cuales son iguales entre sí por tener sus lados paralelos.

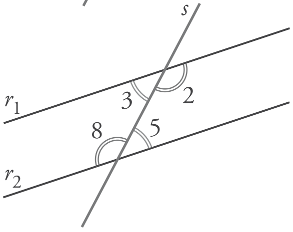


- $\hat{1} = \hat{3}$ por ser **opuestos por el vértice.**

  Por lo mismo: $\hat{2} = \hat{4}$
  $\hat{5} = \hat{7}$
  $\hat{6} = \hat{8}$







- $\hat{1} = \hat{5}$ Los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{5}$ se llaman **correspondientes** porque están en la misma posición respecto a r_1 y a r_2.

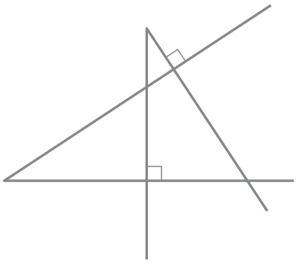
  También son correspondientes $\hat{2}$ y $\hat{6}$, $\hat{3}$ y $\hat{7}$, $\hat{4}$ y $\hat{8}$.
- $\hat{1} = \hat{7}$ Los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{7}$ son **alternos externos** porque están a distintos lados de la recta s (alternos) y en la zona exterior de las dos paralelas (externos).

  También son alternos externos $\hat{4}$ y $\hat{6}$.
- $\hat{3} = \hat{5}$ Los ángulos $\hat{3}$ y $\hat{5}$ son **alternos internos** porque están a distintos lados de s y en la zona interior de las paralelas.

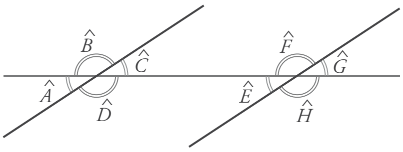
  También son alternos internos $\hat{2}$ y $\hat{8}$.

Actividades

1 Dos ángulos de lados perpendiculares pueden ser iguales, pero también pueden ser suplementarios. Justifícalo con un dibujo.



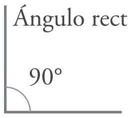
2 De estos ángulos di dos que sean iguales por ser:

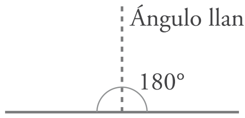


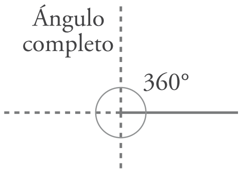
a) Opuestos por el vértice.
b) Correspondientes.
c) Alternos internos.
d) Alternos externos.

4 Medida de ángulos

Recuerda que un ángulo recto tiene 90°. Por tanto, los ángulos *llano* y *completo* tienen 180° y 360°, respectivamente.







El **grado** (1/90 de ángulo recto) es la unidad de medida de ángulos.

Para afinar en la medida de ángulos, se utilizan los submúltiplos del grado:

minuto $\longrightarrow 1' = \frac{1}{60}$ de grado. Es decir, $1° = 60'$.

segundo $\longrightarrow 1'' = \frac{1}{60}$ de minuto. Es decir, $1' = 60''$.

A estos grados se les llama **sexagesimales** por la forma de dividirse, de 60 en 60. El sistema de numeración sexagesimal, antiquísimo, tiene su origen, posiblemente, en una forma de contar basada en los cinco dedos de una mano y en las doce falanges de los dedos índice, corazón, anular y meñique de la otra mano (5 · 12 = 60).

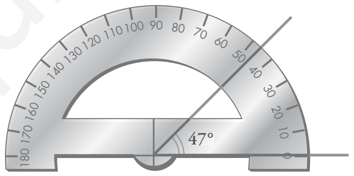
Etimología

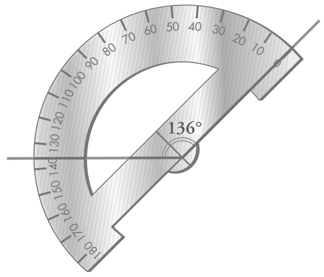
Minutus, en latín, significa *menudo*, *diminuto*, y así se le llamó a este pequeño angulillo de 1/60 de grado.

Al tomar otro menor aún, se le llamó **segundo trozo menudo**, es decir, por segunda vez pequeño, más pequeño todavía. Es el **segundo,** 1/60 de minuto = 1/3 600 de grado.

Instrumentos de medidas de ángulos

Para medir ángulos dibujados sobre el papel, se utiliza el **transportador.**





Para medidas angulares sobre el terreno existen otros instrumentos mucho más precisos, como el sextante, el goniómetro y el teodolito.

SEXTANTE: instrumento para medir ángulos.

Expresión de un ángulo en grados y minutos

¿Qué significa un ángulo de 37° 40'? Es un ángulo mayor que 37° y menor que 38°. En concreto, mide 37 grados más 40/60 de grado.

¿Tiene sentido un ángulo de 24° 256'? No es una forma correcta de expresar un ángulo, pues 256' es más que un grado. Veámoslo:

$$\begin{array}{r|l} 256 & 60 \\ \cline{2-2} 16 & 4 \end{array}$$

Es decir, 256' = 4 · 60' + 16'= 4° 16'

Por tanto, 24° 256' = 24° + 4° 16' = 28° 16'.

Nota

Este curso vamos a trabajar solo con ángulos en grados y minutos.

Al expresar un ángulo en grados y minutos, el número de minutos ha de ser menor que 60.

Suma de ángulos

Para sumar dos ángulos expresados en grados y minutos, se suman por separado los grados y los minutos. Después, si el número de minutos es mayor que 60, se pasan a grados.

$$\begin{array}{rr} 36^\circ & 45' \\ +\ 82^\circ & 56' \\ \hline 118^\circ & 101' \end{array} = 118^\circ + 1^\circ\,41' = 119^\circ\,41'$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 101 \;\underline{|\,60\;} \\ \;\;41 \quad 1 \\ 101' = 1^\circ\,41' \end{array}}$$

Cálculo mental

Efectúa.

a) 23° 35' + 48° 22'

b) 31° 40' + 23° 20'

c) 31° 42' + 23° 25'

Resta de ángulos

Suponemos que el minuendo es mayor que el sustraendo. Si el número de minutos del minuendo es mayor que el del sustraendo, la operación se realiza de inmediato. Si no, se procede como en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{rr} 56^\circ & 31' \\ -\ 32^\circ & 43' \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rr} 55^\circ & 91' \\ -\ 32^\circ & 43' \\ \hline 23^\circ & 48' \end{array} \leftarrow \text{(Hemos convertido } 1^\circ \text{ en } 60'\text{).}$$

Cálculo mental

Efectúa.

a) 87° 58' – 36° 25'

b) 87° – 36° 20'

c) 87° 10' – 36° 20'

Producto de un ángulo por un número natural

Para multiplicar un ángulo por un número natural, se efectúan los productos de los minutos y de los grados por ese número. Después, si el resultado de los minutos es mayor que 60, se pasan a grados los que corresponda.

$$(32^\circ\,47') \times 7 \Rightarrow \begin{array}{r} 32^\circ \\ \times 7 \\ \hline 224^\circ \end{array} \quad \begin{array}{r} 47' \\ \times 7 \\ \hline 329' \end{array} \rightarrow 224^\circ\,329' = 224^\circ + 5^\circ\,29' = 229^\circ\,29'$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 329 \;\underline{|\,60\;} \\ \;\;29 \quad 5 \end{array} \qquad 329' = 5^\circ\,29'}$$

Cálculo mental

Efectúa.

a) (20° 10') × 3

b) (20° 20') × 3

c) (20° 25') × 3

División de un ángulo entre un número natural

Para dividir un ángulo por un número natural, se dividen los grados y el resto se pasa a minutos, que se añaden a los que había. Después, se dividen los minutos.

$$(97^\circ\,15') : 7 \Rightarrow \begin{array}{rrl} 97^\circ & 15' & \underline{|\,7\qquad\;} \\ 27 & & 13^\circ\,53' \;\rightarrow\; \text{El cociente es } 13^\circ\,53'. \\ 6^\circ \rightarrow & \underline{360'} & \\ & 375' & \\ & 25' & \\ & 4' & \longrightarrow \; \text{El resto es } 4'. \end{array}$$

Cálculo mental

Efectúa.

a) (42° 36') : 3

b) 91° : 3

c) (91° 30') : 3

Actividades

1 Efectúa las siguientes operaciones:

a) 47° 25' + 56° 11' + 17° 49'

b) 37° 53' – 29° 49'

c) 68° 42' + 11° 3' + 43° 39'

d) 52° 41' – 36° 55'

2 Realiza estas operaciones:

a) (38° 43') × 8

b) (24° 55') × 10

c) (27° 42') × 5

d) (76° 39') : 5

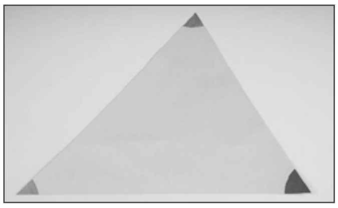
e) (89° 21') : 2

f) (115° 44') : 7

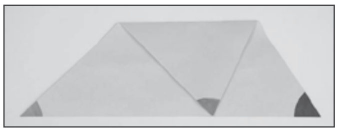
5 Ángulos en los polígonos

Observa

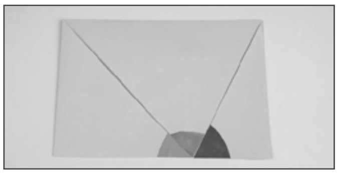
Ángulos de un triángulo



Recorta un triángulo cualquiera y colorea cada vértice de un color por ambas caras. Señala los puntos medios de dos de los lados.



Pliega por la línea que une los puntos medios.

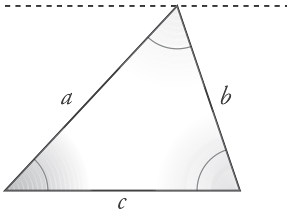


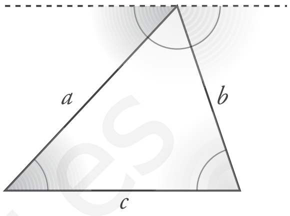
Pliega los otros dos vértices.

Al coincidir los tres ángulos, se aprecia que suman 180°.

Suma de los ángulos en un triángulo

Para hallar la suma de los ángulos de un triángulo cualquiera, trazamos por uno de sus vértices la paralela al lado opuesto y razonamos del siguiente modo:

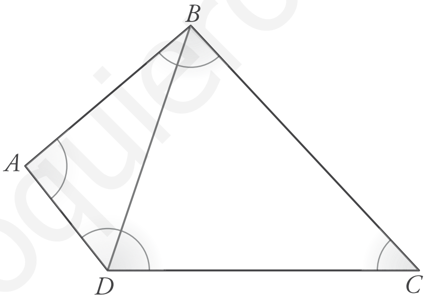




Los ángulos morados son iguales por ser alternos internos al cortar las paralelas por la recta *a*. Lo mismo les ocurre a los azules con la recta *b*. Ahora, es claro que entre los tres completan un ángulo llano; es decir, suman 180°.

La suma de los tres ángulos de cualquier triángulo vale 180°.

Suma de los ángulos de un cuadrilátero



Mediante una diagonal, el cuadrilátero se parte en dos triángulos.

La suma de los ángulos de cada triángulo es 180°.

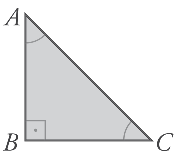
Los ángulos de los dos triángulos suman 180° · 2 = 360°.

La suma de los ángulos de cualquier cuadrilátero es 360°.

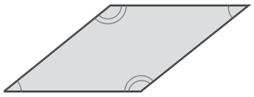
Como los cuadrados y los rectángulos tienen los cuatro ángulos iguales, cada uno de ellos mide 360° : 4 = 90°, como ya sabíamos.

Actividades

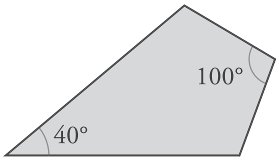
1 En un triángulo rectángulo, $\hat{A}$ mide 42° 20'. ¿Cuánto mide $\hat{C}$?



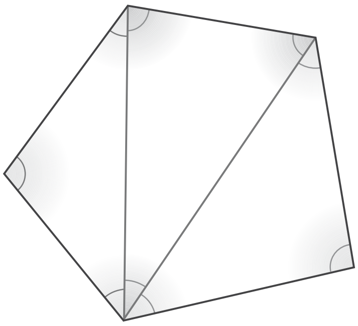
2 Si un ángulo de un rombo mide 39°, ¿cuánto miden los demás?



3 ¿Cuánto miden los ángulos iguales de una cometa con esta forma?



4 ¿Es posible construir un cuadrilátero con un solo ángulo recto? ¿Y con solo dos? ¿Y con solo tres?



Suma de los ángulos de un pentágono

Mediante diagonales, descomponemos el pentágono en tres triángulos.

Los ángulos de cada uno de ellos suman 180°. Entre los tres, los ángulos suman $3 \cdot 180° = 540°$. Por tanto, los ángulos de todos los pentágonos suman 540°.

Los cinco ángulos de cualquier pentágono suman 540°.

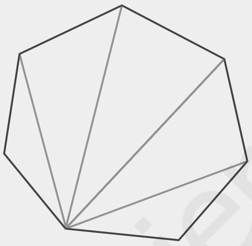
Por tanto, cada ángulo de un **pentágono regular** (todos sus ángulos son iguales) mide $540° : 5 = 108°$.

Ángulos de un polígono cualquiera

Como el pentágono, el hexágono se puede descomponer, mediante diagonales, en 4 triángulos. Sus ángulos sumarán, por tanto, $4 \cdot 180° = 720°$.

Así, en un hexágono regular, cada ángulo medirá $720° : 6 = 120°$.

Lo que hemos hecho con cuadriláteros, pentágonos y hexágonos, lo podemos generalizar para polígonos de n lados como vemos a continuación.



Un polígono de n lados se puede descomponer en $n - 2$ triángulos. La suma de todos sus ángulos es de $(n - 2) \cdot 180°$.

Cada ángulo de un polígono regular de n lados mide:

$$\frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

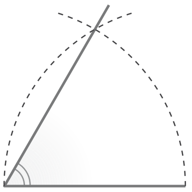
Actividades

5 Averigua cuánto suman todos los ángulos de un decágono cualquiera y cuánto mide cada ángulo de un decágono regular. Hazlo de dos formas:

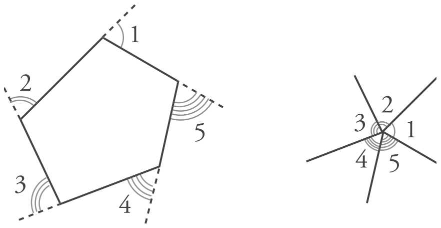
a) Volviendo a hacer todo el razonamiento: "Un decágono regular se puede descomponer en ocho triángulos…".

b) Aplicando las fórmulas anteriores.

6 Justifica que el ángulo así construido mide 60°.



7 Los ángulos señalados en rojo se llaman **ángulos exteriores** o **externos** del polígono.



Copia esta figura en un papel, recorta los ángulos externos, júntalos como ves en la figura de la derecha y comprueba que suman 360°.

8 Justifica que la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono es 360°.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Operaciones con ángulos

1 ▼▽▽ Efectúa las siguientes sumas:

a) 15° 13' + 35° 23'
b) 18° 50' + 22° 15'
c) 25° 17' + 54° 40' + 13° 54'

2 ▼▽▽ Resuelve estas restas:

a) 181° 19' – 121° 52'
b) 143° 12' – 97° 24'

3 ▼▽▽ Haz los productos siguientes:

a) (58° 14') · 3
b) (37° 43') · 5
c) (62° 12') · 7
d) (5° 58') · 2

4 ▼▽▽ Resuelve estas divisiones:

a) (277° 34') : 11
b) (201° 52') : 8
c) (127° 55') : 5
d) (174° 30') : 6

5 ▼▽▽ Halla el complementario de:

a) 45° 13'
b) 70° 52'

6 ▼▽▽ Halla el suplementario de:

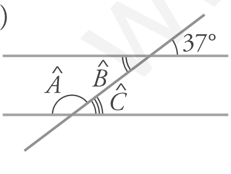
a) 93° 15'
b) 15° 02'

7 ▼▽▽ Halla en grados y minutos el ángulo interior de un heptágono regular.

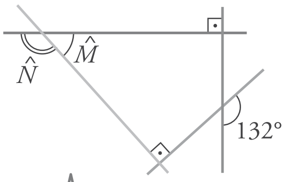
Relaciones angulares

8 ▼▼▽ Calcula el valor del ángulo o de los ángulos que se piden en cada figura:

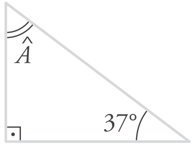
a)



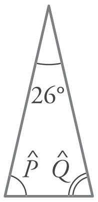
b)



c)

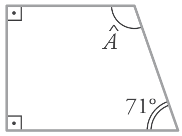


d)

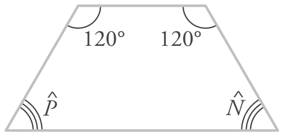


9 ▼▼▽ Calcula el valor de los ángulos desconocidos.

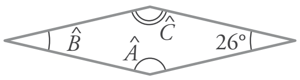
a)



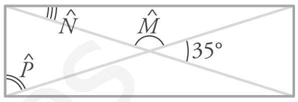
b)



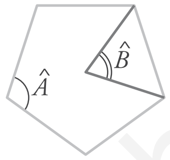
c)



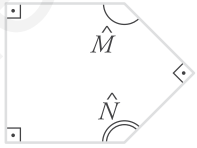
d)



e)



f)

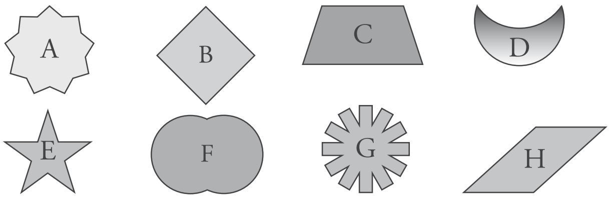


10 ▼▽▽ Piensa y contesta:

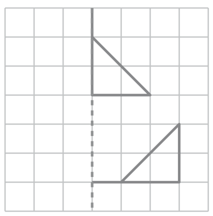
a) ¿Cuánto mide un ángulo equivalente a un cuarto de vuelta?
b) ¿Qué ángulo giras si das media vuelta?
c) Estas frente a la playa y a tu espalda está la montaña. ¿Qué verás si giras 360°?
d) ¿Cuántos ángulos de 45° equivalen a media vuelta?

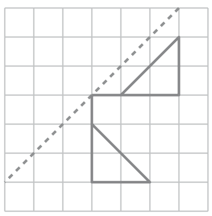
Simetrías

11 ▼▽▽ Señala, cuando existan, todos los ejes de simetría en estas figuras, y cuando haya más de dos, halla el ángulo que forman dos de los ejes contiguos:



12 ▼▽▽ Completa cada figura para que sea simétrica respecto del eje señalado:





Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

13 ▼▽▽ Observa las letras del abecedario:

A B C D E F G

H I J K L M N

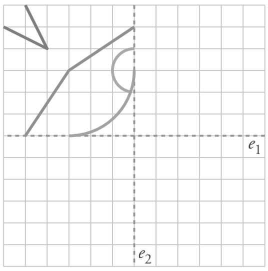
Ñ O P Q R S T

U V W X Y Z

Di cuáles no tienen ejes de simetría (hay 10), cuáles tienen un eje de simetría (hay 13), cuáles tienen dos (hay 3) y cuál tiene infinitos ejes de simetría.

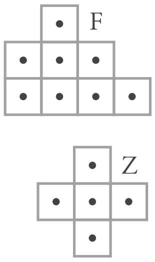
Dibuja cada una de ellas en tu cuaderno señalando los ejes que tenga.

14 ▼▽▽ Completa la siguiente figura para que tenga los dos ejes de simetría que se indican:

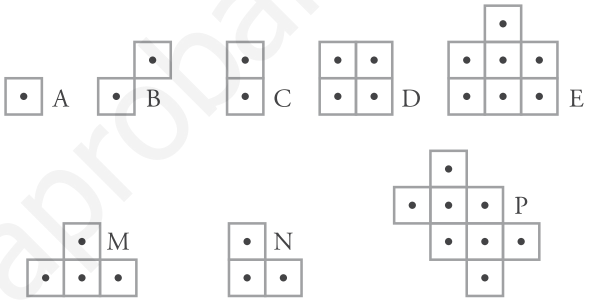


15 ▼▽▽ Vamos a obtener figuras mirando un trozo de esta figura F con un espejo:

Por ejemplo, para obtener la figura Z hemos de situar el espejo así:

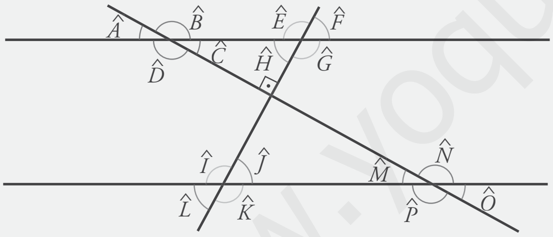


Indica cómo hay que situar el espejo sobre F para visualizar cada una de las siguientes figuras:



Autoevaluación

1 Observa los siguientes ángulos:



a) Identifica un ángulo recto, uno agudo y uno obtuso.

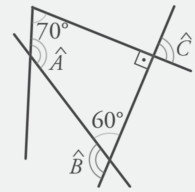
b) Escribe dos ángulos complementarios y dos suplementarios.

c) Indica dos ángulos opuestos por el vértice, dos correspondientes, dos alternos externos y dos alternos internos.

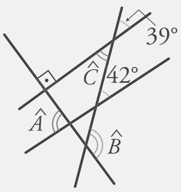
d) Sabiendo que $\hat{A} = 30°$, halla el resto de los ángulos.

2 Halla los valores de los ángulos indicados:

a)



b)



3 Realiza las siguientes operaciones con ángulos:

a) 13° 24' + 23° 38'

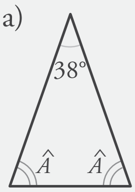
b) 26° 15' – 12° 32'

c) (32° 42') · 3

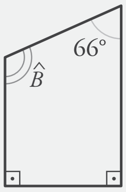
d) (23° 44') : 4

4 Calcula el valor de los ángulos indicados.

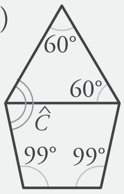
a)



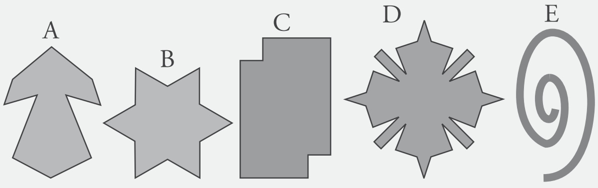
b)



c)



5 Traza los ejes de simetría de estas figuras. Calcula, cuando haya más de un eje de simetría, el valor del ángulo formado por dos ejes contiguos:



12 Figuras geométricas

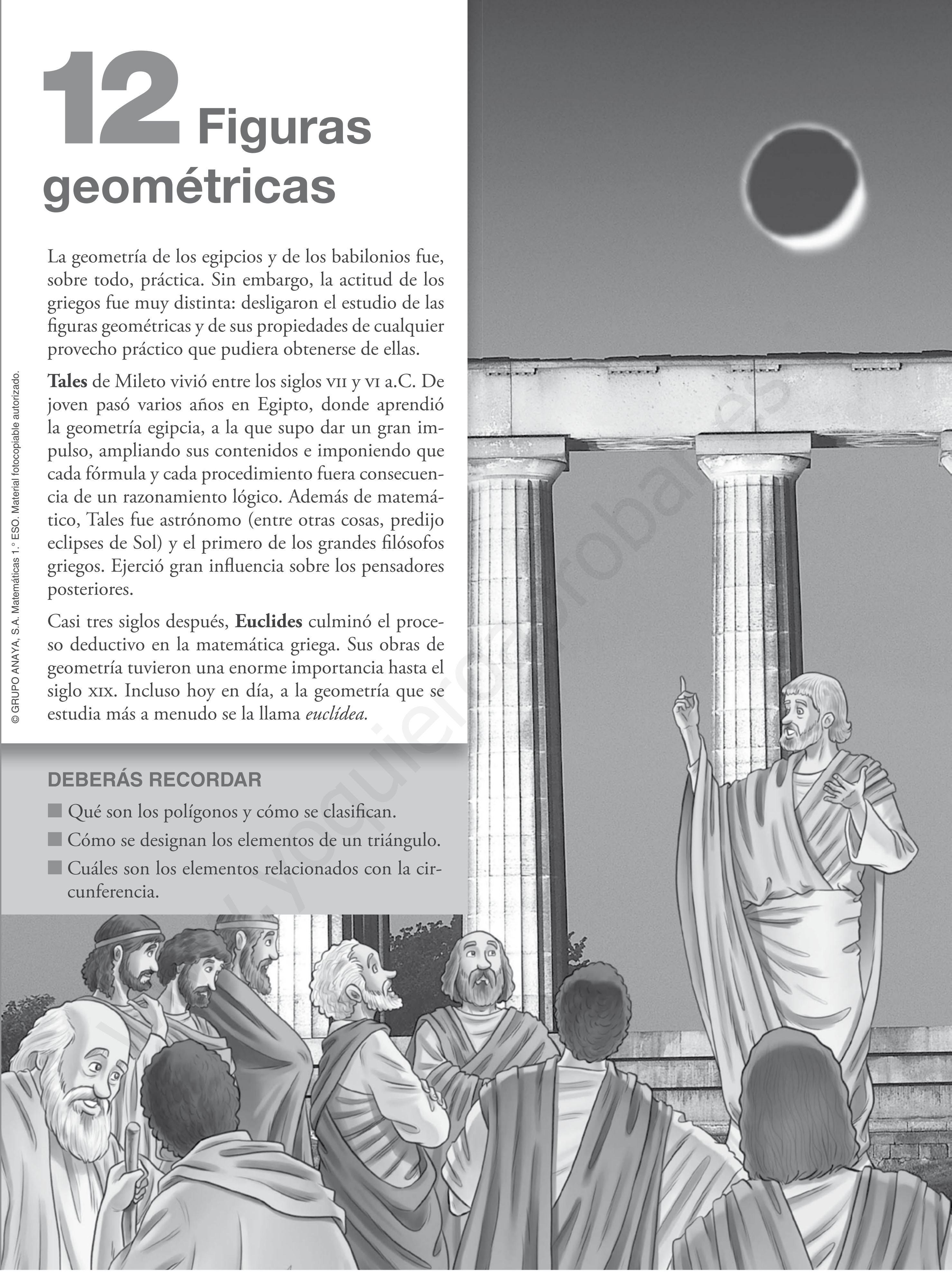
La geometría de los egipcios y de los babilonios fue, sobre todo, práctica. Sin embargo, la actitud de los griegos fue muy distinta: desligaron el estudio de las figuras geométricas y de sus propiedades de cualquier provecho práctico que pudiera obtenerse de ellas.

Tales de Mileto vivió entre los siglos VII y VI a.C. De joven pasó varios años en Egipto, donde aprendió la geometría egipcia, a la que supo dar un gran impulso, ampliando sus contenidos e imponiendo que cada fórmula y cada procedimiento fuera consecuencia de un razonamiento lógico. Además de matemático, Tales fue astrónomo (entre otras cosas, predijo eclipses de Sol) y el primero de los grandes filósofos griegos. Ejerció gran influencia sobre los pensadores posteriores.

Casi tres siglos después, **Euclides** culminó el proceso deductivo en la matemática griega. Sus obras de geometría tuvieron una enorme importancia hasta el siglo XIX. Incluso hoy en día, a la geometría que se estudia más a menudo se la llama *euclídea.*

DEBERÁS RECORDAR

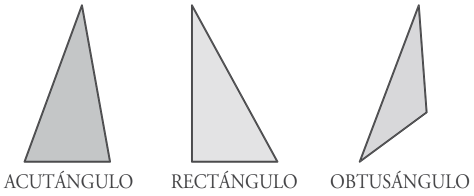
- Qué son los polígonos y cómo se clasifican.
- Cómo se designan los elementos de un triángulo.
- Cuáles son los elementos relacionados con la circunferencia.



1 Triángulos

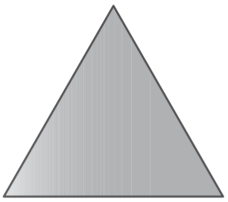
Clasificación

Con seguridad, dos de los ángulos de un triángulo son agudos. Según como sea el otro ángulo, el triángulo es **acutángulo, rectángulo** u **obtusángulo.**



Un triángulo con los tres lados iguales se llama **equilátero.** Si tiene dos lados iguales, se llama **isósceles.** Y si los tres lados son distintos, se llama **escaleno.**

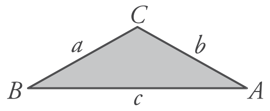
Relaciones entre los ángulos y los lados



EQUILÁTERO Y EQUIÁNGULO

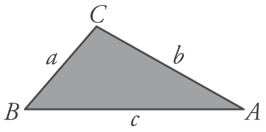
Los triángulos equiláteros también tienen los ángulos iguales.

En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados iguales son también iguales. Y, en general, si un lado es mayor que otro, entonces sus ángulos opuestos siguen la misma relación (si $a > b$ entonces $\hat{A} > \hat{B}$).



$a = b$

$\hat{A} = \hat{B}$

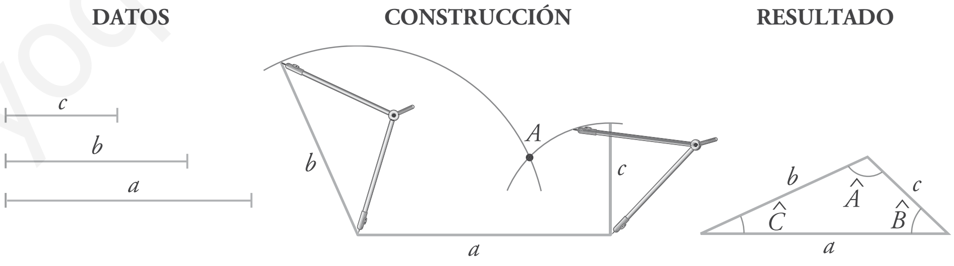


$a < b < c$

$\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$

Construcción de triángulos

Para construir un triángulo, es suficiente conocer solo algunos de sus elementos. Pueden darse distintos casos. Veamos aquí la construcción **a partir de los tres lados.** En www.anayadigital.com puedes encontrar los demás.



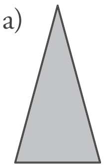
Actividades

1 Construye con regla y compás un triángulo cuyos lados midan 7 cm, 5 cm y 8 cm, respectivamente.

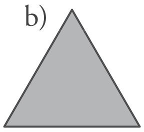
2 Di cómo es, según sus ángulos y según sus lados, cada triángulo de la derecha.

3 Dibuja un triángulo escaleno obtusángulo y un triángulo isósceles acutángulo.

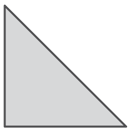
a)



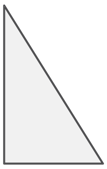
b)



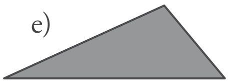
c)



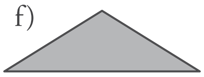
d)



e)



f)



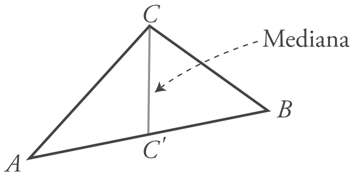
Equilibrio

Un triángulo de cartulina, chapa o madera se mantiene en equilibrio si lo sostenemos en el baricentro.

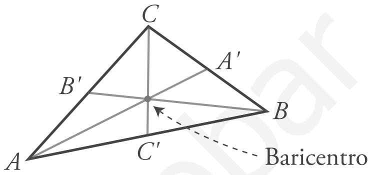
bari-centro: centro de gravedad.

Medianas de un triángulo. Baricentro

Se llama **mediana** de un triángulo a un segmento que va de un vértice al punto medio del lado opuesto.

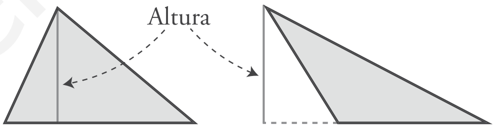


Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado **baricentro.**

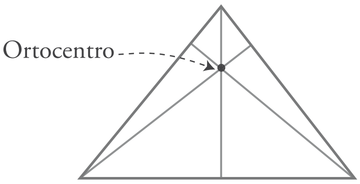


Alturas de un triángulo. Ortocentro

La **altura** de un triángulo es un segmento que va, perpendicularmente, desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación.



Todo triángulo tiene tres alturas, que se cortan en un punto llamado **ortocentro.**



Actividades

4 Dibuja el triángulo cuyos lados miden 8 cm, 10 cm y 12 cm. Observa que es acutángulo.

Traza sus tres alturas y señala su ortocentro.

5 Dibuja el triángulo cuyos lados 6 cm, 8 cm y 12 cm. Observa que es obtusángulo.

Traza sus medianas y señala su baricentro.

6 Dibuja el triángulo cuyos lados miden 6 cm, 8 cm y 10 cm. Observa que es rectángulo.

Localiza su ortocentro y su baricentro.

7 Dibuja el triángulo equilátero cuyos lados miden 6 cm.

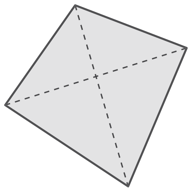
Localiza su ortocentro y su baricentro.

2 Cuadriláteros

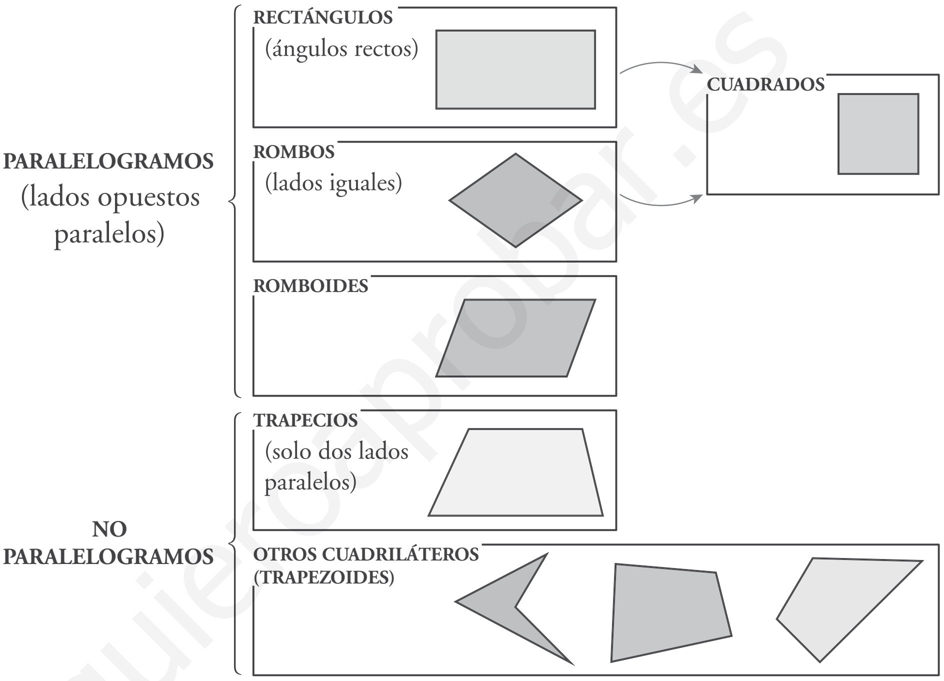
Cuadriláteros son polígonos de cuatro lados.

Recuerda que sus cuatro ángulos suman 360°.

Tienen dos diagonales.



Clasificación de los cuadriláteros

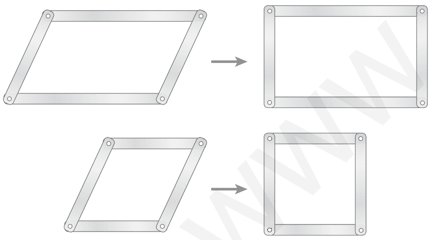


Atención

Los cuadrados son rectángulos, porque tienen los cuatro ángulos rectos.

Y también son rombos, porque tienen los cuatro lados iguales.

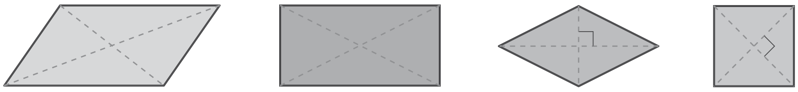
Paralelogramos. Diagonales. Ejes de simetría



Se llama **paralelogramos** a los cuadriláteros cuyos lados opuestos son paralelos.

Las **diagonales** de un paralelogramo cualquiera se cortan en sus puntos medios.

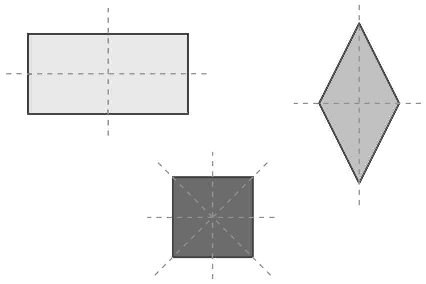
En el cuadrado y el rombo, las diagonales son perpendiculares. En el cuadrado y el rectángulo, las diagonales son iguales.



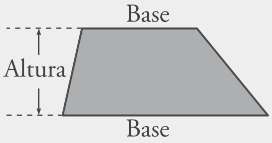
El romboide no tiene **ejes de simetría.**

El rectángulo y el rombo tienen dos ejes de simetría.

El cuadrado tiene cuatro ejes de simetría.

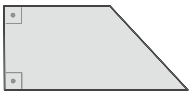


Trapecios

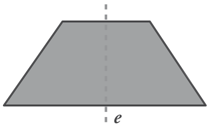


Un **trapecio** es un cuadrilátero con dos lados paralelos y otros dos no paralelos.

Los lados paralelos se llaman bases, y la distancia entre ellos, altura.



TRAPECIO RECTÁNGULO



TRAPECIO ISÓSCELES

- Un trapecio con dos ángulos rectos se llama **trapecio rectángulo.**
- Un trapecio con los dos lados no paralelos iguales se llama **isósceles.** El trapecio isósceles tiene los ángulos iguales dos a dos. Pero, ¡atención!, los ángulos iguales son contiguos, no opuestos.

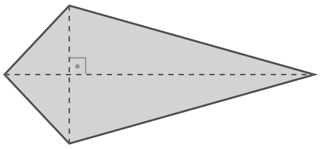
  Los trapecios isósceles tienen un eje de simetría.

Trapezoides

Los cuadriláteros que no tienen ningún par de lados paralelos se llaman **trapezoides.**

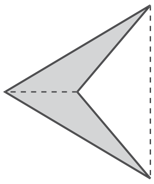
Hay trapezoides con formas muy variadas. Algunos de ellos son interesantes.

▼ **EJEMPLOS**



- Este, con forma de cometa, tiene los lados iguales dos a dos, pero los lados iguales son contiguos, no opuestos (si fueran iguales los lados opuestos, sería paralelogramo).

  Además, sus diagonales son perpendiculares, como las del rombo, pero no se cortan en sus puntos medios. Solo tiene un eje de simetría, su diagonal mayor.



- Este también tiene los lados iguales dos a dos. Sus diagonales, aunque tienen direcciones perpendiculares, no se cortan, pues una de ellas está fuera del polígono.

  Estos cuadriláteros, en los que una diagonal queda fuera, se llaman **cóncavos.**

Actividades

1 Observa los cuadriláteros de la derecha.

a) ¿Cuáles son paralelogramos, cuáles trapecios y cuáles trapezoides?

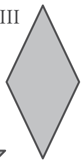
b) Ponle un nombre adecuado a cada uno. Por ejemplo, cuadrado, trapezoide…

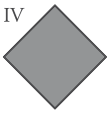
c) Di cuántos ejes de simetría tiene cada figura.

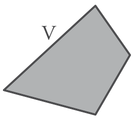
d) ¿Cuáles de estas figuras tienen las diagonales perpendiculares?

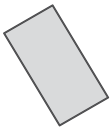
I

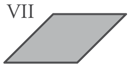

II

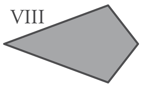

III


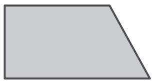
IV


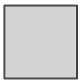
V


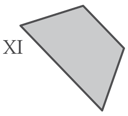
VI


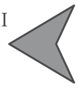
VII


VIII


IX


X


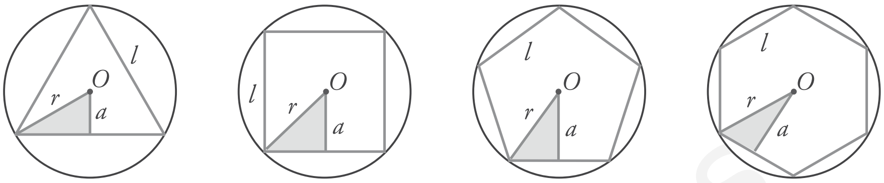
XI


XII


3 Polígonos regulares

Un polígono regular es el que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales.

Todos los polígonos regulares tienen una circunferencia circunscrita.

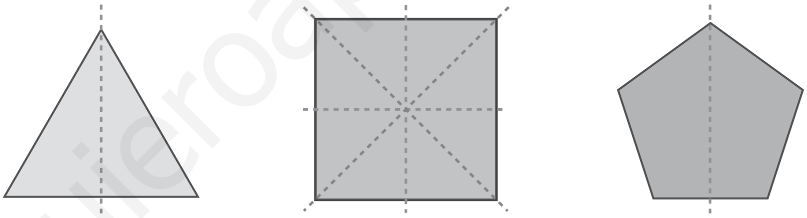


Se llaman **centro,** O, y **radio,** r, de un polígono regular al centro y al radio de la circunferencia circunscrita.

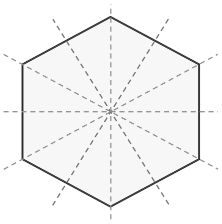
Apotema, a, es el segmento perpendicular desde el centro, O, al lado, l. La apotema siempre corta al lado en su punto medio.

En todos los polígonos regulares, r, a y $l/2$ son los lados de un triángulo rectángulo.

Ejes de simetría

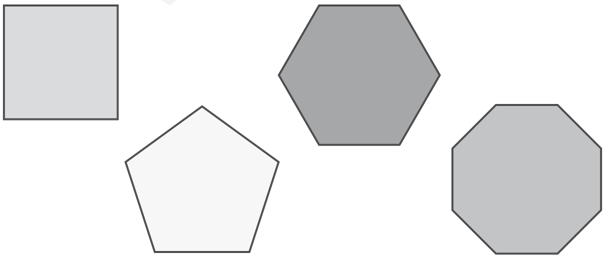


Todos los polígonos regulares tienen tantos ejes de simetría como lados.



Actividades

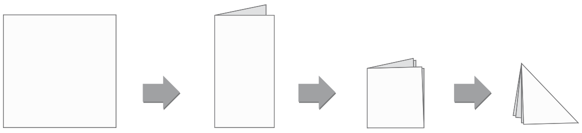
1 Calca en tu cuaderno las figuras siguientes:



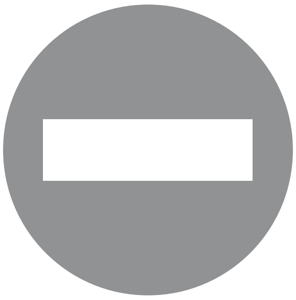
Dibuja en rojo todos sus ejes de simetría.

2 Calca las figuras del ejercicio anterior en hojas aparte y recórtalas. Señala, mediante pliegues, todos sus ejes de simetría.

Observa que en el cuadrado puedes realizarlo mediante tres pliegues, y en el octógono, mediante cuatro.



4 Circunferencia



La circunferencia es la línea que rodea al círculo.

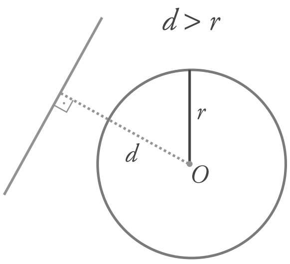
El círculo es la figura plana más perfecta:

- Cualquiera de sus diámetros es eje de simetría. Por tanto, tiene infinitos ejes de simetría.
- Su área es la mayor posible entre todas las figuras que tienen su mismo perímetro. Es decir, si con una cuerda queremos delimitar un terreno cuya superficie sea la mayor posible, deberemos construir una circunferencia.

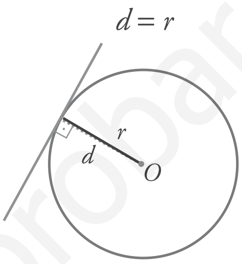
Posiciones relativas de recta y circunferencia

Ten en cuenta

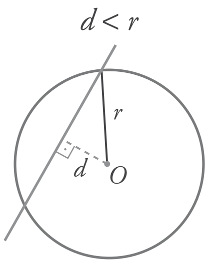
d es la distancia de O a la recta.
r es el radio de la circunferencia.



EXTERIORES

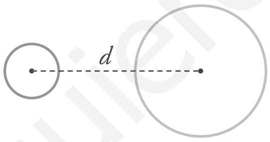


TANGENTES

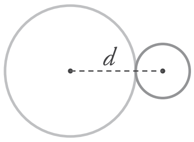


SECANTES

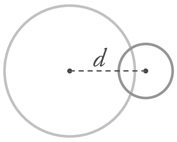
Posiciones relativas de dos circunferencias



EXTERIORES

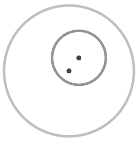


TANGENTES EXTERIORES

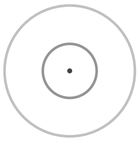


SECANTES

TANGENTES INTERIORES



INTERIORES



CONCÉNTRICAS

Actividades

1 Traza una circunferencia de 5 cm de radio y tres rectas que pasen a 3 cm, 5 cm y 8 cm, respectivamente, del centro de la circunferencia.

2 Dibuja en tu cuaderno:

a) Dos circunferencias secantes.

b) Dos circunferencias interiores.

Mide, en ambos casos, la distancia entre sus centros y compárala con sus radios.

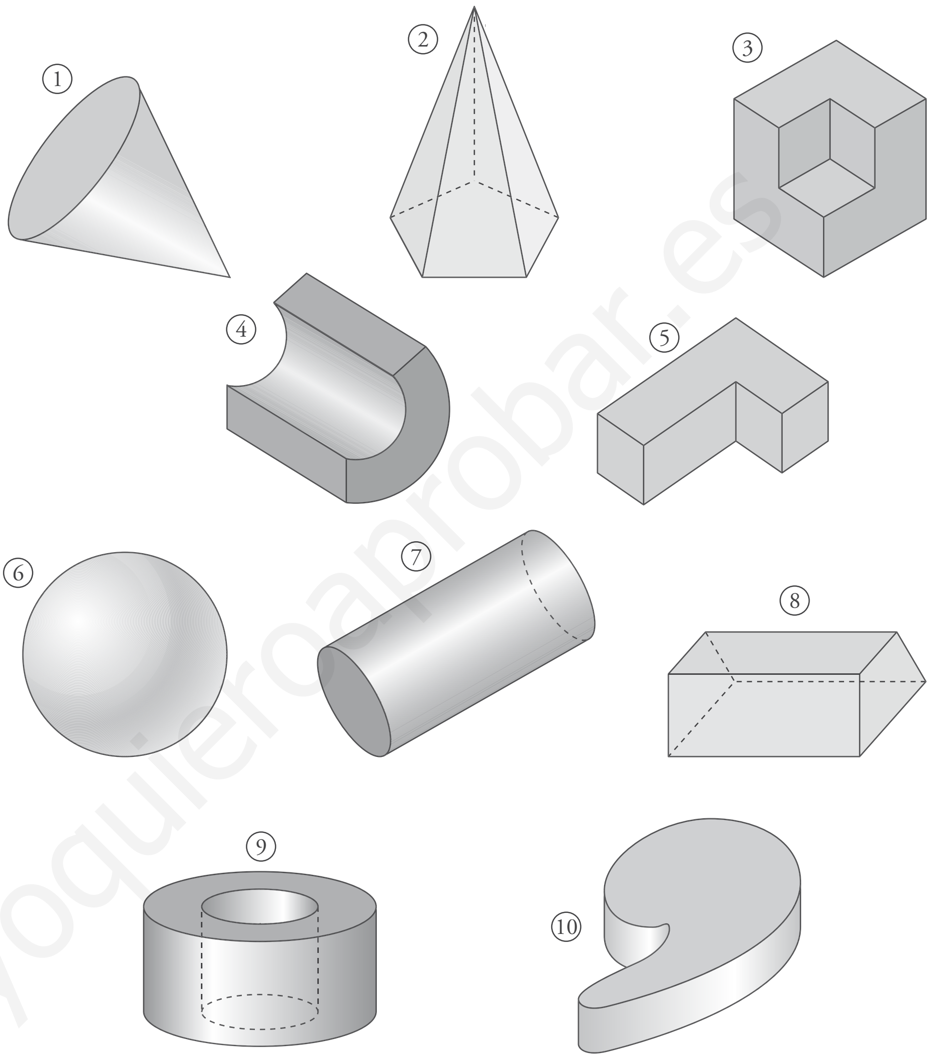
3 Si trazaras dos circunferencias de radios 7 cm y 4 cm con sus centros situados a 10 cm de distancia, ¿en qué posición relativa quedarían? Trázalas y comprueba tu respuesta.

4 Traza dos circunferencias de radios 5 cm y 3 cm tangentes exteriores. ¿A qué distancia están sus centros?

Traza dos circunferencias de 5 cm y 3 cm de radio, que sean tangentes interiores. ¿A qué distancia están sus centros?

5 Cuerpos geométricos

Los cuerpos geométricos son, como sabes, figuras de tres dimensiones, es decir, figuras que ocupan una porción de espacio.



Geometría y civilización

Un grupo de personas tuvieron un naufragio. Se salvaron y llegaron a una playa de una isla desconocida. Iban exhaustos y atemorizados.

Observaron que en la arena había dibujadas unas figuras geométricas. Uno de los náufragos, discípulo de Platón, al verlas exclamó con alegría: "¡Ánimo! Aquí viven personas civilizadas".

Todas estas figuras recuerdan diferentes objetos de nuestro entorno. Son cuerpos geométricos. Entre ellos, distinguiremos dos grandes tipos:

- **Poliedros:** Están limitados por caras planas poligonales. De los de arriba, son poliedros, entre otros, el 2 y el 3.
- **Cuerpos de revolución:** Son el resultado del giro de una figura plana en torno a un eje. Por ejemplo, el 1 y el 6 de arriba.

Atención

Las figuras 4 y 10 no son poliedros, pues sus caras no son polígonos, ni cuerpos de revolución, pues no se pueden obtener al hacer girar una figura plana.

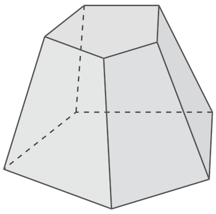
Actividades

1 Señala, entre los cuerpos de arriba, dos poliedros (aparte del 2 y el 3).

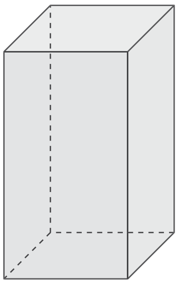
2 Entre los cuerpos de arriba, señala dos cuerpos de revolución (aparte del 1 y el 6).

6 Poliedros

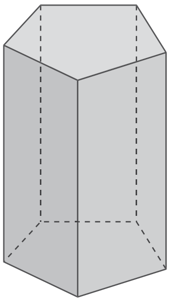
Los cuerpos geométricos limitados por polígonos se llaman **poliedros.**



- **Caras** del poliedro son los polígonos que lo forman.
- **Aristas** son los lados de las caras. En cada arista se juntan dos caras.
- **Vértices** del poliedro son los vértices de las caras. En cada vértice concurren tres o más caras.



ORTOEDRO



PRISMA PENTAGONAL REGULAR

PRISMAS

Un **prisma** es un poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos, llamados **bases,** y varios paralelogramos llamados **caras laterales.**

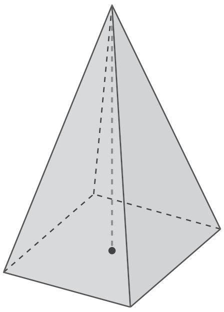
Si las bases son polígonos regulares y las caras laterales son rectángulos, el **prisma** se llama **regular.**

Los prismas cuyas caras son todas rectángulos se llaman **ortoedros.**

PIRÁMIDES

Una **pirámide** es un poliedro que tiene por **base** un polígono cualquiera y por **caras laterales** triángulos con un vértice común, que se denomina **vértice** de la pirámide.

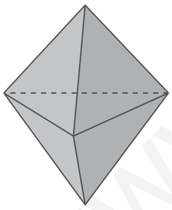
Una **pirámide** es **regular** cuando la base es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre el centro de ese polígono.



PIRÁMIDE CUADRANGULAR REGULAR

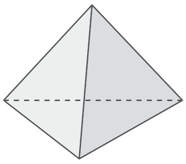
No te confundas

Este poliedro no es regular, porque en unos vértices concurren tres triángulos, y en otros, cuatro.

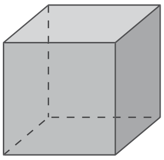


POLIEDROS REGULARES

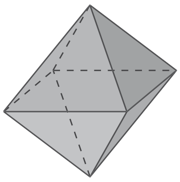
Un **poliedro** es **regular** si todas sus caras son polígonos regulares idénticos y en cada vértice concurren el mismo número de caras.



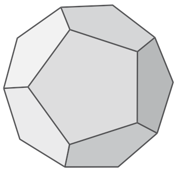
TETRAEDRO



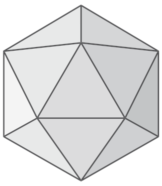
CUBO



OCTAEDRO



DODECAEDRO

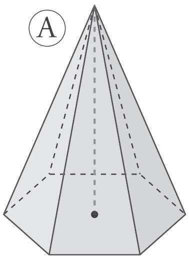


ICOSAEDRO

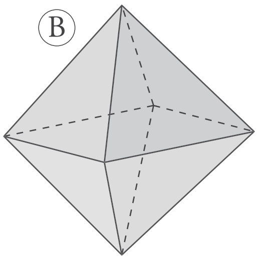
Actividades

1 Describe los poliedros siguientes: nombre, cómo son sus caras y cuántas tienen, número de aristas, de vértices…

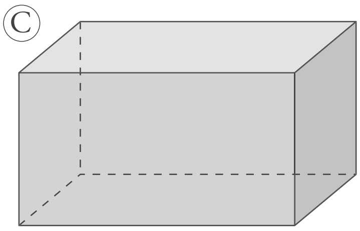
Ⓐ



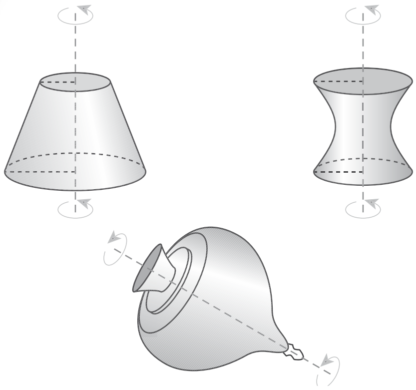
Ⓑ



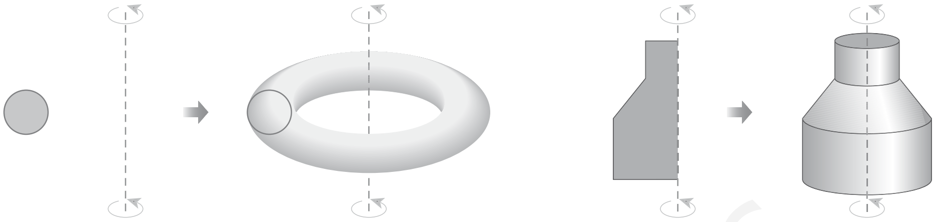
Ⓒ



7 Cuerpos de revolución

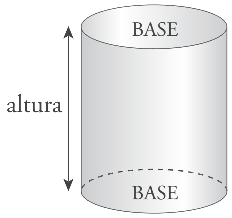


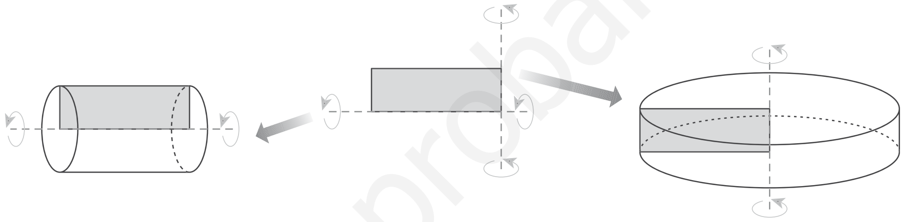
Los **cuerpos de revolución** se originan haciendo girar una figura plana alrededor de un eje.



CILINDROS

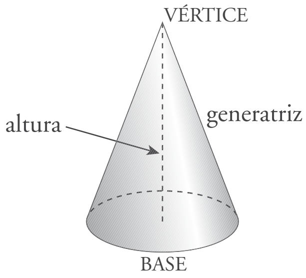
Un **cilindro** es un cuerpo de revolución generado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.

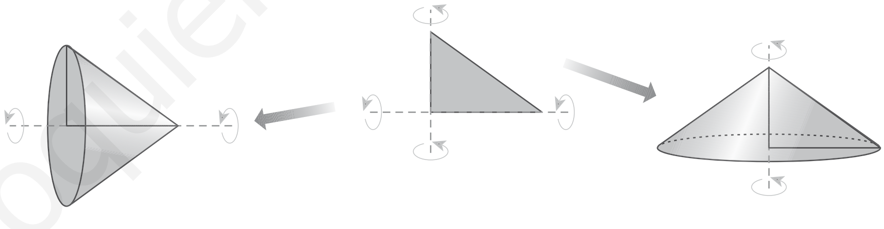




CONOS

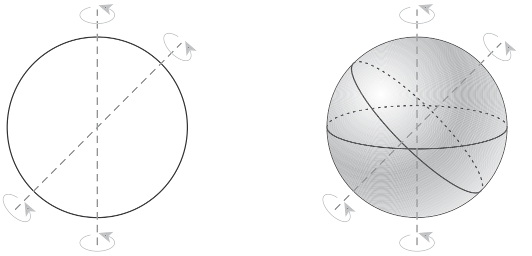
Un **cono** es un cuerpo de revolución generado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de los catetos.





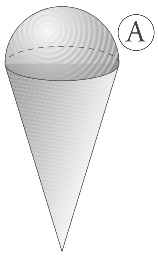
ESFERAS

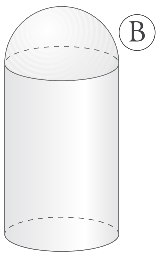
Una **esfera** es un cuerpo de revolución generado por una circunferencia que gira alrededor de cualquiera de sus diámetros.

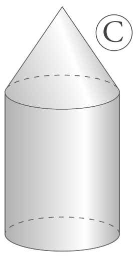


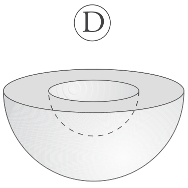
Actividades

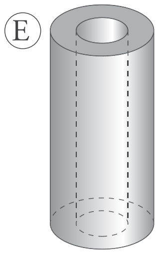
1 Utilizando las palabras cilindro, cono y esfera, describe los siguientes cuerpos geométricos:











Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

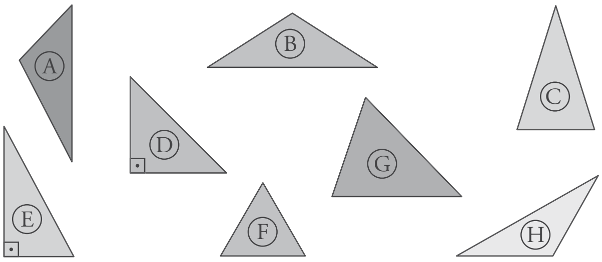
Polígonos y circunferencia

1 ▼▽▽ Di cuáles de estos triángulos son:

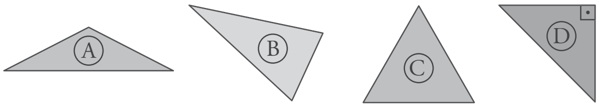
a) Acutángulos.

b) Rectángulos.

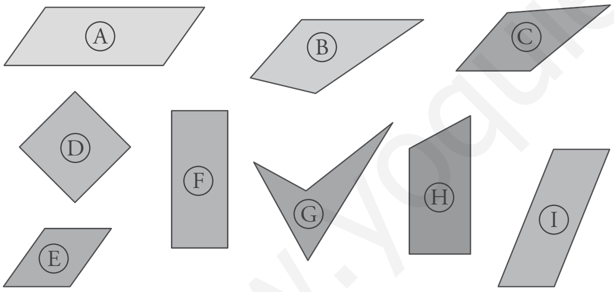
c) Obtusángulos isósceles.



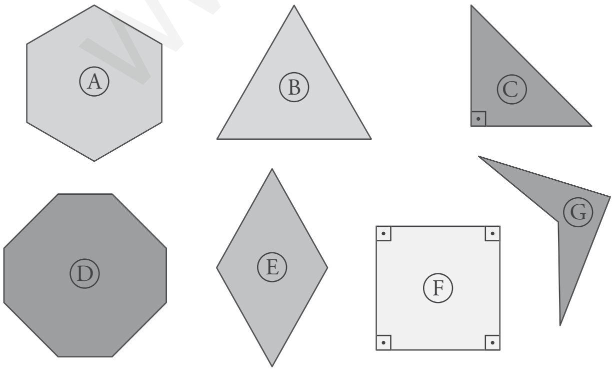
2 ▼▽▽ Di cómo son, según sus lados y según sus ángulos, los triángulos siguientes:



3 ▼▽▽ Ponle nombre a cada uno de los cuadriláteros que aparecen a continuación:



4 ▼▽▽ Clasifica los polígonos siguientes en regulares y no regulares:



5 ▼▽▽ Dibuja un triángulo de lados 4 cm, 5 cm y 6 cm, y traza sus alturas. ¿Cómo se llama el punto donde se cortan? Traza también sus medianas.

6 ▼▽▽ Si dibujas dos segmentos que sean perpendiculares en sus puntos medios y unes sus extremos, obtienes un cuadrilátero. ¿De qué tipo es?

Hazlo en tu cuaderno:

a) Para dos segmentos de distinta longitud.

b) Para dos segmentos de igual longitud.

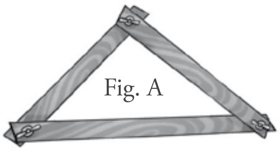
7 ▼▽▽ Dibuja dos segmentos que se corten en sus puntos medios y no sean perpendiculares. Une sus extremos y di qué tipo de cuadrilátero se obtiene:

a) Si los dos segmentos son de igual longitud.

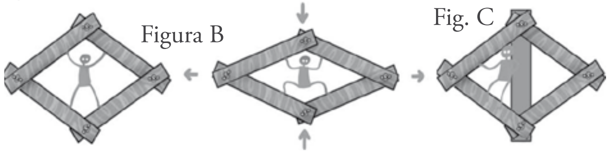
b) Si los dos segmentos son de distinta longitud.

8 ▼▽▽ Dibuja una circunferencia de 5 cm de radio y un triángulo cuyos lados sean: uno secante a la circunferencia, otro tangente y otro exterior.

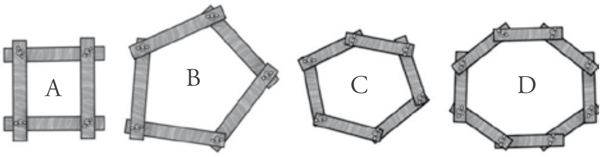
9 ▼▽▽ Uniendo listones de madera, mediante tornillos y palomillas, podemos construir distintos polígonos. Observa que el triángulo (Fig. A) es rígido, es decir, indeformable:



Sin embargo, el rombo (Fig. B) se puede deformar. Pero si le añadimos un listón (Fig. C), coincidiendo con una diagonal, se hace rígido. Es decir, lo hemos fijado:



a) ¿Cuántos listones necesitas para hacer indeformable cada una de estas figuras?



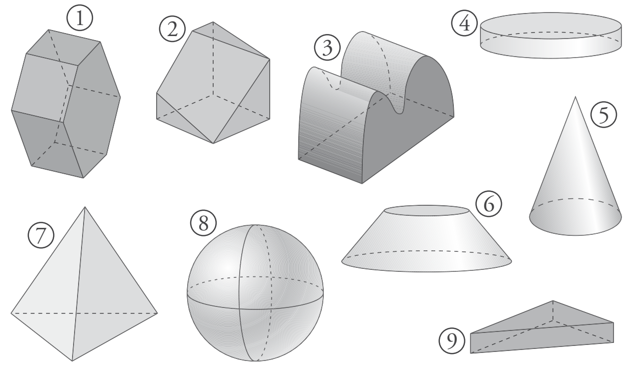
b) ¿Cuántos listones necesitas para hacer indeformable un polígono de *n* lados?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Cuerpos geométricos

10 ▼▽▽ Observa estos cuerpos:



a) ¿Cuáles son poliedros?
De ellos, nombra los prismas y la pirámide.

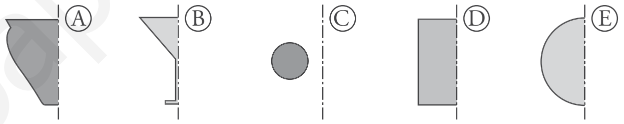
b) ¿Hay alguno que no sea prisma ni pirámide?

c) ¿Cuáles son cuerpos de revolución?
Nómbralos.

d) ¿Hay alguno que no sea poliedro ni cuerpo de revolución?

11 ▼▽▽ ¿Cuáles de las figuras siguientes son cuerpos de revolución? ¿De cuáles conoces el nombre?

12 ▼▽▽ Al girar cada una de las figuras siguientes en torno al eje que se indica se genera una figura de las del ejercicio anterior. Identifícala.



Autoevaluación

1 Identifica y nombra los cuadriláteros que:

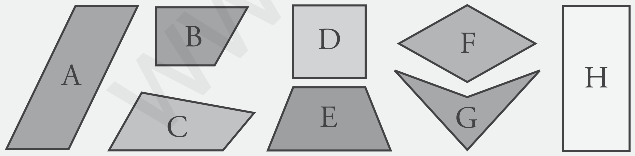
a) Tienen todos los ángulos iguales.

b) Tienen los lados opuestos paralelos.

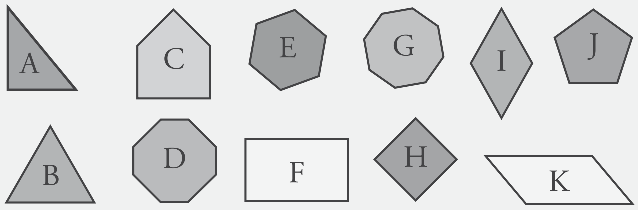
c) No tienen los lados opuestos paralelos.

d) Tienen los cuatro lados iguales.

e) Tienen solo dos lados paralelos.



2 Di qué polígonos son regulares y escribe sus nombres:

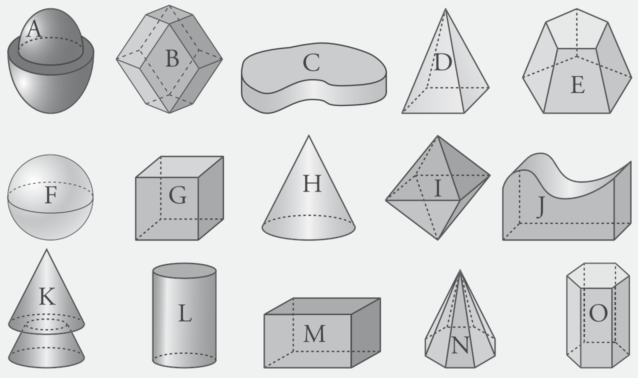


3 a) Dibuja dos circunferencias tangentes interiores.

b) Dibuja una recta tangente a las dos circunferencias.

c) Dibuja otra recta tangente a una circunferencia y secante a la otra.

4 De los siguientes cuerpos geométricos, determina cuáles son poliedros; cuáles, cuerpos de revolución, y cuáles, ninguno de los dos.
Pon nombre a los que conozcas.



13 Áreas y perímetros

Egipcios y babilonios demostraron una cierta destreza calculando áreas de polígonos y volúmenes de algunos cuerpos (a esto lo llamaban *cubatura de montones*). Para hallar las áreas de polígonos regulares, a partir de las longitudes de sus lados, utilizaban fórmulas obtenidas experimentalmente. Por ejemplo, los babilonios calculaban el área de un pentágono regular mulitplicando el cuadrado de su lado por 1 + 43/60, que es una buena aproximación.

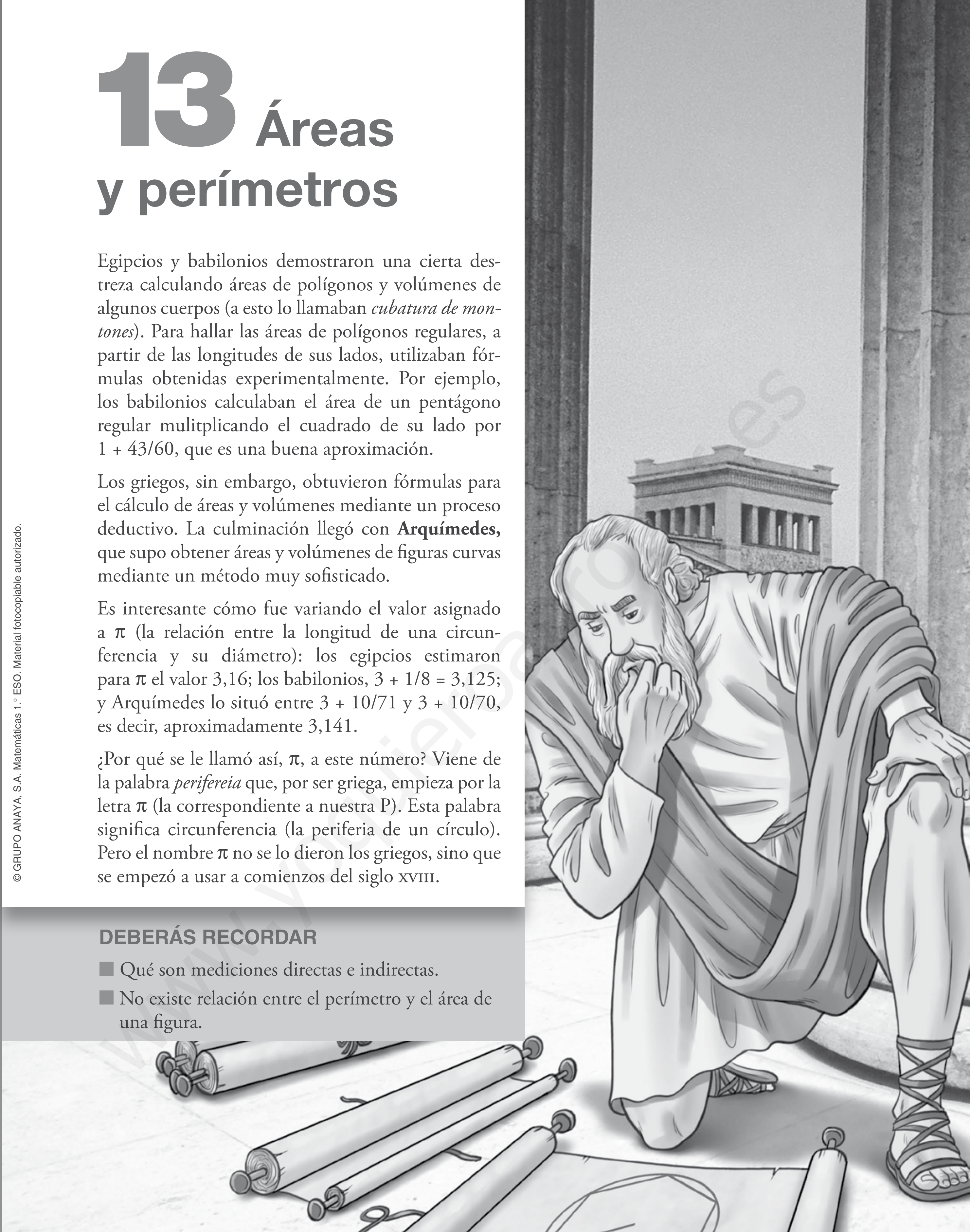
Los griegos, sin embargo, obtuvieron fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes mediante un proceso deductivo. La culminación llegó con **Arquímedes,** que supo obtener áreas y volúmenes de figuras curvas mediante un método muy sofisticado.

Es interesante cómo fue variando el valor asignado a π (la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro): los egipcios estimaron para π el valor 3,16; los babilonios, 3 + 1/8 = 3,125; y Arquímedes lo situó entre 3 + 10/71 y 3 + 10/70, es decir, aproximadamente 3,141.

¿Por qué se le llamó así, π, a este número? Viene de la palabra *perifereia* que, por ser griega, empieza por la letra π (la correspondiente a nuestra P). Esta palabra significa circunferencia (la periferia de un círculo). Pero el nombre π no se lo dieron los griegos, sino que se empezó a usar a comienzos del siglo XVIII.

DEBERÁS RECORDAR

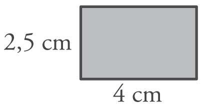
- Qué son mediciones directas e indirectas.
- No existe relación entre el perímetro y el área de una figura.



1 Medidas en los cuadriláteros

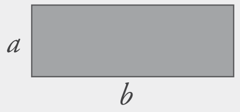
Cálculo mental

Di el área de este rectángulo:



Rectángulo

Tanto el área como el perímetro de un rectángulo son muy conocidos.

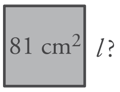


ÁREA $A = a \cdot b$

PERÍMETRO $P = 2a + 2b$

Cálculo mental

¿Cuál es el lado de este cuadrado cuya área conocemos?



Cuadrado

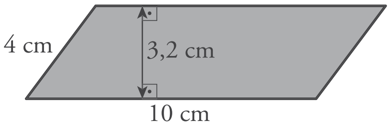
Un cuadrado es un rectángulo con todos los lados iguales. Por tanto:

ÁREA $A = l^2$

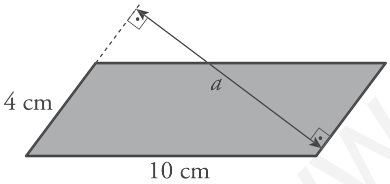
PERÍMETRO $P = 4l$

Cálculo mental

Halla el área de este paralelogramo:

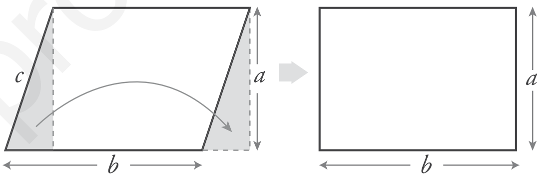


Y ahora, ya que conoces el área, ¿sabrías calcular la otra altura? Es decir, la distancia entre los otros dos lados.

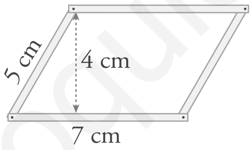


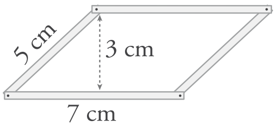
Paralelogramo cualquiera

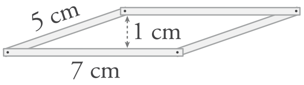
Al suprimir en el paralelogramo el triángulo de la izquierda y ponerlo a la derecha, se obtiene un rectángulo de dimensiones $a \times b$.



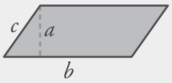
El perímetro, $P = 2b + 2c$, no guarda relación con el área. Hay muchos paralelogramos con el mismo perímetro, pero con distinta área:







PARALELOGRAMO DE LADOS b Y c Y ALTURA a



ÁREA $A = a \cdot b$

PERÍMETRO $P = 2b + 2c$

Actividades

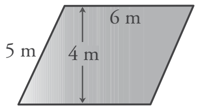
1 Calcula el perímetro y el área de una habitación rectangular de dimensiones 6,4 m y 3,5 m.

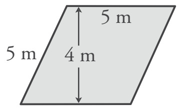
2 Mide las dimensiones de una página de este libro. ¿Cuántos metros cuadrados de papel se necesitan para hacer el libro completo, sin contar las tapas?

3 ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado de 225 cm^2 de área?

4 Halla la altura de un rectángulo de 47 m^2 de superficie y 4 m de base.

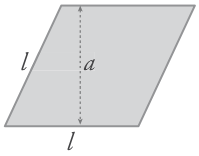
5 Halla el área y el perímetro de estos dos paralelogramos. Observa que, aunque el segundo es un rombo, su área se puede calcular como la de un paralelogramo cualquiera.





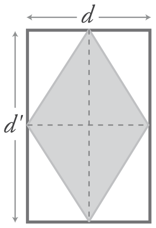
Rombo

Puesto que el rombo es un paralelogramo, su área se puede calcular como se ha descrito en el apartado anterior:



$A = l \cdot a$ (a es la distancia entre dos lados opuestos).

También se puede calcular conociendo sus diagonales.



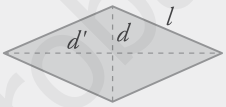
Área del rectángulo morado: $A_{\text{RECTÁNGULO}} = d \cdot d'$

Área del rombo: $A_{\text{ROMBO}} = \dfrac{A_{\text{RECTÁNGULO}}}{2}$

Cálculo mental

- Las diagonales de un rombo miden 6 cm y 10 cm. ¿Cuál es su área?
- La diagonal de un cuadrado mide 4 dm. ¿Cuál es su área?

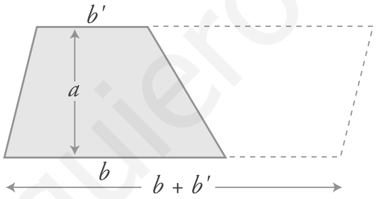
ROMBO DE LADO l
Y DIAGONALES d Y d'



ÁREA $A = \dfrac{d \cdot d'}{2}$

PERÍMETRO $P = 4l$

Trapecio



A los lados paralelos de un trapecio se les llama **bases** (b base mayor, b' base menor). A la distancia entre las bases se le llama altura, a.

Si a un trapecio le adosamos otro igual, se obtiene un paralelogramo de base $b + b'$ y altura a.

$$A_{\text{TRAPECIO}} = \frac{A_{\text{PARALELOGRAMO}}}{2} = \frac{(b + b') \cdot a}{2}$$

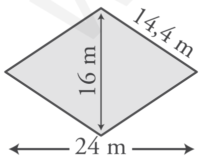
Cálculo mental

Las bases de un trapecio miden 13 cm y 7 cm. Su altura, 10 cm. ¿Cuál es su área?

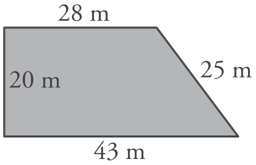
Actividades

6 Halla el área y el perímetro de las siguientes figuras:

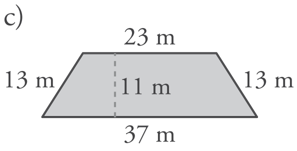
a)



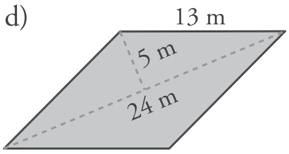
b)



c)



d)



7 Una parcela cuadrangular tiene dos lados paralelos de longitudes 37,5 m y 62,4 m. La distancia entre esos lados paralelos es 45 m.

¿Cuál es la superficie de la parcela?

8 Las diagonales de un rombo miden 37 cm y 52 cm.

Halla su área.

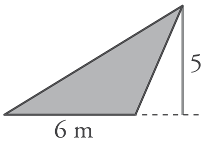
9 La diagonal de un cuadrado mide 15 cm.

Halla su área.

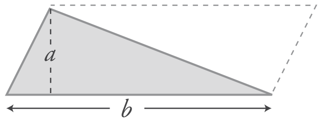
Área de un triángulo

Cálculo mental

Halla el área de este triángulo:



Observa: si a un triángulo le adosamos otro igual, se obtiene un paralelogramo. Por tanto, el área del triángulo es la mitad de la del paralelogramo.



$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{A_{\text{PARALELOGRAMO}}}{2} = \frac{b \cdot a}{2}$$

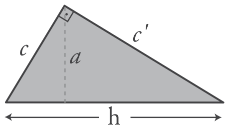
Si el **triángulo** es **rectángulo,** los dos catetos son perpendiculares. Tomando uno de ellos como base, el otro es la altura. Por tanto, el área se puede calcular de dos maneras:

Notación

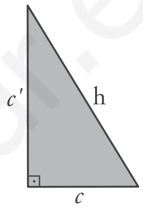
c y c' son los catetos.

h es la hipotenusa.

a es la altura sobre la hipotenusa.



$$A = \frac{\text{h} \cdot a}{2}$$

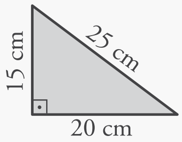


$$A = \frac{c \cdot c'}{2}$$

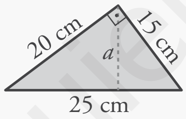
Ejercicios resueltos

1. Calcular el área del triángulo rectángulo de lados 15 cm, 20 cm y 25 cm. Calcular la altura sobre la hipotenusa.

1. Los dos catetos son los lados menores.



El área es, pues: $A = \frac{c \cdot c'}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150 \text{ cm}^2$



El área también se puede calcular así:

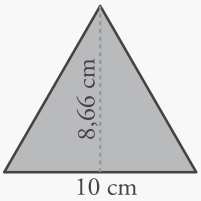
$$A = \frac{25 \cdot a}{2}$$

Como $A = 150 \rightarrow \frac{25 \cdot a}{2} = 150 \rightarrow 25 \cdot a = 300 \rightarrow a = \frac{300}{25} = 12 \text{ cm}$

La altura sobre la hipotenusa mide 12 cm.

2. Hallar el área de un triángulo equilátero de lado 10 cm y 8,66 cm de altura.

2.

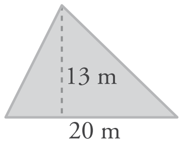


$$A = \frac{10 \cdot 8{,}66}{2} = 43{,}3 \text{ cm}^2$$

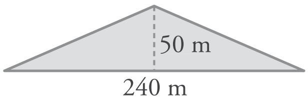
El área es 43,3 cm^2.

Actividades

1 Halla el área de una parcela triangular de la que conocemos un lado, 20 m, y su altura, 13 m.



2 Halla el área de este triángulo:



3 Halla el área de un triángulo equilátero de 40 m de lado y 34,64 m de altura.

4 De un triángulo rectángulo conocemos los tres lados: $c = 18$ cm, $c' = 24$ cm y h = 30 cm.

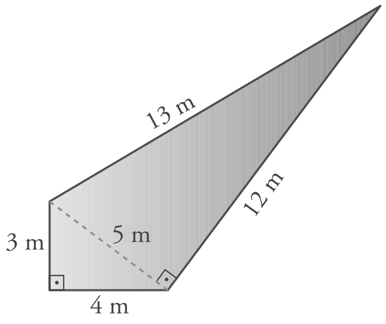
a) Calcula su área.

b) ¿Cuánto mide la altura sobre la hipotenusa?

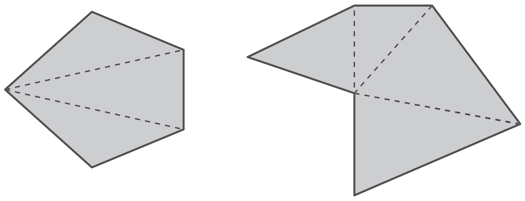
3 Medidas en los polígonos

Cálculo mental

Halla el área y el perímetro de este cuadrilátero irregular:



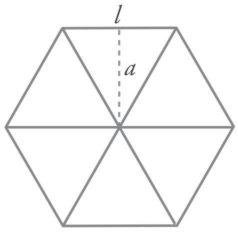
Para hallar el área de un polígono cualquiera, se descompone en triángulos y se calcula el área de cada uno de los triángulos.



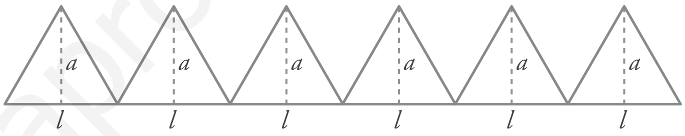
ÁREA DEL POLÍGONO =
= Suma de las áreas de
los triángulos

Sin embargo, para los polígonos regulares se puede proceder de forma más sencilla.

Área y perímetro de un polígono regular



Si el polígono es regular, se puede descomponer en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono.



Notación

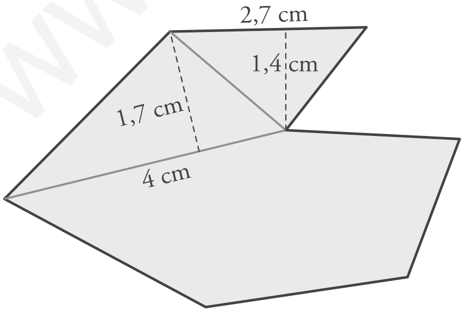
a es la apotema del polígono regular.

$$A = n \text{ veces } \frac{l \cdot a}{2} = \frac{Perímetro \cdot a}{2}$$

n es el número de lados y, por tanto, $n \cdot l = Perímetro$.

Actividades

1 Copia este polígono, continúa descomponiéndolo en triángulos y toma en ellos las medidas necesarias para calcular sus áreas. Halla, así, el área total.



2 El lado de un octógono regular mide 15 cm, y su apotema, 18 cm. Halla su área.

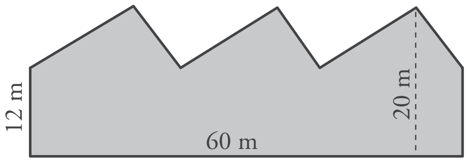
3 Recuerda que en el hexágono regular la longitud del lado es igual a la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

Dibuja un hexágono regular cuyo lado tenga una longitud $l = 4$ cm.

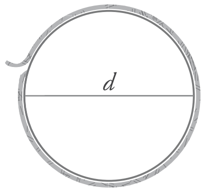
Comprueba que su apotema mide, aproximadamente, 3,5 cm.

Calcula su área.

4 Calcula el área de la siguiente figura:



4 Medidas en el círculo

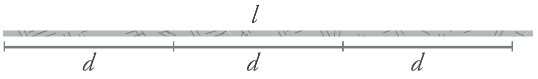


$l = \pi d = 2\pi r$

El número π (pi) vale, aproximadamente, 3,14 ó 3,1416.

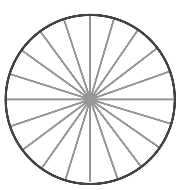
Perímetro del círculo

El perímetro de un círculo es la longitud de su circunferencia. Sabemos que la longitud de una circunferencia es algo más de tres veces su diámetro.

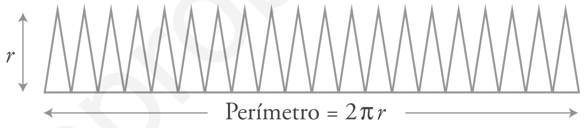


Longitud de la circunferencia = 3,14 veces su diámetro → $l = \pi d = 2\pi r$

Área del círculo



Descomponemos el círculo en muchos triángulos, como si fuera un polígono regular de muchos lados.



Si los sectores son muy finos, son prácticamente triángulos. Su altura es r.

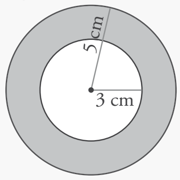
La suma de todas sus bases es el perímetro del círculo, $2\pi r$. Por tanto, su área es:

$$A = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

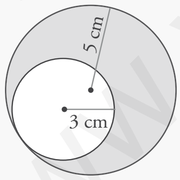
Ejercicio resuelto

Hallar el área y el perímetro de los recintos coloreados.

Ⓘ



Ⓘⓘ



I. Estas dos circunferencias se llaman **concéntricas,** porque tienen el mismo centro. La región comprendida entre ellas se llama **corona circular.** Su área es la diferencia de las áreas de los dos círculos.

$$A = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2 = 16\pi = 50{,}26 \text{ cm}^2$$

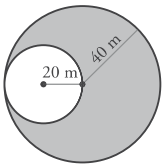
El perímetro del recinto es la suma de las longitudes de las dos circunferencias: $P = 2\pi \cdot 5 + 2\pi \cdot 3 = 16\pi = 50{,}26$ cm

Curiosamente, su área en centímetros cuadrados coincide con su perímetro en centímetros. Es, simplemente, una casualidad.

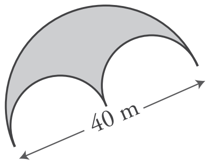
II. Aunque la forma sea distinta, tanto su área como su perímetro coinciden con los del recinto anterior.

Actividades

1 Halla la superficie y el perímetro del recinto marrón:



2 Calcula el perímetro y el área de esta figura:



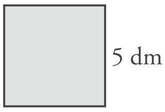
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

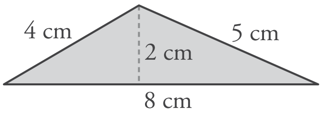
Áreas y perímetros de figuras sencillas

Halla el área y el perímetro de cada una de las figuras coloreadas en los siguientes ejercicios:

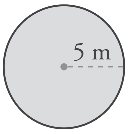
1 ▼▽▽ a)



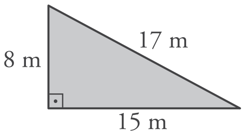
b)



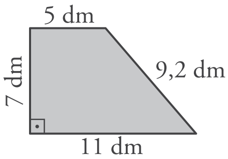
2 ▼▽▽ a)



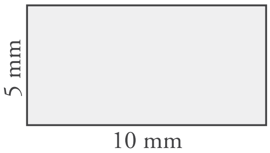
b)



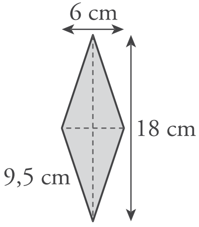
3 ▼▽▽ a)



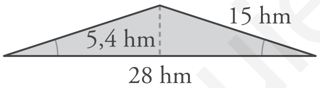
b)



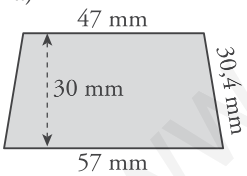
4 ▼▽▽ a)



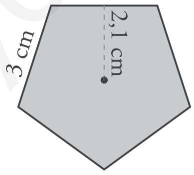
b)



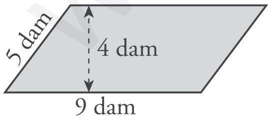
5 ▼▽▽ a)



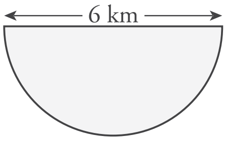
b)



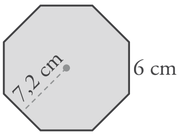
6 ▼▽▽ a)



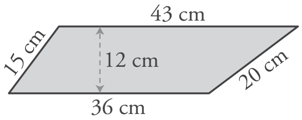
b)



7 ▼▽▽ a)



b)



8 ▼▽▽ Averigua cuánto mide la altura de un rectángulo de 40 m^2 de superficie y 5 m de base.

9 ▼▽▽ Halla el área de un trapecio cuyas bases miden 12 cm y 20 cm, y su altura, 10 cm.

10 ▼▽▽ Las bases de un trapecio isósceles miden 26 cm y 14 cm; la altura, 8 cm, y otro de sus lados, 10 cm. Calcula el perímetro y el área de la figura.

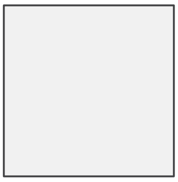
11 ▼▽▽ Los lados de un triángulo rectángulo miden 15 dm, 8 dm y 17 dm. Calcula su área y la altura sobre la hipotenusa.

12 ▼▽▽ Calcula el área y el perímetro de un hexágono regular de 6 mm de lado y 5,2 mm de apotema.

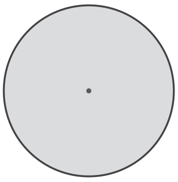
Medir y calcular áreas y perímetros

En cada una de las siguientes figuras coloreadas halla su área y su perímetro. Para ello, tendrás que medir algún elemento (lado, diagonal, radio…).

13 ▼▽▽ a)

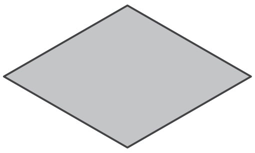


b)

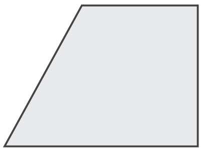


14 ▼▽▽ a)

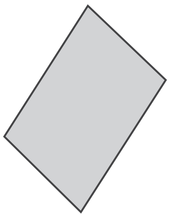
b)



15 ▼▽▽ a)



b)



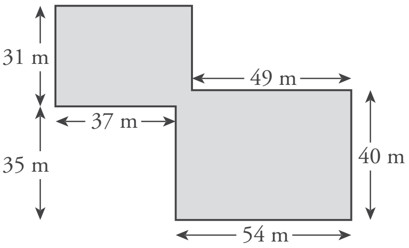
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

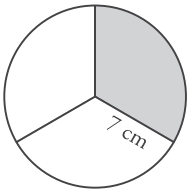
■ Áreas y perímetros menos sencillos

16 ▼▽▽ Calcula el área y el perímetro de las figuras coloreadas.

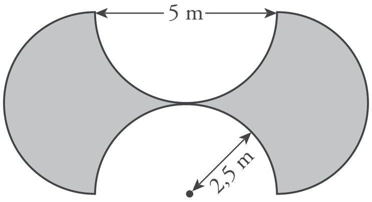
a)



b)

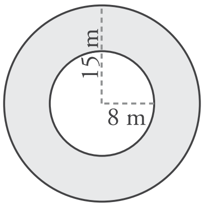


c)

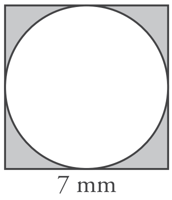


Halla el perímetro y el área de las figuras coloreadas en los siguientes ejercicios:

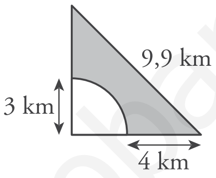
17 ▼▼▽ a)



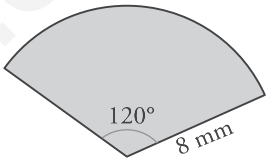
b)



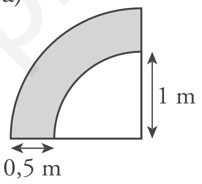
18 ▼▼▽ a)



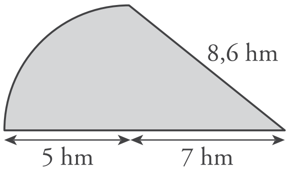
b)



19 ▼▼▽ a)



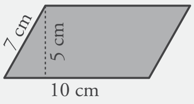
b)



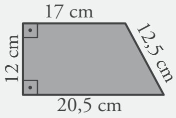
Autoevaluación

1 Calcula el área y el perímetro de cada una de las siguientes figuras:

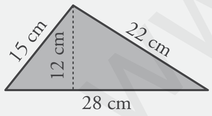
a)



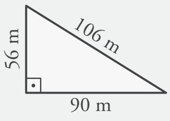
b)



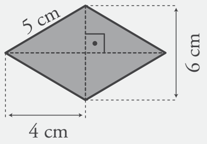
c)



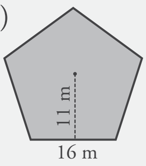
d)



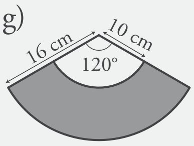
e)



f)

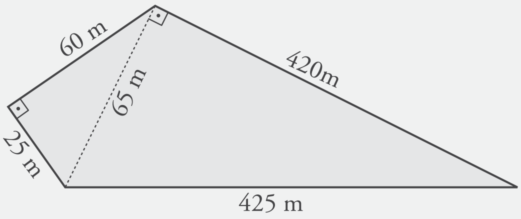


g)

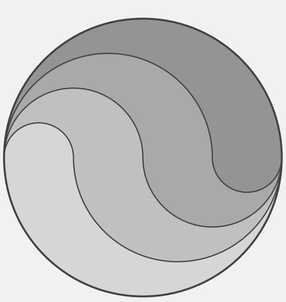


Ten en cuenta que 120° es la tercera parte de 360°.

2 Halla el área de este campo:



3 Halla el área y el perímetro de cada una de las cuatro parcelas de este jardín circular de 16 m de diámetro:

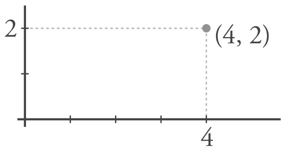


14 Tablas y gráficas

Seguramente, todos hemos jugado a los barquitos. Los barcos se colocan en un tablero cuadriculado y a cada cuadrito se le designa por la fila y la columna en que se encuentra.

En el ajedrez, las jugadas se anotan del mismo modo: primero, la pieza que se mueve y, después, la casilla a la que se dirige. Y esa casilla se designa mediante la fila y la columna que ocupa.

Un método parecido ha sido una de las grandes ideas matemáticas de la historia. En el siglo XVII, el filósofo y matemático francés **Descartes** decidió designar cada punto del plano mediante dos números:



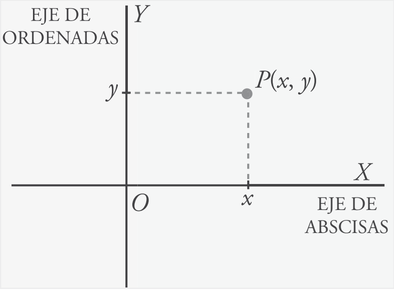
Esta idea, que parece tan sencilla, permitió tratar la geometría con herramientas de la aritmética y del álgebra, lo que simplificó mucho las cosas a los matemáticos.

Los dos números que describen cada punto se llaman sus coordenadas cartesianas. En aquella época los científicos escribían en latín, por lo que Descartes firmaba *Cartesius.* De este modo, todo lo relativo a Descartes se denomina *cartesiano.*

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se representan puntos en la recta numérica.
- En qué consiste el proceso estadístico.

Coordenadas cartesianas



En un sistema de ejes cartesianos:

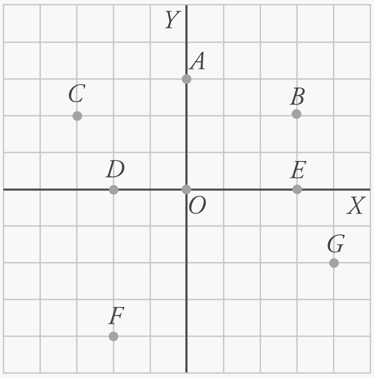
- El eje horizontal se llama eje X o **eje de abscisas.**
- El eje vertical se llama eje Y o **eje de ordenadas.**
- El punto O, donde se cortan los dos ejes, es el **origen de coordenadas.**

Cada punto del plano se designa por sus dos coordenadas:

- La primera coordenada se llama “x del punto” o **abscisa.**
- La segunda coordenada se llama “y del punto” u **ordenada.**

Ejercicio resuelto

Determinar la abscisa y la ordenada de los siguientes puntos:



Los **puntos que están en el eje Y** tienen su abscisa igual a 0:

$A(0, 3)$

Los que están a la derecha del eje Y tienen su abscisa positiva, $B(3, 2)$, y los que están a la izquierda tienen su abscisa negativa, $C(-3, 2)$.

La ordenada de los **puntos que están en el eje X** es 0:

$D(-2, 0)$, $E(3, 0)$

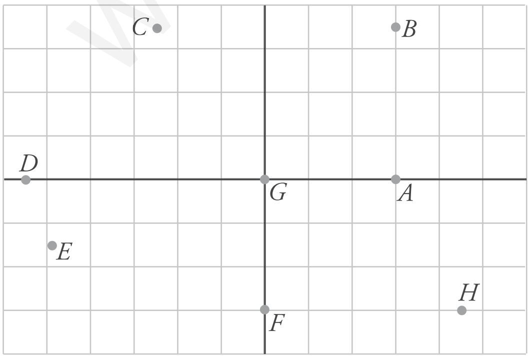
Los que están por encima del eje X tienen su ordenada positiva, $B(3, 2)$, $C(-3, 2)$, y los que están bajo el eje X tienen su ordenada negativa:

$F(-2, -4)$, $G(4, -2)$

Actividades

1 Representa el punto $P(3, 5)$ y otro punto Q cuyas abscisa y ordenada sean las mismas de P pero cambiadas de orden.

2 Da las coordenadas de los siguientes puntos:



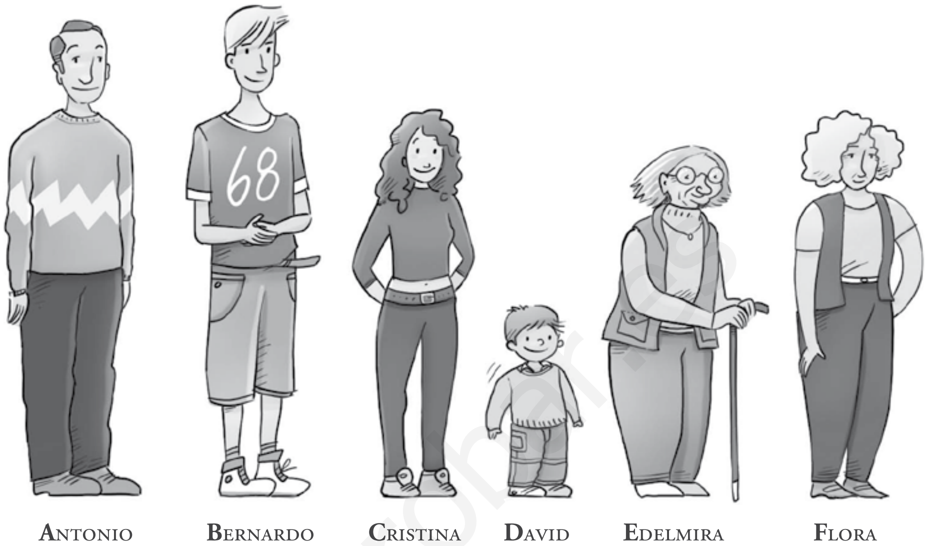
3 Representa estos puntos. Une cada uno de ellos con el siguiente y el último con el primero.

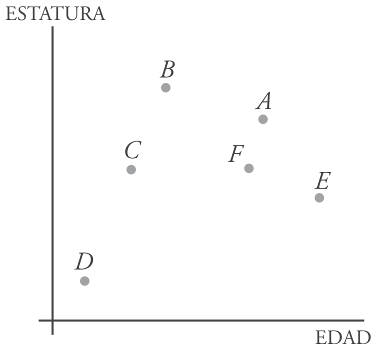
$A(3, 1)$, $B(9, 1)$, $C(9, 5)$, $D(11, 5)$, $E(8, 7)$, $F(4, 7)$, $G(1, 5)$, $H(3, 5)$.

Dibújale a la casa una puerta rectangular y escribe las coordenadas de sus vértices.

2 Información mediante puntos

Observa a los miembros de esta familia:





En el diagrama cartesiano que hay en el margen, cada uno de ellos está representado mediante un punto. Sus coordenadas son la EDAD y la ESTATURA.

Como el hijo mayor, Bernardo, es el más alto, el punto que lo representa, el B, es el que tiene mayor ordenada. Su edad, sin embargo, es la tercera (solo supera a $D \rightarrow$ David y, un poco, a $C \rightarrow$ Cristina).

Cristina y Flora tienen la misma estatura: los puntos C y F tienen la misma ordenada. Sin embargo, la edad de F (abscisa) es mucho mayor que la de C.

David, el hijo pequeño, es el menor tanto en estatura como en edad. Por eso, su punto, el D, es el que está más cerca de los dos ejes.

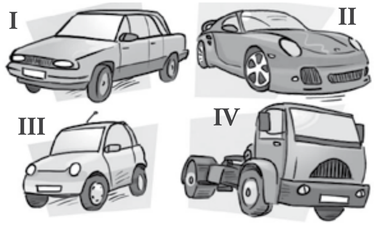
Para interpretar los puntos de un diagrama cartesiano en el que se refleja una situación real, es fundamental atender al significado de cada uno de los dos ejes coordenados.

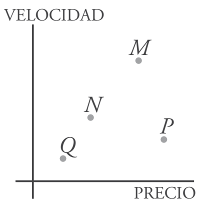
Actividades

1 Asigna una edad (en años) y una estatura (en centímetros), aproximadamente, a cada uno de los seis miembros de la familia anterior. Di cuáles son las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E y F.

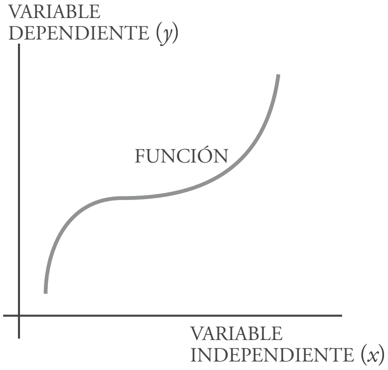
2 Realiza una gráfica de las mismas características, EDAD en el eje X y ESTATURA en el eje Y, con los miembros de alguna familia que conozcas.

3 Asigna un punto (M, N, P o Q) a cada uno de los vehículos siguientes:





3 Interpretación de gráficas



Las gráficas describen relaciones entre dos variables.

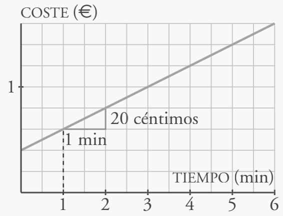
La variable que se representa en el eje horizontal se llama "variable x" o "variable **independiente**"**.** La que se representa en el eje vertical, "variable y" o "variable **dependiente**"**.**

La variable y **es función** de la variable x.

Para interpretar una gráfica, hemos de mirarla de izquierda a derecha, observando cómo varía la variable dependiente, y, al aumentar la variable independiente, x.

Ejercicios resueltos

1. El coste de las llamadas telefónicas viene dado por la siguiente gráfica. Descríbela.



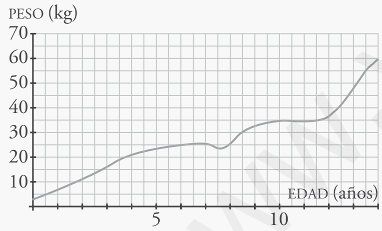
1. La variable independiente, x, nos da el TIEMPO en minutos de cada llamada. Cada 2 cuadritos es 1 minuto.

La variable dependiente, y, es el COSTE en euros de cada llamada. Cada 5 cuadritos es 1 €. Por tanto, 1 cuadrito equivale a 20 céntimos.

La cuota de establecimiento de llamada es de 40 céntimos (dos cuadritos en el eje Y), pues aunque la llamada no dure nada, eso (40 céntimos) es lo que hay que pagar.

Cada minuto de conexión, la llamada cuesta 20 céntimos más.

2. La siguiente gráfica muestra el peso de Ramón desde que nació hasta ahora. Describirla con palabras:



2. La variable x da la edad en años de Ramón. Cada 2 cuadritos son 1 año.

La variable y da su peso en kilogramos. Cada 2 cuadritos son 10 kg.

Ramón ha ido ganando peso con la edad.

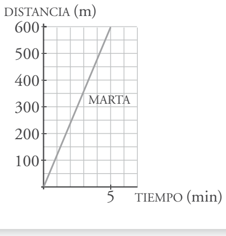
A los 7 años, pesaba algo más de 25 kg. Estuvo algo desmejorado y perdió peso, pero se recuperó en menos de 1 año.

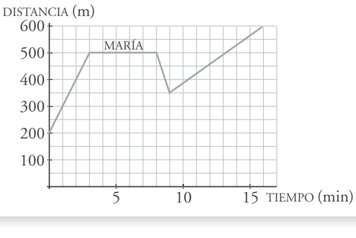
Su peso se estabilizó entre los 10 y los 11 años y medio (35 kg). Pero ahí dio el estirón. Creció mucho y aumentó su peso.

Ahora, con 14 años, pesa 60 kg.

Actividades

1 Estos son los recorridos de Marta y María para ir de sus casas al colegio:





Describe cada uno de los dos desplazamientos. Di cuáles son las variables, a qué distancia del colegio se encuentra la casa de cada una de ellas y cuánto tarda cada una desde su casa al colegio.

4 Distribuciones estadísticas

Se ha realizado una encuesta a un grupo de 9 amigos.

1.ª PREGUNTA: *¿Cuántos hermanos o hermanas tienes?*

RESPUESTAS: 1, 3, 2, 0, 1, 3, 4, 2, 3

2.ª PREGUNTA: *¿En qué estación del año es tu cumpleaños?*

(PRIMAVERA, P; VERANO, V; OTOÑO, O; INVIERNO, I).

RESPUESTAS: P, V, V, I, V, P, O, I, O

El **número de hermanos** es una **variable estadística cuantitativa,** pues toma valores numéricos: 0, 1, 2, 3, 4 ó 5.

La **estación en que es el cumpleaños** es una **variable estadística cualitativa,** pues los valores que toma son no numéricos: PRIMAVERA, VERANO, OTOÑO e INVIERNO.

Una variable estadística se llama **cuantitativa** cuando toma valores numéricos, y **cualitativa,** cuando toma valores no numéricos.

Tipos de variables

Di si es cualitativa o cuantitativa cada una de las variables siguientes:

— Deporte preferido.

— Número de calzado.

— Estatura.

— Estudios que quieres seguir.

— Nota de matemáticas en el último examen.

Las respuestas a cada una de las dos preguntas forman una **distribución estadística.** La primera es una distribución con variable cuantitativa, y la segunda, con variable cualitativa.

Tablas de frecuencias

Las dos preguntas anteriores se les han hecho a los 36 alumnos de una clase.

Resultados:

N.º DE HERMANOS	FRECUENCIA
0	4
1	16
2	9
3	6
4	1
5	0

ESTACIÓN CUMPLEAÑOS	FRECUENCIA
PRIMAVERA	8
VERANO	6
OTOÑO	9
INVIERNO	13

Estas formas de dar los datos se llaman **tablas de frecuencias.** En la primera de ellas, la frecuencia de “3 hermanos” es 6. Lo expresamos así: $f(3) = 6$. Se lee así: “frecuencia del 3 es 6”. Análogamente, $f(4) = 1$.

Y en la segunda tabla, $f(\text{PRIMAVERA}) = 8$.

- El *número de veces* que se repite cada valor de la variable se llama **frecuencia** de ese valor. También se llama su **frecuencia absoluta.**
- La *proporción de veces* de cada valor se llama su **frecuencia relativa.** Es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de individuos.

Frecuencias absoluta y relativa

Hay 4 chicos que son hijos únicos, pues la **frecuencia** de 0 es 4.

La **frecuencia** de 1 es 16. Significa que 16 chicos de la clase solo tienen un hermano o hermana.

$$f(0) = 4; \; f(1) = 16$$

Las correspondientes **frecuencias relativas** son:

$$f_r(0) = \frac{4}{36}; \; f_r(1) = \frac{16}{36}$$

Actividades

1 Di la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de los 6 valores de la variable de la primera tabla.

2 Di la frecuencia absoluta y la relativa de los cuatro valores de la variable (P, V, O, I) de la segunda tabla.

5 Parámetros estadísticos

Media

La media de varias cantidades es la suma de todos los valores dividida por el número de ellos que hay.

MEDIA

Para resumir los resultados de la distribución estadística siguiente,

NÚMERO DE HERMANOS: 1, 3, 2, 0, 1, 3, 4, 2, 3

utilizamos la **media** o promedio: se halla sumando los datos y dividiéndolos por el número de ellos.

$$\text{MEDIA} = \frac{1 + 3 + 2 + 0 + 1 + 3 + 4 + 2 + 3}{9} = \frac{19}{9} = 2{,}11$$

La media de esas 9 cantidades es 2,11.

Mediana

Se llama mediana de un conjunto de datos numéricos ordenados al que ocupa el valor central. Si hay un número par de datos, es el promedio de los dos centrales.

MEDIANA

Para hallar la **mediana** de la distribución anterior, ordenamos los datos de menor a mayor, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4. La mediana es la de en medio:

MEDIANA = 2

Moda

La moda es el dato con mayor frecuencia.

MODA

En una distribución estadística, se llama **moda** al dato que aparece más veces; es decir, el que tiene mayor frecuencia. En la distribución anterior, MODA = 3.

Se puede obtener la moda de una variable sea esta cualitativa o cuantitativa. Por ejemplo, en la distribución siguiente,

ESTACIÓN DEL CUMPLEAÑOS: P, V, V, I, V, P, O, I, O

la moda es V, porque está 3 veces y las demás están menos de 3 veces.

Ejercicios resueltos

1. **Hallar la media, la mediana y la moda de la siguiente distribución:**

   4, 6, 8, 8, 9, 10, 10, 10

2. **Hallar la media, la mediana y la moda de esta distribución:**

   I, V, P, O, V, O, P, P, I, V, P

1. • $\text{MEDIA} = \frac{4 + 6 + 8 + 8 + 9 + 10 + 10 + 10}{8} = 8{,}125$

   • Los valores están ordenados. Los dos datos centrales son 8 y 9. Por tanto, la mediana es el promedio de ellos: MEDIANA = 8,5.

   • El valor que está más veces es el 10: MODA = 10.

2. Cuando la variable es cualitativa, no se pueden hallar ni la media ni la mediana. La moda es P.

   MODA = P (primavera)

Actividades

1 Estos son los resultados al tirar 10 veces un dado:

1, 5, 3, 1, 2, 6, 4, 1, 4, 3

a) La variable, ¿es cualitativa o cuantitativa?

b) Halla la media, la mediana y la moda.

2 Estos son los deportes preferidos por 10 alumnos (F: fútbol, BC: baloncesto, T: tenis, BM: balonmano):

BC, F, F, F, BM, F, BC, T, T, F

a) La variable, ¿es cualitativa o cuantitativa?

b) Di cuál es la moda.

6 Gráficos estadísticos

Las representaciones gráficas sirven para captar, de un solo golpe de vista, las características más sobresalientes de una distribución de datos.

Hay muchos tipos de representaciones gráficas. Vamos a ver las de uso más frecuente.

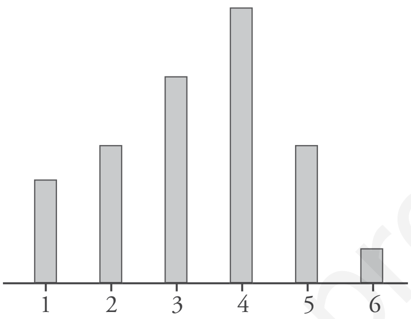
Impotante

Las tablas de datos estadísticos y las representaciones gráficas son lenguajes, formas de dar información sumamente eficaces, pues lo que se dice mediante ellas "entra por los ojos".

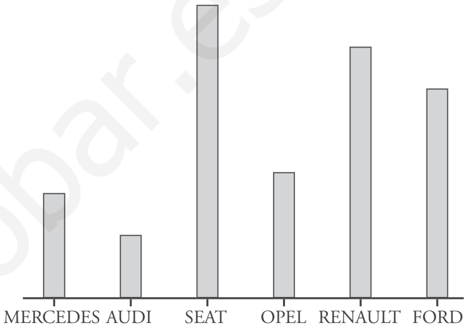
Procura mirar con atención las gráficas y las tablas para captar todo lo que te "dicen".

Diagrama de barras

N.º DE VECES QUE SE ECHA GASOLINA, EN UN MES, A 50 COCHES.



MARCA DE LOS PRIMEROS 50 COCHES VISTOS UN CIERTO DÍA.

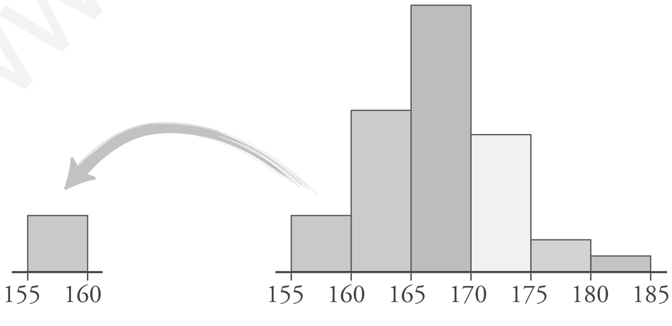


El **diagrama de barras** está formado por barras finas. Sirve para representar tablas de frecuencias de variables cualitativas, o bien cuantitativas que tomen pocos valores. Las alturas de las barras son proporcionales a las frecuencias correspondientes.

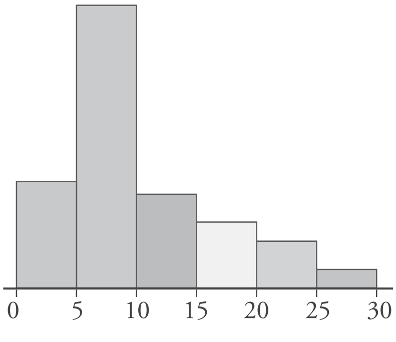
Histograma

ESTATURAS DE LAS ALUMNAS Y LOS ALUMNOS DE UNA CLASE.

Todos los alumnos cuyas alturas estén comprendidas entre 155 cm y 160 cm.



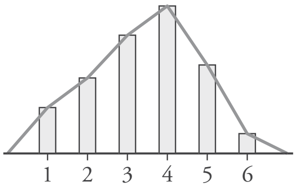
NÚMERO DE FALTAS DE ORTOGRAFÍA COMETIDAS POR LAS ALUMNAS Y LOS ALUMNOS EN UN DICTADO.



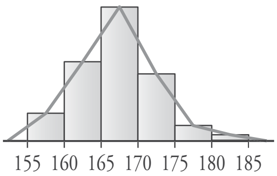
El **histograma** está formado por rectángulos anchos que se adosan unos a otros. Sirve para representar variables cuantitativas que tomen muchos valores diferentes. Las áreas de las barras son proporcionales a las frecuencias correspondientes.

Polígono de frecuencias

N.º DE VECES QUE SE ECHA GASOLINA, EN UN MES, A 50 COCHES.



ESTATURAS DE LAS ALUMNAS Y LOS ALUMNOS DE UNA CLASE.

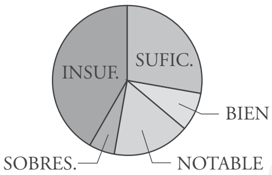


El **polígono de frecuencias** se utiliza para representar variables cuantitativas. Se construye uniendo los extremos de las barras o los puntos medios de los rectángulos de un histograma.

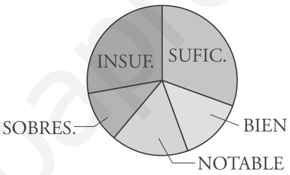
Diagrama de sectores

Las notas de los alumnos y las alumnas de un curso, en una cierta asignatura, durante las tres evaluaciones del año, han sido:

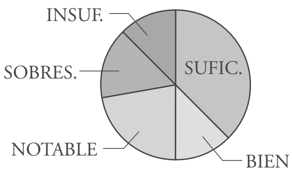
PRIMERA EVALUACIÓN



SEGUNDA EVALUACIÓN



TERCERA EVALUACIÓN



Utilidad

Los diagramas de sectores son muy útiles para ver la evolución de una misma variable.

Por ejemplo, podemos ver que en la asignatura a la que se refieren los gráficos de la derecha se ha ido progresando a lo largo del curso.

El **diagrama de sectores** sirve para representar variables de cualquier tipo. Cada sector representa un valor de la variable. El ángulo de cada sector es proporcional a la frecuencia correspondiente.

Actividades

1 Los deportes preferidos por 40 chicas y chicos entrevistados son:

DEPORTE	FRECUENCIA
Baloncesto	10
Balonvolea	1
Fútbol	20
Tenis	5
Ajedrez	4

Para representar estos datos en un diagrama de sectores, repartimos los 360° del círculo entre 40.

A cada individuo le corresponden 9°.

Halla el ángulo del sector que corresponde a cada deporte y realiza el diagrama completo.

2 Representa en un diagrama de barras la distribución del número de asignaturas suspendidas por los alumnos y las alumnas de un curso:

N.º DE SUSPENSOS	FRECUENCIA
0	6
1	12
2	8
3	5
4	3
5	1
6	1

Complétalo con un polígono de frecuencias.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Representación de puntos

1 ▼▽▽ Representa los siguientes puntos:

a) $A(3, 2)$, $B(5, 1)$, $C(0, 2)$, $D(5, 5)$, $E(3, 0)$.

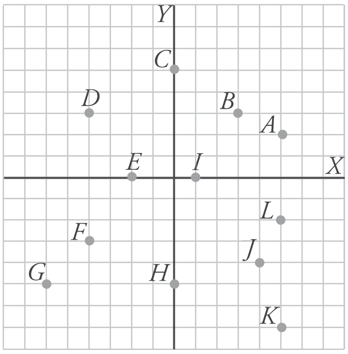
b) $A(-3, 5)$, $B(0, -6)$, $C(-1, -3)$, $D(3, 4)$.

c) $A(3; 0{,}5)$, $B(2; -2{,}5)$, $C(0; 3{,}5)$, $D(-3{,}5; -4{,}5)$.

2 ▼▽▽ Une cada punto con el siguiente:

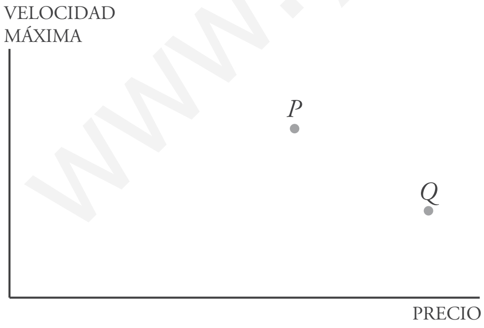
$A(2, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, 3)$, $D(3, 5)$, $E(6, 5)$, $F(6, 3)$, $G(7, 3)$, $H(7, 1)$, $I(5, 1)$, $J(5, 2)$, $K(4{,}5; 3)$, $L(4, 2)$, $M(4, 1)$, $A(2, 1)$

3 ▼▽▽ Escribe las coordenadas de estos puntos:



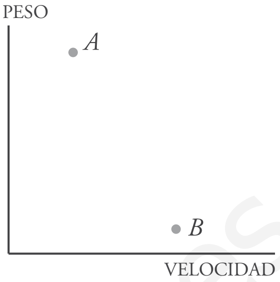
Información mediante puntos

4 ▼▽▽ Los puntos P y Q representan dos coches; uno de Antonio y otro de Bárbara. Di cuál es de cada uno sabiendo que el coche de Antonio es más caro que el de Bárbara, pero el de esta corre más.



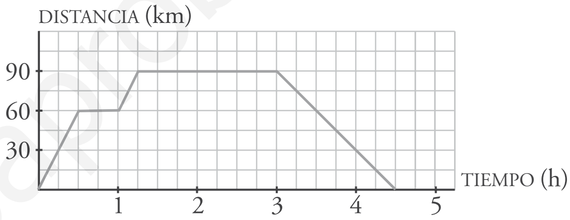
Sitúa sobre el diagrama un punto, C, que represente el coche de Carlos, más barato y menos veloz que el de Antonio y Bárbara. Y otro punto, D, para el de Damián, el más veloz de todos y casi tan caro como el de Antonio.

5 ▼▽▽ Determina cuál de los puntos de esta gráfica corresponde al galgo y cuál al elefante:



Interpretación de gráficas de funciones

6 ▼▽▽ Observa el siguiente viaje en coche:



a) ¿Cuántos kilómetros recorre en la primera media hora?

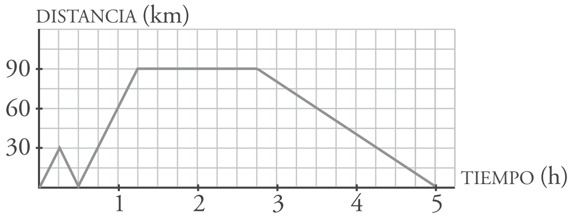
b) ¿Cuánto tiempo permanece parado en total?

c) ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra el lugar de la primera parada?

¿Y el de la segunda parada?

d) Describe paso a paso el viaje.

7 ▼▽▽ Observa este otro viaje en coche al mismo lugar que el del ejercicio anterior:



a) ¿A qué distancia da la vuelta en la primera hora?

b) ¿En qué lugar se para? ¿Cuánto dura la parada?

c) ¿Cuánto tiempo estuvo el coche en marcha?

d) ¿Qué le ocurrió en la primera media hora?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Estadística

8 ▼▽▽ Di si cada una de las siguientes variables estadísticas es cuantitativa o cualitativa:

a) Deporte preferido.

b) Número de calzado.

c) Estudios que se desean realizar.

d) Nota de Matemáticas en el último examen.

e) Cantidad de libros leídos en el último mes por los alumnos de tu clase.

9 ▼▽▽ A los estudiantes de un curso se les pregunta por el tipo de carrera que van a estudiar. Estas son las respuestas:

Ingeniería	6
Medicina	4
Ciencias	6
Derecho	3
Letras	8
Informática	6
Otras	7

a) Representa estos datos en un diagrama de barras.

b) ¿Cuál es la moda?

c) ¿Por qué esta distribución no tiene ni media ni mediana?

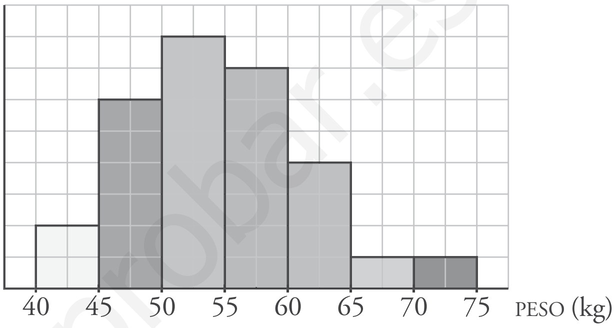
10 ▼▽▽ Calcula la media, la mediana y la moda de cada uno de estos conjuntos de datos:

a) 2, 4, 4, 41, 17, 13, 24

b) 1, 3, 5, 4, 2, 8, 9, 6, 10, 6

c) 1, 3, 8, 9, 4, 1, 1, 7, 10, 10

11 ▼▼▽ El peso de los alumnos de una clase viene reflejado en el siguiente histograma:



Hay un solo alumno que pesa más de 70 kg.

a) ¿De qué color es la barra donde se ubica un alumno de 57 kg?

b) ¿Cuántos alumnos pesan entre 60 kg y 65 kg?

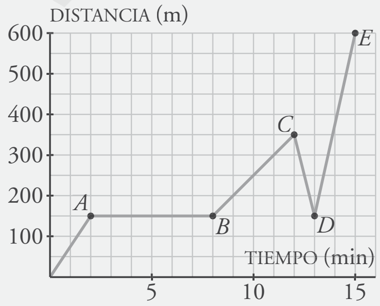
c) ¿Cuántos alumnos pesan más de 50 kg?

d) ¿Cuántos alumnos hay en clase?

Autoevaluación

1 Representa los puntos $A(0,5; -2)$, $B(-3, 1)$, $C(1/2, 2)$ y $D(-2, -2)$, en unos ejes coordenados.

2 Íker va al colegio. La siguiente gráfica describe su recorrido. Explica con palabras una posible interpretación de lo que le ha ocurrido durante el trayecto:



3 El número de tíos y tías que tienen los componentes de un grupo de montaña son los siguientes:

3	2	0	1	3	2	4
0	5	1	3	5	3	5
2	4	7	6	1	2	3

a) Construye una tabla de frecuencias.

b) ¿Cuántas personas componen el grupo?

c) Construye un polígono de frecuencias.

4 El número de preguntas falladas en el examen teórico de conducir de un grupo de 20 personas es:

0	2	3	1	0	1	1	2	3	2
3	2	4	0	2	2	0	2	1	1

Halla la media, la mediana y la moda.