



## Proves d'accés a la universitat

# Matemàtiques

## Serie 3

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas.

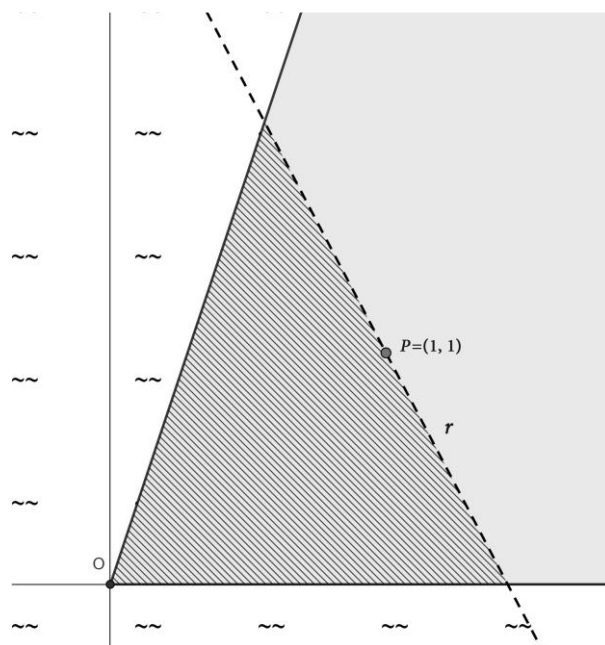
En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para realizar esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos capaces de almacenar datos o de transmitir o recibir información.

### Ejercicio 1

Una familia quiere comprar un terreno para hacerse una casa rodeada de acantilados con vistas al mar. En esa zona de la costa, los acantilados siguen las rectas  $y = 0$  e  $y = 3x$ . Además, la familia quiere que el terreno sea triangular y que el tercer lado del triángulo pase por el punto  $P = (1, 1)$ , tal y como puede verse en la figura.



- a) Plantee la ecuación de la recta  $r$  que define el tercer lado del triángulo en función de su pendiente  $m$ , y compruebe que el área del terreno viene dada por  $A(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - 3m}$ .

[1 punto]

- b) Calcule el valor de  $m$  que hace que el área de este terreno (y, por tanto, su precio) sea mínima. ¿Cuál es el valor de este área? [1,5 puntos]

**Ejercicio 2**

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ mx + 2z &= 0 \\ my - z &= m \end{aligned} \right\}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro  $m$ .  
[1,25 puntos]
- b) Resuelva el sistema para  $m = 1$ .  
[0,5 puntos]
- c) Resuelva el sistema cuando este tenga infinitas soluciones.  
[0,75 puntos]

**Ejercicio 3**

La lesión por sesamoiditis (inflamación del hueso sesamoide del pie) es relativamente habitual entre la población que practica deportes de impacto (atletismo, baloncesto, tenis...). En una población de deportistas, se ha realizado un estudio diferenciando entre los que practican deportes de impacto y los que practican deportes sin impacto brusco (como natación, pilates, senderismo...). Se ha podido determinar que el 45% practican deportes de impacto. Entre ellos, un 10% sufren lesiones por sesamoiditis, mientras que entre los que no practican deportes de impacto sólo un 3% presentan esta lesión. Escogemos a un deportista al azar.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sufra sesamoiditis?  
[0,75 puntos]
- b) Si el deportista elegido tiene una lesión por sesamoiditis, ¿cuál es la probabilidad de que practique deportes de impacto?  
[0,75 puntos]

Una empresa de calzado deportivo ha creado una zapatilla con amortiguación para minimizar las lesiones por sesamoiditis. Los beneficios generados por la venta de este producto, en miles de euros, siguen una función de la forma  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ , donde  $x$  son los años transcurridos desde que la zapatilla salió a la venta y  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes reales.

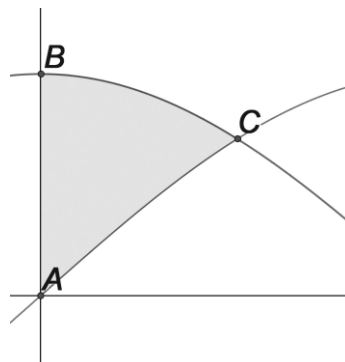
- c) Calcule los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  sabiendo que el primer año se obtuvieron el máximo de beneficios, con un valor de 8 000 euros, y que en el segundo año hubo un punto de inflexión en los beneficios.  
[1 punto]

**Ejercicio 4**

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

**OPCIÓN A**

Un vidriero está reparando una de las vidrieras de la Sagrada Familia cuya forma es la de la parte sombreada de la figura adjunta. Se ha dado cuenta de que Gaudí lo diseñó de forma que uno de los lados sigue la función  $y = 3\sin(x/4)$  y otro sigue la función  $y = 3\cos(x/4)$ , donde  $x$  e  $y$  están expresadas en metros.



- a) Razone a qué función corresponde cada gráfica y calcula las coordenadas de los puntos B y C señalados en la figura (teniendo en cuenta que A es el origen de coordenadas).  
[1 punto]
- b) Calcula el precio de la vidriera sabiendo que cuesta 750 €/m<sup>2</sup>.  
[1,5 puntos]

**OPCIÓN B**

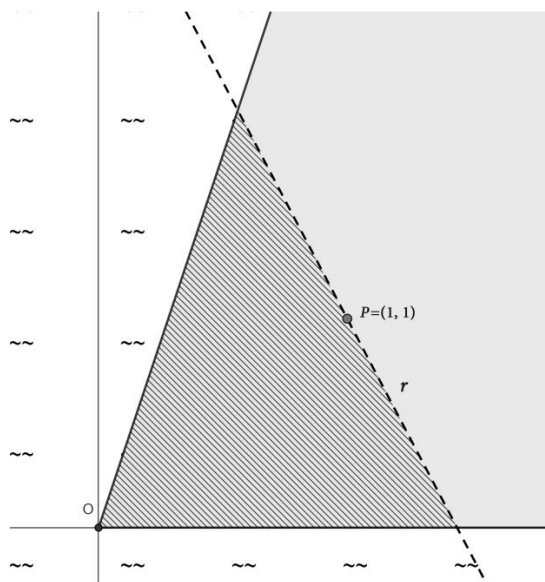
Considere el plano  $\pi : 2x - y + z = 5$  y el punto  $P = (0, 1, 3)$ .

- a) Compruebe que la distancia del punto P al plano  $\pi$  es  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .  
[0.5 puntos]
- b) Encuentre la ecuación general de un plano  $\pi_1$  paralelo a  $\pi$  y que pase por el punto P.  
¿Cuánto vale la distancia entre  $\pi_1$  y  $\pi$ ?  
[0.75 puntos]
- c) Encuentre la ecuación general de un segundo plano  $\pi_2$ , diferente de  $\pi_1$ , que sea paralelo a  $\pi$  y que esté a una distancia  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  de  $\pi$ .  
[1,25 puntos]

## SOLUCIONES

### Ejercicio 1

Una familia quiere comprar un terreno para hacerse una casa rodeada de acantilados con vistas al mar. En esa zona de la costa, los acantilados siguen las rectas  $y = 0$  e  $y = 3x$ . Además, la familia quiere que el terreno sea triangular y que el tercer lado del triángulo pase por el punto  $P = (1, 1)$ , tal y como puede verse en la figura.



- a) Plantee la ecuación de la recta  $r$  que define el tercer lado del triángulo en función de su pendiente  $m$ , y compruebe que el área del terreno viene dada por  $A(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - 3m}$ .  
[1 punto]
- b) Calcule el valor de  $m$  que hace que el área de este terreno (y, por tanto, su precio) sea mínima. ¿Cuál es el valor de esta área? [1,5 puntos]

a) La recta  $r$  pasa por el punto  $P = (1, 1)$  y tiene pendiente  $m$ . Determinamos su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} P = (1, 1) \in r \\ \text{pendiente} = m \end{array} \right\} \Rightarrow r: y - 1 = m(x - 1) \Rightarrow \boxed{r: y = mx - m + 1}$$

La recta que define el tercer lado tiene ecuación  $r: y = mx - m + 1$ .

Para hallar el área del terreno determinamos la base y la altura del triángulo, para ello determinamos donde corta la recta  $r$  el eje X (base) y donde corta la recta  $r$  la recta  $y = 3x$  (altura).

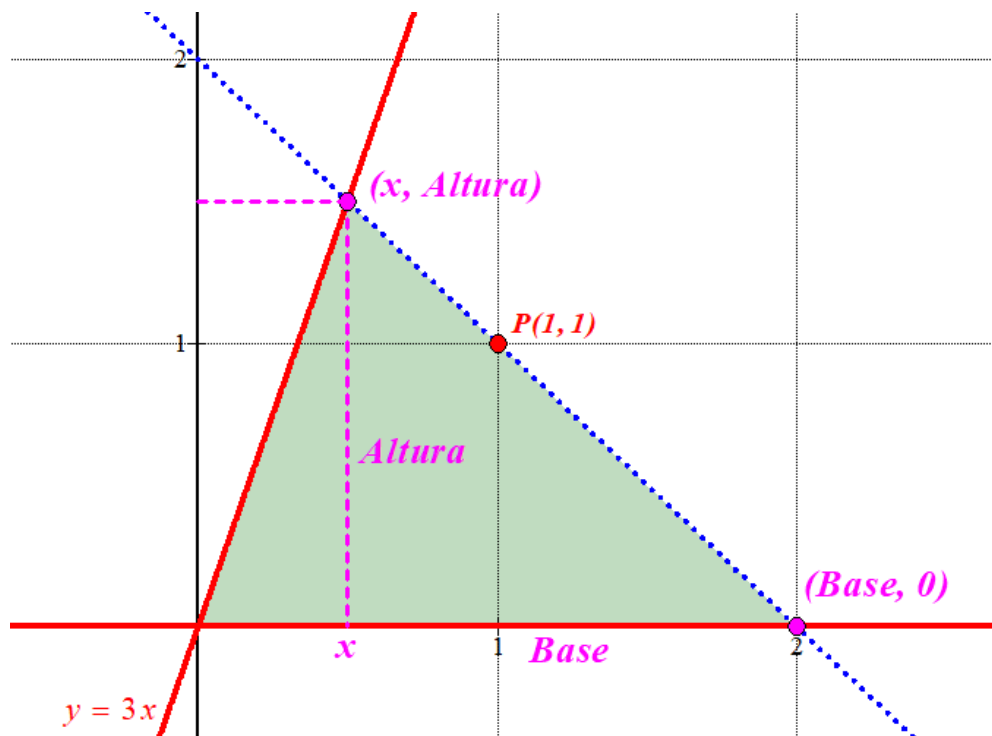
$$\left. \begin{array}{l} y = mx - m + 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow mx - m + 1 = 0 \Rightarrow mx = m - 1 \Rightarrow \{m \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{m-1}{m} = \text{base}}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x \\ y = mx - m + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow mx - m + 1 = 3x \Rightarrow (m-3)x = m-1 \Rightarrow \{m \neq 3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{m-1}{m-3} \Rightarrow \boxed{y = 3 \frac{m-1}{m-3} = \text{altura}}$$

Aplicando la fórmula del área de un triángulo tenemos:

$$\text{Área}(m) = \frac{\frac{m-1}{m} \cdot 3 \cdot \frac{m-1}{m-3}}{2} = \frac{3(m-1)^2}{2m(m-3)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - 3m}$$



b) Derivamos la función área y averiguamos cuando se anula.

$$\begin{aligned} A(m) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - 3m} \Rightarrow A'(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(2m-2)(m^2-3m) - (2m-3)(m^2-2m+1)}{(m^2-3m)^2} = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{2m^3 - 6m^2 - 2m^2 + 6m - (2m^3 - 4m^2 + 2m - 3m^2 + 6m - 3)}{(m^2-3m)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{-m^2 - 2m + 3}{(m^2-3m)^2} \end{aligned}$$

$$A'(m) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{-m^2 - 2m + 3}{(m^2-3m)^2} = 0 \Rightarrow -m^2 - 2m + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1) \cdot 3}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{2+4}{-2} = \boxed{-3 = m} \\ \frac{2-4}{-2} = \boxed{1 = m} \end{cases}$$

Como la recta  $r$  tiene pendiente negativa (decreciente) solo consideramos el valor  $m = -3$ .

Antes de este valor si tomamos  $m = -4$  la derivada vale

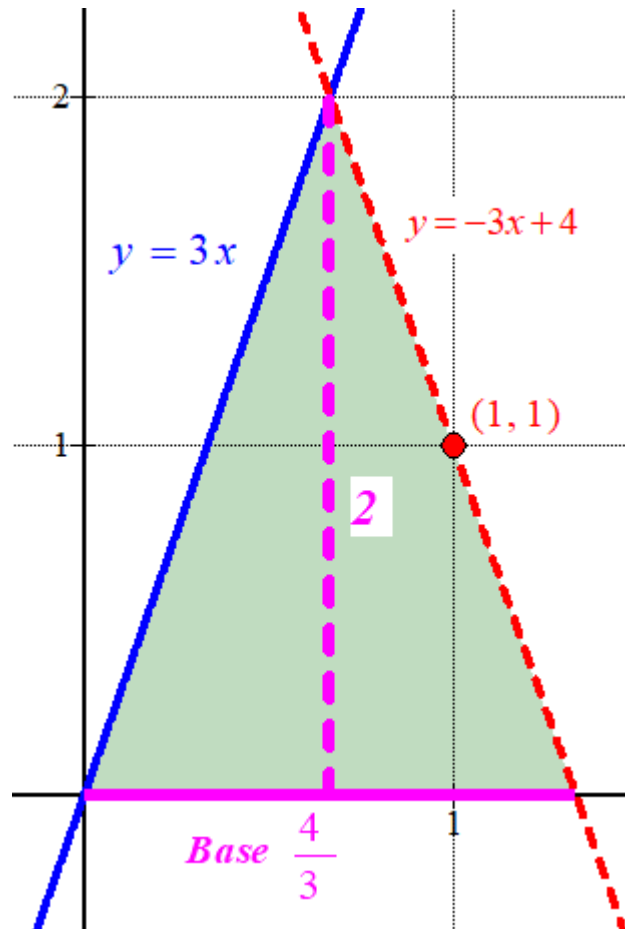
$$A'(-4) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-(-4)^2 - 2(-4) + 3}{((-4)^2 - 3(-4))^2} = \frac{-15}{1568} < 0. \text{ El área decrece antes de } m = -3.$$

Después de este valor si tomamos  $m = -2$  la derivada vale

$$A'(-2) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-(-2)^2 - 2(-2) + 3}{((-2)^2 - 3(-2))^2} = \frac{9}{200} > 0. \text{ El área crece después de } m = -3.$$

El área decrece antes y crece después de  $m = -3$ , por lo que el área es mínima para  $m = -3$ .

Para este valor el área del triángulo vale  $\text{Área}(-3) = \frac{3(-3-1)^2}{2(-3)(-3-3)} = \frac{4}{3}$  unidades cuadradas.



**Ejercicio 2**

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ mx + 2z &= 0 \\ my - z &= m \end{aligned} \right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro  $m$ .

[1,25 puntos]

b) Resuelva el sistema para  $m = 1$ .

[0,5 puntos]

c) Resuelva el sistema cuando este tenga infinitas soluciones.

[0,75 puntos]

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + m^2 - 0 + 3m - 2m = m^2 + m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 + m = 0 \Rightarrow m(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

**CASO 1.**  $m \neq 0$  y  $m \neq -1$ .

En este caso el determinante de  $A$  es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

**CASO 2.**  $m = 0$

En este caso el determinante de  $A$  es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda  $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Estudiamos el rango de  $A$  y  $A/B$  usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a + 2 \cdot \text{Fila 3}^a \\ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \\ 0 \ 0 \ -2 \ 0 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow A/B = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ 3 \ 1 \ 5}^{A/B} \\ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

**CASO 3.**  $m = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda  $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 3 \quad 5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 3 \quad 3 \quad 5 \\ 0 \quad -3 \quad -3 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{c|ccc} & A/B & & \\ \hline 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline & A & & \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

**Resumiendo:** Para  $m \neq 0$  y  $m \neq -1$  el sistema es **compatible determinado**, para  $m = 0$  el sistema es **compatible indeterminado** y para  $m = -1$  el sistema es **incompatible**.

b) Para  $m = 1$  el sistema es compatible determinado (CASO 1). Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ x + 2z = 0 \\ y - z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ x = -2z \\ y = z + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -2z + 3(z + 1) + z = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2z + 3z + 3 + z = 5 \Rightarrow 2z = 2 \Rightarrow \boxed{z = 1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = -2 \cdot 1 = -2} \\ \boxed{y = 1 + 1 = 2} \end{cases}$$

La solución es  $x = -2$ ;  $y = 2$ ;  $z = 1$ .

c) Para  $m = 0$  el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ 2z = 0 \\ -z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 3y = 5 \Rightarrow x = 5 - 3y \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

**Ejercicio 3**

La lesión por sesamoiditis (inflamación del hueso sesamoide del pie) es relativamente habitual entre la población que practica deportes de impacto (atletismo, baloncesto, tenis...). En una población de deportistas, se ha realizado un estudio diferenciando entre los que practican deportes de impacto y los que practican deportes sin impacto brusco (como natación, pilates, senderismo...). Se ha podido determinar que el 45% practican deportes de impacto. Entre ellos, un 10% sufren lesiones por sesamoiditis, mientras que entre los que no practican deportes de impacto sólo un 3% presentan esta lesión. Escogemos a un deportista al azar.

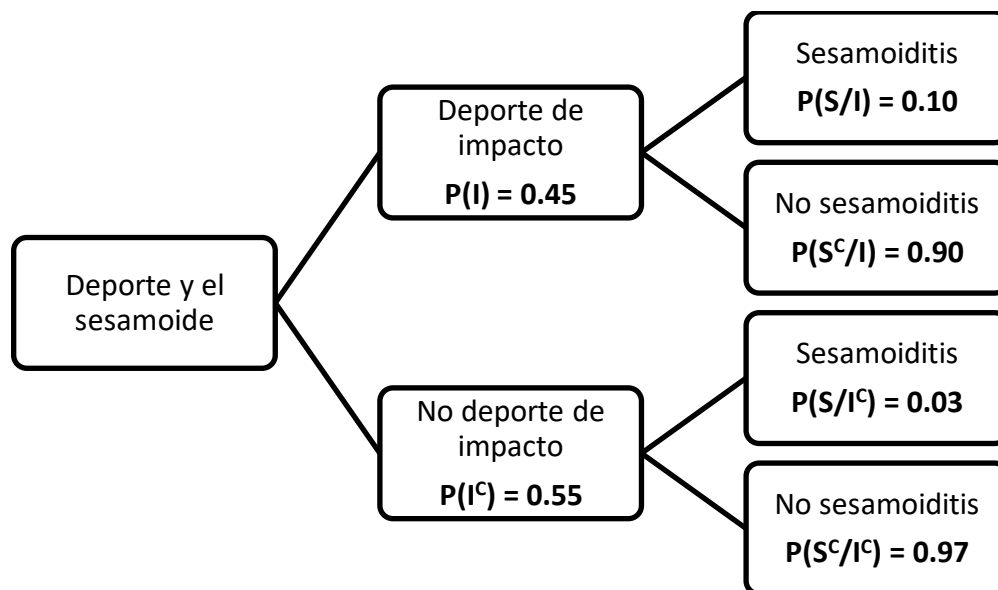
a) ¿Cuál es la probabilidad de que sufra sesamoiditis? [0,75 puntos]

b) Si el deportista elegido tiene una lesión por sesamoiditis, ¿cuál es la probabilidad de que practique deportes de impacto? [0,75 puntos]

Una empresa de calzado deportivo ha creado una zapatilla con amortiguación para minimizar las lesiones por sesamoiditis. Los beneficios generados por la venta de este producto, en miles de euros, siguen una función de la forma  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ , donde  $x$  son los años transcurridos desde que la zapatilla salió a la venta y  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes reales.

c) Calcule los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  sabiendo que el primer año se obtuvieron el máximo de beneficios, con un valor de 8 000 euros, y que en el segundo año hubo un punto de inflexión en los beneficios. [1 punto]

Llamamos  $I$  al suceso “practicar deportes de impacto” y  $S$  a “padecer sesamoiditis”. Realizamos un diagrama de árbol.



a) Debemos calcular  $P(S)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S) = P(I)P(S/I) + P(I^c)P(S/I^c) = 0.45 \cdot 0.10 + 0.55 \cdot 0.03 = \boxed{0.0615}$$

b) Debemos calcular  $P(I/S)$ . Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(I/S) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{P(I)P(S/I)}{P(S)} = \frac{0.45 \cdot 0.10}{0.0615} = \boxed{\frac{30}{41} \approx 0.7317}$$

- c) Sabemos que  $f(1)=8$  y que en  $x=1$  hay un máximo de la función por lo que  $f'(1)=0$ . También sabemos que al tener un punto de inflexión la derivada segunda debe anularse, por lo que  $f''(2)=0$ . Utilizamos estos tres datos para obtener las tres constantes.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(2) = 0 \\ f''(x) = 6ax + 2b \end{array} \right\} \Rightarrow 6a(2) + 2b = 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0 \Rightarrow 6a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -6a}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = 0 \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a + 2b + c \Rightarrow \boxed{c = -3a - 2b}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \\ f(1) = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{8 = a + b + c}$$

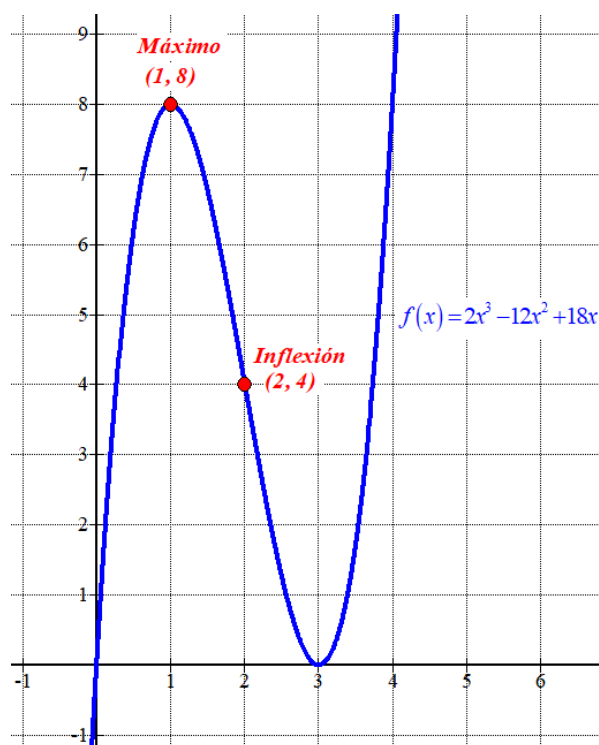
Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} b = -6a \\ c = -3a - 2b \\ 8 = a + b + c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = -3a - 2(-6a) \\ 8 = a - 6a + c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = 9a \\ 8 = -5a + c \end{array} \right\} \Rightarrow 8 = -5a + 9a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 = 4a \Rightarrow \boxed{a = 2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{b = -6 \cdot 2 = -12} \\ \boxed{c = 9 \cdot 2 = 18} \end{array} \right.$$

Los valores que cumplen lo pedido son  $a = 2$ ;  $b = -12$  y  $c = 18$ .

La función queda  $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$ .

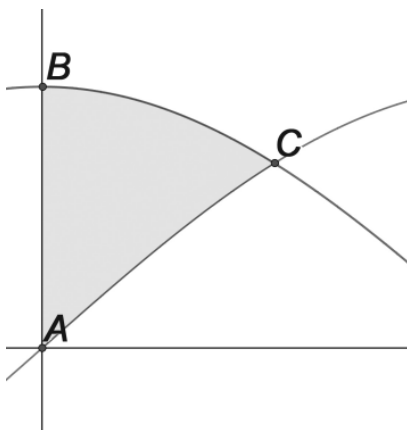


**Ejercicio 4**

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

**OPCIÓN A**

Un vidriero está reparando una de las vidrieras de la Sagrada Familia cuya forma es la de la parte sombreada de la figura adjunta. Se ha dado cuenta de que Gaudí lo diseñó de forma que uno de los lados sigue la función  $y = 3\sin(x/4)$  y otro sigue la función  $y = 3\cos(x/4)$ , donde  $x$  e  $y$  están expresadas en metros.



- a) Razone a qué función corresponde cada gráfica y calcule las coordenadas de los puntos B y C señalados en la figura (teniendo en cuenta que A es el origen de coordenadas).

[1 punto]

- b) Calcule el precio de la vidriera sabiendo que cuesta 750 €/m<sup>2</sup>.

[1,5 puntos]

- a) La gráfica que pasa por los puntos A y C toma el valor 0 para  $x = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} y = 3\sin(x/4) \\ y = 3\cos(x/4) \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 3\sin(0/4) = 3\sin 0 = 0 \rightarrow \text{¡OK!} \\ y = 3\cos(0/4) = 3\cos 0 = 3 \rightarrow \text{¡NO!} \end{array}$$

La función que pasa por los puntos A y C es  $y = 3\sin(x/4)$ .

La función que pasa por los puntos B y C es  $y = 3\cos(x/4)$ .

El punto A tiene coordenadas  $A(0,0)$ .

El punto B tiene coordenadas  $(0, 3\cos(0/4)) = (0,3)$ .

El punto C es el punto de corte de ambas gráficas. Determinamos sus coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3\sin(x/4) \\ y = 3\cos(x/4) \end{array} \right\} \Rightarrow 3\sin(x/4) = 3\cos(x/4) \Rightarrow \sin(x/4) = \cos(x/4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x/4)}{\cos(x/4)} = \frac{\cos(x/4)}{\cos(x/4)} \Rightarrow \tan(x/4) = 1 \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = \pi} \Rightarrow \boxed{y = 3\cos(\pi/4) = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

El punto C tiene coordenadas  $C\left(\pi, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ .

b) Hallamos el área de la región sombreada. El área la obtenemos como la integral definida entre 0 y  $\pi$  de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_0^{\pi} 3\cos(x/4) - 3\sin(x/4) dx = \left[ 3 \cdot 4 \sin(x/4) - 3 \cdot 4 (-\cos(x/4)) \right]_0^{\pi} = \\
 &= \left[ 12 \sin(x/4) + 12 \cos(x/4) \right]_0^{\pi} = \\
 &= \left[ 12 \sin(\pi/4) + 12 \cos(\pi/4) \right] - \left[ 12 \sin(0/4) + 12 \cos(0/4) \right] = \\
 &= 12 \frac{\sqrt{2}}{2} + 12 \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 12 = \boxed{12\sqrt{2} - 12 \approx 4.97 \text{ m}^2}
 \end{aligned}$$

Multiplicamos el área obtenida por el precio de cada metro cuadrado y obtenemos el coste de la vidriera:  $750 \cdot (12\sqrt{2} - 12) \approx 3727.92$  euros.

**Ejercicio 4**

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

**OPCIÓN B**

Considere el plano  $\pi: 2x - y + z = 5$  y el punto  $P = (0, 1, 3)$ .

- a) Compruebe que la distancia del punto P al plano  $\pi$  es  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ . [0.5 puntos]
- b) Encuentre la ecuación general de un plano  $\pi_1$  paralelo a  $\pi$  y que pase por el punto P. ¿Cuánto vale la distancia entre  $\pi_1$  y  $\pi$ ? [0.75 puntos]
- c) Encuentre la ecuación general de un segundo plano  $\pi_2$ , diferente de  $\pi_1$ , que sea paralelo a  $\pi$  y que esté a una distancia  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  de  $\pi$ . [1,25 puntos]

a) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y + z - 5 = 0 \\ P = (0, 1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 - 1 + 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

b) Un plano paralelo a  $\pi: 2x - y + z = 5$  tiene ecuación  $\pi_1: 2x - y + z + D = 0$ .

Determinamos el valor de D para que el plano pase por el punto  $P = (0, 1, 3)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: 2x - y + z + D = 0 \\ P = (0, 1, 3) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 - 1 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow \boxed{\pi_1: 2x - y + z - 2 = 0}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación  $\pi_1: 2x - y + z - 2 = 0$ .

La distancia entre los planos paralelos  $\pi_1$  y  $\pi$  es la misma que la distancia de un punto del plano  $\pi_1$ , por ejemplo, el punto P al plano  $\pi$ . Esta distancia sabemos que vale  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  unidades.

c) El plano  $\pi_2$  paralelo al plano  $\pi: 2x - y + z = 5$  tiene ecuación  $\pi_2: 2x - y + z + D = 0$ .

Un punto del plano  $\pi: 2x - y + z = 5$  es  $Q(0, 0, 5)$ . Que la distancia entre los planos  $\pi_2$  y  $\pi$  sea  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  implica que la distancia del punto Q al plano  $\pi_2$  debe valer  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2: 2x - y + z + D = 0 \\ Q = (0, 0, 5) \in \pi \\ d(\pi, \pi_2) = d(Q, \pi_2) = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|2 \cdot 0 - 0 + 5 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{|5 + D|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |5 + D| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 5 + D = 3 \rightarrow D = -2 \rightarrow \pi_1: 2x - y + z - 2 = 0 \\ 5 + D = -3 \rightarrow D = -8 \rightarrow \boxed{\pi_2: 2x - y + z - 8 = 0} \end{cases}$$

El plano buscado tiene ecuación  $\pi_2: 2x - y + z - 8 = 0$ .