



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 4

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para realizar esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos capaces de almacenar datos o de transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

Considere la función $f(x) = +\sqrt{1+x^3}$.

- Indique el dominio de esta función y los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes de coordenadas. [0,5 puntos]
- Resuelva la ecuación $f'(x) = 0$ y estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, así como sus máximos y mínimos locales. [1 punto]
- Determine el valor de a para que el punto $(a, 3)$ pertenezca a la gráfica de la función y calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en este punto. [1 punto]

Ejercicio 2

Considere el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + az &= 1 \\ -2x - 6y + 2z &= 2a \\ ax + 3y + z &= 3 \end{aligned} \right\}$$

Donde a es un parámetro real, y sean π_1 el plano determinado por la primera ecuación, π_2 el determinado por la segunda, y π_3 el determinado por la tercera.

- Discuta el sistema en función del valor de a . [1 punto]
- Describa la posición relativa de los tres planos π_1 , π_2 y π_3 en función del valor de a . [0,75 puntos]
- ¿En algún caso la intersección de los tres planos es una recta? En caso afirmativo, diga para que valor del parámetro, y dé un vector director y un punto de esta recta. [0,75 puntos]

Ejercicio 3

Un usuario de Internet ha estimado que el 25% de los correos electrónicos que recibe son spam, mientras que el resto no lo son. Para facilitar la clasificación del correo, se ha instalado un

filtro que envía a la carpeta de spam el 95% de los mensajes que efectivamente lo son. Desgraciadamente, este filtro deja en la bandeja de entrada sólo el 90% de los mensajes buenos (y el resto los envía a la carpeta de spam).

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un mensaje sea enviado por el filtro a la carpeta de spam? [0,75 puntos]

b) Un día, este usuario abre la carpeta de correo basura. ¿Qué porcentaje de mensajes que no son correo basura encontrará? [0,75 puntos]

En un servidor de correo electrónico determinado, la probabilidad de recibir al menos dos correos en menos de t minutos viene dada por la función $F(t) = \int_0^t Ae^{-0,5x} dx$, donde A es una constante real.

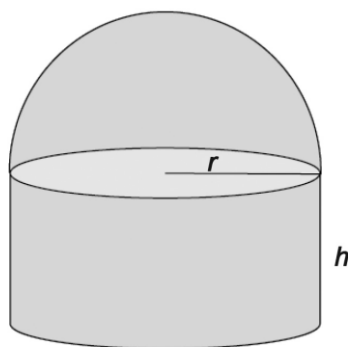
c) Sabiendo que la probabilidad de recibir al menos dos correos en menos de dos minutos es $1 - e^{-1}$, encuentre el valor de A . [1 punto]

Ejercicio 4

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

El diseñador de una casa de perfumes ha decidido que la botella del próximo perfume que la empresa sacará al mercado será de vidrio y tendrá la forma de un cilindro con una media esfera en la parte superior, tal y como se puede ver en la siguiente figura:



El perfume estará contenido en la parte cilíndrica, que tiene una capacidad de 100 cm^3 . El ingeniero a cargo del proceso de producción se propone minimizar el coste total del vidrio usado y, por tanto, quiere que la superficie total de la botella sea mínima.

a) Compruebe que la superficie total de la botella de perfume viene dada por la fórmula

$$S(r) = 3\pi r^2 + \frac{200}{r}.$$

[1 punto]

b) ¿Qué dimensiones debe tener la botella de perfume para que la superficie total sea mínima?

¿Cuál es la superficie total de la botella en este caso?

[1,5 puntos]

Nota: Recuerde que la superficie de una esfera viene dada por la fórmula $4\pi r^2$, donde r es su radio.

OPCIÓN B

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real, y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre los valores de a que hacen que las matrices A y B conmuten. (Dos matrices A y B conmutan si $AB = BA$.) [0.75 puntos]

b) Encuentre los valores de a para los que la matriz A es invertible. [0.75 puntos]

c) Encuentre los valores de a para los que $A^{-1} = A$. [1 punto]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

Considere la función $f(x) = +\sqrt{1+x^3}$.

- a) Indique el dominio de esta función y los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes de coordenadas. [0.5 puntos]
- b) Resuelve la ecuación $f'(x) = 0$ y estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, así como sus máximos y mínimos locales. [1 punto]
- c) Determine el valor de a para que el punto $(a, 3)$ pertenezca a la gráfica de la función y calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en este punto. [1 punto]

- a) El dominio de la función son todos los valores que hacen positivo o cero el radicando. Averiguamos cuando se anula el radicando.

$$1+x^3=0 \Rightarrow x^3=-1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-1}=-1$$

- Si tomamos un valor menor que -1 , por ejemplo $x=-2$ entonces

$$f(-2) = +\sqrt{1+(-2)^3} = +\sqrt{-7} = \text{No existe. La función no existe en } (-\infty, -1).$$

- Si tomamos un valor mayor que -1 , por ejemplo $x=0$ entonces $f(0) = +\sqrt{1+0^3} = 1$. La función existe en $[-1, +\infty)$.

El dominio de la función es $[-1, +\infty)$.

Determinamos los puntos de corte de la gráfica con los ejes coordenados.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = +\sqrt{1+x^3} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow +\sqrt{1+x^3}=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \boxed{A(-1,0)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = +\sqrt{1+x^3} \\ \text{Eje OY} \rightarrow x=0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = +\sqrt{1+0^3} = +1 \Rightarrow \boxed{B(0,1)}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son $A(-1,0)$ y $B(0,1)$.

- b) Obtenemos la expresión de la ecuación y la resolvemos.

$$f(x) = +\sqrt{1+x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor. Debemos tener en cuenta que el dominio de la función es $[-1, +\infty)$.

- En el intervalo $[-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{3(-0.5)^2}{2\sqrt{1+(-0.5)^3}} \approx 0.4 > 0. \text{ La función crece en } [-1, 0).$$

- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{3 \cdot 1^2}{2\sqrt{1+1^3}} \approx 1.06 > 0$.

La función crece en $(0, +\infty)$.

La función crece en todo su dominio $[-1, +\infty)$.

Como la función siempre crece y está definida en el intervalo $[-1, +\infty)$ la función tiene un mínimo local en $x = -1$, siendo las coordenadas de este punto $A(-1, 0)$.

La función no tiene máximos locales pues es siempre creciente.

c) Averiguamos cuando la función toma el valor 3.

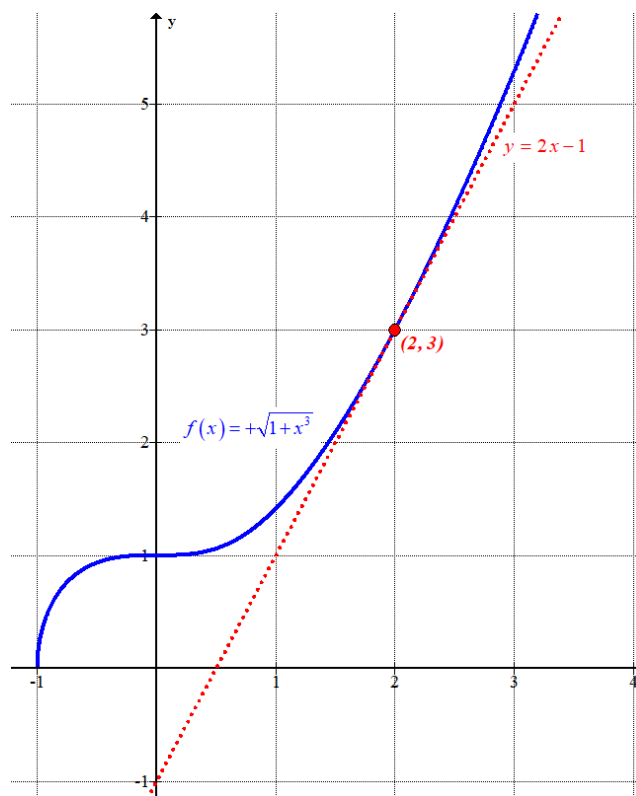
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = +\sqrt{1+x^3} \\ f(a) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow +\sqrt{1+a^3} = 3 \Rightarrow 1+a^3 = 9 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{8} = 2}$$

El valor buscado es $a = 2$.

La recta tangente a la curva en $a = 2$ tiene ecuación $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = +\sqrt{1+2^3} = 3 \\ f'(2) = \frac{3 \cdot 2^2}{2\sqrt{1+2^3}} = 2 \\ y - f(2) = f'(2)(x - 2) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y - 3 = 2x - 4 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$$

La recta tangente a la curva en $x = 2$ tiene ecuación $y = 2x - 1$.



Ejercicio 2

Considere el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + az &= 1 \\ -2x - 6y + 2z &= 2a \\ ax + 3y + z &= 3 \end{aligned} \right\}$$

Donde a es un parámetro real, y sean π_1 el plano determinado por la primera ecuación, π_2 el determinado por la segunda, y π_3 el determinado por la tercera.

a) Discuta el sistema en función del valor de a . [1 punto]

b) Describa la posición relativa de los tres planos π_1 , π_2 y π_3 en función del valor de a . [0,75 puntos]

c) ¿En algún caso la intersección de los tres planos es una recta? En caso afirmativo, diga para que valor del parámetro, y dé un vector director y un punto de esta recta. [0,75 puntos]

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ -2 & -6 & 2 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2a \\ a & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ -2 & -6 & 2 \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 6a - 6a + 6a^2 + 6 - 6 = 6a^2 - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 6a^2 - 6 = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \\ 1 \quad 3 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 6 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad -6 \quad 2 \quad -2 \\ 2 \quad 6 \quad -2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 3^a \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

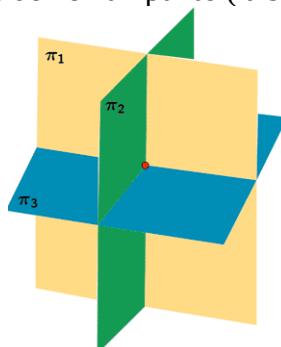
$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad -3 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad -6 \quad 2 \quad 2 \\ 2 \quad 6 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \end{array} \right)$$

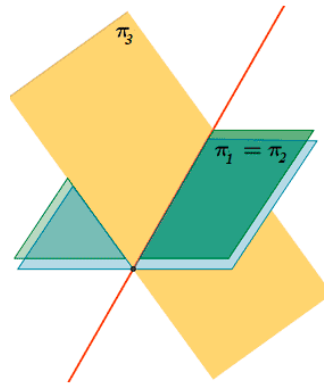
El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Para $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es **compatible determinado**, para $a = -1$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $a = 1$ el sistema es **incompatible**.

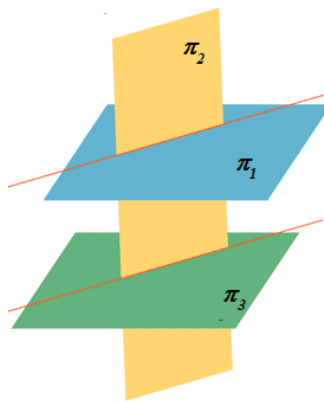
- b) Para $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), lo cual significa que los tres planos coinciden en un punto (la solución del sistema de ecuaciones).



Para $a = -1$ el sistema es **compatible indeterminado (infinitas soluciones)**, lo cual significa que los tres planos coinciden en una recta (hemos visto que el plano π_1 y π_2 son iguales).



Para $a = 1$ el sistema es **incompatible**, en los cálculos realizados hemos visto que el plano π_1 y π_3 son paralelos y ambos son cortados por el plano π_2 .



c) Para $a = -1$ el sistema es **compatible indeterminado (infinitas soluciones)**, lo cual significa que los tres planos coinciden en una recta. Resolvemos el sistema partiendo de la matriz triangular equivalente obtenida en el apartado a).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 \ 3 \ -1 \ 1}^{A/B} \\ 0 \ 6 \ 0 \ 4 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y - z = 1 \\ 6y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y - z = 1 \\ y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 3 \frac{2}{3} - z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 + z \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} P_r \left(-1, \frac{2}{3}, 0 \right) \\ \vec{v}_r (1, 0, 1) \end{cases}$$

Un punto de la recta intersección de los tres planos es $P_r \left(-1, \frac{2}{3}, 0 \right)$ y un vector director es $\vec{v}_r (1, 0, 1)$.

Ejercicio 3

Un usuario de Internet ha estimado que el 25% de los correos electrónicos que recibe son spam, mientras que el resto no lo son. Para facilitar la clasificación del correo, se ha instalado un filtro que envía a la carpeta de spam el 95% de los mensajes que efectivamente lo son. Desgraciadamente, este filtro deja en la bandeja de entrada sólo el 90% de los mensajes buenos (y el resto los envía a la carpeta de spam).

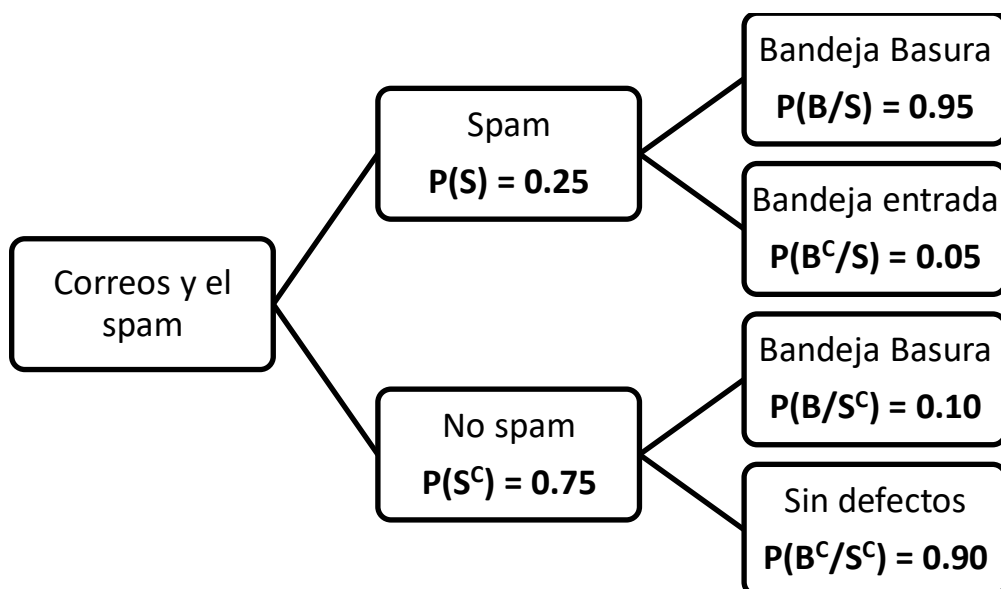
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un mensaje sea enviado por el filtro a la carpeta de spam? [0,75 puntos]

b) Un día, este usuario abre la carpeta de correo basura. ¿Qué porcentaje de mensajes que no son correo basura encontrará? [0,75 puntos]

En un servidor de correo electrónico determinado, la probabilidad de recibir al menos dos correos en menos de t minutos viene dada por la función $F(t) = \int_0^t Ae^{-0,5x} dx$, donde A es una constante real.

c) Sabiendo que la probabilidad de recibir al menos dos correos en menos de dos minutos es $1 - e^{-1}$, encuentre el valor de A . [1 punto]

Llamamos S al suceso “El correo es Spam” y B a “el correo es enviado a la carpeta de correo Basura”. Realizamos un diagrama de árbol.



a) Debemos calcular $P(B)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B) = P(S)P(B/S) + P(S^c)P(B/S^c) = 0.25 \cdot 0.95 + 0.75 \cdot 0.10 = \boxed{0.3125}$$

b) Calculamos $P(S^c/B)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(S^c/B) = \frac{P(S^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(S^c)P(B/S^c)}{P(B)} = \frac{0.75 \cdot 0.10}{0.3125} = \boxed{0.24}$$

El porcentaje de mensajes que no son spam en la carpeta de correo basura es del 24%.

c) Calculamos la integral que nos da la probabilidad.

$$F(t) = \int_0^t A e^{-0.5x} dx = \left[A \frac{e^{-0.5x}}{-0.5} \right]_0^t = A \frac{e^{-0.5t}}{-0.5} - A \frac{e^{-0.5 \cdot 0}}{-0.5} = -2A e^{-0.5t} + 2A = \boxed{2A(-e^{-0.5t} + 1)}$$

Como nos dicen que $F(2) = 1 - e^{-1}$, utilizamos este dato para obtener el valor de A.

$$\left. \begin{array}{l} F(2) = 1 - e^{-1} \\ F(t) = 2A(-e^{-0.5t} + 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - e^{-1} = 2A(1 - e^{-0.5 \cdot 2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-1} = 2A(1 - e^{-1}) \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

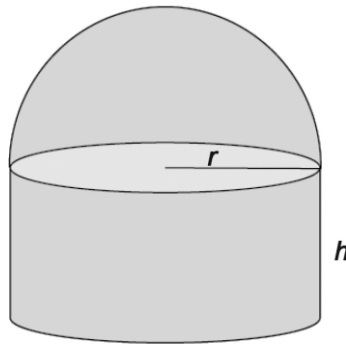
El valor buscado es $A = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 4

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

El diseñador de una casa de perfumes ha decidido que la botella del próximo perfume que la empresa sacará al mercado será de vidrio y tendrá la forma de un cilindro con una media esfera en la parte superior, tal y como se puede ver en la siguiente figura:



El perfume estará contenido en la parte cilíndrica, que tiene una capacidad de 100 cm^3 . El ingeniero a cargo del proceso de producción se propone minimizar el coste total del vidrio usado y, por tanto, quiere que la superficie total de la botella sea mínima.

a) Compruebe que la superficie total de la botella de perfume viene dada por la fórmula

$$S(r) = 3\pi r^2 + \frac{200}{r}.$$

[1 punto]

b) ¿Qué dimensiones debe tener la botella de perfume para que la superficie total sea mínima?

¿Cuál es la superficie total de la botella en este caso?

[1,5 puntos]

Nota: Recuerde que la superficie de una esfera viene dada por la fórmula $4\pi r^2$, donde r es su radio.

a) Sabemos que el volumen del cilindro es 100 cm^3 .

$$\left. \begin{array}{l} V(h, r) = \pi r^2 h \\ \text{Volumen} = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi r^2 h = 100 \Rightarrow \boxed{h = \frac{100}{\pi r^2}}$$

La superficie de la botella es la suma del área de la base circular (πr^2), el área del rectángulo lateral ($2\pi r h$) y la superficie de la semiesfera ($\frac{4\pi r^2}{2}$).

$$\left. \begin{array}{l} S(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r h + \frac{4\pi r^2}{2} \\ h = \frac{100}{\pi r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{100}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 + \frac{200}{r}$$

b) Hallamos la derivada de la función superficie y averiguamos cuando se anula.

$$\left. \begin{array}{l} S'(r) = 6\pi r - \frac{200}{r^2} \\ S'(r) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6\pi r - \frac{200}{r^2} = 0 \Rightarrow 6\pi r = \frac{200}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\pi r^3 = 200 \Rightarrow r^3 = \frac{200}{6\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}} \approx 2.1974 \text{ cm}$$

Tenemos un punto crítico de la función superficie para un radio de $\sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}} \approx 2.1974$ cm.

Determinamos el signo de la segunda derivada para este valor.

$$S'(r) = 6\pi r - \frac{200}{r^2} = 6\pi r - 200r^{-2} \Rightarrow S''(r) = 6\pi + 400r^{-3} = 6\pi + \frac{400}{r^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S''\left(\sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}}\right) = 6\pi + \frac{400}{\left(\sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}}\right)^3} = 6\pi + \frac{400}{\frac{100}{3\pi}} = 18\pi > 0$$

Al ser la segunda derivada positiva la superficie de la botella es mínima para $r = \sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}}$.

Para este valor del radio la altura del cilindro es $h = \frac{100}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{900}{\pi}} \approx 6.59$ cm.

La botella con superficie mínima tiene radio 2.1974 cm y altura 6.59 cm.

La superficie de la botella es de $S\left(\sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}}\right) = 3\pi \left(\sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}}\right)^2 + \frac{200}{\sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}}} \approx 136.525$ cm².

Ejercicio 4**OPCIÓN B**

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real, y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

- a) Encuentre los valores de a que hacen que las matrices A y B conmuten. (Dos matrices A y B conmutan si $AB = BA$.) [0.75 puntos]
 b) Encuentre los valores de a para los que la matriz A es invertible. [0.75 puntos]
 c) Encuentre los valores de a para los que $A^{-1} = A$. [1 punto]

a) Resolvemos la igualdad $AB = BA$.

$$\begin{aligned} AB = BA &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2+a^2 & 4a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ a+4 & 4a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2+a^2 = a+4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \boxed{2=a} \\ \frac{1-3}{2} = \boxed{-1=a} \end{cases} \end{aligned}$$

Las matrices conmutan para $a = 2$ y $a = -1$.

b) Para que la matriz A sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^3 - 0 = a^3$$

Para cualquier valor de a distinto de cero la matriz A es invertible.

c) Para que $A^{-1} = A$ se debe cumplir que $A \cdot A = I$.

$$\begin{aligned} A \cdot A = I &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+a^2 & a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1 \\ a + a^2 = 0 \rightarrow a(1+a) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -1} \\ a^4 = 1 \rightarrow a = \sqrt[4]{1} = \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Se cumple para $a = -1$.