5

Ángulos y medidas sexagesimales

En la información meteorológica proporcionada por la televisión un día concreto, se puede observar que en distintas localidades soplan vientos diferentes: del noreste (NE), del este (E), del sudoeste (SO) y del noroeste (NO).

Las principales direcciones del viento en meteorología son cuatro y en cada dirección se diferencian los dos sentidos posibles. Por ejemplo, el viento del N y el viento del S soplan en la misma dirección pero en sentido contrario. Lo mismo sucede con el viento del E y el del O.

Estas direcciones vienen dadas por la rosa de los vientos, en la que están marcadas —además de las direcciones NS y EO— dos direcciones intermedias, como puedes observar en la fotografía. Cada dos direcciones consecutivas forman un ángulo de 45°.

Contenidos

Aprenderás a:

Definir el concepto de ángulo como región del plano y como giro.

Operar gráficamente con ángulos y dibujar la bisectriz de un ángulo, utilizando correctamente el compás.

Conocer las aplicaciones del transportador de ángulos y saber utilizarlo correctamente.

Clasificar los ángulos según varios criterios.

Conocer algunos casos de igualdad de ángulos.

Conocer y relacionar las unidades de medida de ángulos y las de tiempo.

Utilizar la calculadora científica para expresar una medida sexagesimal de forma compleja a incompleja y viceversa.

¿Recuerdas?

1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
   - Un punto *P* divide una recta *r* en dos semirrectas.
   - Una recta *r* divide el plano en dos regiones que se denominan semiplanos.
   - Dos rectas secantes dividen el plano en dos semiplanos.

2. ¿Qué ángulo forman las manecillas del reloj a las seis de la tarde?

3. ¿Cuántos segundos hay en una hora?

4. Si son las seis y media de la tarde, ¿qué hora marcará un reloj digital?

5. Dibuja un ángulo agudo, uno obtuso, uno recto y uno plano.

Competencias básicas

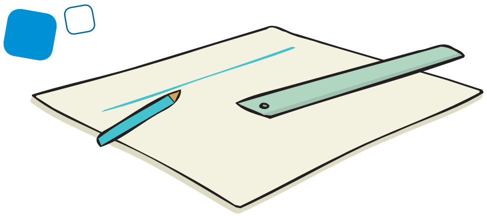
En esta unidad trabajaremos las siguientes competencias, aparte de la matemática:

3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.

4. Tratamiento de la información y competencia digital.

6. Competencia cultural y artística.

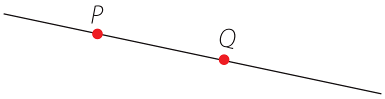
1. Elementos del plano



¿Te parece que una hoja de papel sobre una mesa se puede considerar la representación de un plano?

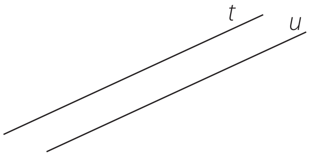
No, solo es una pequeña parte de un **plano.** En realidad, el plano no lo podemos materializar entero. Por este motivo consideramos solo una parte del plano, y en esta parte podemos dibujar diferentes elementos que lo caracterizan.

Dados dos puntos *P* y *Q* solo existe una recta que pase por los dos.

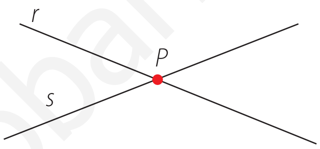


Utilizando una regla, podemos dibujar un trozo de **recta.** Hay que tener en cuenta que esta se podría prolongar indefinidamente en los dos sentidos.

Si dibujamos dos rectas sobre un mismo plano, puede que sean paralelas o que sean secantes, dependiendo de los puntos que tengan en común.

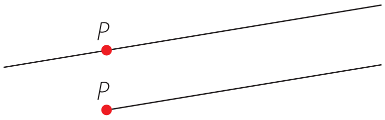


Paralelas

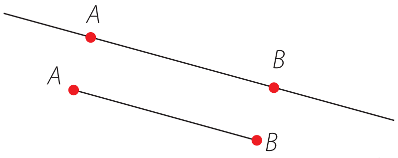


Secantes

> Dos rectas son **paralelas** si no tienen ningún punto en común.
>
> Dos rectas son **secantes** si tienen un único punto en común, *P*, que se denomina punto de intersección de las dos rectas.

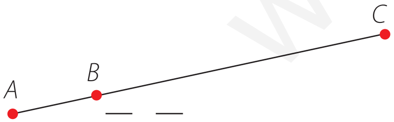


Si fijamos un punto *P* en una recta, nos queda dividida en dos trozos; cada uno de estos trozos es una semirrecta. Una semirrecta tiene un origen, el punto *P*, pero no tiene final.



Si consideramos dos puntos de una misma recta, tenemos un segmento. Los puntos *A* y *B* de la recta de la figura son los extremos del segmento *AB*, que se representa por $\overline{AB}$.

> Un **segmento** $\overline{AB}$ es el trozo de recta limitado por dos puntos, *A* y *B*, denominados extremos.



$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son consecutivos

Los segmentos que tienen un extremo en común se denominan **consecutivos.**

Los puntos y las rectas son los elementos básicos del plano a partir de los que obtenemos las semirrectas y los segmentos. Estos nuevos elementos nos permitirán descubrir otros.

Actividades propuestas

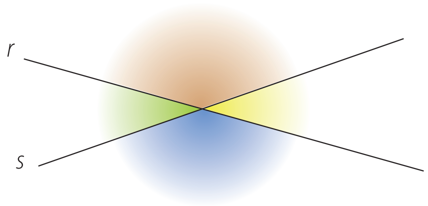
1. Dibuja una recta y señala en ella dos puntos *A* y *B*. ¿Qué elementos determinan estos dos puntos sobre la recta?

2. Utiliza la escuadra y el cartabón para dibujar rectas paralelas a una recta determinada. Haz deslizar la escuadra sobre el cartabón. También puedes realizarlo con una regla y una escuadra o cartabón.

2. El ángulo como región del plano

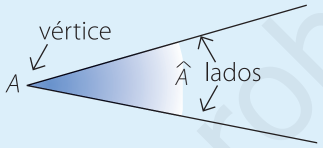
Este mapa corresponde a una zona determinada de la ciudad de Valencia. ¿Qué elementos del plano identificas en este mapa?

Puedes observar calles que se cortan entre sí formando diferentes ángulos.



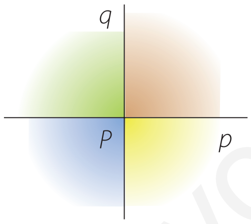
Las rectas *r* y *s* de la figura son rectas secantes, y dividen el plano en cuatro regiones. Cada una de estas cuatro regiones es un **ángulo.**

Un ángulo es la región del plano determinada por dos semirrectas con el mismo origen. Este origen común, el punto *A*, es el **vértice** del ángulo. Las dos semirrectas son los **lados** del ángulo.

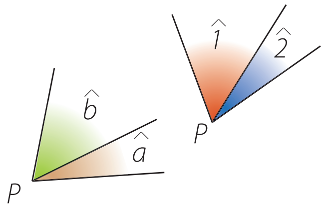


Habitualmente un ángulo se designa con la letra de su vértice. El ángulo de la figura es el ángulo $\hat{A}$.

Si dos rectas secantes forman cuatro ángulos iguales, las rectas se denominan **perpendiculares,** y cada uno de los ángulos es un ángulo **recto.**

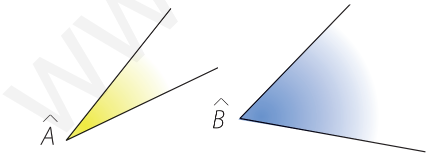


En caso de que tengamos más de un ángulo con el mismo vértice, utilizamos letras minúsculas o números para que quede claro a qué ángulo nos referimos.

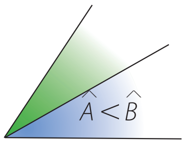


Actividades resueltas

1. **Compara los ángulos siguientes:**



Para comparar dos ángulos superponemos un lado de cada uno de dichos ángulos y sus vértices: si los otros dos lados no coinciden, los ángulos son diferentes y es menor el ángulo que queda con el lado no común dentro del otro ángulo.



Observa el dibujo. El ángulo $\hat{A}$ es menor que el ángulo $\hat{B}$. Lo expresamos así: $\hat{A} < \hat{B}$.

Actividades propuestas

3. Emplea la escuadra y el cartabón para dibujar rectas perpendiculares a una recta determinada.

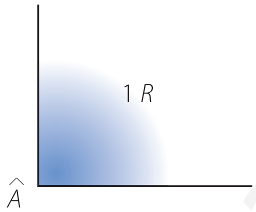
4. Dibuja cuatro ángulos que compartan un mismo lado.

3. Medida de los ángulos

¿Cuánto mide el ángulo dibujado en el córner de un campo de fútbol?

La medida de un ángulo se denomina **amplitud.**

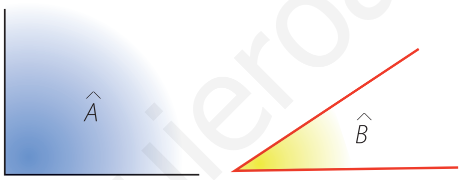
Para medir un ángulo hay que compararlo con otro que se toma como unidad. Una unidad de medida de los ángulos es el ángulo recto, que expresamos por 1 *R*.

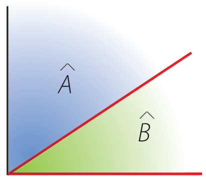


Observa cómo podemos utilizar el ángulo recto para medir otros ángulos.

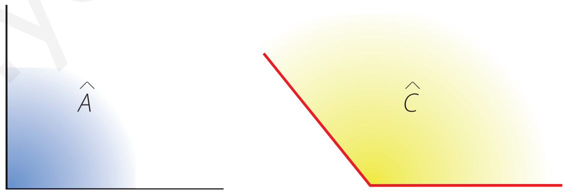
Medimos con el ángulo recto $\hat{A}$ los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$:

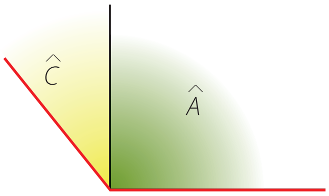
El ángulo $\hat{B}$ es menor que el ángulo recto. Su amplitud no llega a 1 *R*.





El ángulo $\hat{C}$ es mayor que el ángulo recto. Su amplitud es mayor que 1 *R*:





El ángulo recto es una unidad de medida demasiado grande y los resultados obtenidos cuando la utilizamos son muy poco precisos. Por lo tanto, necesitamos una unidad menor.

La unidad de medida de ángulos más habitual es la que resulta de dividir el ángulo recto en 90 partes iguales. Esta unidad la denominamos **grado.**

Si dividimos el ángulo recto en 90 partes iguales, cada una de estas partes es un ángulo de amplitud un **grado.** Así, $1\ R = 90°$.

Evidentemente, los cuatro ángulos de las esquinas de un campo de fútbol miden 90°, siempre y cuando sus lados estén pintados a la perfección.

Sabías que...

Los camaleones pueden mover los ojos independientemente, lo cual les brinda una visión de casi 360º con un pequeño punto ciego tras la cabeza.

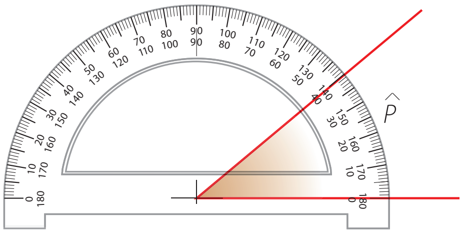
3.1. Medir ángulos con el transportador

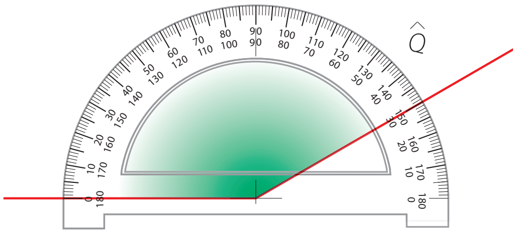
Con la ayuda del transportador de ángulos, o semicírculo graduado, podemos medir la amplitud de un ángulo.

Observa cómo situamos el transportador.

Atención

Debes tener mucho cuidado cuando midas ángulos con el transportador.



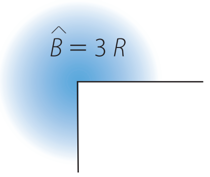


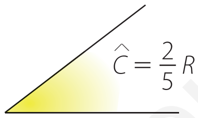
La intersección de la parte inferior del transportador coincide con el vértice del ángulo, y el lado inferior del ángulo pasa por el 0 del transportador.

El ángulo $\widehat{P}$ mide aproximadamente 40°, y el ángulo $\widehat{Q}$, 150°.

Actividades resueltas

2. **Expresa en grados la amplitud de los ángulos siguientes:**





Es suficiente con multiplicar por 90° la medida de cada ángulo expresada en ángulos rectos:

$$\widehat{B} = 3R \cdot \frac{90°}{1R} = 270° \qquad \widehat{C} = \frac{2}{5}\,R \cdot \frac{90°}{1R} = 36°$$

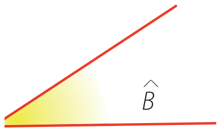
3. **¿Cuántos ángulos rectos mide un ángulo de 225°?**

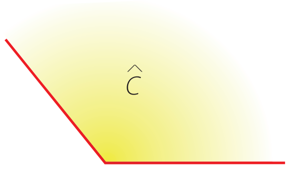
En la actividad anterior hemos transformado un ángulo expresado en ángulos rectos a grados, multiplicando por 90°. Ahora hay que hacer la operación inversa, es decir, tenemos que dividir la medida expresada en grados entre 90°, que es la amplitud en grados de un ángulo recto. Así:

$$225° \cdot \frac{1R}{90°} = 2{,}5\,R$$

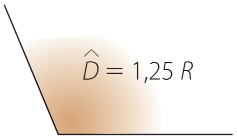
Actividades propuestas

5. **Utiliza el transportador de ángulos para medir la amplitud de los ángulos de la figura. Compara la amplitud de estos ángulos con la de un ángulo recto.**





6. **Expresa en grados la amplitud del siguiente ángulo:**



7. **¿Cuántos grados mide un ángulo de 0,6 *R*?**

8. **Con la ayuda del transportador de ángulos, dibuja un ángulo de 50° y otro de 120°.**

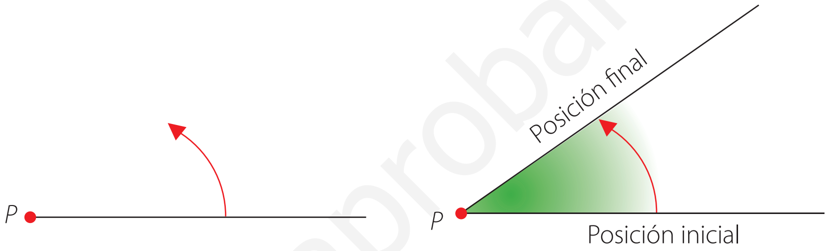
4. El ángulo como giro. Clasificación de los ángulos

¿Qué ángulo gira el minutero de un reloj en cinco minutos?

4.1. El ángulo como giro

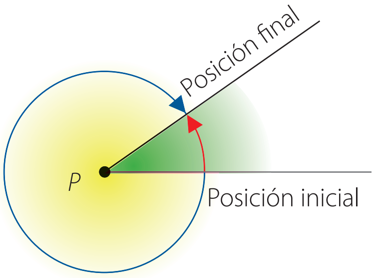
Imagina una semirrecta con origen en el punto *P*. Si la hacemos girar manteniendo fijo este punto, la semirrecta barre una zona del plano durante su movimiento.

Si en un determinado momento paramos el movimiento de giro de la semirrecta, la zona del plano barrida está limitada por las posiciones inicial y final de la semirrecta. Es, por lo tanto, un ángulo.

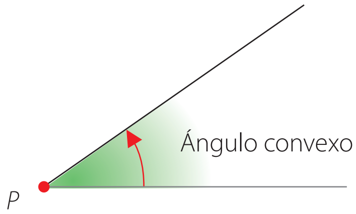


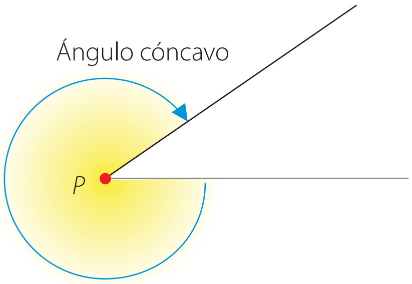
Un ángulo es la región del plano que barre una semirrecta al girar alrededor de su origen, el punto *P*. El ángulo está determinado por las posiciones inicial y final de la semirrecta.

El giro se puede realizar en dos sentidos y cada sentido nos define un ángulo. Indicando el sentido del giro mediante un arco de circunferencia orientado, ya tendremos claro a qué ángulo nos referimos.



De los dos ángulos posibles, el menor se denomina **convexo** y el mayor se denomina **cóncavo.**

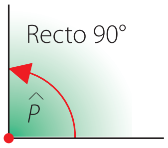


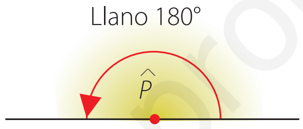


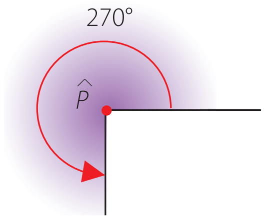
Giros especiales

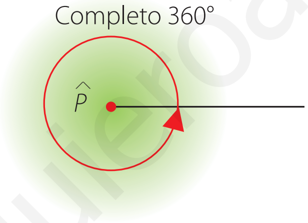
Ahora vamos a fijarnos en unos giros especiales:

- Si la semirrecta está en la posición inicial y no ha barrido todavía ninguna zona del plano, porque no ha habido ningún giro, hablamos de un **ángulo nulo,** es decir, de 0°.
- Si el giro es de $\frac{1}{4}$ de vuelta, el ángulo barrido es un **ángulo recto,** es decir, mide 90°.
- Si el giro es de $\frac{1}{2}$ vuelta, el ángulo barrido se denomina **ángulo llano.** La amplitud del ángulo llano es de 2 *R* o 180°.
- Si el giro es de $\frac{3}{4}$ de vuelta, la amplitud del ángulo es de 3 *R* o 270°.
- Si el giro completa la vuelta entera, ha barrido todo el plano y tenemos un **ángulo completo.** La amplitud es de 4 *R* o 360°.

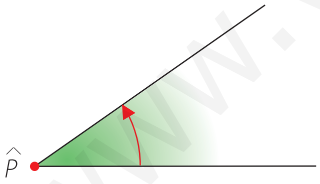




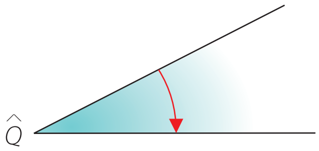




Si el giro se lleva a cabo en el sentido contrario al sentido de giro de las agujas de un reloj, decimos que es en **sentido directo.** Si el giro es en el mismo sentido en que giran las agujas del reloj, entonces decimos que es en **sentido inverso:**



Sentido directo



Sentido inverso

Sabías que…

La visión humana en el plano horizontal abarca algo más de 180°, y en el plano vertical unos 130°.

Sabías que…

Un objetivo de una cámara fotográfica que abarque más de 60° de visión en el plano horizontal se llama gran angular.

Actividades resueltas

4. **¿Qué ángulo gira la manecilla minutera de un reloj en cinco minutos? ¿Y en un minuto? ¿Y la manecilla horaria en dos horas?**

En una hora, el minutero realiza un giro completo, es decir, barre un ángulo de 360°. En este trayecto va pasando por los doce espacios numéricos, cada uno de los cuales corresponde a intervalos de cinco minutos.

Dividimos 360° : 12 = 30°. La amplitud del ángulo cuando el minutero recorre cinco minutos es de 30°.

En un minuto, el minutero gira 6°, ya que 30° : 5 = 6°.

La manecilla horaria en dos horas gira dos de estos doce espacios, por tanto, el ángulo de giro mide:

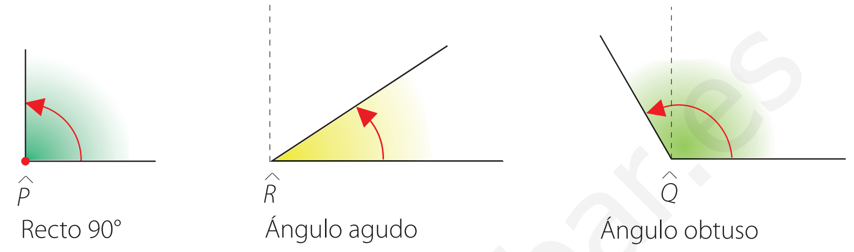
$$2 \cdot 30° = 60°$$

4.2. Clasificación de los ángulos

Aparte de estos ángulos con nombre propio que ya has visto, hay otros criterios para clasificar los ángulos.

Tipos de ángulos por comparación con el ángulo recto

Por comparación con el ángulo recto, los ángulos se clasifican en **agudos** y **obtusos.**



El ángulo $\hat{R}$ es menor que un ángulo recto. Decimos que $\hat{R}$ es un ángulo agudo.

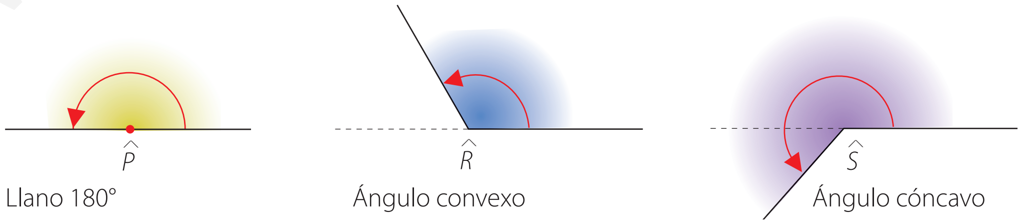
Un ángulo es **agudo** cuando mide menos de 90°.

El ángulo $\hat{Q}$ es mayor que un ángulo recto y menor que un ángulo llano. Decimos que $\hat{Q}$ es un ángulo obtuso.

Un ángulo es **obtuso** cuando mide más de 90° pero menos de 180°.

Tipos de ángulos por comparación con el ángulo llano

Por comparación con el ángulo llano, los ángulos se clasifican en **convexos** y **cóncavos.**



El ángulo $\hat{R}$ es menor que un ángulo llano. Decimos que $\hat{R}$ es un ángulo convexo.

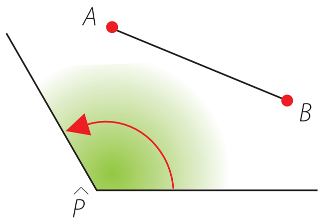
Un ángulo es **convexo** cuando mide menos de 180°.

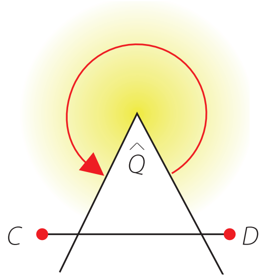
El ángulo $\hat{S}$ es mayor que un ángulo llano. Decimos que $\hat{S}$ es un ángulo **cóncavo.**

Un ángulo es **cóncavo** cuando mide más de 180°.

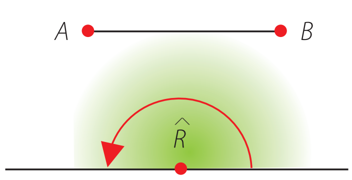
Observa que si tomamos dos puntos cualesquiera *A* y *B* de un ángulo convexo, el segmento que determinan está totalmente contenido en el ángulo.

En el caso de un ángulo cóncavo podemos encontrar dos puntos *C* y *D* que determinan un segmento que no se encuentra completamente en el interior del ángulo:

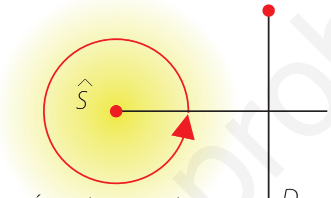




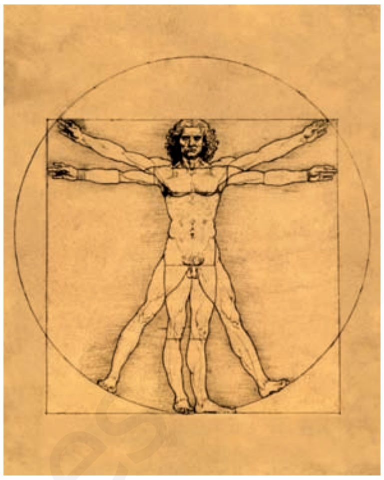
Esta observación nos permite afirmar que el ángulo llano es convexo y el ángulo completo es cóncavo:



Ángulo llano



Ángulo completo

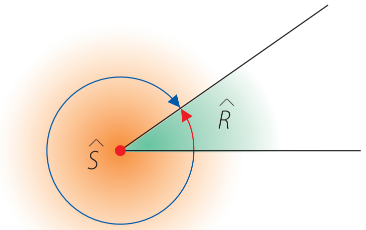


¿Qué diferentes tipos de ángulos podrías hallar en este dibujo?

Actividades resueltas

5. **¿Cuál es la suma de los ángulos convexo y cóncavo que determinan dos semirrectas con el mismo origen? Si un ángulo convexo tiene una amplitud de 35°, ¿cuál es la amplitud del ángulo cóncavo correspondiente?**

Gráficamente te darás cuenta enseguida de que la suma siempre es de 360°, es decir, un ángulo completo. Así, si un ángulo convexo tiene una amplitud de 35°, la amplitud del ángulo cóncavo correspondiente será de 360° − 35° = 325°.



Actividades propuestas

9. Expresa la amplitud de los ángulos barridos por la aguja minutera de un reloj al pasar desde las tres hasta:

a) Las 3 h y 35 min.

b) Las 3 h y 10 min.

c) Las tres y media.

d) Las cuatro menos veinte.

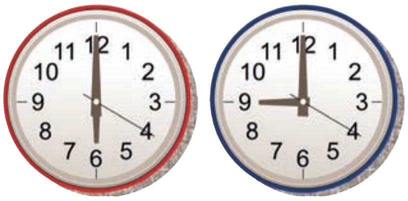
10. Al pasar de la dirección N a la NO se gira en sentido directo un ángulo de 45°. ¿Cuál es el ángulo de giro, también en sentido directo, al pasar de la dirección N a la SE?

11. Si el rumbo que tiene un barco es de 30° sobre el este, ¿qué ángulo debe girar para encontrarse solo a 10° de la dirección norte?

12. Mira a tu alrededor. Busca dos ejemplos de ángulos convexos y cóncavos que puedas mostrar al resto de la clase.

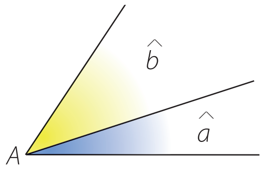
13. En esta página está representado el *Hombre Vitruvio*, un famoso dibujo que realizó Leonardo da Vinci para estudiar la anatomía humana. Indica qué tipos de ángulos forman: las piernas entre sí, las piernas con el tronco, los brazos entre sí y los brazos con el tronco.

5. Operaciones con ángulos



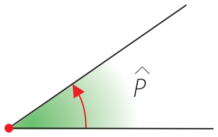
¿Qué ángulo forman las agujas del reloj cuando son las seis de la tarde? ¿Y tres horas después?

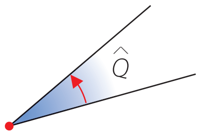
Con los ángulos, igual que con los números, también podemos efectuar operaciones. Antes de hacer ninguna, fíjate en los dos ángulos de la figura.

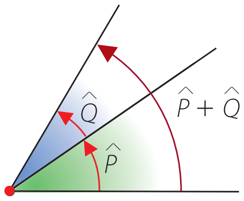


Los ángulos $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ tienen en común el vértice A y uno de sus lados. Decimos que $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ son dos ángulos **consecutivos.**

5.1. Suma







Para sumar los ángulos $\widehat{P}$ y $\widehat{Q}$ procederemos de la siguiente forma:

Dibujamos un ángulo igual al ángulo $\widehat{P}$. Transportamos el ángulo $\widehat{Q}$ de forma que $\widehat{P}$ y $\widehat{Q}$ sean ángulos consecutivos:

El nuevo ángulo suma $\widehat{S}$, formado por los lados no comunes a los dos ángulos, es el ángulo $\widehat{S} = \widehat{P} + \widehat{Q}$.

Así, si $\widehat{P} = 35°$ y $\widehat{Q} = 25°$, el ángulo suma $\widehat{S}$ mide:

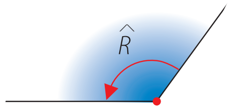
$$\widehat{S} = \widehat{P} + \widehat{Q} = 35° + 25° = 60°$$

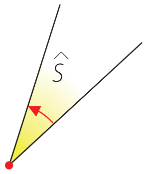
Si sumamos las amplitudes obtenemos la medida del nuevo ángulo.

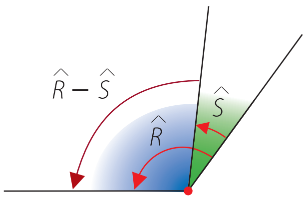
5.2. Resta

Si se verifica que $\widehat{R} > \widehat{S}$, podemos obtener el ángulo diferencia $\widehat{D} = \widehat{R} - \widehat{S}$ de la siguiente forma:

Dibujamos un ángulo igual al ángulo $\widehat{R}$, y le superponemos el ángulo $\widehat{S}$, haciendo coincidir un lado y el vértice. El nuevo ángulo formado por los lados no comunes a los dos ángulos es el ángulo $\widehat{D} = \widehat{R} - \widehat{S}$.







Si $\widehat{R} = 126°$ y $\widehat{S} = 30°$, se verifica que el ángulo diferencia $\widehat{D}$ es:

$$\widehat{D} = \widehat{R} - \widehat{S} = 126° - 30° = 96°$$

Si restamos las amplitudes obtenemos la medida del nuevo ángulo.

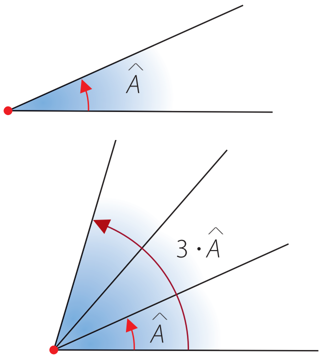
5.3. Multiplicación por un número natural

Queremos dibujar un ángulo que sea tres veces mayor que el ángulo $\hat{A}$.

Como $3 \cdot \hat{A} = \hat{A} + \hat{A} + \hat{A}$, debemos sumar tres ángulos iguales al ángulo $\hat{A}$, como puedes ver en las figuras al margen.

Si el ángulo $\hat{A} = 24°$, entonces $3 \cdot \hat{A} = 3 \cdot 24° = 72°$.

Si multiplicamos por 3 la amplitud del ángulo $\hat{A}$, obtenemos la medida del ángulo $3 \cdot \hat{A}$.

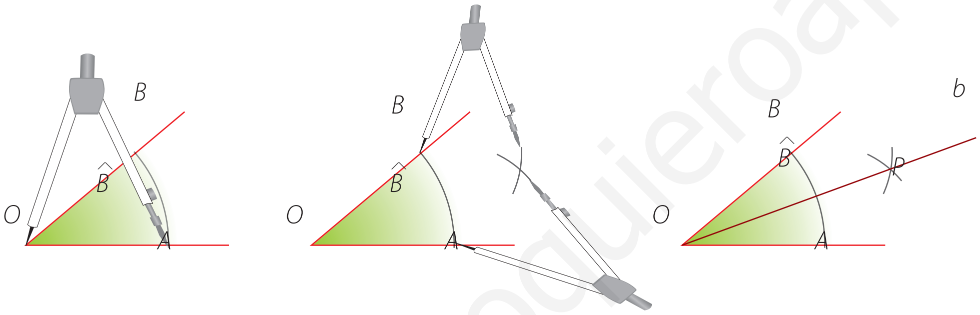


5.4. División en partes iguales

Para dividir un ángulo en 2 partes iguales construimos su **bisectriz.** Observa en el dibujo de más abajo cómo trazamos la bisectriz del ángulo $\hat{B}$.

Tomamos como centro el vértice *O* y dibujamos con el compás un arco de radio cualquiera. Este arco corta los lados del ángulo en los puntos *A* y *B*.

Tomando como centro cada uno de dichos puntos, dibujamos dos arcos de radio un poco más grande que la amplitud del ángulo. La semirrecta determinada por el punto *P*, donde se cortan los dos arcos, y el vértice *O* es la bisectriz del ángulo $\hat{B}$:



El trazado sucesivo de bisectrices nos permite dibujar ángulos que son la mitad, la cuarta parte, la octava parte... de un ángulo determinado.

Hemos obtenido dos ángulos iguales y cada uno de estos ángulos es la mitad del ángulo $\hat{B}$.

La **bisectriz** de un ángulo es la semirrecta que divide el ángulo en dos ángulos iguales.

Si dividimos entre 2 la amplitud del ángulo $\hat{B}$, obtenemos la medida de cada uno de estos ángulos:

$$\text{Si } \hat{B} = 40° \text{ entonces } \hat{B} : 2 = 40° : 2 \rightarrow \hat{B} = 20°.$$

La construcción de otras fracciones unitarias de un ángulo, como la quinta parte, no es tan sencilla. Nos limitaremos a determinar la medida, dividiendo la amplitud del ángulo por el número que corresponda en cada caso.

Actividades propuestas

14. Considera los ángulos $\hat{A} = 80°$ y $\hat{B} = 35°$:

a) Dibuja estos ángulos con ayuda del transportador.

b) Encuentra gráficamente los ángulos $\hat{A} + \hat{B}$ y $\hat{A} - \hat{B}$ y calcula sus amplitudes.

c) Comprueba que el ángulo $3 \cdot \hat{B}$ es más grande que un ángulo recto.

d) Dibuja un ángulo de modo que sea la cuarta parte de $\hat{A}$.

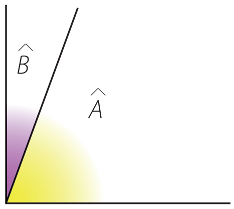
6. Relaciones entre ángulos

¿Cuántos ángulos forman los rastros de estos dos aviones en el cielo? ¿Cómo son?

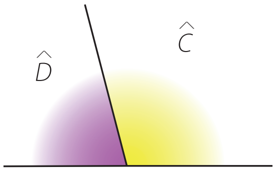
6.1. Ángulos complementarios y suplementarios

Dos ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ son complementarios si $\widehat{A} + \widehat{B} = 90°$. Así, los ángulos $\widehat{A} = 70°$ y $\widehat{B} = 20°$ son complementarios, ya que $70° + 20° = 90°$.

Dos ángulos son complementarios si suman 90°.



Complementarios



Suplementarios

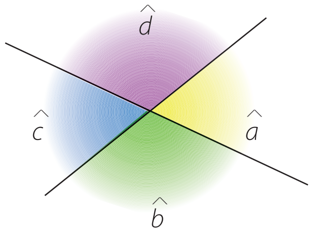
Dos ángulos $\widehat{C}$ y $\widehat{D}$ son suplementarios si $\widehat{C} + \widehat{D} = 180°$. Los ángulos $\widehat{C} = 105°$ y $\widehat{D} = 75°$ son suplementarios, porque $105° + 75° = 180°$.

Dos ángulos son suplementarios si suman 180°.

Así, si $\widehat{E} = 50°$, su ángulo complementario mide $90° - 50° = 40°$, y su suplementario, $180° - \widehat{E} = 180° - 50° = 130°$.

6.2. Ángulos opuestos por el vértice

Observa los cuatro ángulos formados por estas dos rectas secantes. Los ángulos $\widehat{a}$ y $\widehat{c}$ son opuestos por el vértice. También lo son los ángulos $\widehat{b}$ y $\widehat{d}$. Se verifican las igualdades siguientes: $\widehat{a} = \widehat{c}$ y $\widehat{b} = \widehat{d}$.



Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Observa que los ángulos $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ son suplementarios. ¿Qué otros ángulos de la figura son suplementarios entre sí?

Actividades resueltas

6. El suplementario de un ángulo mide 154°. Halla la medida del complementario de este mismo ángulo.

Sabemos que el suplementario del ángulo $\widehat{A}$ que buscamos es 154°. Así pues, el ángulo $\widehat{A}$ es:

$$\widehat{A} = 180° - 154° = 26°$$

Ahora hay que calcular la medida de su complementario $\widehat{C}$:

$$\widehat{C} = 90° - \widehat{A} = 90° - 26° = 64°$$

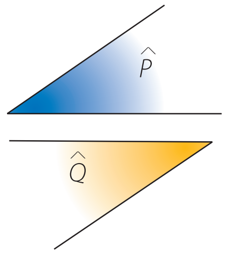
El complementario de este ángulo mide 64°.

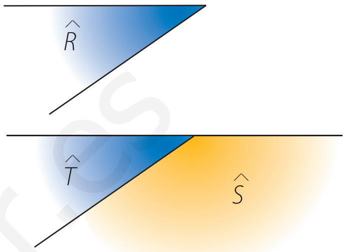
6.3. Ángulos de lados paralelos o compartidos

Los ángulos $\hat{P}$ y $\hat{Q}$ tienen los lados paralelos dos a dos. Comprueba, con la ayuda de un transportador de ángulos, que se verifica que $\hat{P} = \hat{Q}$.

Los ángulos $\hat{R}$ y $\hat{S}$ también tienen los lados paralelos dos a dos. Observa que no son iguales: $\hat{R}$ es agudo y $\hat{S}$ es obtuso. Si observas el ángulo $\hat{T}$, que es el suplementario de $\hat{S}$, te darás cuenta de que es igual que el ángulo $\hat{R}$ porque tiene los lados paralelos como en el caso de los ángulos $\hat{P}$ y $\hat{Q}$. Por lo tanto, los ángulos $\hat{R}$ y $\hat{S}$ son suplementarios.

Estas deducciones realizadas con ángulos de lados paralelos se pueden aplicar también a los ángulos de lados compartidos.





> Dos ángulos de lados paralelos o compartidos son iguales si los dos son agudos o los dos son obtusos. Si uno es agudo y el otro es obtuso, son suplementarios.

6.4. Ángulos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una secante

Si cortamos dos rectas paralelas con una recta secante, obtenemos ocho ángulos, como vemos en la figura al margen.

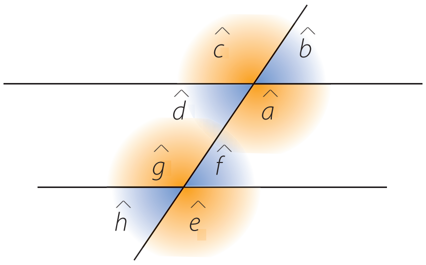
Si en la figura el ángulo $\hat{a} = 130°$, podemos determinar la amplitud de los otros siete ángulos utilizando las propiedades anteriores:

- $\hat{a}$ y $\hat{c}$ son ángulos opuestos por el vértice. Entonces $\hat{a} = \hat{c} = 130°$.
- $\hat{a}$ y $\hat{e}$ tienen lados compartidos y los dos ángulos son obtusos. Entonces, son iguales: $\hat{a} = \hat{e} = 130°$.
- $\hat{a}$ y $\hat{b}$ tienen lados compartidos, pero un ángulo es obtuso y el otro agudo. Por lo tanto, son suplementarios: $\hat{b} = 180° - \hat{a} = 180° - 130° = 50°$.

En definitiva, con estos y otros razonamientos parecidos podemos deducir que

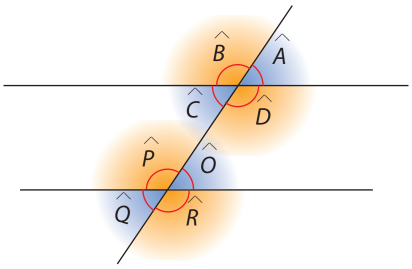
$$\hat{a} = \hat{c} = \hat{e} = \hat{g}, \text{ que } \hat{b} = \hat{d} = \hat{f} = \hat{h} \text{ y que } \hat{a} = 180° - \hat{b}.$$

Observemos en la figura el paralelismo de los lados de los ángulos formados y así podremos establecer relaciones de igualdad o de suplementariedad entre estos ángulos.



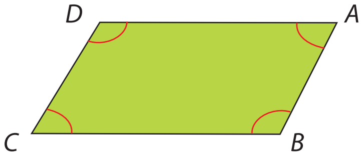
Actividades propuestas

15. Si el ángulo $\hat{B}$ de la figura mide 135°, ¿cuánto miden los otros ángulos?



16. Dos ángulos, uno agudo y el otro obtuso, tienen los lados paralelos. Si uno de ellos tiene una amplitud de 110°, ¿cuál es la amplitud del otro?

17. Determina los ángulos del paralelogramo de la figura sabiendo que $\hat{A} = 60°$.



7. El sistema sexagesimal. Medida del tiempo

Observa este reloj digital. ¿Qué quiere decir que son las 17:27?

Efectivamente son las 17 h y 27 min, es decir, las cinco de la tarde y veintisiete minutos. Fíjate que los dos puntos que hay entre un número y el siguiente separan las horas de los minutos.

Los cronómetros que se utilizan actualmente en algunos deportes permiten precisar el tiempo hasta las milésimas de segundo. De este modo, si por televisión dicen que el primer clasificado de la carrera de Fórmula 1 ha hecho todo el recorrido en 1:35:58,765, quiere decir que el ganador ha empleado 1 h 35 min 58 s y 765 milésimas de segundo.

En el sistema decimal, cada unidad de un orden es igual a 10 unidades del orden inmediatamente inferior. Así funciona nuestro sistema de numeración, y también las diferentes unidades empleadas en las medidas de longitud, masa y capacidad.

Hay otras magnitudes cuyas unidades de medida no siguen las reglas del sistema decimal. Los ángulos y el tiempo son dos ejemplos.

Las horas, los minutos y los segundos forman parte del **sistema sexagesimal** ya que para pasar de una unidad a la inmediatamente inferior hay que multiplicar por 60, y para pasar de una unidad a la inmediatamente superior hay que dividir por 60.

Escribimos:

1 hora → 1 h

1 minuto → 1 min

1 segundo → 1 s

También existen otras unidades de medida del tiempo:

1 año → 365 días

1 día → 24 h

$$\begin{tikzcd}
\text{h} \arrow[r, bend left, "\cdot 60"] \arrow[rr, bend left=60, "\cdot 3\,600"] & \text{min} \arrow[l, bend left, ": 60"] \arrow[r, bend left, "\cdot 60"] & \text{s} \arrow[l, bend left, ": 60"] \arrow[ll, bend left=60, ": 3\,600"]
\end{tikzcd}$$

Si decimos que ha tardado 1 h 35 min 58,765 s, estamos dando la medida del tiempo en forma **compleja.** Si expresamos este tiempo en una sola unidad, tenemos el tiempo expresado en forma **incompleja.**

7.1. Paso de forma compleja a incompleja

Atención

2,25 h no son 2 h 25 min.

2,25 h = 2 h 15 min, ya que

$$0{,}25\ \text{h} \cdot \frac{60\ \text{min}}{1\ \text{h}} = 15\ \text{min.}$$

Pasamos 1 h 35 min 58,765 s a segundos, empleando factores de conversión.

Convertimos 1 h en segundos: $1\text{h} \cdot \frac{60\ \text{min}}{1\ \text{h}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} = 3\,600\ \text{s}$

Pasamos 35 min a segundos: $35\ \text{min} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} = 2\,100\ \text{s}$

Así:

$$1\ \text{h}\ 35\ \text{min}\ 58{,}765\ \text{s} = 3\,600\ \text{s} + 2\,100\ \text{s} + 58{,}765\ \text{s} = 5\,758{,}765\ \text{s}$$

7.2. Paso de forma incompleja a compleja

Pasamos 44 267 s a forma compleja. Fíjate en las divisiones sucesivas:

```
44 267 s |60
  226     737 min |60
    467    137      12 h
     47 s   17 min
```

Así, 44 267 s = 12h 17 min 47 s.

Observa que al efectuar las divisiones entre 60, el primer resto son segundos, el segundo resto son minutos y el último cociente son horas.

Recuerda

En las divisiones para efectuar la conversión a forma compleja nos interesa el resto. Recuerda que la calculadora no nos lo da.

Actividades resueltas

7. **Expresa las siguientes medidas de tiempo en horas:**

a) **3 h 12 min** ***b)*** **10 824 s** ***c)*** **3 h 30 min 45 s**

a) Pasamos los minutos a horas: $12\text{ min}\cdot\dfrac{1\text{ h}}{60\text{ min}} = 0{,}2\text{ h}$.

Sumamos: 3 h + 0,2 h = 3,2 h → 3 h 12 min = 3,2 h.

b) Convertimos los segundos en horas:

$$10\,824\text{ s}\cdot\frac{1\text{ h}}{3\,600\text{ s}} = 3{,}0\widehat{06}\text{ h} \rightarrow 10\,824\text{ s} = 3{,}0\widehat{06}\text{ h}$$

c) Convertimos los segundos en horas:

$$45\text{ s}\cdot\frac{1\text{ h}}{3\,600\text{ s}} = 0{,}0125\text{ h}$$

Ahora expresamos los minutos en horas:

$$30\text{ min}\cdot\frac{1\text{ h}}{60\text{ min}} = 0{,}5\text{ h}$$

Después sumamos: 3 h + 0,5 h + 0,0125 h = 3,5125 h.

8. **Expresa de forma compleja 15,54 h.**

Tenemos que:

$$15{,}54\text{ h} = 15\text{ h} + 0{,}54\text{ h} \rightarrow 15\text{ h}$$

La parte entera, 15 h, formará parte de la solución final. Pasamos ahora 0,54 h a minutos:

$$0{,}54\text{ h}\cdot\frac{60\text{ min}}{1\text{ h}} = 32{,}4\text{ min}$$

Así: 32,4 min = 32 min + 0,4 min → 32 min

Pasamos 0,4 min a segundos:

$$0{,}4\text{ min}\cdot\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} = 24\text{ s} \rightarrow 24\text{ s}$$

Finalmente podemos escribir que:

$$15{,}54\text{ h} = 15\text{ h } 32\text{ min } 24\text{ s}$$

Actividades propuestas

18. Escribe los tiempos siguientes con las unidades correspondientes:

a) 2:31:04 *b)* 13:02:03,25

c) 10:21:56,32 *d)* 23:00:35

19. Expresa de forma compleja:

a) 12,754 h *b)* 27 250 s

c) 24,8 h *d)* 124,5 min

20. Expresa de forma incompleja 3 h 7 min 24 s:

a) En horas. *b)* En segundos.

21. El atleta ganador de la maratón invirtió un tiempo de 8 143 s. Expresa este tiempo en horas, minutos y segundos.

22. En el diario leemos la noticia: «En la primera etapa de la Vuelta Ciclista a España, el ganador ha empleado un tiempo de 4:45:32». Expresa en horas el tiempo que ha tardado en realizar esta etapa.

8. Operaciones con unidades de tiempo

Fíjate en la carátula de este CD. ¿Qué expresan estos números? ¿Cuál es la duración de todo el CD?

Atención

Debes tener cuidado de que las medidas estén expresadas en las mismas unidades.

Para realizar operaciones con medidas de tiempos debemos tener en cuenta si están expresadas en forma compleja o en forma incompleja.

Si las medidas están expresadas en forma incompleja, no hay ningún problema, puesto que se trata de efectuar operaciones con números naturales o números decimales.

En cambio, si las medidas están expresadas en forma compleja, debemos recordar en todo momento que 60 unidades de un orden forman una unidad del orden inmediatamente superior.

8.1. Suma

Un piloto de Fórmula 1 ha hecho la primera vuelta en 1 min 56,521 s y la segunda en 1 min 55,983 s. ¿Cuánto tiempo ha empleado en las dos vueltas?

Sumamos los dos tiempos colocando en columna las mismas unidades:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ min} \quad 56{,}521 \text{ s} \\ + \ 1 \text{ min} \quad 55{,}983 \text{ s} \\ \hline 2 \text{ min} \ 112{,}504 \text{ s} \end{array}$$

Si los segundos son 60 o más, hay que pasarlos a minutos y sumarlos a los minutos que ya hay. Fíjate que:

$$112 \text{ s} = 1 \text{ min } 52 \text{ s}$$

$$1 \text{ min } 56{,}521 \text{ s} + 1 \text{ min } 55{,}983 \text{ s} = 3 \text{ min } 52{,}504 \text{ s}$$

Al completar las dos vueltas ha dedicado 3 min 52,504 s.

8.2. Resta

La carrera de Fórmula 1 ha durado exactamente 1 h 28 min 14 s. Un espectador ha estado en el circuito 2 h 15 min. ¿Cuánto tiempo ha estado sin que corriesen los coches?

Hay que encontrar la diferencia: 2h 15 min − 1 h 28 min 14 s.

Lo colocamos en columna:

$$\begin{array}{r} 2 \text{ h } 15 \text{ min} \\ - \ 1 \text{ h } 28 \text{ min } 14 \text{ s} \\ \hline \end{array}$$

No podemos restar 28 min de 15 min, y no tenemos segundos en el minuendo. Hay que preparar la resta usando en cada caso la unidad de orden superior. Observa:

2 h 15 min = 1 h 75 min = 1 h 74 min 60 s

Ahora ya podemos restar:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ h } 74 \text{ min } 60 \text{ s} \\ - \ 1 \text{ h } 28 \text{ min } 14 \text{ s} \\ \hline 46 \text{ min } 46 \text{ s} \end{array}$$

El espectador ha estado en el circuito 46 min 46 s sin observar la carrera.

8.3. Multiplicación por un número natural

Si la carrera de Fórmula 1 consta de 44 vueltas al circuito y el primer clasificado ha completado la primera vuelta en 1 min 55,494 s, ¿cuánto tiempo podemos esperar que dure la carrera de este piloto?

Hay que multiplicar 1 min 55,494 s por 44.

1 min 55,494 s = 60 s + 55,494 s = 115,494 s

115,494 s · 44 = 5 081,736 s

Para pasar 5 081,736 s a forma compleja dividimos sucesivamente dos veces por 60, como se puede apreciar en la división realizada en el margen.

Se puede esperar que el piloto tarde en realizar la carrera 1 h 24 min 41,736 s.

También lo podemos pasar a forma compleja, multiplicando cada una de las unidades de tiempo por 44.

Así:

(1 min 55,494 s) · 44 = 44 min 2 441,736 s

Dividimos:

$$\begin{array}{r|l} 2\,441{,}736 \text{ s} & 60 \\ \cline{2-2} 41{,}736 \text{ s} & 40 \text{ min} \end{array}$$

(1 min 55,494 s) · 44 = 84 min 41,736 s = 1 h 24 min 41,736 s

$$\begin{array}{r|l} 5\,081{,}736 \text{ s} & 60 \\ \cline{2-2} 41{,}736 \text{ s} \quad 84 \text{ min} & 60 \\ \cline{2-2} 24 \text{ min} & 1 \text{ h} \end{array}$$

8.4. División por un número natural

El ganador de la maratón en los Mundiales de Atletismo de Barcelona 2010 completó el recorrido de poco más de 42 km en 2:07:30.

Calculamos, aproximadamente, la media de tiempo en que hizo cada uno de los 42 km. Hemos de dividir el tiempo total entre 42.

2 h 7 min 30 s = 127 min 30 s

$$\begin{array}{r|l} 127\text{ min} & 42 \\ \hline 1\text{ min} & \mathbf{3\ min} \end{array} \qquad 60\text{ s} + 30\text{ s} = 90\text{ s} \qquad \begin{array}{r|l} 90\text{ s} & 42 \\ \hline 60 & \mathbf{2{,}14\ s} \\ 180 & \\ 12 & \end{array}$$

El ganador ha hecho cada kilómetro en una media de 3 min 2,14 s.

Actividades resueltas

9. **José tarda 39 s en leer un problema, lo piensa durante 2 minutos y medio y lo resuelve en 1 min y 25 s. Si tiene que resolver diez problemas parecidos, ¿cuánto se puede esperar que tarde en realizarlos todos?**

Calculamos cuánto tarda en resolver un problema:

$$\begin{array}{r} 39\text{ s} \\ 2\text{ min }\ 30\text{ s} \\ +\ 1\text{ min }\ 25\text{ s} \\ \hline 3\text{ min }\ 94\text{ s} \end{array} \rightarrow 4\text{ min } 34\text{ s}$$

Multiplicamos por 10 para saber cuánto puede tardar en realizarlos todos:

$$(4\text{ min } 34\text{ s}) \cdot 10 = 40\text{ min } 340\text{ s} \rightarrow \begin{array}{r|l} 340\text{ s} & 60 \\ \hline 40\text{ s} & 5\text{ min} \end{array}$$

40 min 340 s = 45 min 40 s

José tardará 45 min 40 s en resolver todos los problemas.

Actividades propuestas

23. Efectúa:

a) 15 h 32 min 24,35 s + 10 h 15 min 36,4 s
b) (56 h 47 min 57 s) : 3
c) 15 h − (2 h 30 min + 8 h 45 min)
d) (4 h 34 min 12 s) · 6

24. En el marcador del final de la carrera de Fórmula 1 leemos que uno de los participantes ha empleado 1:24:41,736. Si la carrera constaba de 40 vueltas al circuito, ¿cuál es el tiempo medio empleado en dar una vuelta?

Actividades resueltas

10. En un DVD quedan 2 h y 25 min para poder grabar. Quieres grabar una película de 115 min, pero tienes que contar con que durante la emisión hay cuatro cortes publicitarios de 4 min 51 s cada uno. ¿Podrás grabar toda la película?

Calculamos la duración total de los cortes publicitarios. Hay que multiplicar 4 min 51 s por 4.

$$\begin{array}{r} 4 \text{ min } 51 \text{ s} \\ \times\, 4 \\ \hline 16 \text{ min } 204 \text{ s} \end{array} \rightarrow 204 \text{ s} = 180 \text{ s} + 24 \text{ s} = 3 \text{ min } 24 \text{ s}$$

La duración de los anuncios es de 19 min 24 s.

La duración de la película es de 115 min = 1 h 55 min.

Ahora sumamos la duración de la película y el tiempo que duran los anuncios:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ h } 55 \text{ min} \qquad \\ + \quad 19 \text{ min } 24 \text{ s} \\ \hline 1 \text{ h } 74 \text{ min } 24 \text{ s} \end{array} \rightarrow 74 \text{ min} = 1 \text{ h } 14 \text{ min}$$

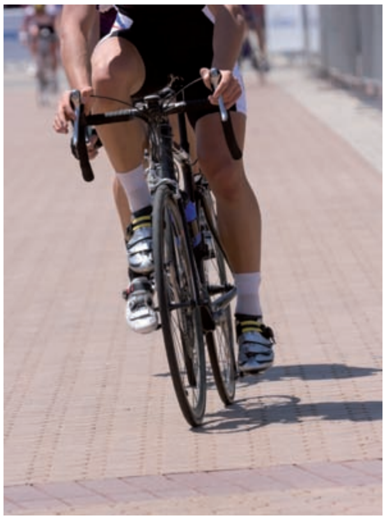
La duración de la película y los anuncios es de: 2 h 14 min 24 s.

Si el DVD permite grabar 2 h 25 min, es evidente que nos sobrará tiempo.

Para expresar los minutos que sobrarán, hay que efectuar esta resta:

$$\begin{array}{r} 2 \text{ h } 25 \text{ min} \qquad \\ - \; 2 \text{ h } 14 \text{ min } \; 24 \text{ s} \\ \hline 10 \text{ min } \; 36 \text{ s} \end{array}$$

Sobrarán 10 min 36 s.



Actividades propuestas

25. Un barco salió del puerto de Barcelona a las 21 h 40 min del jueves y llegó a Palma de Mallorca a las 6 h 45 min del viernes. ¿Cuánto duró el viaje?

26. Un reloj digital marca las 19 h 24 min 12 s. ¿Cuánto falta para llegar a la medianoche?

27. Un grifo llena un depósito en 5 h 24 min 36 s. ¿Cuánto tardarían en llenar ese mismo depósito tres grifos iguales al primero?

28. Calcula la duración del CD del principio del apartado.

29. El sistema de seguimiento GPS de la Vuelta Ciclista indica que el grupo que encabeza la carrera está a 1 min 30 s de diferencia del ciclista que les persigue. Si la distancia se acorta 15 segundos cada kilómetro, ¿al cabo de cuántos kilómetros atrapará al grupo?

30. Un reloj digital se atrasa 0,1 s cada 5 min. Si a las 9 de la mañana marca la hora en punto, ¿qué hora señalará cuando en otro reloj digital que funciona correctamente sean las 7 de la tarde?

9. Medición de los ángulos

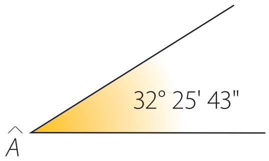
¿Qué quiere decir que la Acrópolis de Atenas está a 37° 58′ 1″ N y 23° 43′ 34,3″ E?

Observa el ángulo $\widehat{A}$.

Ya hemos visto que los ángulos se miden en grados. Aunque el grado es una unidad pequeña, para aumentar la precisión se definen dos divisores más: el minuto y el segundo.

Un minuto es lo que mide el ángulo que resulta de dividir un ángulo de 1° en sesenta partes iguales.

1 grado → 60 minutos	1 minuto → 60 segundos
$1° = 60'$	$1' = 60''$



Con estas unidades, la medida del ángulo $\widehat{A}$ se expresa así: 32° 25′ 43″.

Fíjate en que las equivalencias entre estas unidades de medida de ángulos son las mismas que las que hay entre horas, minutos y segundos; por este motivo, las unidades de medida angulares también son **sexagesimales.**

Esto hace que el tratamiento, en cuanto a operaciones se refiere, sea también el mismo.

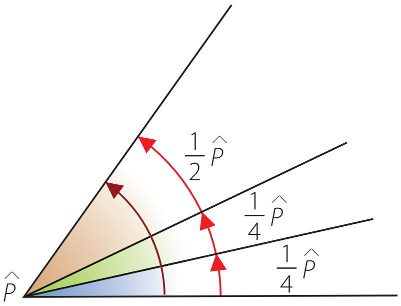
En la práctica, los minutos y los segundos de grado se utilizan muy poco, ya que se trata de ángulos muy pequeños que no se pueden medir con el transportador de ángulos. En cambio, sí que se pueden obtener como resultado de operaciones en las que hay que calcular un ángulo.

Actividades resueltas

11. Dado un el ángulo $\widehat{P} = 53° \ 42' \ 28''$, se traza la bisectriz. Ahora volvemos a trazar la bisectriz de uno de los dos ángulos resultantes. ¿Cuánto mide el más pequeño de los ángulos obtenidos?

Dado que la bisectriz divide el ángulo en dos partes iguales y teniendo en cuenta que hemos trazado dos bisectrices, el ángulo más pequeño medirá la cuarta parte de lo que mide el ángulo inicial.

Dividimos 53° 42′ 28″ entre 4:



$$\begin{array}{rrr|l}
53° & 42' & 28'' & 4 \\ \hline
13° & & & 13° \ 25' \ 37'' \\
1° = & 60' & & \\ \cline{2-2}
& 102' & & \\
& 22' & & \\
& 2' = & 120'' & \\ \cline{3-3}
& & 148'' & \\
& & 28'' & \\
& & 0'' &
\end{array}$$

Cada uno de los dos ángulos más pequeños mide 13° 25′ 37″.

9.1. Los ángulos en la calculadora

La mayoría de calculadoras científicas tienen la tecla ° ’ ”, que permite introducir una medida de un ángulo expresada en forma compleja y convertirla en forma incompleja en grados. También pueden hacer lo mismo con una medida de tiempo, dado que se trabaja asimismo con el sistema sexagesimal.

Para pasar de forma incompleja a forma compleja necesitamos emplear la tecla SHIFT.

Observa cómo expresamos en forma incompleja de grados un ángulo de 70° 13′ 30″:

7 0 ° ’ ” 1 3 ° ’ ” 3 0 ° ’ ” =

Después de presionar la tecla ° ’ ”, en la pantalla aparece el ángulo 70,225°.

70° 13° 30

Expresamos, ahora, en forma compleja un ángulo de 36,22°:

3 6 , 2 2 = ° ’ ” y obtenemos 36° 13′ 12″.

La calculadora no muestra los símbolos «′» y «″». En la pantalla solo aparece «°». Es necesario que conozcas tu calculadora y sepas interpretar la información que te da.

En algunas calculadoras no existe la tecla ° ’ ”, y son en cambio otras, por ejemplo las teclas DMS o GMS, las que hacen su función.

Actividades resueltas

12. Un ángulo mide 32° 25′ 43″. ¿Cuánto mide su complementario?

Para encontrar la medida de su complementario lo debemos restar de 90°.

$$\begin{array}{r} 90^\circ \\ -\,32^\circ\ 25'\ 43'' \\ \hline \end{array}$$

Transformamos el ángulo de 90° para poder hacer la resta:

$$90^\circ = 89^\circ\ 60' = 89^\circ\ 59'\ 60''$$

Ahora restamos:

$$\begin{array}{r} 89^\circ\ 59'\ 60'' \\ -\quad 32^\circ\ 25'\ 43'' \\ \hline 57^\circ\ 34'\ 17'' \end{array}$$

El ángulo complementario de 32° 25′ 43″ es, por lo tanto, 57° 34′ 17″.

Compruébalo con la calculadora científica.

Actividades propuestas

31. Si $\widehat{A} = 35^\circ\ 40'\ 32''$ y $\widehat{B} = 64^\circ\ 25'\ 12''$, calcula:

a) $\widehat{A} + \widehat{B}$ *b)* $\widehat{B} - \widehat{A}$ *c)* $\frac{3}{4}\widehat{A}$ *d)* $180^\circ - \widehat{A}$

32. Al trazar la bisectriz de un ángulo, cada uno de los dos ángulos obtenidos mide 47° 53′ 42″. ¿Cuál es la medida del ángulo original?

33. El suplementario de un ángulo mide 137° 48′. Determina la medida del complementario de este ángulo.

34. Dados los ángulos $\widehat{A} = 75^\circ\ 34'\ 27''$ y $\widehat{B} = 28^\circ\ 27'\ 45''$, emplea la calculadora científica para calcular:

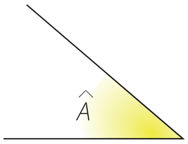
a) $2\,\widehat{A} - \widehat{B}$ *b)* $180^\circ - 3\,\widehat{B}$

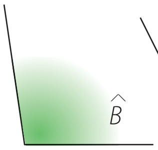
c) $\frac{1}{3}\widehat{A} + 2\,\widehat{B}$ *d)* $\frac{1}{2}\widehat{A} + \frac{4}{3}\widehat{B}$

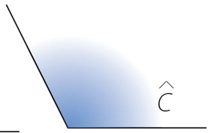
35. Los $\frac{2}{3}$ de un ángulo $\widehat{A}$ son 42° 24′ 51″. Utiliza la calculadora científica para determinar la medida de $\widehat{A}$.

Actividades finales

1. Utiliza el transportador de ángulos para medir la amplitud de los ángulos de la figura.







2. Expresa en grados la amplitud de los ángulos:

a) $\frac{1}{2}R$ *b)* 1,375 *R* *c)* $\frac{3}{4}R$ *d)* 0,15 *R* *e)* 2,5 *R*

3. ¿Cuántos ángulos rectos miden cada uno de los ángulos siguientes?

a) 60° *b)* 150° *c)* 45°

d) 360° *e)* 22,5° *f)* 30°

4. Expresa la amplitud de los ángulos barridos por el minutero al pasar de las 6 h a:

a) Las seis y cuarto. *b)* Las seis y media.

c) Las siete menos cuarto. *d)* Las 6 h y 20 min.

e) Las 6 h y 55 min. *f)* Las 7 h.

Clasifica estos ángulos en cóncavos y convexos.

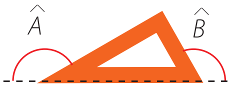
5. Considera los ángulos $\widehat{A} = 37°$ y $\widehat{B} = 75°$. Calcula:

a) $180° - 4 \cdot \widehat{A}$ *b)* $3 \cdot \widehat{A} + 2 \cdot \widehat{B}$

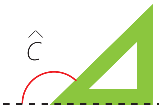
c) $4 \cdot R - 4 \cdot \widehat{A} + \widehat{B} : 5$ *d)* $360° - 2\,(\widehat{A} + \widehat{B})$

6. Los ángulos de un cartabón miden 45°, 45° y 90°, y los ángulos de una escuadra miden 30°, 60° y 90°. Con esta información, observa las imágenes y calcula los ángulos indicados:

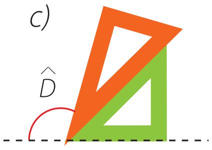
a)



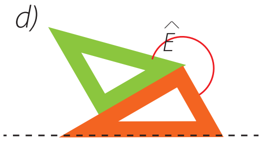
b)



c)



d)



7. Dibuja los ángulos que figuran en la tabla siguiente y marca en tu cuaderno una cruz en la casilla que corresponda.

Ángulo	Cóncavo	Convexo	Agudo	Recto	Llano	Obtuso	Completo
120°							
60°							
180°							
240°							
90°							
360°							

8. Dibuja dos triángulos diferentes y mide sus ángulos. ¿Cuál es el valor de esta suma?

9. Expresa en forma compleja y comprueba con la calculadora:

a) 0,75 h *b)* 0,675 h

c) 2,785 h *d)* 14,055 h

e) 453,24 min *f)* 0,0025 años

g) $\frac{3}{7}$ de hora *h)* 2 325 s

10. Expresa en segundos y comprueba con la calculadora:

a) 4° 25′ *b)* 3° 27′

c) 42° 13″ *d)* 10° 12′ 40″

11. Calcula y comprueba con la calculadora:

a) 5 h 42 min 15 s + 7 h 57 min 47 s

b) 12° 24′ 32″ + 56° 46′ 20″

c) 4 h 24 min 5 s − 2 h 42 min 12 s

d) 52° 12′ − 42° 12′ 24″

e) (2 h 40 min 12 s) · 7

f) (15 h 32 min 36 s) : 6

g) (23° 42′ 35″) · 8

h) (12° 21′ 45″) : 5

12. Gerardo tardó 12 h 44 min en completar la etapa de Santander-Queveda, del Camino de Santiago; Manuel tardó 12,8 h, y Cristina, 766 min. ¿Quién llegó el primero a Queveda? ¿Y el último?

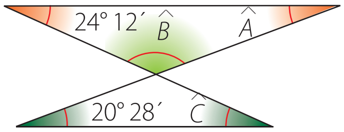
Actividades finales

13. La tercera etapa de la Vuelta Ciclista a España estaba dividida en dos sectores: el primero, en línea, y el segundo, en una contrarreloj individual. El primer clasificado de la general tardó 3 h 52 min 43 s en recorrer el primer sector y 1 h 19 min 37 s en recorrer el segundo. ¿Cuánto tardó en hacer todo el recorrido?

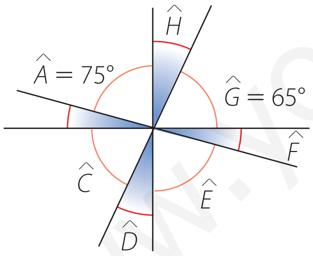
14. El último clasificado del rally Cantabria Infinita invirtió de media un tiempo de 1 h 42 min 17 s para cada uno de los cinco tramos de la prueba. ¿Cuánto tardó en completar los cinco tramos?

15. En un CD hay 12 canciones. Si la duración media de cada una es de 4 min 25 s, ¿cuál será la duración de todo el CD?

16. Indica la medida de todos los ángulos de esta figura:



17. Calcula, sin utilizar el transportador de ángulos, la medida de los ángulos indicados:



18. Dibuja un ángulo cualquiera y otro ángulo de lados paralelos a los del primero. ¿Cuál es la relación existente entre los dos ángulos?

19. Rosa ha comprado una tarjeta para el teléfono móvil y le ha costado 12 €. Las tarjetas de este importe permiten hablar durante 30 min. ¿Cuánto le costará una llamada de 5 min 40 s?

20. El ganador de la maratón en los Juegos Olímpicos de Beijing 2008 hizo el recorrido de poco más de 42 km en 2:06:32. Calcula, aproximadamente, la media de tiempo en que hizo cada uno de los 42 km.

21. Manuel tardó 12 min 45 s en resolver un problema, y Marta, la quinta parte. ¿Cuánto tardó Marta? ¿Y entre los dos?

22. La película que emiten por televisión tiene una duración de 115 min. Hay tres cortes publicitarios de 3 min 55 s cada uno. Expresa en forma compleja la duración de toda la sesión.

23. Álex va al cine. La sesión empieza a las 16 h y la duración de la película es de 1 h 47 min 30 s. Si ha salido del cine a las seis de la tarde, ¿cuánto han durado los anuncios previos a la proyección del film?

24. Uno de los ángulos de un paralelogramo tiene una amplitud de 65° 15′. ¿Cuál es la amplitud de los otros tres ángulos?

25. Tres grifos iguales llenan un depósito en 2 h 25 min 18 s. ¿Cuánto tardaría en llenar dicho depósito uno solo de estos grifos? Si pudiéramos disponer de seis grifos de este tipo, ¿cuánto tiempo sería necesario para llenar el depósito?

26. Un reloj se atrasa un segundo cada media hora. ¿Cuánto se atrasa en un día? ¿Y en 30 días?

27. Para lavarse los dientes Jorge dedica cada día $\frac{2}{75}$ h.

¿Cuántos minutos y segundos dedica en un día? ¿Y en una semana? ¿Y en el mes de enero?

28. Para ir de tu casa a la escuela tardas 21 min. Calcula el tiempo que utilizas para ir y volver de la escuela los 220 días lectivos que tiene el curso.

29. Tres ángulos suman 180°. El menor mide 15° 22′ 43″ y el mayor es seis veces el menor. Halla la medida del otro ángulo.

30. Se dice que pasamos durmiendo $\frac{3}{10}$ del tiempo de nuestra vida. Calcula las horas que dormimos en un año.

31. Una persona emplea 11 min para desayunar, 20 min para comer y 18 min para cenar. Expresa, en forma compleja, el tiempo que dedica esta persona a alimentarse en un día y en un año.

¿Qué te cuentas?

Las coordenadas geográficas

La **latitud** de un punto del hemisferio terrestre es la distancia angular entre el ecuador y este punto del planeta medida sobre el meridiano que pasa por este punto. La latitud se mide en grados (°), entre 0° y 90°, y puede representarse de dos formas: indicando a qué hemisferio pertenece la coordenada o bien añadiendo valores positivos (norte) o negativos (sur).

La **longitud** expresa la distancia angular entre un punto de la superficie terrestre y el meridiano de Greenwich, que se toma como referencia 0°. La longitud también se mide en grados (°). Entre 0° y 360° aumenta hacia el este del meridiano 0°. O bien entre 0° y 180° positivos hacia el este o negativos hacia el oeste.

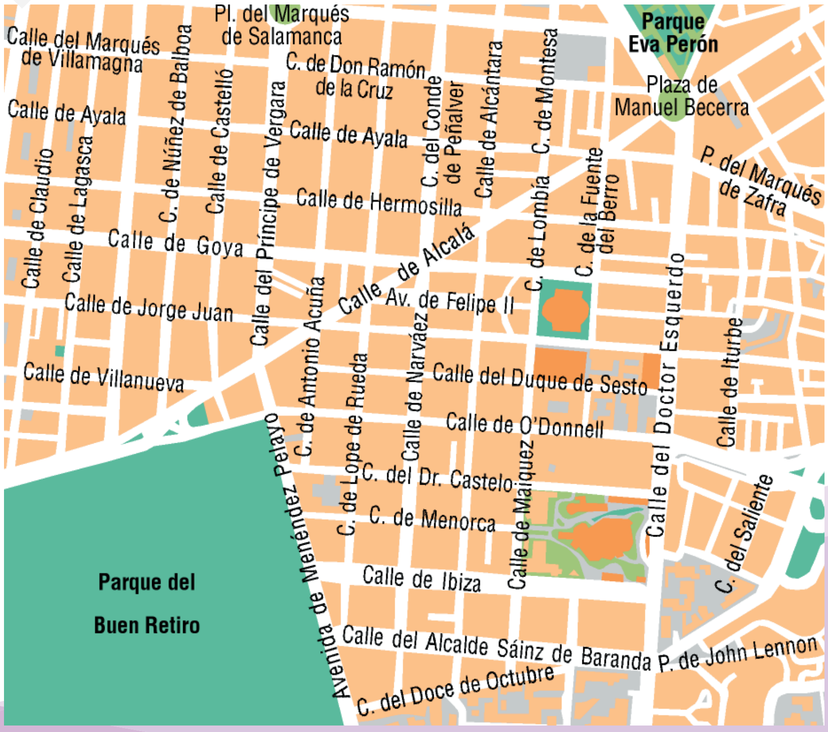
Observa las coordenadas geográficas de París y Sidney:

París (Torre Eiffel)	Sidney (Casa de la Ópera)
48° 51′ 29,95″ N	33° 51′ 24″ S
2° 17′ 40,18″ E	151° 12′ 54″ E

- Buscar por Internet las coordenadas geográficas de: la Pedrera de Barcelona, el Big Ben de Londres, el museo Guggenheim de Bilbao o la Cibeles de Madrid.

La ciudad desde el aire

Observa el mapa de una zona del centro de Madrid.

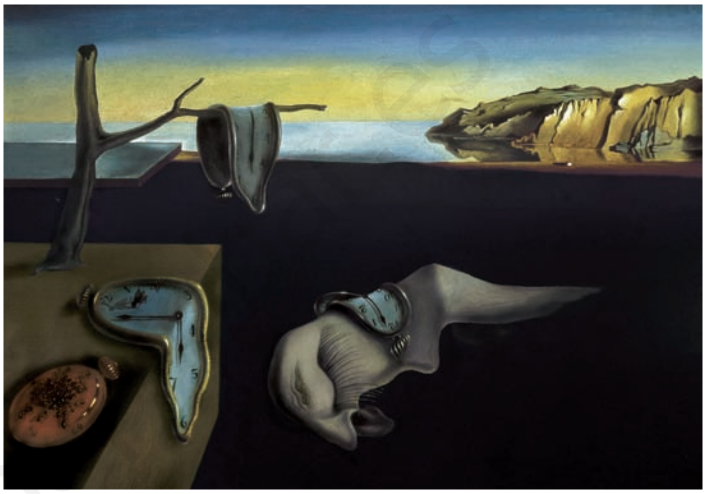


- Indica:
  - *a)* Dos calles paralelas a la calle Goya.
  - *b)* Una calle con dirección secante pero no perpendicular a la calle Alcalá.
  - *c)* Una calle con dirección perpendicular a la calle Narváez.
- ¿Cómo son los ángulos que forman la avenida Menéndez Pelayo y la calle Alcalá? ¿Y la calle Goya con la calle Alcalá? ¿Y la calle Narváez con la calle O'Donnell?
- María dice: «Me encuentro en la calle Conde entre Hermosilla y Goya». Sitúalo en el mapa.
- Entra en Google Earth y observa las calles de tu localidad.

Los ángulos y el arte

Hay muchos artistas que encuentran su inspiración en la geometría y en la medida del tiempo. Aquí tienes dos ejemplos. ¿Qué elementos trabajados en esta unidad reconoces?

Wassily Kandinsky (1866-1944). *Línea ininterrumpida.*



Salvador Dalí (1904-1989). *La persistencia de la memoria.*

- Busca en Internet la biografía de estos dos pintores y observa algunas de sus creaciones.

El atletismo y la foto *finish*

En atletismo, las carreras tienen que ser controladas con una precisión de centésimas o incluso de milésimas de segundo. En pruebas importantes, como los Juegos Olímpicos, se dispone de dispositivos electrónicos para asegurar que los tiempos se determinan con exactitud.

En los Juegos Olímpicos de 2008 en Beijing se introdujo un novedoso equipamiento de medida, con cámaras que tomaban hasta 3 000 fotogramas por segundo, que son muchos. Piensa que las películas de cine emiten solamente 24 fotogramas por segundo.

- Busca con un compañero más información al respecto en Internet.