



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: EXTRA JULIOL 2025	CONVOCATORIA: EXTRA JULIO 2025
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES II	ASSIGNATURA: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <u>Cada problema se puntuará hasta 2,5 puntos.</u> La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Los vuelos que llegan a un aeropuerto se clasifican en tres grupos: vuelos puntuales, vuelos con retrasos de hasta tres horas y vuelos con retrasos de más de tres horas. La puntualidad de los vuelos se ve afectada por las condiciones meteorológicas del momento. Si las condiciones meteorológicas son buenas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 70% mientras que el 10% llegan con más de tres horas de retraso. Si las condiciones meteorológicas son malas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 40% mientras que el 30% llegan con más de tres horas de retraso. Se calcula que el 90% de los días las condiciones meteorológicas son buenas.

- 1.1 (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo llegue con más de 3 horas de retraso?
- 1.2 (1 punto) Sabiendo que un vuelo ha sido puntual, ¿cuál es la probabilidad de que las condiciones meteorológicas fueran malas?
- 1.3 (1 punto) Un pasajero realiza un vuelo a dicho aeropuerto, desde donde debe tomar otro vuelo a su destino final. Este segundo vuelo enlaza si el primero llega con 3 horas o menos de retraso. Si realiza este viaje una vez al mes durante un año y viaja siempre en condiciones meteorológicas buenas ¿cuál es la probabilidad de que pueda enlazar con el vuelo a su destino final en todos sus viajes?

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 Se considera la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

que depende de un parámetro real m , y las matrices

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

2.1.1 (0.5 puntos) Indicar, si existen, los valores del parámetro real m para los que D tiene inversa..

2.1.2 (1 punto) Calcular las matrices EF y $(FE)^t$, si existen.

2.1.3 (1 punto) Resolver, para $m=0$, la ecuación matricial con incógnita X :

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1}.$$

2.2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2.1 (1.25 puntos) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro real m .

2.2.2 (1.25 puntos) Para $m=0$, calcular la matriz inversa de $\frac{1}{6}A$, si existe.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dados los planos $\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2: (a-1)x - ay - z = a$, se pide:

3.1.1 (1.5 puntos) Estudiar en función de a si los planos anteriores coinciden, son paralelos no coincidentes o se cortan.

3.1.2 (0.5 puntos) Calcular, para $a=0$, el ángulo entre los planos π_1 y π_2 .

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular, para $a=0$, la distancia entre el punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 .

3.2 Dado el plano $\pi: 2x + y - 3 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$, se pide:

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano perpendicular a π y que contiene a r .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano paralelo a π y que contenga a r .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

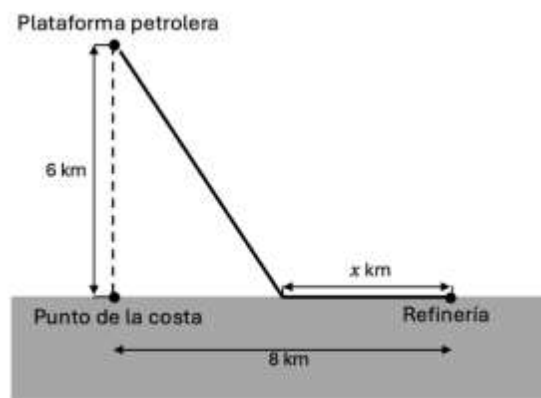
Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.1 (1.25 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, y los extremos relativos de la función $y = f(x)$.

4.1.2 (1.25 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas dadas por $f(x)$ y $g(x)$.

4.2 Una costa marítima se extiende en línea recta hacia la derecha desde un punto P de la costa. A 8 km de P hay una refinería situada en la costa. Además, hay una plataforma petrolífera en el mar que está situada a 6 km de distancia de P en la recta perpendicular a la costa desde el punto P. Se construirá un oleoducto desde la plataforma hasta la refinería. El coste de construir el oleoducto bajo el agua es de 1 millón de euros por kilómetro y el de construirlo sobre tierra, de 0,6 millones de euros por kilómetro.



4.2.1 (0.5 puntos) Encontrar la función del coste de construcción del oleoducto dependiendo de la distancia, x , entre el primer punto donde el oleoducto toca la costa y la refinería.

4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.

4.2.3 (0.5 puntos) Calcular dicho coste.

Tabla de la distribución Binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805

10	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2	0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3	1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4	1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5	1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
11	0	0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1	0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2	0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3	1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4	1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5	1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0	0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1	0,9938	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2	0,9998	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3	1,0000	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4	1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5	1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0	0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1	0,9928	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0385	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2	0,9997	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3	1,0000	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4	1,0000	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5	1,0000	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9653	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Los vuelos que llegan a un aeropuerto se clasifican en tres grupos: vuelos puntuales, vuelos con retrasos de hasta tres horas y vuelos con retrasos de más de tres horas. La puntualidad de los vuelos se ve afectada por las condiciones meteorológicas del momento. Si las condiciones meteorológicas son buenas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 70% mientras que el 10% llegan con más de tres horas de retraso. Si las condiciones meteorológicas son malas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 40% mientras que el 30% llegan con más de tres horas de retraso. Se calcula que el 90% de los días las condiciones meteorológicas son buenas.

1.1 (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo llegue con más de 3 horas de retraso?

1.2 (1 punto) Sabiendo que un vuelo ha sido puntual, ¿cuál es la probabilidad de que las condiciones meteorológicas fueran malas?

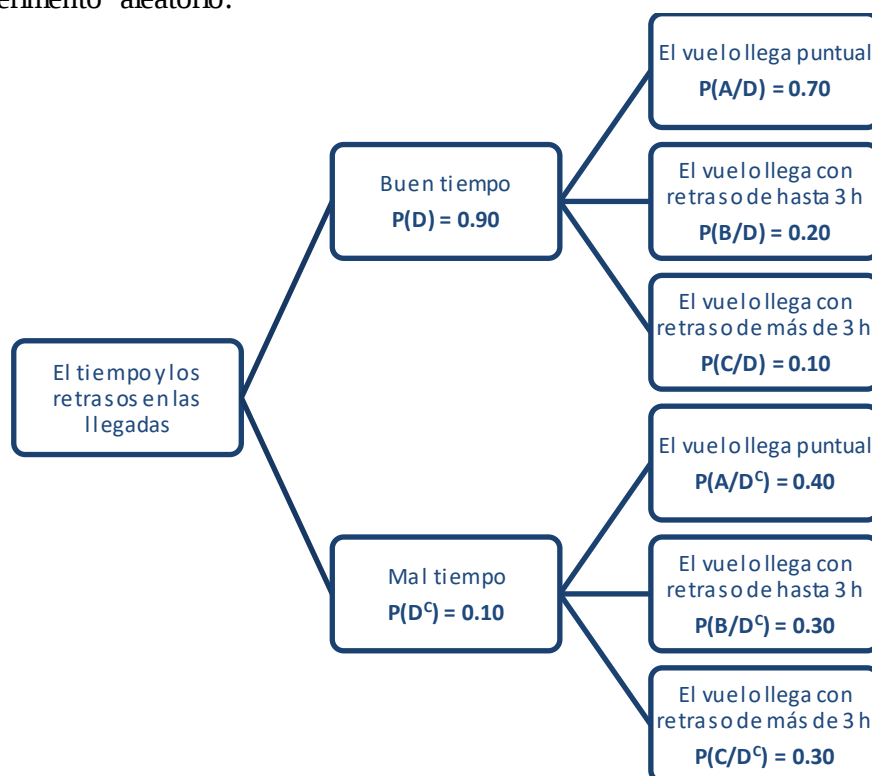
1.3 (1 punto) Un pasajero realiza un vuelo a dicho aeropuerto, desde donde debe tomar otro vuelo a su destino final. Este segundo vuelo enlaza si el primero llega con 3 horas o menos de retraso. Si realiza este viaje una vez al mes durante un año y viaja siempre en condiciones meteorológicas buenas ¿cuál es la probabilidad de que pueda enlazar con el vuelo a su destino final en todos sus viajes?

Llamamos A = “el vuelo llega puntual”, B = “el vuelo llega con 3 horas o menos de retraso”, C = “el vuelo llega con más de 3 horas de retraso” y D = “las condiciones meteorológicas del momento son buenas”.

Nos dicen que “Si las condiciones meteorológicas son buenas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 70% mientras que el 10% llegan con más de tres horas de retraso”, por lo que el restante $100 - 70 - 10 = 20\%$ llega con retraso de hasta 3 horas.

Nos dicen que “Si las condiciones meteorológicas son malas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 40% mientras que el 30% llegan con más de tres horas de retraso”, por lo que el restante $100 - 40 - 30 = 30\%$ llega con retraso de hasta 3 horas.

Realizamos un diagrama de árbol con las probabilidades asociadas a cada uno de los sucesos de este experimento aleatorio.



1.1 Nos piden calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(D)P(C/D) + P(D^c)P(C/D^c) = 0.9 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.3 = \boxed{\frac{3}{25} = 0.12}$$

La probabilidad de que un vuelo llegue con más de 3 horas de retraso es de 0.12.

1.2 Nos piden calcular $P(D^c/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(D^c/A) = \frac{P(D^c \cap A)}{P(A)} = \frac{P(D^c)P(A/D^c)}{P(D)P(A/D) + P(D^c)P(A/D^c)} =$$

$$= \frac{0.1 \cdot 0.4}{0.9 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.4} = \boxed{\frac{4}{67} \approx 0.0597}$$

La probabilidad de que las condiciones meteorológicas fueran malas sabiendo que el vuelo ha llegado puntual tiene un valor aproximado de 0.0597.

1.3 Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de vuelos que **no** le permiten enlazar de un total de 12 vuelos que realiza al año.

El número de repeticiones es $n = 12$. Sabemos que en condiciones meteorológicas buenas llegan con más de 3 horas de retraso el 10 % de los vuelos, por lo que no pueden enlazar el 10% de los vuelos. Tenemos que $p = 0.1$.

La variable X es una binomial. $X = B(12, 0.1)$.

Nos piden calcular $P(X = 0)$. Si miramos en la tabla de la binomial obtenemos que

$$P(X = 0) = 0.2824$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10
12	0		0,8861	0,5481	0,2824
	1		0,9938	0,8816	0,6590
	2		0,9998	0,9804	0,8891
	3		1,0000	0,9978	0,9744
	4		1,0000	0,9998	0,9957
	5		1,0000	1,0000	0,9995

OTRA FORMA DE RESOLVERLO.

Sin uso de la binomial.

Con buenas condiciones meteorológicas puede enlazar el 90% de los vuelos diarios, por lo que la probabilidad de enlazar un vuelo es 0.9.

La probabilidad de que pueda enlazar todos los vuelos de los 12 que hace al mes es el producto de las probabilidades de enlazar el vuelo cada día y al ser sucesos independientes la probabilidad es $0.9 \cdot 0.9 \cdot \dots \cdot 0.9 = 0.9^{12} \approx 0.2824$

2.1 Se considera la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

que depende de un parámetro real m , y las matrices

$$E = (1 \quad 4 \quad 3) \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

2.1.1 (0.5 puntos) Indicar, si existen, los valores del parámetro real m para los que D tiene inversa.

2.1.2 (1 punto) Calcular las matrices EF y $(FE)^t$, si existen.

2.1.3 (1 punto) Resolver, para $m=0$, la ecuación matricial con incógnita X :

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1}.$$

2.1.1 Averiguamos cuando la matriz D tiene determinante nulo.

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - m^2 - 0 - 0 - 1 = -m^2 - 1$$

$$|D| = 0 \Rightarrow -m^2 - 1 = 0 \Rightarrow -1 = m^2 \Rightarrow m = \sqrt{-1} = \text{¡Imposible!}$$

El determinante de la matriz D nunca se anula y por tanto la matriz D siempre es invertible, independientemente del valor de m .

2.1.2 Determinamos la expresión de la matriz EF .

$$EF = (1 \quad 4 \quad 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 + 8 - 3) = (6)$$

$$1 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 1 \rightarrow 1 \times 1$$

Determinamos la expresión de la matriz $(FE)^t$.

$$FE = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \quad 4 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (FE)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{1 \cdot 1} \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$$

Ambas matrices existen siendo $EF = (6)$ y $(FE)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

2.1.3 Despejamos X de la ecuación matricial.

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1} \Rightarrow \frac{1}{2}X = D^{-1} - D \Rightarrow X = 2(D^{-1} - D)$$

Para $m=0$ la matriz D queda $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, hallamos la expresión de D^{-1}

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = -1 \neq 0$$

$$D^{-1} = \frac{\text{Adj}(D^T)}{|D|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de X .

$$X = 2(D^{-1} - D) = 2 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2.2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2.1 (1.25 puntos) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro real m.

2.2.2 (1.25 puntos) Para $m=0$, calcular la matriz inversa de $\frac{1}{6}A$, si existe.

2.2.1 Calculamos el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - m(m-1) + 0 - (m+1)(m-1) - 0 - 0 =$$

$$= 5 - m^2 + m - (m^2 - 1^2) = 5 - m^2 + m - m^2 + 1 = -2m^2 + m + 6$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = 0 \Rightarrow -2m^2 + m + 6 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)6}}{2(-2)} = \frac{-1 \pm 7}{-4} = \begin{cases} \frac{-1+7}{-4} = \boxed{\frac{-3}{2} = m} \\ \frac{-1-7}{-4} = \boxed{2 = m} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m \neq \frac{-3}{2}$ y $m \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $m = \frac{-3}{2}$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3/2+1 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ -3/2-1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ -5/2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la primera columna su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 0 = 5 \neq 0$$

El rango de A es 2.

CASO 3. $m = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2-1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$ Si tomamos el menor de orden 2

que resulta de quitar la primera fila y la primera columna su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 0 = 5 \neq 0$$

El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $m \neq \frac{-3}{2}$ y $m \neq 2$ el rango de A es 3 y si $m = 2$ o $m = \frac{-3}{2}$ la matriz tiene rango 2.

2.2.2 Para $m = 0$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, por lo que

$$\frac{1}{6}A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ -1/6 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su inversa.

$$\left| \frac{1}{6}A \right| = \begin{vmatrix} 1/6 & -1/6 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ -1/6 & 0 & 5/6 \end{vmatrix} = \frac{5}{6^3} + 0 + 0 + \frac{1}{6^3} - 0 - 0 = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36} \neq 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{6}A \right)^{-1} &= \frac{\text{Adj} \left(\left(\frac{1}{6}A \right)^T \right)}{\left| \frac{1}{6}A \right|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ -1/6 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}}{\frac{1}{36}} = \\ &= 36 \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 5/6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1/6 & 0 \\ 1/6 & 5/6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -1/6 \\ 0 & 5/6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & 5/6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1/6 & 0 \\ 1/6 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -1/6 \\ 1/6 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1/6 & -1/6 \\ -1/6 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1/6 & 0 \\ -1/6 & 1/6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= 36 \begin{pmatrix} 5/36 & 5/36 & -1/36 \\ 0 & 5/36 + 1/36 & 0 \\ 1/36 & 1/36 & 1/36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.1 Dados los planos $\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2: (a-1)x - ay - z = a$, se pide:

3.1.1 (1.5 puntos) Estudiar en función de a si los planos anteriores coinciden, son paralelos no coincidentes o se cortan.

3.1.2 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, el ángulo entre los planos π_1 y π_2 .

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, la distancia entre el punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 .

3.1.1 Estudiamos la posición relativa de los planos teniendo en cuenta sus vectores normales.

$$\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1 \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, -a^2, -a)$$

$$\pi_2: (a-1)x - ay - z = a \Rightarrow \vec{n}_2 = (a-1, -a, -1)$$

Estudiamos cuando los vectores normales de los planos tienen la misma dirección (coordenadas proporcionales).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (2, -a^2, -a) \\ \vec{n}_2 = (a-1, -a, -1) \\ \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{a-1} = \frac{-a^2}{-a} = \frac{-a}{-1} \Rightarrow \{a \neq 0\} \Rightarrow \frac{2}{a-1} = a = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = a^2 - a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \boxed{2=a} \\ \frac{1-3}{2} = \boxed{-1=a} \end{cases}$$

Para $a \neq 0, a \neq 2$ y $a \neq -1$ los vectores normales de los dos planos no tienen coordenadas proporcionales y por tanto los planos son secantes (coinciden en una recta).

Para $a = 0$ los planos quedan $\pi_1: 2x = -1$ y $\pi_2: -x - z = 0 \Rightarrow \pi_2: x + z = 0$. Los planos son secantes (coinciden en una recta)

Para $a = 2$ los planos quedan $\pi_1: 2x - 4y - 2z = 1 \rightarrow \pi_1: x - 2y - z = \frac{1}{2}$ y $\pi_2: x - 2y - z = 2$.

Como las ecuaciones de los planos solo difieren en el coeficiente D los planos no son coincidentes y son paralelos.

Para $a = -1$ los planos quedan $\pi_1: 2x - y + z = -2$ y $\pi_2: -2x + y - z = -1 \rightarrow 2x - y + z = 1$.

$\pi_2: x - 2y - z = 2$. Como las ecuaciones de los planos solo difieren en el coeficiente D los planos son paralelos.

Resumiendo: Si $a \neq 2$ y $a \neq -1$ los planos son secantes (coinciden en una recta) y si $a = 2$ o $a = -1$ los planos son paralelos.

3.1.2 Para $a = 0$ los planos son secantes y sus ecuaciones son $\pi_1: 2x = -1$ y $\pi_2: x + z = 0$.

Hallamos el ángulo que forman los vectores normales de los planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x = -1 \rightarrow \vec{n}_1 = (2, 0, 0) \\ \pi_2 : x + z = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{(2, 0, 0)(1, 0, 1)}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

El ángulo entre los planos es de 45° , pues es el mismo que existe entre sus vectores normales.

3.1.3 Para $a = 0$ el plano π_1 tiene ecuación $\pi_1 : 2x = -1$. Hallamos la distancia pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x + 1 = 0 \\ P = (1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi_1) = \frac{|2 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ unidades}$$

Para $a = 0$ la distancia entre el punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 tiene un valor de 1.5 unidades.

3.2 Dado el plano $\pi: 2x + y - 3 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$, se pide:

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano perpendicular a π y que contiene a r .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano paralelo a π y que contenga a r .

3.2.1 Obtenemos un punto y un vector director de la recta r .

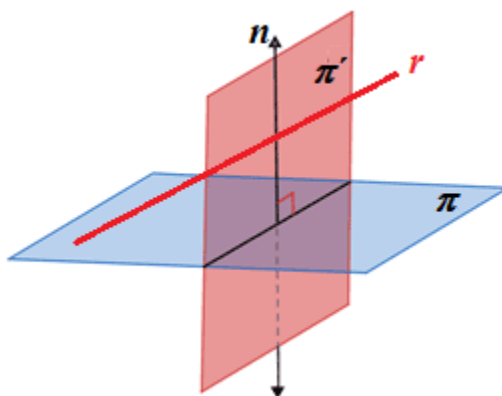
$$r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -2, 0) \\ P_r(1, -1, 1) \end{cases}$$

El plano π' perpendicular a π tiene como vector director el vector normal del plano π . Al contener a la recta r otro de sus vectores directores es el vector director de la recta $\vec{v}_r = (1, -2, 0)$, además debe contener el punto $P_r(1, -1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y - 3 = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{n} = (2, 1, 0) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -2, 0) \\ P_r(1, -1, 1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 0 - 4(z-1) - (z-1) - 0 - 0 = 0 \Rightarrow -5(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': z-1=0}$$

La ecuación del plano π' perpendicular a π y que contiene a r es $\pi': z-1=0$.



3.2.2 La recta r es paralela al plano π . Lo comprobamos viendo que el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares, es decir, su producto escalar es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, 0) \\ \vec{v}_r = (1, -2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (2, 1, 0) \cdot (1, -2, 0) = 2 - 2 + 0 = 0$$

Por este motivo podemos decir que si existe un plano π'' paralelo al plano π que contenga la recta r .

Este plano al ser paralelo a $\pi: 2x + y - 3 = 0$ debe tener ecuación $\pi'': 2x + y + D = 0$.

Como el plano contiene la recta r debe contener el punto $P_r(1, -1, 1)$ de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, -1, 1) \in \pi'' \\ \pi'': 2x + y + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi'': 2x + y - 1 = 0}$$

El plano π'' paralelo a π y que contiene a r existe y tiene ecuación $\pi'': 2x + y - 1 = 0$.

4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.1 (1.25 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, y los extremos relativos de la función $y = f(x)$.

4.1.2 (1.25 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas dadas por $f(x)$ y $g(x)$.

4.1.1 Hallamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$f(x) = x^4 - 7x^2 + 16 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 14x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 14x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 7 = 0 \rightarrow 2x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \end{cases}$$

La función tiene tres puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ tomamos el valor $x = -10$ y la derivada vale

$$f'(-10) = 4(-10)^3 - 14(-10) = -3860 < 0. \text{ La función decrece en } \left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right).$$

- En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right)$ tomamos el valor $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = 4(-1)^3 - 14(-1) = 10 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right).$$

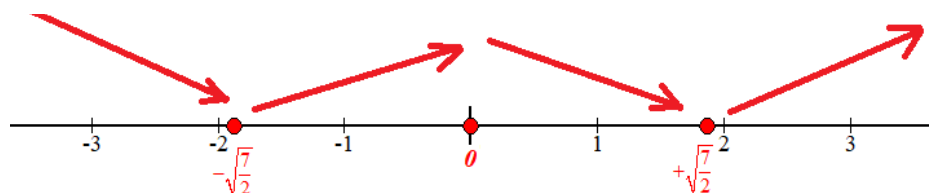
- En el intervalo $\left(0, +\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ tomamos el valor $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 14 \cdot 1 = -10 < 0. \text{ La función decrece en } \left(0, +\sqrt{\frac{7}{2}}\right).$$

- En el intervalo $\left(+\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty\right)$ tomamos el valor $x = 10$ y la derivada vale

$$f'(10) = 4 \cdot 10^3 - 14 \cdot 10 = 3860 > 0. \text{ La función crece en } \left(+\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty\right).$$

La función sigue el esquema siguiente.



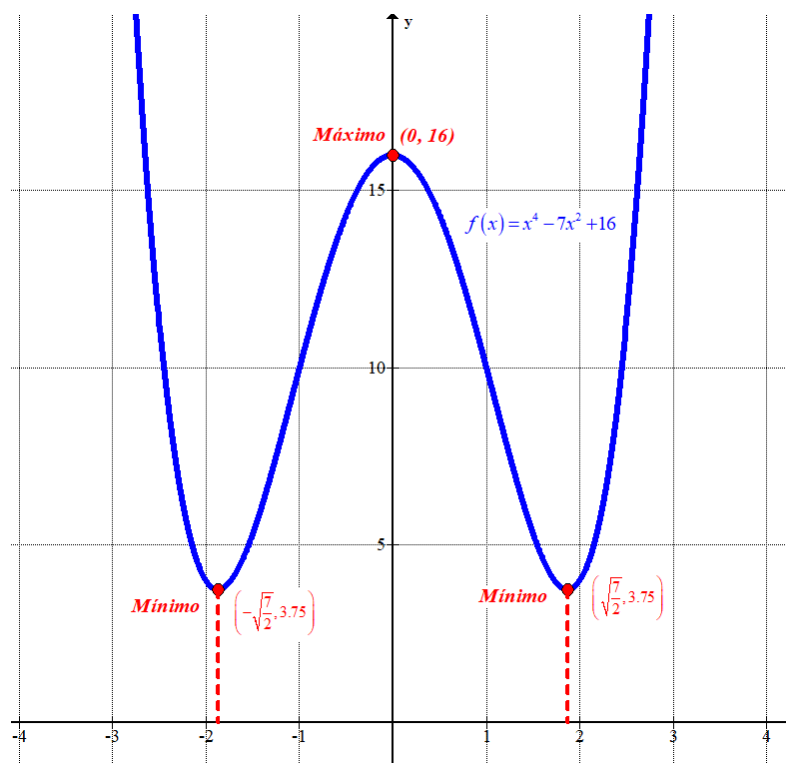
La función decrece en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \cup \left(0, +\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ y crece en $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right) \cup \left(+\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty\right)$.

Como $f\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^4 - 7\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 + 16 = 3.75$ la función presenta un mínimo relativo en $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 3.75\right)$.

Como $f(0) = 0^4 - 7 \cdot 0^2 + 16 = 16$ la función presenta un máximo relativo en $(0, 16)$.

Como $f\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^4 - 7\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 + 16 = 3.75$ la función presenta un mínimo relativo en $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}, 3.75\right)$.

Dibujamos la gráfica de la función.



4.1.2 Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^4 - 7x^2 + 16 \\ g(x) = x^2 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^4 - 7x^2 + 16 = x^2 \Rightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \Rightarrow$$

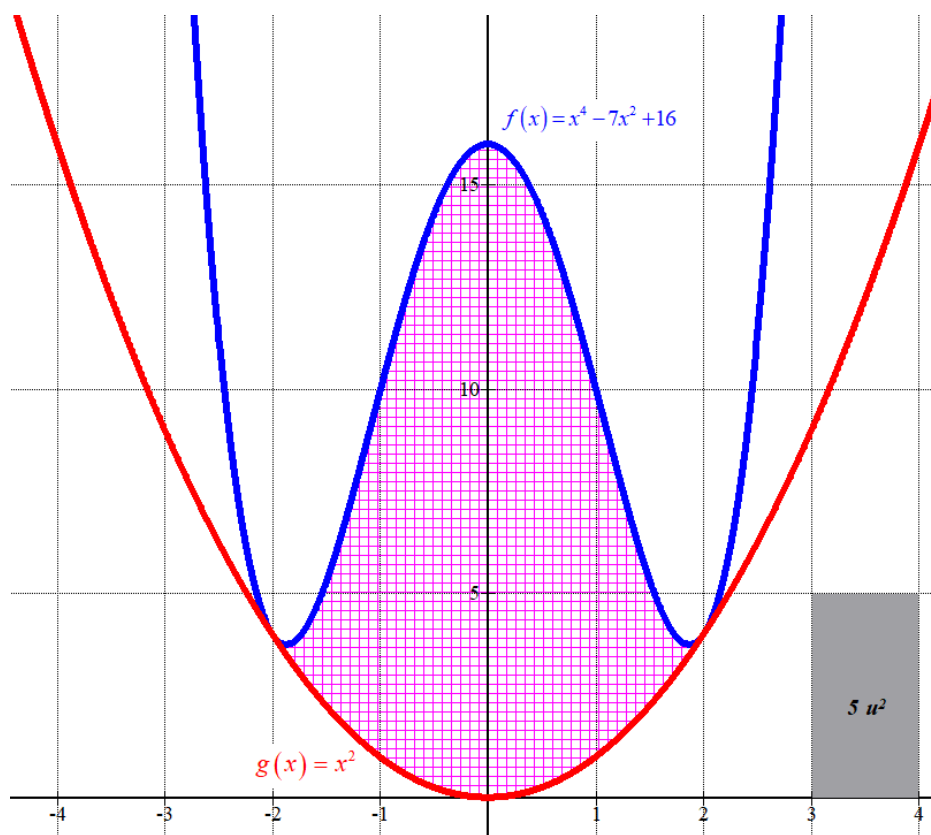
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación bicuadrada} \\ x^2 = t \rightarrow x^4 = t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow t^2 - 8t + 16 = 0 \Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^4 - 7(-2)^2 + 16 = 4 \rightarrow \boxed{A(-2, 4)} \\ x = 2 \rightarrow f(2) = 2^4 - 7 \cdot 2^2 + 16 = 4 \rightarrow \boxed{B(2, 4)} \end{cases}$$

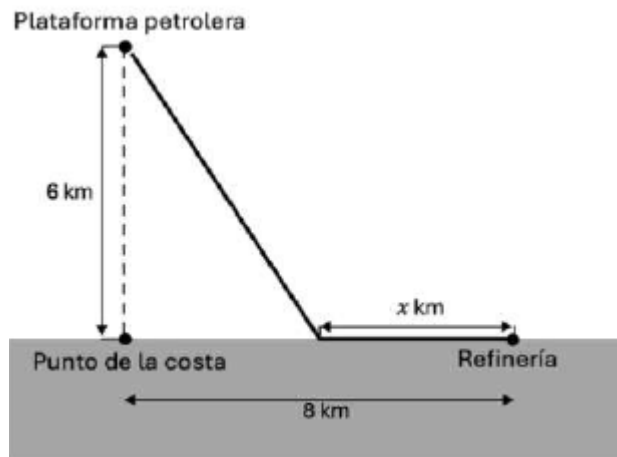
Los puntos de corte de ambas gráficas son $A(-2, 4)$ y $B(2, 4)$.

Como $\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^4 - 7 \cdot 0 + 16 = 16 \\ g(0) = 0^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) > g(0)$ el área comprendida entre ambas curvas es el valor de la integral definida entre -2 y 2 de $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^2 f(x) - g(x) dx = \int_{-2}^2 x^4 - 7x^2 + 16 - x^2 dx = \int_{-2}^2 x^4 - 8x^2 + 16 dx = \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right]_{-2}^2 = \left[\frac{2^5}{5} - \frac{8 \cdot 2^3}{3} + 16 \cdot 2 \right] - \left[\frac{(-2)^5}{5} - \frac{8(-2)^3}{3} + 16(-2) \right] = \\ &= \frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 + \frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 = \boxed{\frac{512}{15} \approx 34.13 u^2} \end{aligned}$$



4.2 Una costa marítima se extiende en línea recta hacia la derecha desde un punto P de la costa. A 8 km de P hay una refinería situada en la costa. Además, hay una plataforma petrolífera en el mar que está situada a 6 km de distancia de P en la recta perpendicular a la costa desde el punto P. Se construirá un oleoducto desde la plataforma hasta la refinería. El coste de construir el oleoducto bajo el agua es de 1 millón de euros por kilómetro y el de construirlo sobre tierra, de 0,6 millones de euros por kilómetro.

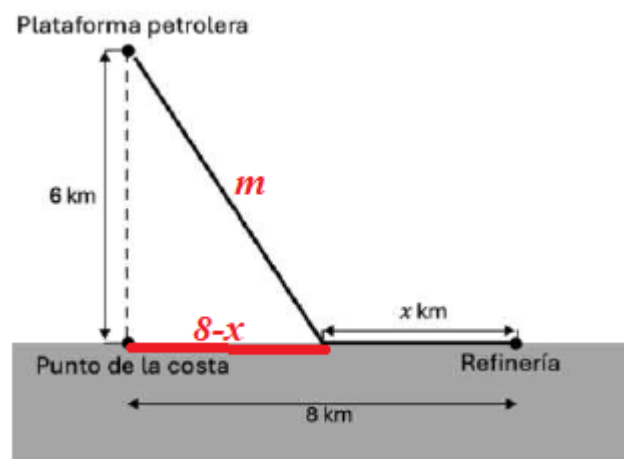


4.2.1 (0.5 puntos) Encontrar la función del coste de construcción del oleoducto dependiendo de la distancia, x , entre el primer punto donde el oleoducto toca la costa y la refinería.

4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.

4.2.3 (0.5 puntos) Calcular dicho coste.

4.2.1 Añadimos datos al dibujo para obtener los valores de longitud m del oleoducto en el mar.



Para obtener el valor de m aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos 6 y $8-x$.

$$m^2 = 6^2 + (8-x)^2 \Rightarrow m^2 = 36 + 64 + x^2 - 16x = x^2 - 16x + 100 \Rightarrow m = \sqrt{x^2 - 16x + 100}$$

Como el coste de construir el oleoducto bajo el agua es de 1 millón de euros por kilómetro y el de construirlo sobre tierra, de 0,6 millones de euros por kilómetro tenemos que el coste total del oleoducto es $C(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2 - 16x + 100} + 0.6x = 0.6x + \sqrt{x^2 - 16x + 100}$, siendo $0 \leq x \leq 8$. El coste está expresado en millones de euros.

4.2.2 Averiguamos cuando se anula la derivada de la función coste.

$$C(x) = 0.6x + \sqrt{x^2 - 16x + 100} \Rightarrow C'(x) = 0.6 + \frac{2x - 16}{2\sqrt{x^2 - 16x + 100}}$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 0.6 + \frac{2x - 16}{2\sqrt{x^2 - 16x + 100}} = 0 \Rightarrow \frac{2x - 16}{2\sqrt{x^2 - 16x + 100}} = -0.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - 8}{\sqrt{x^2 - 16x + 100}} = -0.6 \Rightarrow x - 8 = -0.6\sqrt{x^2 - 16x + 100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 8)^2 = \left(-0.6\sqrt{x^2 - 16x + 100}\right)^2 \Rightarrow x^2 + 64 - 16x = 0.36(x^2 - 16x + 100) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 64 - 16x = 0.36x^2 - 5.76x + 36 \Rightarrow 0.64x^2 - 10.24x + 28 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{10.24 \pm \sqrt{(-10.24)^2 - 4 \cdot 0.64 \cdot 28}}{2 \cdot 0.64} = \frac{10.24 \pm 5.76}{1.28} = \begin{cases} \frac{10.24 + 5.76}{1.28} = 12.5 \notin [0, 8] \\ \frac{10.24 - 5.76}{1.28} = 3.5 \in [0, 8] \end{cases}$$

La función coste tiene un punto crítico para $x = 3.5$. Comprobamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $[0, 3.5)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$C'(1) = 0.6 + \frac{1 - 8}{\sqrt{1^2 - 16 \cdot 1 + 100}} = 0.6 + \frac{-7}{\sqrt{85}} \approx -0.16 < 0. \text{ La función decrece en } [0, 3.5).$$

- En el intervalo $(3.5, 8]$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale

$$C'(5) = 0.6 + \frac{5 - 8}{\sqrt{5^2 - 16 \cdot 5 + 100}} = 0.6 + \frac{-3}{\sqrt{45}} \approx 0.15 > 0. \text{ La función crece en } (3.5, 8].$$

Como la función decrece antes y crece después de $x = 3.5$ podemos afirmar que la función presenta un mínimo en $x = 3.5$.

El coste mínimo del oleoducto se consigue entrando en tierra a 3.5 kilómetros de la refinera.

4.2.3 Calculamos el valor del coste mínimo.

$$C(3.5) = 0.6 \cdot 3.5 + \sqrt{3.5^2 - 16 \cdot 3.5 + 100} = 9.6$$

El coste mínimo del oleoducto es de 9.6 millones de euros.