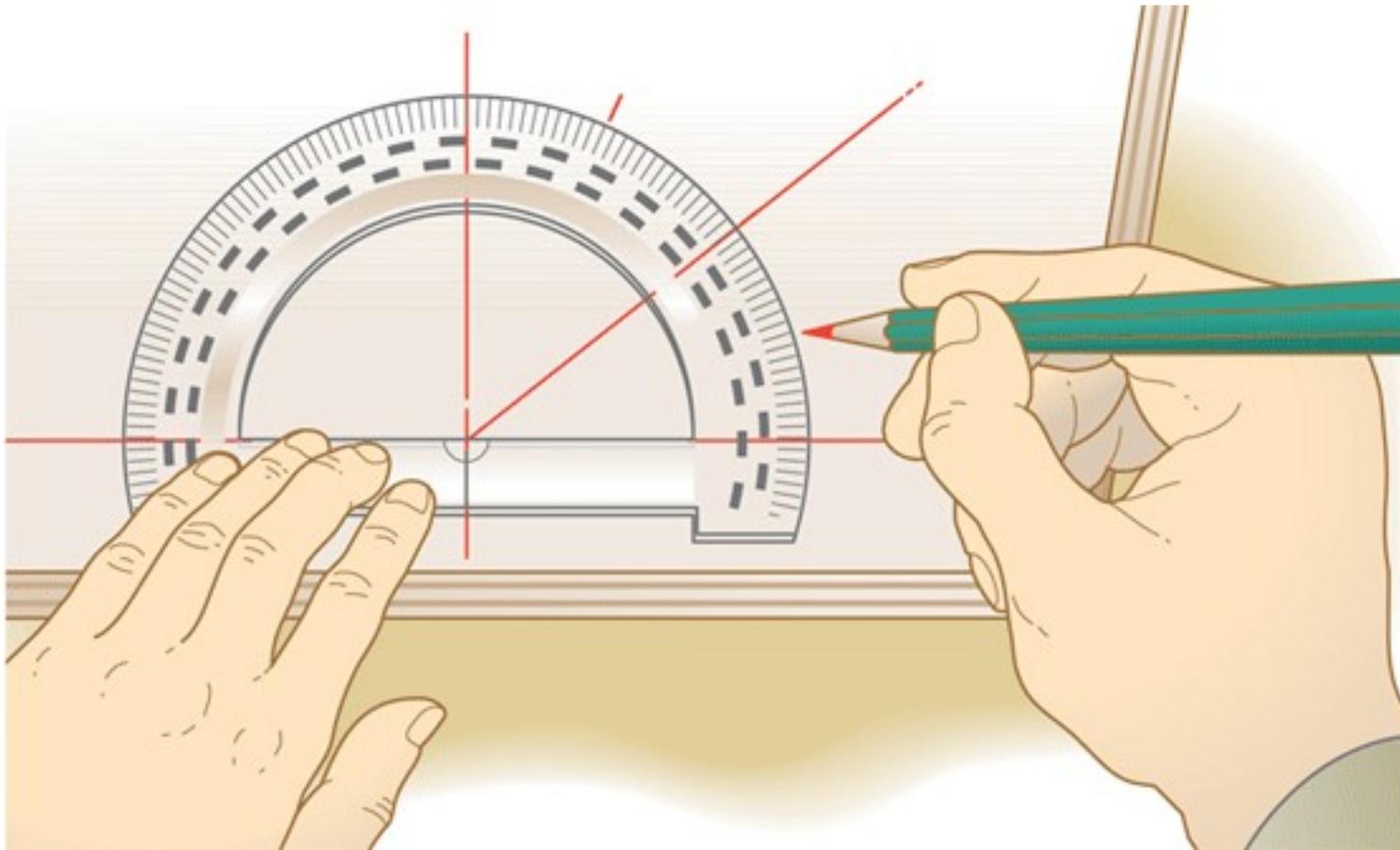
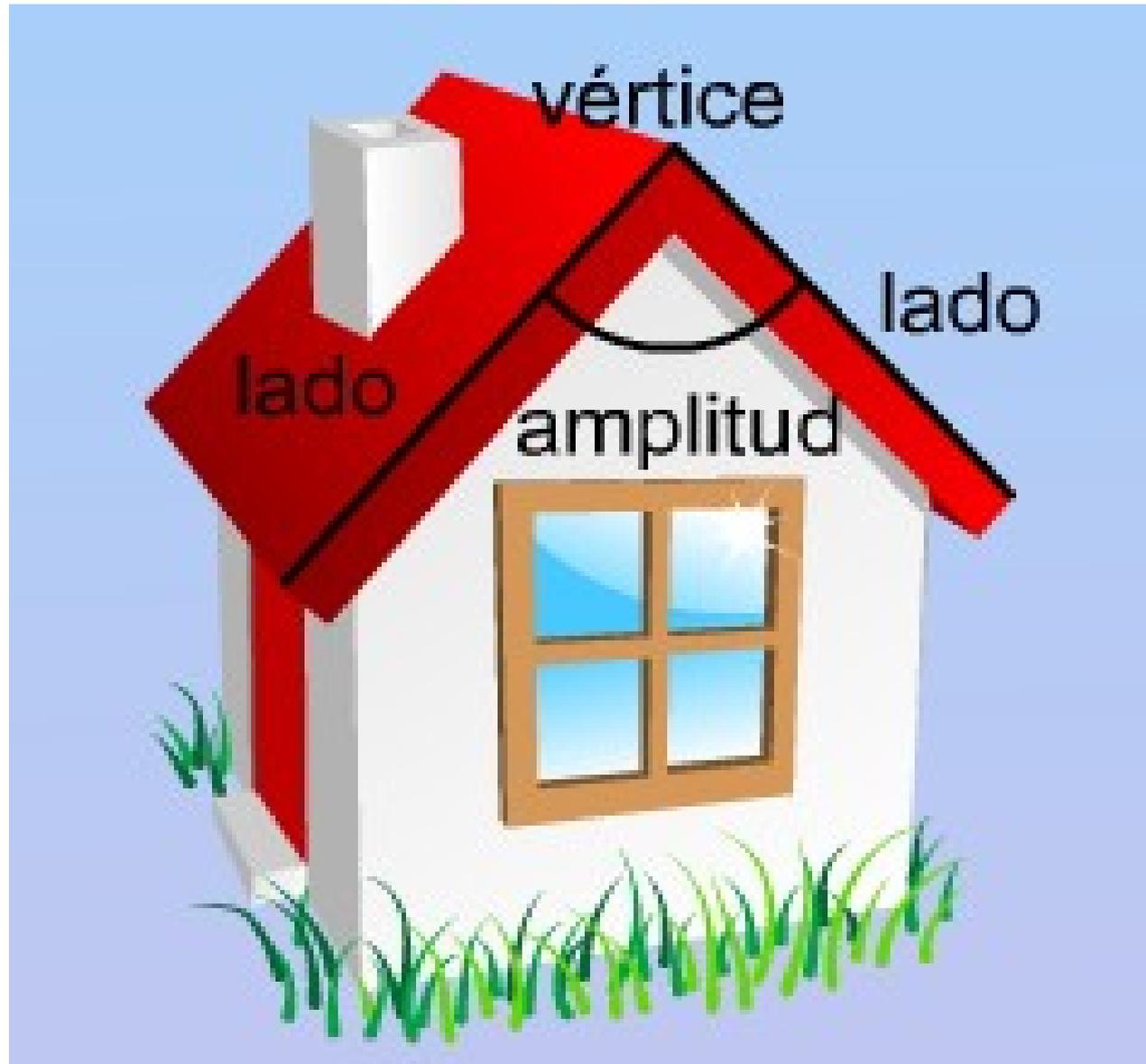


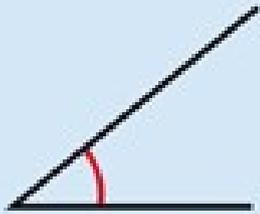
Tema 10. Ángulos



■ Elementos de un ángulo



Tipos de ángulos



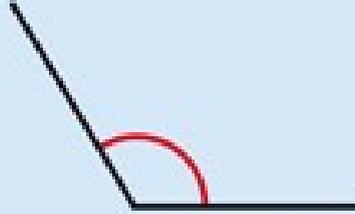
Agudo

Mide menos de 90° .



Recto

Mide 90° .



Obtuso

Mide más de 90° y menos de 180° .



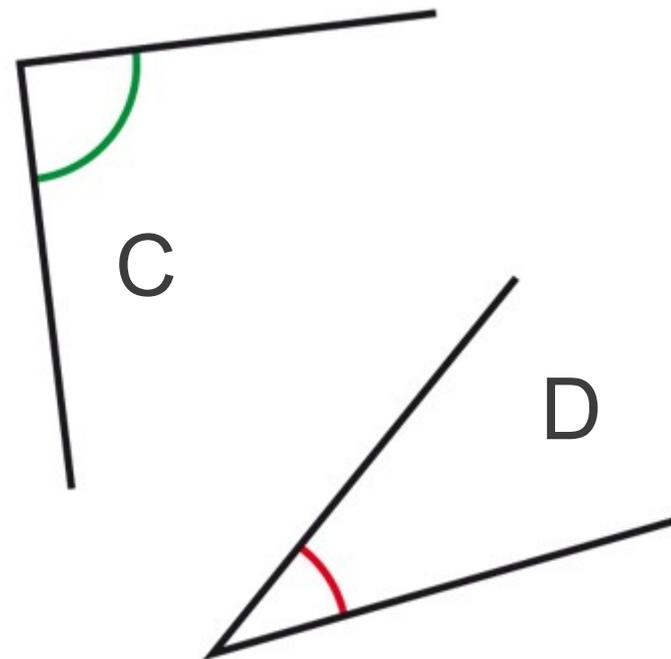
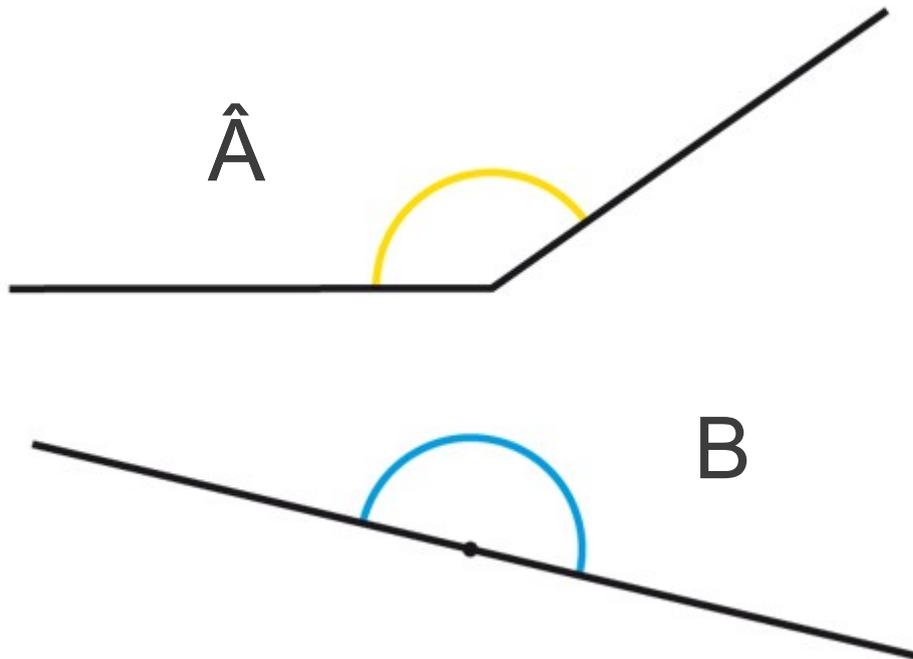
Llano

Mide 180° .



Completo

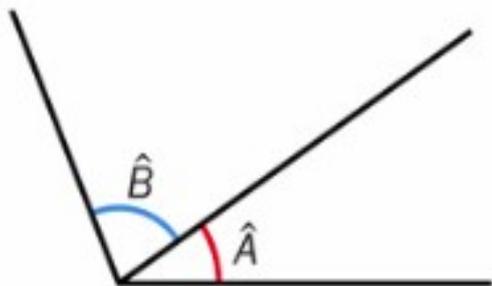
Mide 360° .



Observa la posición de cada pareja de ángulos y sus elementos comunes.

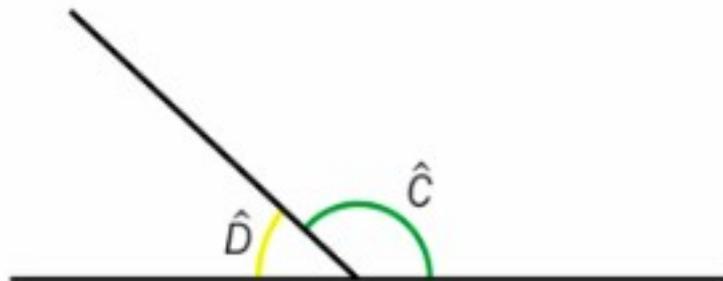
Ángulos consecutivos

Los ángulos \hat{A} y \hat{B} tienen en común el vértice y uno de sus dos lados.



Ángulos adyacentes

Los ángulos \hat{C} y \hat{D} son consecutivos y sus lados no comunes están en la misma recta.



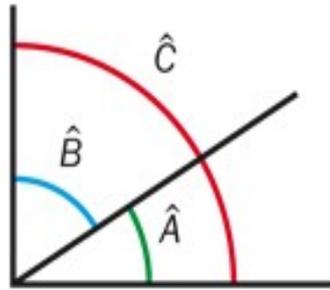
Los ángulos consecutivos tienen en común el vértice y un lado.

Los ángulos adyacentes son ángulos consecutivos que tienen los lados no comunes en la misma recta.

Observa en cada caso cuánto mide el ángulo suma.

$$\hat{A} = 32^\circ$$

$$\hat{B} = 58^\circ$$



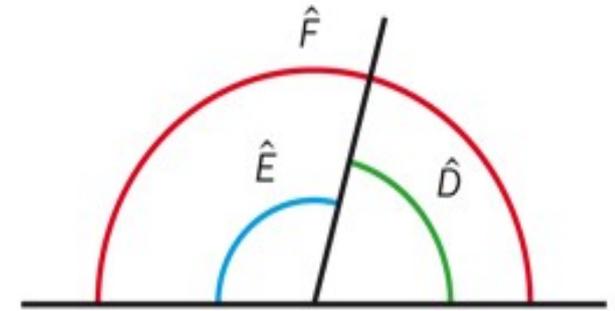
$$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B} = 32^\circ + 58^\circ = 90^\circ$$

El ángulo suma \hat{C} es un ángulo recto.

\hat{A} y \hat{B} son ángulos complementarios.

$$\hat{D} = 75^\circ$$

$$\hat{E} = 105^\circ$$



$$\hat{F} = \hat{D} + \hat{E} = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$$

El ángulo suma \hat{F} es un ángulo llano.

\hat{D} y \hat{E} son ángulos suplementarios.

- Dos ángulos son complementarios si su suma es igual a 90° .
- Dos ángulos son suplementarios si su suma es igual a 180° .

**Ángulos
complementarios**

90°

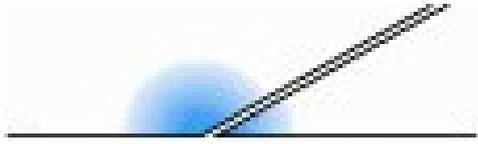
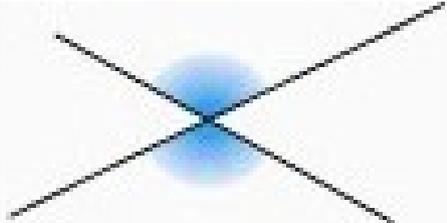


**Ángulos
suplementarios**

180°

Relaciones entre los ángulos

Dos ángulos pueden estar relacionados entre sí según la siguiente clasificación:

IGUALES	COMPLEMENTARIOS	SUPLEMENTARIOS
 <p>Tienen el mismo número de grados</p>	 <p>Entre los dos suman 90°</p>	 <p>Entre los dos suman 180°</p>
ADYACENTES	CONSECUTIVOS	OPUESTOS POR EL VÉRTICE
 <p>Tienen un lado común y los otros dos en línea recta</p>	 <p>Tienen el vértice y un lado común</p>	 <p>Tienen el vértice común y los lados de cada uno prolongación de los del otro</p>

Medida de los ángulos

Para medir o dibujar ángulos, utilizamos el transportador y expresamos su medida en **grados**.

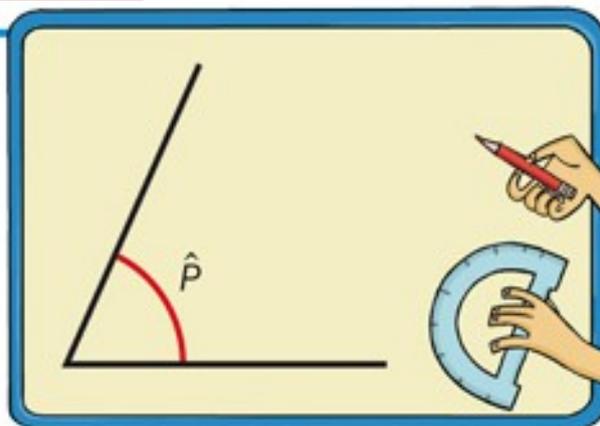
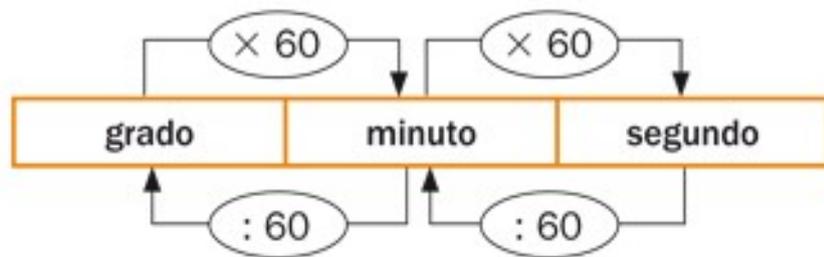
A veces, necesitamos expresar una medida con mayor precisión; entonces, utilizamos dos unidades menores que el grado: el **minuto** y el **segundo**.

$$\begin{aligned} 1 \text{ grado} &= 60 \text{ minutos} \\ 1^\circ &= 60' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ minuto} &= 60 \text{ segundos} \\ 1' &= 60'' \end{aligned}$$

El ángulo \hat{P} mide 65 grados, 42 minutos y 18 segundos. $\hat{P} = 65^\circ 42' 18''$
El ángulo \hat{P} mide entre 65° y 66° .

El grado, el minuto y el segundo forman un **sistema sexagesimal**: cada unidad es 60 veces mayor que la unidad inmediata inferior.



Las unidades de medida de ángulos son: el grado ($^\circ$), el minuto ($'$) y el segundo ($''$). Estas unidades forman un sistema sexagesimal.

$$1' = 60''$$

$$1^\circ = 60' = 3.600''$$

HAZLO ASÍ

- ¿Cuántos minutos y segundos son 456"?

$$\begin{array}{r} \text{segundos} \triangleright 456 \quad \underline{60} \\ \text{segundos} \triangleright 36 \quad 7 \triangleleft \text{minutos} \end{array}$$

$$456'' = 7' 36''$$

- ¿Cuántos grados y minutos son 582'?

$$\begin{array}{r} \text{minutos} \triangleright 582 \quad \underline{60} \\ \text{minutos} \triangleright 42 \quad 9 \triangleleft \text{grados} \end{array}$$

$$582' = 9^\circ 42'$$

- ¿Cuántos grados, minutos y segundos son 19.791"?

$$\begin{array}{r} \text{segundos} \triangleright 19791 \quad \underline{60} \\ 179 \quad 329 \triangleleft \text{minutos} \longrightarrow \text{minutos} \triangleright 329 \quad \underline{60} \\ 591 \quad \text{minutos} \triangleright 29 \quad 5 \triangleleft \text{grados} \\ \text{segundos} \triangleright 51 \end{array}$$

$$19.791'' = 329' 51'' = 5^\circ 29' 51''$$

$$529'' = \dots' \dots''$$

$$866' = \dots^\circ \dots'$$

$$32.590'' = \dots^\circ \dots' \dots''$$

$$74.096'' = \dots^\circ \dots' \dots''$$

$$1.532'' = \dots' \dots''$$

$$2.228' = \dots^\circ \dots'$$

$$54.527'' = \dots^\circ \dots' \dots''$$

$$112.345'' = \dots^\circ \dots' \dots''$$

La medida de un ángulo se puede expresar de dos formas:

Expresión compleja

$35^{\circ} 17' 28''$

Expresión incompleja

$127.048''$

RECUERDA:

Para pasar de una unidad de medida mayor a una menor, **multiplicamos**.

$$15^{\circ} = 15 \times 60 = 900'$$

$$900' = 900 \times 60 = 54.000''$$

Para pasar de una unidad de medida menor a otra mayor, **dividimos**.

$$90.000'' : 60 = 1.500'$$

$$1.500' : 60 = 25^{\circ}$$

■ Suma de ángulos



1. Colocar la suma haciendo coincidir grados, minutos y segundos.

2. Realizamos la suma.

3. Si los segundos sobrepasan 60, los transformamos en minutos.

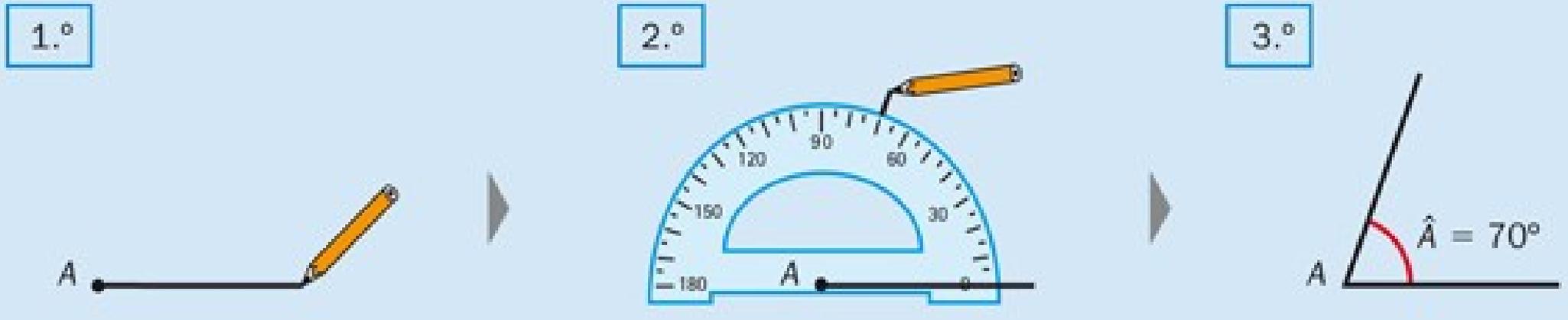
4. Si los minutos sobrepasan 60, los transformamos en grados.

$$\begin{array}{r} 35^{\circ} \quad 48' \quad 12'' \\ + \quad 45^{\circ} \quad 39' \quad 23'' \\ \hline 80^{\circ} \quad 87' \quad 35'' \\ + \quad \underline{1^{\circ}} \quad \underline{-60'} \\ \hline 81^{\circ} \quad 27' \end{array}$$

■ Trazado de un ángulo

Para trazar un ángulo de 70° , sigue estos pasos:

- 1.º Dibuja una semirrecta con origen el punto A.
- 2.º Coloca el transportador de manera que su centro coincida con el punto A y la semirrecta pase por 0° , y dibuja una rayita en la medida 70° del transportador.
- 3.º Dibuja otra semirrecta con origen el punto A que pase por la rayita marcada.



Traza estos ángulos:

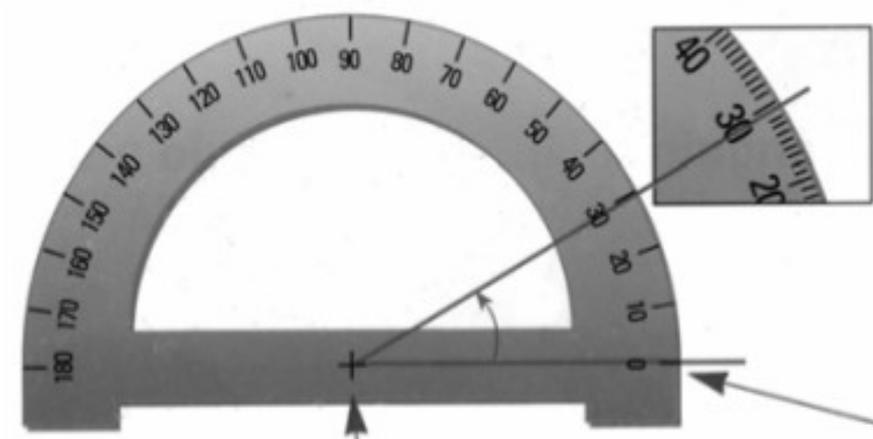
$\hat{A} = 36^\circ$ $\hat{E} = 50^\circ$ $\hat{O} = 120^\circ$

Trazado de ángulos
mayores de 180° 

■ Medida de ángulos. El transportador.

> Medida de ángulos menores de 180° :

Para medir ángulos usamos el transportador según la figura:



Alinea un lado del ángulo con el cero.

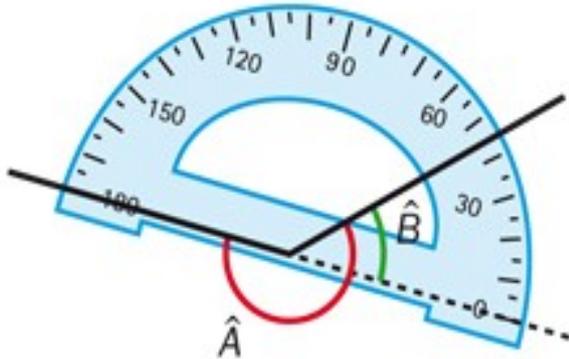
Haz coincidir el vértice del ángulo con el centro del transportador.

Medida de ángulos. El transportador.

> Medida de ángulos mayores de 180°:

El ángulo \hat{A} mide más de 180°.

Puedes medir el ángulo \hat{A} de dos formas distintas.

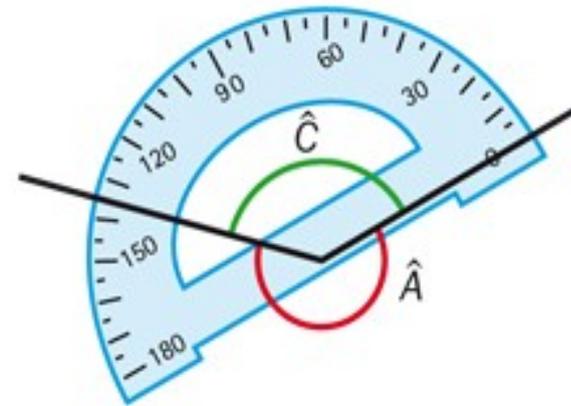


- 1.º Prolonga uno de los lados del ángulo \hat{A} y mide con el transportador el ángulo \hat{B} .

$$\hat{B} = 45^\circ$$

- 2.º Calcula la medida del ángulo \hat{A} .

$$\hat{A} = 180^\circ + \hat{B} = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$$



- 1.º Mide con el transportador el ángulo \hat{C} .

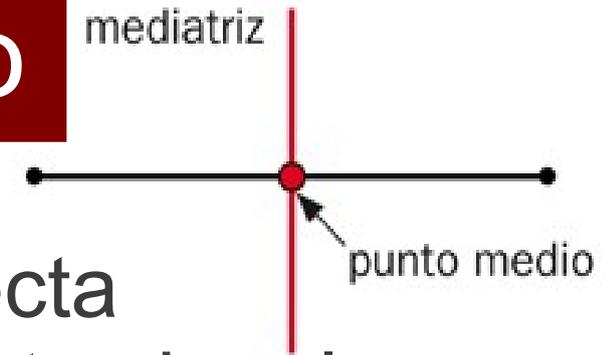
$$\hat{C} = 135^\circ$$

- 2.º Calcula la medida del ángulo \hat{A} .

$$\hat{A} = 360^\circ - \hat{C} = 360^\circ - 135^\circ = 225^\circ$$

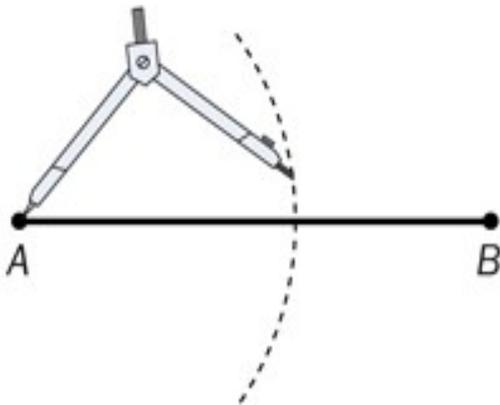
El ángulo \hat{A} mide 225°.

■ Mediatriz de un segmento

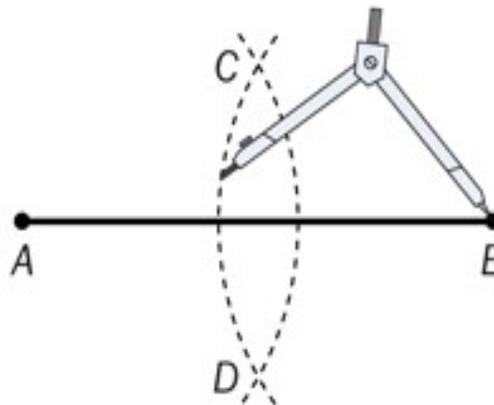


La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular que lo divide en dos partes iguales.

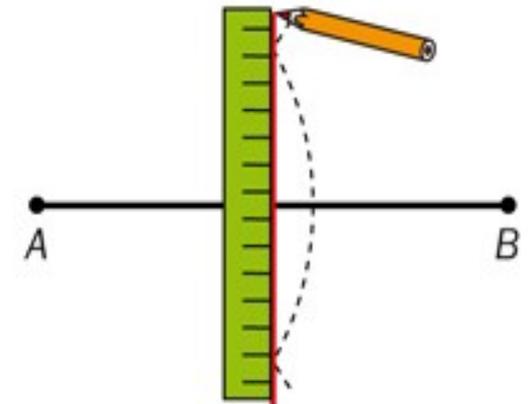
1.º Abre el compás con una abertura mayor que la mitad del segmento AB y traza un arco con centro en A .



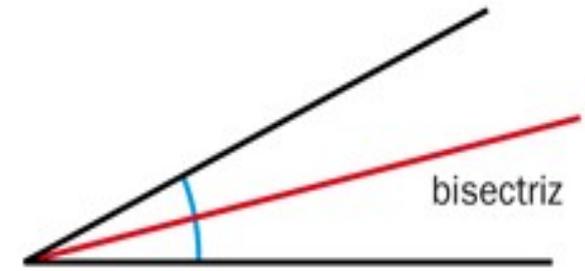
2.º Con la misma abertura, traza un arco con centro en B . Los dos arcos se cortan en los puntos C y D .



3.º Traza con la regla la recta que pasa por los puntos C y D . Esta recta es la mediatriz del segmento AB .

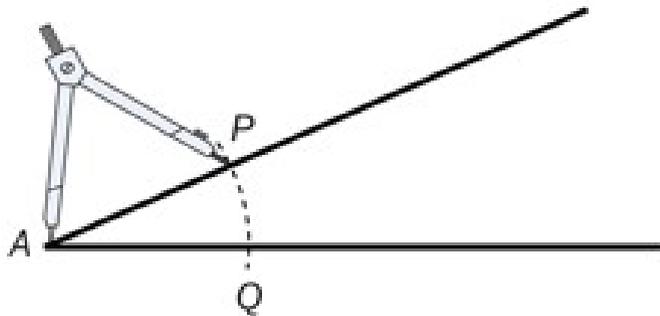


■ Bisectriz de un ángulo

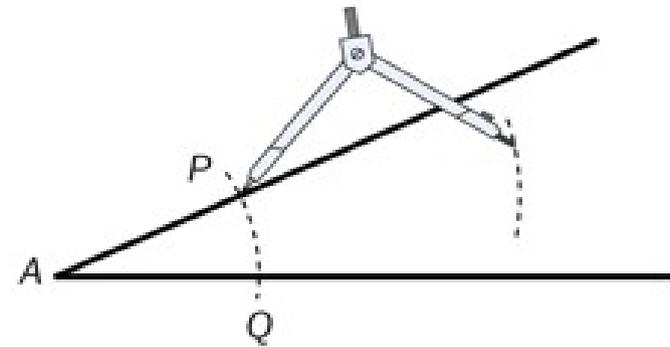


Es la semirrecta que pasa por el vértice y divide al ángulo en dos ángulos iguales.

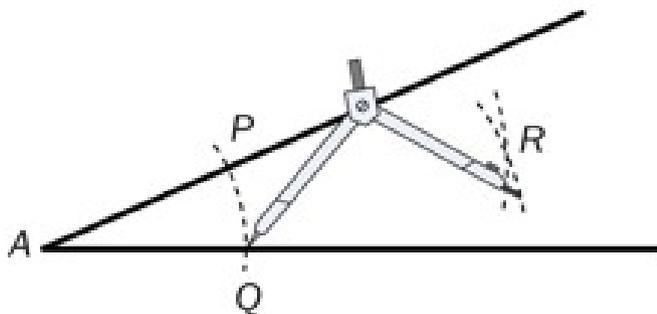
- 1.º Traza con el compás un arco con centro en el vértice del ángulo, A . Llama P y Q a los puntos de corte del arco con los lados del ángulo.



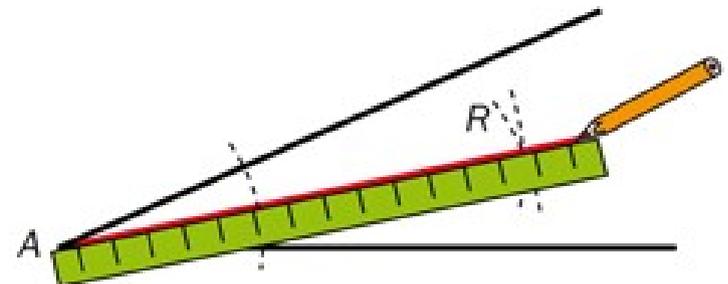
- 2.º Abre el compás y traza un arco con centro en el punto P .



- 3.º Sin mover la abertura del compás, pincha en Q y traza otro arco. Este arco se corta con el arco del paso 2.º en el punto R .

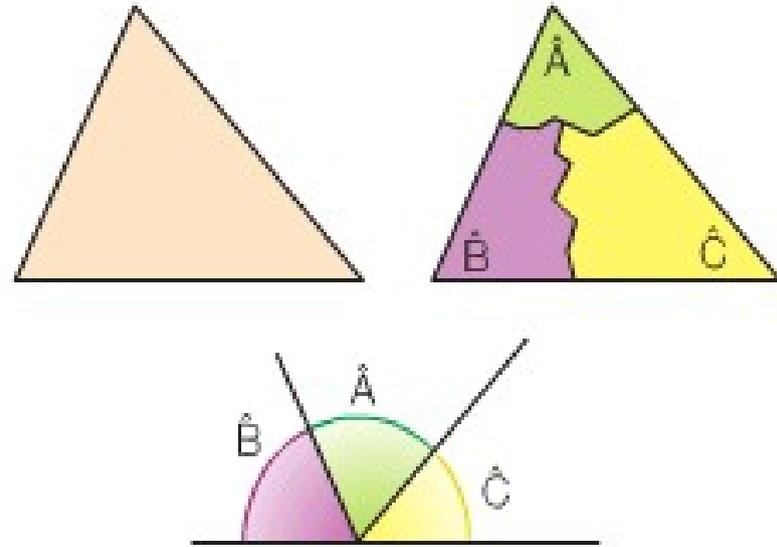


- 4.º Traza con la regla la semirrecta que pasa por el vértice del ángulo, A , y por el punto R . Esta semirrecta es la bisectriz del ángulo.

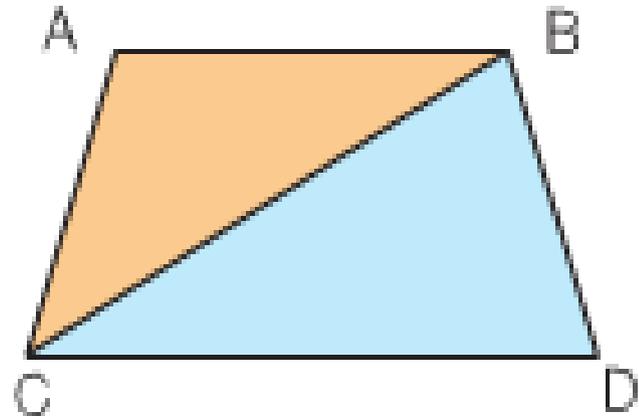


■ Los ángulos de triángulos y cuadriláteros

La suma de todos los ángulos de un **triángulo** es de **180°**



La suma de todos los ángulos de un **cuadrilátero** es de **360°**



EL TEODOLITO:



El **teodolito** es un instrumento que sirve para medir ángulos con gran precisión. Lo utilizan los topógrafos e ingenieros para medir pendientes y distancias.

Está formado por un telescopio montado sobre un trípode y dos círculos graduados, uno vertical y otro horizontal, con los que se miden los ángulos con ayuda de lentes.



Teodolito antiguo.

- ¿Has visto alguna vez a una persona utilizando un teodolito? ¿Dónde estaba? ¿Para qué crees que lo utilizaba?
- ¿Con qué otros instrumentos puedes medir un ángulo?