



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: JULIOL 2025 (reserva)	CONVOCATORIA: JULIO 2025 (reserva)
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <u>Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.</u> La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Se ha realizado una encuesta a 120 miembros de un club de lectura sobre sus preferencias literarias. La siguiente tabla muestra los resultados clasificados por edad y tipo de obra preferido.

Edad/Tipo de obra	Novela	Poesía	Obras de teatro	Ensayos
< 25 años	17	6	7	1
25 - 60 años	22	17	10	3
> 60 años	8	12	11	6

1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el tipo de obra preferido de una persona seleccionada al azar no sea el ensayo?

1.2 (0.75 puntos) Si se sabe que un miembro del club NO tiene como tipo de obra preferido la poesía, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 25 años o más?

1.3 (1 punto) Dados 10 miembros del club que tienen entre 25 y 60 años, ambos incluidos. ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 3 de ellos tengan como tipo de obra preferido o bien las obras de teatro o bien los ensayos?

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular.

2.1.1 (0.75 puntos) La matriz X , si existe, tal que $2AX = BX + I$, siendo I la matriz identidad 2×2 .

2.1.2 (0.75 puntos) Si existen, los valores del parámetro real α tales que $4A^2 + \alpha A - I = 0$, siendo 0 la matriz nula 2×2 .

2.1.3 (1 punto) A^{12} .

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

donde a es un parámetro real, Se pide:

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular las soluciones del sistema éste sea compatible.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dado el plano $\pi: 2x - z = 1$, calcular:

3.1.1 (1.25 puntos) Si existe, el plano perpendicular a π que contiene a la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = y \end{cases}$.

3.1.2 (1.25 puntos) Los planos paralelos a π cuya distancia al punto $P=(0,1,2)$ es 2.

3.2 Se considera el plano π con ecuación $2x + 3y - z = 0$ y los cuatro puntos $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,-20)$, $C = (0,15,-30)$ y $D = (1,2,-1)$.

3.2.1 (0.5 puntos) Comprobar si el triángulo ABC pertenece al plano π .

3.2.2 (0.5 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

3.2.3 (1.5 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9 - x^2}$

4.1.1 (0.75 puntos) Calcular el dominio de definición, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.2 (0.25 puntos) Dibujar la curva $y = f(x)$.

4.1.3 (0.75 puntos) Hallar todas las primitivas de f .

4.1.4 (0.75 puntos) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abscisas.

4.2 Se quiere construir un bote de refresco cilíndrico de volumen 33 cm^3 que tenga área total (incluyendo las tapas) mínima. Se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Expresar el área total del bote en función del radio de su base y de su altura.

4.2.2 (1.5 puntos) Obtener las dimensiones que minimizan el área total del bote.

4.2.3 (0.5 puntos) Hallar dicha área.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
 Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8869	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4662	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
11	0		0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1		0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2		0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3		1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0		0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1		0,9938	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2		0,9998	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3		1,0000	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4		1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5		1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0		0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1		0,9928	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0385	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2		0,9997	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3		1,0000	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4		1,0000	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5		1,0000	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9653	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Se ha realizado una encuesta a 120 miembros de un club de lectura sobre sus preferencias literarias. La siguiente tabla muestra los resultados clasificados por edad y tipo de obra preferido.

Edad/Tipo de obra	Novela	Poesía	Obras de teatro	Ensayos
< 25 años	17	6	7	1
25 - 60 años	22	17	10	3
> 60 años	8	12	11	6

1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el tipo de obra preferido de una persona seleccionada al azar no sea el ensayo?

1.2 (0.75 puntos) Si se sabe que un miembro del club NO tiene como tipo de obra preferido la poesía, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 25 años o más?

1.3 (1 punto) Dados 10 miembros del club que tienen entre 25 y 60 años, ambos incluidos. ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 3 de ellos tengan como tipo de obra preferido o bien las obras de teatro o bien los ensayos?

1.1 Completamos la tabla sumando filas y columnas.

Edad/Tipo de obra	Novela	Poesía	Obras de teatro	Ensayos	TOTALES
< 25 años	17	6	7	1	31
25 - 60 años	22	17	10	3	52
> 60 años	8	12	11	6	37
TOTALES	47	35	28	10	120

Hay 47 miembros que prefieren novela, 35 poesía y 28 obras de teatro. Esto hace un total de $120 - 10 = 110$ que no prefieren el ensayo. La probabilidad de que el tipo de obra preferido de una persona seleccionada al azar no sea el ensayo vale $\frac{110}{120} = \frac{11}{12} \approx 0.9167$.

1.2 Hay $120 - 35 = 85$ miembros que no prefieren la poesía y de estos $17 + 7 + 1 = 25$ tienen menos de 25 años, por lo que $85 - 25 = 60$ tienen 25 años o más. La probabilidad de que la persona elegida que no le gusta la poesía tenga 25 años o más vale $\frac{60}{85} = \frac{12}{17} \approx 0.7059$.

1.3 Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de miembros con edad comprendida entre 25 y 60 años de un grupo de 10 que prefieren obras de teatro o ensayos. Esta variable es una binomial de parámetros $n = 10$ y $p =$ probabilidad de que un miembro con edad entre 25 y 60 años prefiera obras de teatro o ensayos $= \frac{10+3}{52} = \frac{13}{52} = 0.25$.

$X = B(10, 0.25)$.

Nos piden calcular $P(X \leq 3)$. Mirando en la tabla tenemos que $P(X \leq 3) = 0.7759$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,1440	0,1
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,3770	0,2
	3		1,0000	0,9999	0,9887	0,9298	0,7759	0,3
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,4
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,5
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,6
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,7
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,8
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0

2.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular.

2.1.1 (0.75 puntos) La matriz X , si existe, tal que $2AX = BX + I$, siendo I la matriz identidad 2×2 .

2.1.2 (0.75 puntos) Si existen, los valores del parámetro real α tales que $4A^2 + \alpha A - I = 0$, siendo 0 la matriz nula 2×2 .

2.1.3 (1 punto) A^{12} .

2.1.1 Despejamos X en la ecuación matricial.

$$2AX = BX + I \Rightarrow 2AX - BX = I \Rightarrow (2A - B)X = I \Rightarrow X = (2A - B)^{-1}$$

Determinamos la inversa de la matriz $2A - B$.

$$2A - B = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|2A - B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

$$(2A - B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((2A - B)^T)}{|2A - B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación es $X = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

2.1.2 Buscamos los valores de α para que se cumpla lo pedido.

$$4A^2 + \alpha A - I = 0 \Rightarrow 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & \alpha \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & \alpha \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & \alpha \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

Para $\alpha = 0$ se cumple la igualdad.

2.1.3 Calculamos las primeras potencias de la matriz A en busca de una regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} I$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} A$$

$$A^4 = AA^3 = A \frac{1}{4} A = \frac{1}{4} A^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} I = \frac{1}{4^2} I$$

$$A^5 = AA^4 = A \frac{1}{4^2} I = \frac{1}{4^2} A$$

$$A^6 = AA^5 = A \frac{1}{4^2} A = \frac{1}{4^2} A^2 = \frac{1}{4^2} \frac{1}{4} I = \frac{1}{4^3} I$$

$$A^{12} = A^6 A^6 = \frac{1}{4^3} I \frac{1}{4^3} I = \frac{1}{4^6} I = \begin{pmatrix} \frac{1}{4^6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^6} \end{pmatrix}$$

Hemos comprobado que $A^{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4^6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4096} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4096} \end{pmatrix}.$

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

donde a es un parámetro real, Se pide:

2.2.1 **(1.25 puntos)** Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 **(1.25 puntos)** Calcular las soluciones del sistema éste sea compatible.

2.2.1 La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1+a & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1-a \\ 1+a & 2 & 1 & a \\ a & -1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1+a & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + a - 2 - 2a - 4a - 1 - a + 3 = 6 - 6a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 6 - 6a = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Surgen dos situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Convertimos este sistema en otro

triangular equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 3 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \\ -3 \quad 3 \quad -3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 4 \quad -1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 6 \quad 6 \quad 3 \quad 3 \\ -6 \quad -2 \quad -4 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 4 \quad -1 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 4 \quad -1 \quad 0 \\ 0 \quad -4 \quad 1 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{A/B} & & \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

2.2.2 Para $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1+a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1+a)x + 2y + z = a \\ z = 1 - a + y - ax \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 2(1 - a + y - ax) = 1 - a \\ (1+a)x + 2y + 1 - a + y - ax = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 2 - 2a + 2y - 2ax = 1 - a \\ x + \cancel{ax} + 2y + 1 - a + y - \cancel{ax} = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-2a)x + 3y = -1 + a \\ x + 3y = 2a - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3-2a)x + 3y = -1 + a \\ x = 2a - 1 - 3y \end{cases} \Rightarrow (3-2a)(2a-1-3y) + 3y = -1 + a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a - 3 - 9y - 4a^2 + 2a + 6ay + 3y = -1 + a \Rightarrow (-6 + 6a)y = 4a^2 - 7a + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{4a^2 - 7a + 2}{6a - 6}} \Rightarrow x = 2a - 1 - 3 \frac{4a^2 - 7a + 2}{6a - 6} = 2a - 1 - \frac{4a^2 - 7a + 2}{2a - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\cancel{4a^2} - 2a - 4a + \cancel{2} - \cancel{4a^2} + 7a - \cancel{2}}{2a - 2}} = \frac{a}{2a - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 1 - a + \frac{4a^2 - 7a + 2}{6a - 6} - a \frac{a}{2a - 2} = \frac{6a - 6 - 6a^2 + 6a + 4a^2 - 7a + 2}{6a - 6} - \frac{3a^2}{6a - 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{-5a^2 + 5a - 4}{6a - 6}}$$

Para $a \neq 1$ la solución del sistema es $x = \frac{a}{2a - 2}$, $y = \frac{4a^2 - 7a + 2}{6a - 6}$, $z = \frac{-5a^2 + 5a - 4}{6a - 6}$.

OTRA FORMA DE RESOLVER el apartado 2.2.2

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1+a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 3}^a \\ (1+a)x + 2y + z = a \\ \hline -ax + y - z = -1 + a \\ \hline x + 3y = -1 + 2a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 1}^a - 2 \cdot \text{Ecuación 3}^a \\ 3x + y + 2z = 1 - a \\ \hline -2ax + 2y - 2z = -2 + 2a \\ \hline (3-2a)x + 3y = -1 + a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (3-2a)x + 3y = -1 + a \\ x + 3y = -1 + 2a \\ \hline ax - y + z = 1 - a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 1}^a - \text{Ecuación 2}^a \\ (3-2a)x + 3y = -1 + a \\ \hline -x - 3y = 1 - 2a \\ \hline (2-2a)x = -a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (2-2a)x = -a \\ x + 3y = -1 + 2a \\ \hline ax - y + z = 1 - a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = \frac{-a}{2-2a}} \\ x + 3y = -1 + 2a \\ \hline ax - y + z = 1 - a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{-a}{2-2a} + 3y = -1 + 2a \\ \hline a \frac{-a}{2-2a} - y + z = 1 - a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3y = -1 + 2a + \frac{a}{2-2a} = \frac{-2 + 2a + 4a - 4a^2 + a}{2-2a} = \frac{-4a^2 + 7a - 2}{2-2a} \\ \hline \frac{-a^2}{2-2a} - y + z = 1 - a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = \frac{-4a^2 + 7a - 2}{3(2-2a)}} \\ -y + z = 1 - a + \frac{a^2}{2-2a} = \frac{2-2a-2a+2a^2+a^2}{2-2a} = \frac{3a^2-4a+2}{2-2a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{-4a^2 + 7a - 2}{3(2-2a)} + z = \frac{3a^2 - 4a + 2}{2-2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{3a^2 - 4a + 2}{2-2a} + \frac{-4a^2 + 7a - 2}{3(2-2a)} = \frac{9a^2 - 12a + 6 - 4a^2 + 7a - 2}{3(2-2a)} = \boxed{\frac{5a^2 - 5a + 4}{3(2-2a)}} = z$$

3.1 Dado el plano $\pi : 2x - z = 1$, calcular:

3.1.1 (1.25 puntos) Si existe, el plano perpendicular a π que contiene a la recta $r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = y \end{cases}$.

3.1.2 (1.25 puntos) Los planos paralelos a π cuya distancia al punto $P = (0, 1, 2)$ es 2.

3.1.1 El plano π' perpendicular a π tiene como vector director el vector normal de π . Otro vector director del plano π' es el vector director de la recta r . También debe contener cualquier punto de la recta.

$$\pi : 2x - z = 1 \rightarrow \vec{n} = (2, 0, -1)$$

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y \rightarrow x = \frac{1}{2}y \\ z = y \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, 0, 0) \\ \vec{v}_r = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2, 0, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) \\ P_r(0, 0, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}y + 2z - 2y + x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \frac{5}{2}y + 2z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' : 2x - 5y + 4z = 0}$$

El plano perpendicular a π que contiene a la recta r tiene ecuación $\pi' : 2x - 5y + 4z = 0$.

3.1.2 Un plano paralelo a $\pi : 2x - z - 1 = 0$ tiene ecuación $\pi_1 : 2x - z + D = 0$. Y debe cumplir que la distancia al punto P valga 2.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x - z + D = 0 \\ P(0, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi_1, P) = 2 \Rightarrow \frac{|2 \cdot 0 - 2 + D|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|D - 2|}{\sqrt{5}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D - 2| = 2\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} D - 2 = 2\sqrt{5} \rightarrow D_1 = 2\sqrt{5} + 2 \rightarrow \boxed{\pi_1 : 2x - z + 2 + 2\sqrt{5} = 0} \\ -D + 2 = 2\sqrt{5} \rightarrow 2 - 2\sqrt{5} = D_2 \rightarrow \boxed{\pi_2 : 2x - z + 2 - 2\sqrt{5} = 0} \end{cases}$$

Los planos buscados son $\pi_1 : 2x - z + 2 + 2\sqrt{5} = 0$ y $\pi_2 : 2x - z + 2 - 2\sqrt{5} = 0$.

3.2 Se considera el plano π con ecuación $2x + 3y - z = 0$ y los cuatro puntos $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,-20)$, $C = (0,15,-30)$ y $D = (1,2,-1)$.

3.2.1 (0.5 puntos) Comprobar si el triángulo ABC pertenece al plano π .

3.2.2 (0.5 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

3.2.3 (1.5 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C .

3.2.1 Comprobamos que los puntos A , B y C pertenecen al plano.

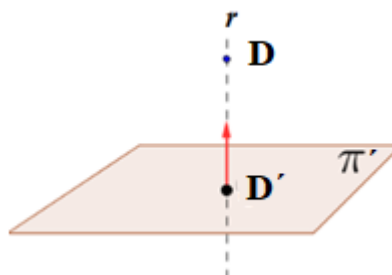
$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + 3y - z = 0 \\ \text{¿} A(0,0,0) \in \pi? \\ \text{¿} B(10,0,-20) \in \pi? \\ \text{¿} C(0,15,-30) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{¿} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0? \\ \text{¿} 2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 - (-20) = 0? \\ \text{¿} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 15 - (-30) = 0? \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{¿} 0 + 0 - 0 = 0? \rightarrow SI \\ \text{¿} 20 + 0 + 20 = 0? \rightarrow NO \\ \text{¿} 0 + 45 + 30 = 0? \rightarrow NO \end{array} \right\}$$

Los puntos B y C no pertenecen al plano. El triángulo no pertenece al plano.

3.2.2. Calculamos el valor de la distancia pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + 3y - z = 0 \\ D(1,2,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14} \approx 2.4u$$

3.2.3 Debemos hallar las coordenadas del punto D' del dibujo.



Hallamos la ecuación del plano π' que contiene los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} A(0,0,0) \\ B(10,0,-20) \\ C(0,15,-30) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(0,0,0) \in \pi' \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (10,0,-20) - (0,0,0) = (10,0,-20) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,15,-30) - (0,0,0) = (0,15,-30) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & 15 & -30 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 150z + 300y + 300x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 2x + 2y + z = 0}$$

Hallamos la ecuación de la recta r . Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano $\pi': 2x + 2y + z = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} D(1,2,-1) \in r \\ \pi': 2x + 2y + z = 0 \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n} = (2,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto D' de corte de la recta r y el plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi': 2x + 2y + z = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 4\lambda + 4 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \Rightarrow 9\lambda + 5 = 0 \Rightarrow 9\lambda = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-5}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{-5}{9} = \frac{-1}{9} \\ y = 2 + 2\frac{-5}{9} = \frac{8}{9} \\ z = -1 - \frac{5}{9} = \frac{-14}{9} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{-1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{-14}{9}\right)$$

Las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A, B y C son $D\left(\frac{-1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{-14}{9}\right)$.

4.1 Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$

4.1.1 (0.75 puntos) Calcular el dominio de definición, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.2 (0.25 puntos) Dibujar la curva $y = f(x)$.

4.1.3 (0.75 puntos) Hallar todas las primitivas de f .

4.1.4 (0.75 puntos) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abscisas.

4.1.1 Es una función racional y su dominio son todos los números reales menos los que anulan su denominador.

$$f(x) = \frac{x}{9-x^2} \Rightarrow 9-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = -3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{9-x^2} = \frac{-3}{9-(-3)^2} = \frac{-3}{0} = \infty$$

$x = -3$ es asíntota vertical.

¿ $x = 3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{9-x^2} = \frac{3}{9-3^2} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 3$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Buscamos los puntos críticos de la función.

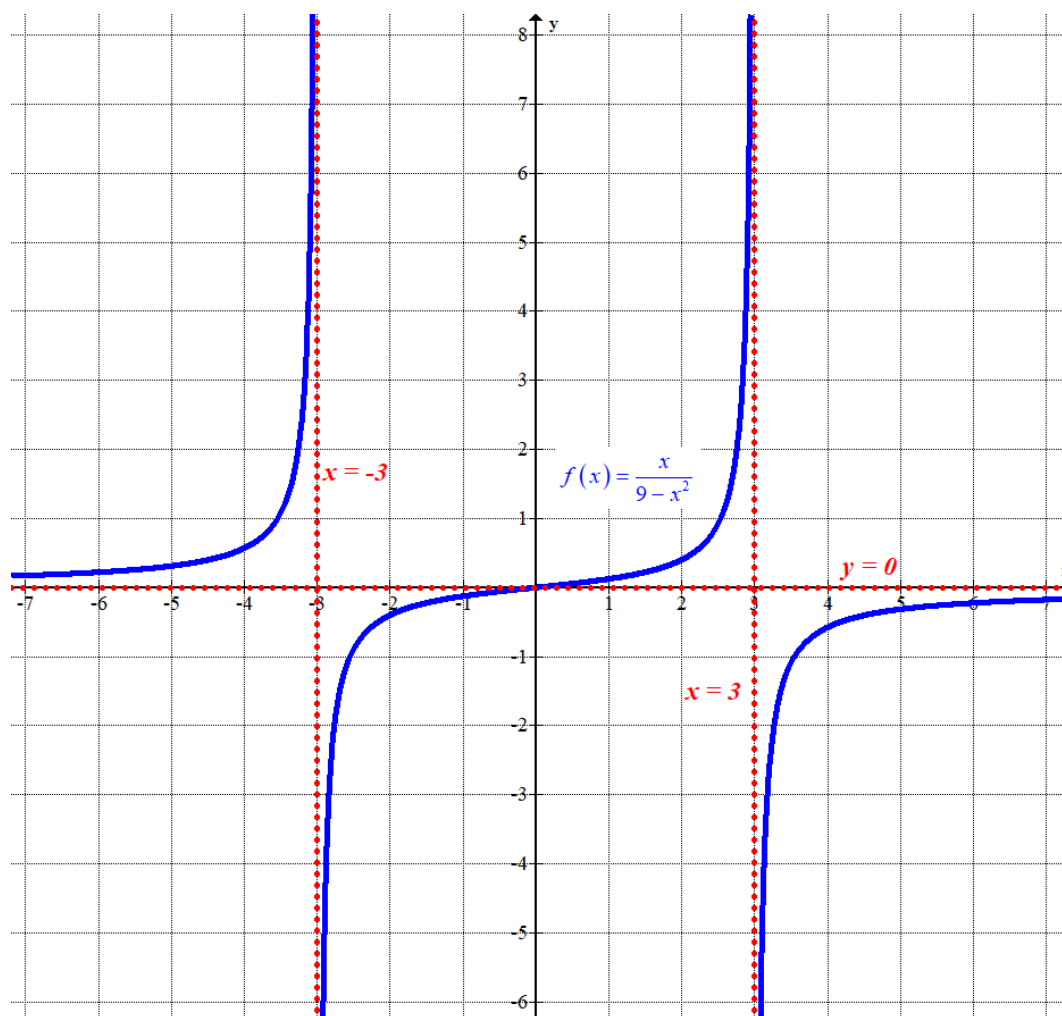
$$f(x) = \frac{x}{9-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(9-x^2) - x(-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{9-x^2+2x^2}{(9-x^2)^2} = \frac{9+x^2}{(9-x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9+x^2}{(9-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 9+x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \sqrt{-9} \text{ No existe}$$

La función no presenta puntos críticos. La derivada va a ser siempre positiva pues el numerador y el denominador son siempre positivos. La función es creciente en todo su dominio $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

4.1.2. Realizamos una pequeña tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{x}{9-x^2}$
-4	0.57
-2	-0.4
0	0
2	0.4
4	-0.57



4.1.3 Hallamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int \frac{x}{9-x^2} dx = \frac{1}{-2} \int \frac{-2x}{9-x^2} dx = \frac{-1}{2} \ln|9-x^2| + K$$

Todas las primitivas de la función f tienen la expresión $F(x) = \frac{-1}{2} \ln|9-x^2| + K$.

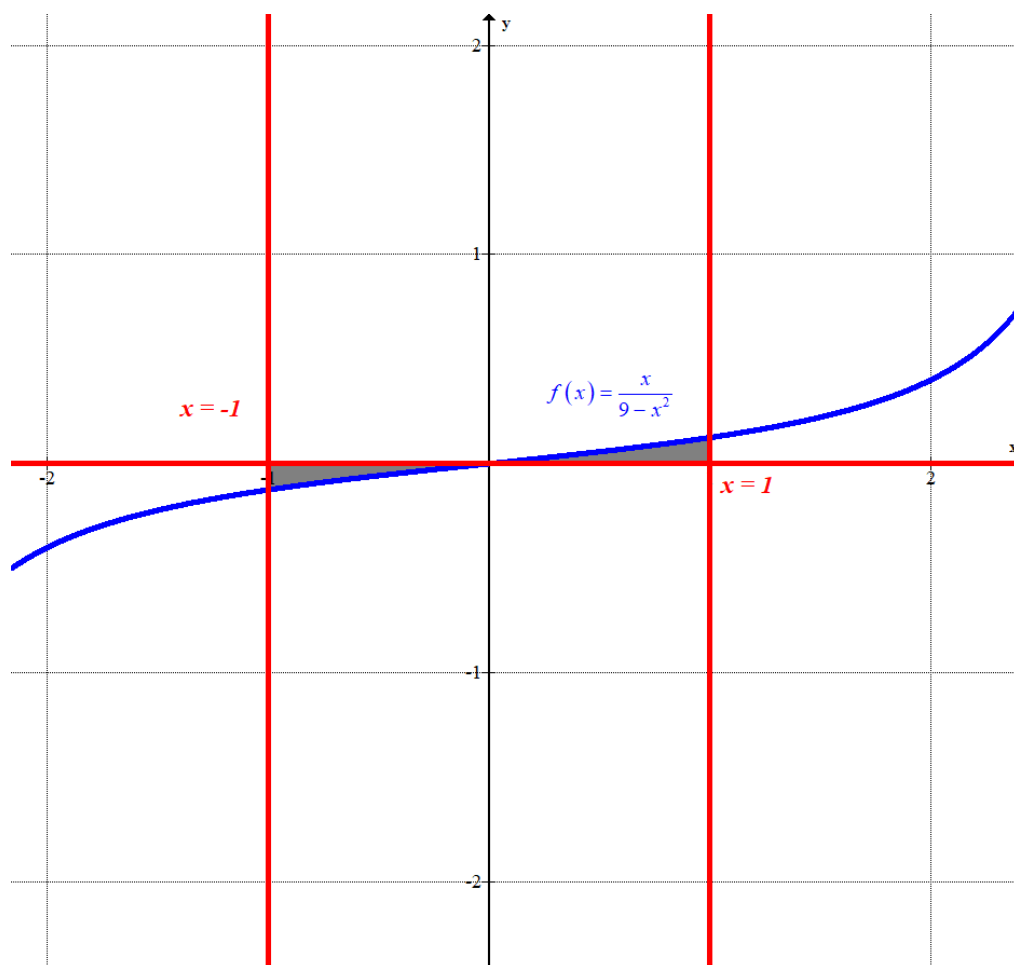
4.1.4 Como la función corta el eje de abscisas en $x = 0 \in (-1, 1)$ el área comprendida entre las curvas $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abscisas la calculamos como el valor absoluto de la integral definida entre -1 y 0 de la función más la integral definida entre 0 y 1 de la función.

$$\int_{-1}^0 \frac{x}{9-x^2} dx = \left[\frac{-1}{2} \ln|9-x^2| \right]_{-1}^0 = \left[\frac{-1}{2} \ln|9-0^2| \right] - \left[\frac{-1}{2} \ln|9-(-1)^2| \right] = -\frac{\ln 9}{2} + \frac{\ln 8}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{9-x^2} dx = \left[\frac{-1}{2} \ln|9-x^2| \right]_0^1 = \left[\frac{-1}{2} \ln|9-1^2| \right] - \left[\frac{-1}{2} \ln|9-0^2| \right] = \frac{-\ln 8}{2} + \frac{\ln 9}{2}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^0 \frac{x}{9-x^2} dx \right| + \int_0^1 \frac{x}{9-x^2} dx = \left| \frac{\ln 8 - \ln 9}{2} \right| + \frac{\ln 9 - \ln 8}{2} =$$

$$= \frac{\ln 9 - \ln 8}{2} + \frac{\ln 9 - \ln 8}{2} = \boxed{\ln 9 - \ln 8 = 0.1178 u^2}$$



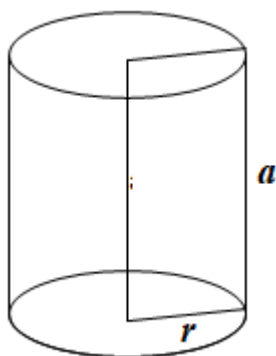
4.2 Se quiere construir un bote de refresco cilíndrico de volumen 33 cm^3 que tenga área total (incluyendo las tapas) mínima. Se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Expresar el área total del bote en función del radio de su base y de su altura.

4.2.2 (1.5 puntos) Obtener las dimensiones que minimizan el área total del bote.

4.2.3 (0.5 puntos) Hallar dicha área.

4.2.1 Hacemos un dibujo del bote de radio de base “ r ” y altura “ a ”.



El área del bote es la suma del área lateral más las dos áreas de las tapas superior e inferior.

$$A(a, r) = 2\pi r \cdot a + 2\pi r^2$$

4.2.2 El volumen del bote es el producto del área de la base por la altura: $V(a, r) = \pi r^2 \cdot a$.

Igualemos este volumen a 33 y despejamos “ a ”.

$$V(a, r) = \pi r^2 \cdot a = 33 \Rightarrow a = \frac{33}{\pi r^2}$$

Sustituimos este resultado en la función del área y obtenemos una función que solo depende de “ r ”.

$$\left. \begin{array}{l} A(a, r) = 2\pi r \cdot a + 2\pi r^2 \\ a = \frac{33}{\pi r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(r) = 2\pi r \frac{33}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{66}{r} + 2\pi r^2$$

Queremos minimizar la función $A(r) = \frac{66}{r} + 2\pi r^2$. Hallamos sus puntos críticos.

$$A'(r) = \frac{-66}{r^2} + 4\pi r \quad A'(r) = 0 \Rightarrow \frac{-66}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{66}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi r^3 = 66 \Rightarrow r^3 = \frac{66}{4\pi} = \frac{33}{2\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}$$

Tenemos un punto crítico en $r = \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}$. Sustituimos este valor en la segunda derivada,

$$A'(r) = \frac{-66}{r^2} + 4\pi r = -66r^{-2} + 4\pi r \Rightarrow A''(r) = -66(-2)r^{-3} + 4\pi = \frac{122}{r^3} + 4\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A''\left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right) = \frac{122}{\left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^3} + 4\pi = \frac{122}{\frac{33}{2\pi}} + 4\pi = \frac{244\pi}{33} + 4\pi > 0$$

La función presenta un mínimo relativo para $r = \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} \simeq 1.7382$ centímetros.

Para este valor del radio determinamos la altura del bote.

$$a = \frac{33}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^2} = \frac{33\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi\sqrt[3]{33^2}} \simeq 3.4765 \text{ cm}$$

Las dimensiones del bote de volumen 33 cm^3 con área mínima son 1.7382 centímetros de radio de la base y 3.4765 centímetros de altura.

4.2.3 Hallamos el área mínima.

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right) = \frac{66}{\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}} + 2\pi \left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^2 \simeq 56.95 \text{ cm}^2$$