



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: JUNY 2025 (reserva)	CONVOCATORIA: JUNIO 2025 (reserva)
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <u>Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.</u> La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una firma automovilística fabrica tres modelos de coches: M1, M2 y M3, y produce un 35% de vehículos en Estados Unidos, un 45% en China y un 20% en Alemania.

En la planta de Estados Unidos se fabrican un 38% de vehículos del modelo M1, un 42% del M2 y un 20% del M3; en la de China un 42% del M1, un 40% del M2 y un 18% del M3; y en la de Alemania un 24% del M1, un 40% del M2 y un 36% del M3.

El control de calidad ha detectado que en Estados Unidos un 3% de los coches presenta algún tipo de defecto, en China un 4% y en Alemania un 1%.

1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche seleccionado al azar presente algún tipo de defecto?

1.2 (0.75 puntos) Si un coche no presenta ningún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que esté fabricado en Estados Unidos?

1.3 (1 punto) Dados 9 coches fabricados en Alemania, calcular la probabilidad que al menos 3 sean del modelo M2.

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 Una empresa de producción agrícola desarrolla fertilizantes que combinan tres nutrientes esenciales: nitrógeno (N), fósforo (P) y potasio (K). Se representan por x , y , z las cantidades en kilogramos a usar por lote de N, P, K, respectivamente. Estas cantidades deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases}$$

2.1.1 (1.25 puntos) Discutir, en función del parámetro α , el sistema de ecuaciones anterior.

2.1.2 (1.25 puntos) Obtener las cantidades x , y , z en el caso de que el sistema sea compatible.

2.2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 (0.5 puntos) Calcular el producto AB y la matriz transpuesta de AB .

2.2.2 (0.75 puntos) En los casos en los que A es invertible, calcular la inversa de A .

2.2.3 (1.25 puntos) Resolver la ecuación matricial $BX + A^2 = C$.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 (0.75 puntos) Calcular la distancia entre el punto $(3, 1, -2)$ y el plano π , en función del parámetro real a .

3.1.2 (0.75 puntos) Para $a = 4$, calcular el ángulo que forma la recta r con el plano π .

3.1.3 (1 punto) Para $a = 3$, calcular el punto simétrico del punto $\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right)$ respecto del plano π .

3.2 Dada la recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\alpha}$, que depende del parámetro real α , y la recta

$$s: \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

3.2.1 (1.25 puntos) Calcular el valor del parámetro α para el que r y s son perpendiculares.

3.2.2 (1.25 puntos) Suponiendo que $\alpha \neq 0$, obtener la recta paralela a s que pase por el punto de r cuya coordenada z vale 0.

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Se considera un prisma triangular de altura h cm, cuya base es un triángulo equilátero de lado x cm. El prisma tiene área total (área que incluye el área de las caras laterales y de las bases superior e inferior) igual a 10 cm^2 . Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Expresar el área total del prisma en función de x y h .

4.1.2 (1.5 puntos) Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.

4.1.3 (0.5 puntos) Hallar dicho volumen.

4.2 Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Calcular el dominio de definición y las asíntotas de f .

4.2.2 (0.75 puntos) Indicar, si existen, los extremos, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

4.2.3 (0.5 puntos) Representar gráficamente la función $y = f(x)$.

4.2.4 (0.75 puntos) Calcular la integral indefinida $\int f(x) dx$.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
 Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	1/3	0.35	0.40	0.45	0.50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9985	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9867	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2680	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9968	0,9952	0,9877	0,9728	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990

A

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una firma automovilística fabrica tres modelos de coches: M1, M2 y M3, y produce un 35% de vehículos en Estados Unidos, un 45% en China y un 20% en Alemania.

En la planta de Estados Unidos se fabrican un 38% de vehículos del modelo M1, un 42% del M2 y un 20% del M3; en la de China un 42% del M1, un 40% del M2 y un 18% del M3; y en la de Alemania un 24% del M1, un 40% del M2 y un 36% del M3.

El control de calidad ha detectado que en Estados Unidos un 3% de los coches presenta algún tipo de defecto, en China un 4% y en Alemania un 1%.

1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche seleccionado al azar presente algún tipo de defecto?

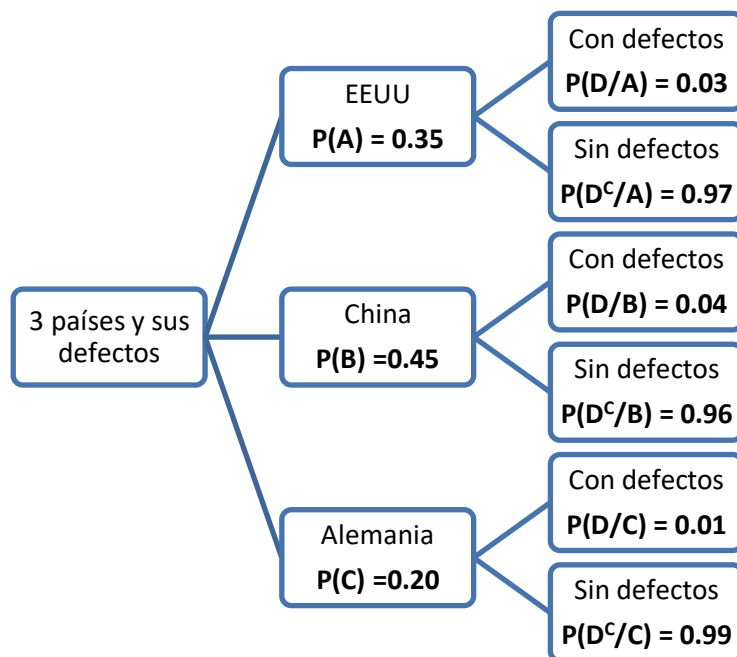
1.2 (0.75 puntos) Si un coche no presenta ningún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que esté fabricado en Estados Unidos?

1.3 (1 punto) Dados 9 coches fabricados en Alemania, calcular la probabilidad que al menos 3 sean del modelo M2.

Llamamos A a “el coche está fabricado en Estados Unidos”, B a “el coche está fabricado en China”, C a “el coche está fabricado en Alemania” y D al suceso “el vehículo presenta defectos”.

Nos dicen que $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.45$, $P(C) = 0.20$, $P(D/A) = 0.03$, $P(D/B) = 0.04$ y $P(D/C) = 0.01$.

Realizamos un diagrama de árbol de probabilidades.



1.1 Nos piden $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= 0.35 \cdot 0.03 + 0.45 \cdot 0.04 + 0.20 \cdot 0.01 = \boxed{0.0305}$$

1.2 Nos piden calcular $P(A/D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^c) = \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A)P(D^c/A)}{1 - P(D)} = \frac{0.35 \cdot 0.97}{1 - 0.0305} = \frac{97}{277} \approx 0.3502$$

1.3 Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de coches del modelo M2 de un grupo de 9 coches fabricados en Alemania. Sabemos que la probabilidad de que un coche fabricado en Alemania sea del modelo M2 es de 0.40 (el 40% de los coches fabricados en Alemania son del modelo M2), por lo que la variable aleatoria es una binomial con parámetros $n = 9$ y $p = 0.40$. $X = B(9, 0.4)$.

Nos piden calcular $P(X \geq 3)$.

Para poder utilizar los datos de la tabla de la binomial proporcionados utilizamos el suceso contrario.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.2318 = 0.7682$$

n	k	p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	1/3	0.35	0.40
1	0		0.9900	0.9500	0.9000	0.8000	0.7500	0.7000	0.6667	0.6500	0.6000
	1		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0		0.9801	0.9025	0.8100	0.6400	0.5625	0.4900	0.4444	0.4225	0.3600
	1		0.9999	0.9975	0.9900	0.9600	0.9375	0.9100	0.8889	0.8775	0.8400
	2		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0		0.9703	0.8574	0.7290	0.5120	0.4219	0.3430	0.2963	0.2746	0.2160
	1		0.9997	0.9928	0.9720	0.8960	0.8438	0.7840	0.7407	0.7183	0.6480
	2		1.0000	0.9999	0.9990	0.9920	0.9844	0.9730	0.9630	0.9571	0.9360
	3		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0		0.9606	0.8145	0.6561	0.4096	0.3164	0.2401	0.1975	0.1785	0.1296
	1		0.9994	0.9880	0.9477	0.8192	0.7383	0.6517	0.5926	0.5630	0.4752
	2		1.0000	0.9995	0.9963	0.9728	0.9492	0.9163	0.8889	0.8735	0.8108
	3		1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9961	0.9919	0.9877	0.9850	0.9644
	4		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0		0.9510	0.7738	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.1317	0.1160	0.0778
	1		0.9990	0.9774	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.4609	0.4284	0.3470
	2		1.0000	0.9988	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.7901	0.7648	0.6426
	3		1.0000	1.0000	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9547	0.9460	0.9130
	4		1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9959	0.9947	0.9898
	5		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0		0.9415	0.7351	0.5314	0.2821	0.1780	0.1176	0.0878	0.0754	0.0487
	1		0.9985	0.9672	0.8857	0.6554	0.5339	0.4202	0.3512	0.3191	0.2333
	2		1.0000	0.9978	0.9842	0.9011	0.8306	0.7443	0.6804	0.6471	0.5443
	3		1.0000	0.9999	0.9987	0.9830	0.9624	0.9295	0.8999	0.8826	0.8108
	4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9954	0.9891	0.9822	0.9777	0.9590
	5		1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9988	0.9982	0.9959
	6		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0		0.9321	0.6983	0.4783	0.2097	0.1335	0.0824	0.0585	0.0490	0.0320
	1		0.9980	0.9556	0.8503	0.5767	0.4449	0.3294	0.2634	0.2338	0.1686
	2		1.0000	0.9962	0.9743	0.8520	0.7564	0.6471	0.5706	0.5323	0.4499
	3		1.0000	0.9998	0.9973	0.9867	0.9294	0.8740	0.8267	0.8002	0.7402
	4		1.0000	1.0000	0.9998	0.9953	0.9871	0.9712	0.9547	0.9444	0.9137
	5		1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9987	0.9962	0.9931	0.9910	0.9712
	6		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9994	0.9984
	7		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	0		0.9227	0.6634	0.4305	0.1878	0.1001	0.0576	0.0390	0.0319	0.0201
	1		0.9973	0.9428	0.8131	0.5033	0.3671	0.2553	0.1951	0.1691	0.1084
	2		0.9999	0.9942	0.9619	0.7969	0.6785	0.5518	0.4682	0.4278	0.3454
	3		1.0000	0.9996	0.9950	0.9437	0.8862	0.8059	0.7414	0.7064	0.6441
	4		1.0000	1.0000	0.9996	0.9896	0.9727	0.9420	0.9121	0.8939	0.8683
	5		1.0000	1.0000	1.0000	0.9988	0.9958	0.9887	0.9803	0.9747	0.9602
	6		1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9987	0.9974	0.9964	0.9945
	7		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9998	0.9993
	8		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0		0.9135	0.6302	0.3874	0.1342	0.0751	0.0404	0.0260	0.0207	0.0101
	1		0.9966	0.9288	0.7748	0.4362	0.3003	0.1960	0.1431	0.1211	0.0722
10	2		0.9999	0.9994	0.9987	0.9944	0.9922	0.9907	0.9892	0.9886	0.9880

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)**Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2**

2.1 Una empresa de producción agrícola desarrolla fertilizantes que combinan tres nutrientes esenciales: nitrógeno (N), fósforo (P) y potasio (K). Se representan por x , y , z las cantidades en kilogramos a usar por lote de N, P, K, respectivamente. Estas cantidades deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases}$$

2.1.1 (1.25 puntos) Discutir, en función del parámetro α , el sistema de ecuaciones anterior.

2.1.2 (1.25 puntos) Obtener las cantidades x , y , z en el caso de que el sistema sea compatible.

2.1.1 La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \alpha & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & \alpha & 10 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha + 8 + \cancel{2\alpha} - \cancel{2\alpha} + 8\alpha + 3 = 11\alpha + 11$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 11\alpha + 11 = 0 \Rightarrow 11\alpha = -11 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

Surgen dos situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $\alpha \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $\alpha = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$. Convertimos este sistema en otro

equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 10 \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 14 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -6 \quad 3 \quad 3 \quad 12 \\ 6 \quad 8 \quad -2 \quad 60 \\ \hline 0 \quad 11 \quad 1 \quad 72 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{3 \quad 4 \quad -1}^{A/B} & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 70 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A & 14 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

2.1.2 El sistema es compatible solo para $\alpha \neq -1$, siendo compatible determinado. Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ 2x \quad -y \quad +\alpha z \quad = 10 \\ -2x \quad +y \quad +z \quad = 4 \\ \hline (\alpha+1)z = 14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ (\alpha+1)z = 14 \rightarrow \{\alpha+1 \neq 0\} \rightarrow \boxed{z = \frac{14}{\alpha+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + \alpha \frac{14}{\alpha+1} = 30 \\ -2x + y + \frac{14}{\alpha+1} = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + \frac{14\alpha}{\alpha+1} = 30 \\ y = 4 - \frac{14}{\alpha+1} + 2x \end{cases} \Rightarrow 3x + 4 \left(4 - \frac{14}{\alpha+1} + 2x \right) + \frac{14\alpha}{\alpha+1} = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 16 - \frac{56}{\alpha+1} + 8x + \frac{14\alpha}{\alpha+1} = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11x = 14 - \frac{14\alpha}{\alpha+1} + \frac{56}{\alpha+1} = \frac{14\alpha + 14 - 14\alpha + 56}{\alpha+1} = \frac{70}{\alpha+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{70}{11(\alpha+1)}} \Rightarrow y = 4 - \frac{14}{\alpha+1} + 2 \frac{70}{11(\alpha+1)} = \frac{44(\alpha+1) - 154 + 140}{11(\alpha+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{44\alpha + 44 - 14}{11(\alpha+1)} = \frac{44\alpha + 30}{11(\alpha+1)}}$$

La solución del sistema es $x = \frac{70}{11(\alpha+1)}$, $y = \frac{44\alpha + 30}{11(\alpha+1)}$ y $z = \frac{14}{\alpha+1}$.

2.2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 (0.5 puntos) Calcular el producto AB y la matriz traspuesta de AB .

2.2.2 (0.75 puntos) En los casos en los que A es invertible, calcular la inversa de A .

2.2.3 (1.25 puntos) Resolver la ecuación matricial $BX + A^2 = C$.

2.2.1 Obtenemos la expresión de la matriz AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 4+15 \\ -1+m & 2+5m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ m-1 & 2+5m \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de su traspuesta.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ m-1 & 2+5m \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & m-1 \\ 19 & 2+5m \end{pmatrix}$$

2.2.2 Para que sea invertible la matriz A su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m - 3 = 0 \Rightarrow 2m = 3 \Rightarrow \boxed{m = \frac{3}{2}}$$

La matriz A es invertible para cualquier valor de m distinto de $\frac{3}{2}$.

Calculamos la inversa para los valores $m \neq \frac{3}{2} \rightarrow 2m - 3 \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & m \end{pmatrix}}{2m-3} = \frac{1}{2m-3} \begin{pmatrix} m & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{2m-3} & \frac{-3}{2m-3} \\ \frac{-1}{2m-3} & \frac{2}{2m-3} \end{pmatrix}$$

2.2.3 Despejamos X de la ecuación matricial.

$$BX + A^2 = C \Rightarrow BX = C - A^2 \Rightarrow X = B^{-1}(C - A^2)$$

Hallamos la inversa de la matriz B .

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 2 = -7 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}{-7} = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Terminamos de hallar la matriz X.

$$C - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+3 & 6+3m \\ 2+m & 3+m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -7-3m \\ 3-m & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1}(C - A^2) = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -7-3m \\ 3-m & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} -35-6+2m & -35-15m+6 \\ 7-3+m & 7+3m+3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} -41+2m & -29-15m \\ 4+m & 10+3m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41-2m}{7} & \frac{29+15m}{7} \\ \frac{-4-m}{7} & \frac{-10-3m}{7} \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} \frac{41-2m}{7} & \frac{29+15m}{7} \\ \frac{-4-m}{7} & \frac{-10-3m}{7} \end{pmatrix}.$

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)**Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2**

3.1 Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 (0.75 puntos) Calcular la distancia entre el punto $(3, 1, -2)$ y el plano π , en función del parámetro real a .

3.1.2 (0.75 puntos) Para $a = 4$, calcular el ángulo que forma la recta r con el plano π .

3.1.3 (1 punto) Para $a = 3$, calcular el punto simétrico del punto $\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right)$ respecto del plano π .

3.1.1 Hallamos la distancia del punto $A(3, 1, -2)$ al plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0 \\ A(3, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 3 + a + 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + a^2 + (-1)^2}} = \frac{|11 + a|}{\sqrt{5 + a^2}}$$

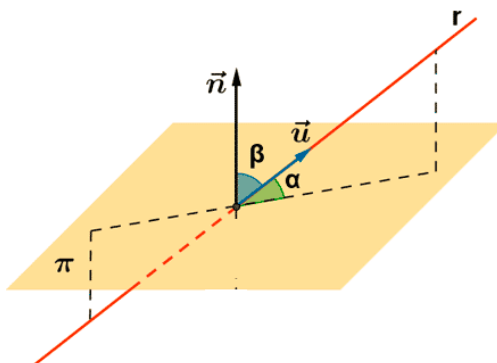
3.1.2 Para $a = 4$ el plano queda $\pi \equiv 2x + 4y - z + 3 = 0$.

Hallamos un vector director de la recta como el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos que la definen.

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 21i - 9j + 6k = (21, -9, 6)$$

Tomamos como vector director de la recta el vector obtenido dividido por 3.

Hallamos el ángulo entre el vector normal del plano y el vector director de la recta.



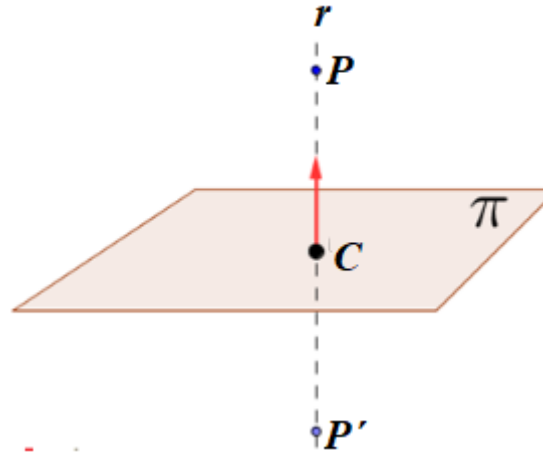
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \frac{1}{3} \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \frac{1}{3} (21, -9, 6) = (7, -3, 2) \\ \pi \equiv 2x + 4y - z + 3 = 0 \rightarrow \vec{n} = (2, 4, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{n}) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{v}_r| |\vec{n}|} =$$

$$= \frac{(7, -3, 2)(2, 4, -1)}{\sqrt{7^2 + (-3)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \frac{14 - 12 - 2}{\sqrt{62} \sqrt{21}} = 0 \Rightarrow (\vec{v}_r, \vec{n}) = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

El ángulo que forman recta y plano es de $90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$. La recta es paralela al plano o está contenida en él.

3.2.3 Para $a = 3$ el plano queda $\pi \equiv 2x + 3y - z + 3 = 0$.

Hallamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto $P\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right)$. Luego hallamos el punto C de corte de recta r y el plano. Por último, determinamos el punto P' simétrico de P respecto del plano π .



Hallo la ecuación de la recta r . Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano $\vec{n} = (2, 3, -1)$.

$$\left. \begin{array}{l} P\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (2, 3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{9}{2} + 2\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Hallo el punto C de corte de la recta r y el plano resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 3y - z + 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = \frac{9}{2} + 2\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\left(\frac{9}{2} + 2\lambda\right) + 3(5 + 3\lambda) - (-1 - \lambda) + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 + 4\lambda + 15 + 9\lambda + 1 + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow 14\lambda + 28 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} + 2(-2) = \frac{1}{2} \\ y = 5 + 3(-2) = -1 \\ z = -1 - (-2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)}$$

Las coordenadas del punto simétrico P' las hallamos sumando al punto C el vector $\overrightarrow{PC}$.

$$\left. \begin{array}{l} C\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right) \\ P\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right) - \left(\frac{9}{2}, 5, -1\right) = (-4, -6, 2)$$

$$P' = C + \overrightarrow{PC} = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right) + (-4, -6, 2) = \left(\frac{-7}{2}, -7, 3\right)$$

El punto simétrico de P respecto del plano π es $P'\left(\frac{-7}{2}, -7, 3\right)$.

3.2 Dada la recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\alpha}$, que depende del parámetro real α , y la recta

$$s: \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

3.2.1 (1.25 puntos) Calcular el valor del parámetro α para el que r y s son perpendiculares.

3.2.2 (1.25 puntos) Suponiendo que $\alpha \neq 0$, obtener la recta paralela a s que pase por el punto de r cuya coordenada z vale 0.

3.2.1 Para que las rectas sean perpendiculares el producto escalar de sus vectores directores debe ser nulo. Obtenemos un vector director de cada recta.

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\alpha} \Rightarrow \vec{u}_r = (2, 3, \alpha)$$

$$s: \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x = 2 + z - 2y \end{cases} \Rightarrow -2 - z + 2y + y + z = 1 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=1} \Rightarrow x = 2 + z - 2 \Rightarrow \boxed{x=z} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (1, 0, 1)$$

Hacemos que su producto escalar sea nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 3, \alpha) \\ \vec{v}_s = (1, 0, 1) \\ \vec{u}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1, 0, 1)(2, 3, \alpha) = 0 \Rightarrow 2 + 0 + \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

Para $\alpha = -2$ las rectas r y s son perpendiculares.

3.2.2 Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, \alpha) \\ P_r(-1, 2, 0) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = \alpha\lambda \end{cases}$$

Un punto B cualquiera de la recta r tiene coordenadas $B(-1 + 2\lambda, 2 + 3\lambda, \alpha\lambda)$. Si este punto la coordenada z vale 0 entonces $\left. \begin{array}{l} \alpha\lambda = 0 \\ \alpha \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = 0$. El punto que buscamos tiene coordenadas $B(-1, 2, 0)$.

Una recta paralela a s tiene su mismo vector director $\vec{v}_s = (1, 0, 1)$.

Hallamos la ecuación de la recta t con vector director $\vec{w}_t = \vec{v}_s = (1, 0, 1)$ y que pasa por el punto $B(-1, 2, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} B(-1, 2, 0) \in t \\ \vec{w}_t = \vec{v}_s = (1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} x = -1 + \beta \\ y = 2 \\ z = \beta \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}$$

Suponiendo que $\alpha \neq 0$, la recta paralela a s que pasa por el punto de r cuya coordenada z vale 0 tiene ecuación $t: \begin{cases} x = -1 + \beta \\ y = 2 \\ z = \beta \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}.$

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)**Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2**

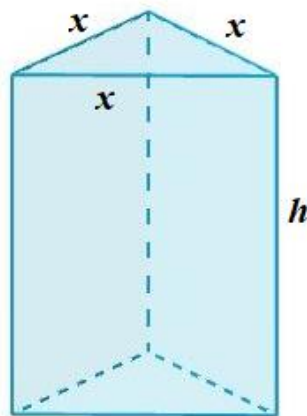
4.1 Se considera un prisma triangular de altura h cm, cuya base es un triángulo equilátero de lado x cm. El prisma tiene área total (área que incluye el área de las caras laterales y de las bases superior e inferior) igual a 10 cm^2 . Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Expresar el área total del prisma en función de x y h .

4.1.2 (1.5 puntos) Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.

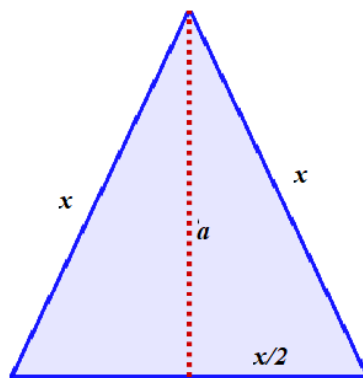
4.1.3 (0.5 puntos) Hallar dicho volumen.

4.1.1 Dibujamos la situación planteada y hallamos el área del prisma.



El prisma tiene 3 caras laterales iguales de forma rectangular siendo el área de cada una de ellas: xh .

El área de las bases superior e inferior es el área de dos triángulos equiláteros de lado x .



Por el teorema de Pitágoras sabemos que:

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow a^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{x \cdot a}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$$

El área total del prisma es la suma del área de las 3 caras laterales y las 2 bases.

$$A(x, h) = 3xh + 2 \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = 3xh + \frac{\sqrt{3}}{2} x^2$$

4.1.2 Como el área vale 10 cm^2 sustituimos este valor en la función obtenida y despejamos h .

$$\left. \begin{array}{l} A(x, h) = 3xh + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \\ \text{Área} = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 3xh + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = 10 \Rightarrow 6xh + x^2\sqrt{3} = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6xh = 20 - x^2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{h = \frac{20 - \sqrt{3}x^2}{6x}}$$

Obtenemos la expresión del volumen del prisma.

$$\left. \begin{array}{l} V(x, h) = \text{Área base} \cdot \text{altura} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot h \\ h = \frac{20 - \sqrt{3}x^2}{6x} \end{array} \right\} \Rightarrow V(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{20 - \sqrt{3}x^2}{6x} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}x(20 - \sqrt{3}x^2)}{24} = \frac{20\sqrt{3}x - 3x^3}{24} = \frac{5\sqrt{3}}{6}x - \frac{1}{8}x^3$$

Derivamos la función volumen y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$V(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6}x - \frac{1}{8}x^3 \Rightarrow V'(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{8}x^2$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{8}x^2 = 0 \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{3}{8}x^2 \Rightarrow 40\sqrt{3} = 18x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{40\sqrt{3}}{18} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}} = \frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3} \approx 1.96189}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para saber si es máximo o mínimo.

$$V'(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{8}x^2 \Rightarrow V''(x) = -\frac{3}{4}x \Rightarrow V''(1.96189) = -\frac{3(1.96189)}{4} < 0$$

Al ser negativa la segunda derivada la función volumen presenta un máximo para

$x = \frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3} \approx 1.96189$. Obtenemos el valor de h para este valor.

$$h = \frac{20 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3}\right)^2}{6\frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3}} = \frac{20 - \frac{\sqrt{3}(20\sqrt{3})}{9}}{2\sqrt{20\sqrt{3}}} = \frac{20 - \frac{60}{9}}{2\sqrt{20\sqrt{3}}} = \frac{\frac{40}{3}}{2\sqrt{20\sqrt{3}}} = \frac{20}{3\sqrt{20\sqrt{3}}} \approx 1.1327$$

El prisma de volumen máximo tiene 1.96189 cm en el lado de la base y 1.1327 cm de altura.

4.2.3 Hallamos el volumen máximo.

$$V\left(\frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3}\right) = \frac{20\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3}\right) - 3\left(\frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3}\right)^3}{24} = \frac{\frac{20\sqrt{3}\sqrt{20}\sqrt[4]{3}}{3} - 3\frac{20\sqrt{3}\sqrt{20\sqrt{3}}}{27}}{24} \approx 1.8878$$

El volumen máximo es de 1.8878 centímetros cúbicos.

4.2 Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Calcular el dominio de definición y las asíntotas de f .

4.2.2 (0.75 puntos) Indicar, si existen, los extremos, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

4.2.3 (0.5 puntos) Representar gráficamente la función $y = f(x)$.

4.2.4 (0.75 puntos) Calcular la integral indefinida $\int f(x) dx$.

4.2.1 El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador. Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(x-1)^2} + x = \frac{4}{(1-1)^2} + 1 = \frac{4}{0} + 1 = \infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(x-1)^2} + x = \frac{4}{\infty} + \infty = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{(x-1)^2} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x(x-1)^2} + 1 = \frac{4}{\infty} + 1 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{(x-1)^2} + x - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{4}{\infty} = 0$$

La recta $y = x$ es asíntota oblicua.

4.2.2 Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (x-1)^2 - 4 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} + 1 = \frac{-8}{(x-1)^3} + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-8}{(x-1)^3} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{8}{(x-1)^3} = 1 \Rightarrow 8 = (x-1)^3 \Rightarrow x-1 = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=3$, añadimos también $x=1$ excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-8}{(0-1)^3} + 1 = 9 > 0$.

La función crece en $(-\infty, 1)$.

- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-8}{(2-1)^3} + 1 = -7 < 0$.

La función decrece en $(1,3)$.

- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x=4$ y la derivada vale

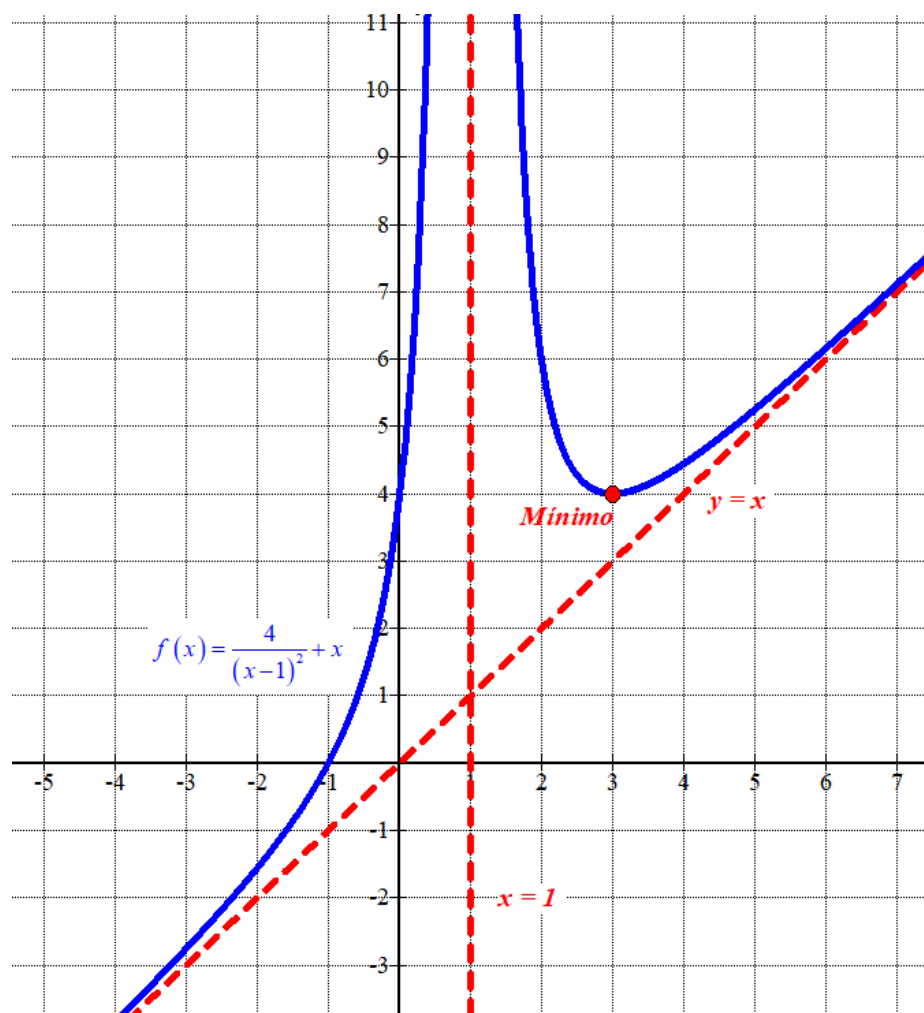
$$f'(4) = \frac{-8}{(4-1)^3} + 1 = \frac{19}{27} > 0. \text{ La función crece en } (3,+\infty).$$

La función crece en $(-\infty,1) \cup (3,+\infty)$ y decrece en $(1,3)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x=3$. Como $f(3) = \frac{4}{(3-1)^2} + 3 = 4$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(3,4)$.

4.2.3 Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$y = f(x)$
-1	0
0	4
2	6
3	4
5	5.25



4.2.4 Calculamos la integral.

$$\int f(x) dx = \int \frac{4}{(x-1)^2} + x dx = \int 4(x-1)^{-2} + x dx = \frac{4(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{4}{1-x} + \frac{x^2}{2} + K}$$