



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 1

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para realizar esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos capaces de almacenar datos o de transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

Considere la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$.

- Determine los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes de coordenadas, y las ecuaciones de sus posibles asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. [1 punto]
- Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = f(x)$ en los puntos $x = 0$ y $x = 2$. ¿Estas dos rectas son paralelas? Justifique la respuesta. [1 punto]
- Hay algún punto donde la recta tangente a $f(x)$ tenga pendiente 1? En caso afirmativo, encuéntralo. [0.5 puntos]

Ejercicio 2

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} y - z &= p + 3 \\ p^2 x - z &= 5 \\ x - y &= 3 \end{aligned} \right\}$$

- Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro p . [1.25 puntos]
- Resuelva el sistema para el caso $p = -1$. [0,5 puntos]
- Para el caso $p = -1$, ¿hay alguna solución que cumpla, además, $xy = 10$? En caso afirmativo, indique cuántas hay y encuéntrelas todas. [0,75 puntos]

Ejercicio 3

Una empresa produce dos tipos de prendas, de hierro y de acero. El 60% de la producción total corresponde a piezas de hierro y el resto son de acero. Sabemos que el 95% de las piezas de hierro producidas no tienen ningún defecto, mientras que el 3% de las piezas de acero son defectuosas.

- Si tomamos una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa? [0,75 puntos]
- La empresa pronto diversificará la producción y empezará a producir también piezas de titanio, que se venderán en paquetes de 5. Si la probabilidad de que una pieza de titanio sea

defectuosa es un valor desconocido p , y cada pieza es defectuosa independientemente de las otras, compruebe que la expresión que nos da la probabilidad de que en un paquete función de p es $f(p) = 5(p^4 - p^5)$ [0,75 puntos]

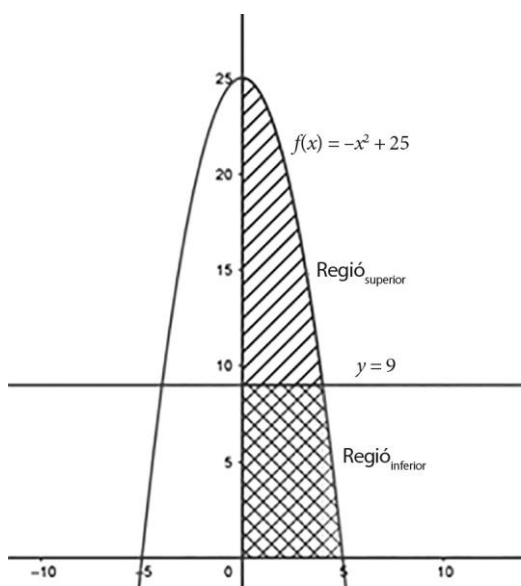
- c) Considere la función $f(p)$ del apartado anterior. Determine el valor máximo que toma $f(p)$ cuando $p \geq 0$. [1 punto]

Ejercicio 4

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

La vela mayor de un velero tiene forma semiparabólica y está delimitada por las gráficas de $f(x) = -x^2 + 25$, $y = 0$ y $x = 0$ tal como se indica en la figura siguiente:



La vela tiene dos partes separadas por la recta $y = 9$. Para su construcción, se emplea un tejido de nylon en la parte superior, que cuesta 50 €/u², y un tejido de poliéster en la parte inferior, que cuesta 70 €/u². Calcule el coste total del material que se necesita para construir esta vela. [2.5 puntos]

OPCIÓN B

Considere el plano π de ecuación $x + y = 0$.

- a) Calcule la ecuación del plano π' que es perpendicular a π y contiene los puntos $P = (1, -1, 2)$ y $Q = (3, -3, 6)$. [1 punto]
- b) Calcule la ecuación paramétrica de la recta contenida en π' y que contiene los puntos de π' que están a la misma distancia de P que de Q . [1.5 puntos]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

Considere la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$.

- a) Determine los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes de coordenadas, y las ecuaciones de sus posibles asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. [1 punto]
 b) Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = f(x)$ en los puntos $x = 0$ y $x = 2$. ¿Estas dos rectas son paralelas? Justifique la respuesta. [1 punto]
 c) Hay algún punto donde la recta tangente a $f(x)$ tenga pendiente 1? En caso afirmativo, encuéntralo. [0.5 puntos]

a) Determinamos los puntos de corte de la gráfica con los ejes coordenados.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 2x}{x - 1} \\ \text{Eje } OX \rightarrow y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \boxed{A(0,0)} \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \boxed{B(2,0)} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 2x}{x - 1} \\ \text{Eje } OY \rightarrow x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0}{0 - 1} = 0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son A(0, 0) y B(2, 0).

Determinamos las asíntotas de la función.

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

El dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{1 - 2}{1 - 1} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 2x}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x} = -1$$

La función tiene a la recta $y = x - 1$ como asíntota oblicua.

b) La recta tangente a la curva en $x = 0$ tiene ecuación $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - 1 \cdot (x^2 - 2x)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - \cancel{2x} + 2 - x^2 + \cancel{2x}}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 2}{(0-1)^2} = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0 \\ f'(0) = 2 \\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 2x \Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

La recta tangente a la curva en $x = 2$ tiene ecuación $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = \frac{2^2 - 2 \cdot 2}{2-1} = 0 \\ f'(2) = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 2}{(2-1)^2} = 2 \\ y - f(2) = f'(2)(x - 2) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 2(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = 2x - 4}$$

Las dos rectas tangentes obtenidas son paralelas pues tienen la misma pendiente $f'(0) = f'(2) = 2$.

c) Para que la pendiente de la recta tangente sea 1 la derivada de la función debe valer 1.
Buscamos esa posibilidad.

$$f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = x^2 + 1 - 2x \Rightarrow \mathbf{2 = 1 \text{ ¡Imposible!}}$$

No existe ninguna tangente a la gráfica de la función que tenga pendiente 1.

Ejercicio 2

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} y - z &= p + 3 \\ p^2 x - z &= 5 \\ x - y &= 3 \end{aligned} \right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro p . [1,25 puntos]

b) Resuelva el sistema para el caso $p = -1$. [0,5 puntos]

c) Para el caso $p = -1$, ¿hay alguna solución que cumpla, además, $xy = 10$? En caso afirmativo, indique cuántas hay y encuéntruelas todas. [0,75 puntos]

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ p^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & p+3 \\ p^2 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ p^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 + p^2 - 0 - 0 - 0 = p^2 - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow p^2 - 1 = 0 \Rightarrow p^2 = 1 \Rightarrow \boxed{p = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $p \neq -1$ y $p \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $p = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 0 \quad 3 \\ -1 \quad 0 \quad 1 \quad -5 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \\ 0 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad -1 \quad 5}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $p=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 0 \quad 3 \\ -1 \quad 0 \quad 1 \quad -5 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \\ 0 \quad 1 \quad -1 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad -1 \quad 5}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 2}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Para $p \neq -1$ y $p \neq 1$ el sistema es **compatible determinado**, para $p = -1$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $p = 1$ el sistema es **incompatible**.

- b) Resolvemos el sistema para $p = -1$. Por lo visto en el apartado anterior sabemos que el sistema es compatible indeterminado (CASO 2). Lo resolvemos partiendo de la matriz triangular equivalente obtenida en el apartado a).

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & A/B & & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & A & & \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x-z=5 \\ y-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5+z \\ y=2+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5+\lambda \\ y=2+\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x=5+\lambda \\ y=2+\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$.

c) Añadimos la condición $xy=10$ al sistema y vemos si existe alguna solución que lo cumpla.

$$\begin{cases} xy=10 \\ x=5+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow (5+\lambda)(2+\lambda)=10 \Rightarrow 10+5\lambda+2\lambda+\lambda^2=10 \Rightarrow \lambda^2+7\lambda=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda+7)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \rightarrow \begin{cases} x=5+0=5 \\ y=2+0=2 \\ z=0 \end{cases} \\ \lambda+7=0 \rightarrow \lambda=-7 \rightarrow \begin{cases} x=5-7=-2 \\ y=2-7=-5 \\ z=-7 \end{cases} \end{cases}$$

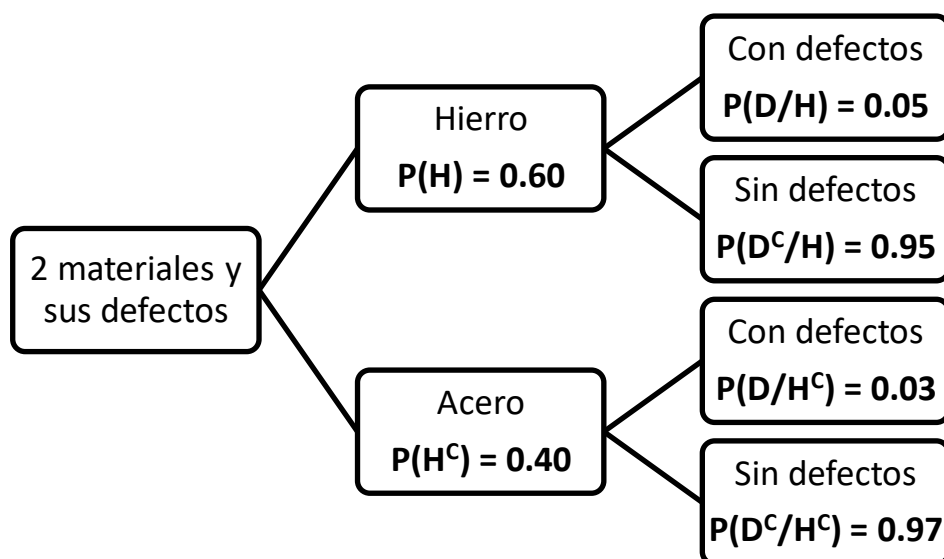
Hay dos soluciones. Una es $x=5, y=2, z=0$ y otra es $x=-2, y=-5, z=-7$.

Ejercicio 3

Una empresa produce dos tipos de prendas, de hierro y de acero. El 60% de la producción total corresponde a piezas de hierro y el resto son de acero. Sabemos que el 95% de las piezas de hierro producidas no tienen ningún defecto, mientras que el 3% de las piezas de acero son defectuosas.

- a) Si tomamos una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa? [0,75 puntos]
- b) La empresa pronto diversificará la producción y empezará a producir también piezas de titanio, que se venderán en paquetes de 5. Si la probabilidad de que una pieza de titanio sea defectuosa es un valor desconocido p , y cada pieza es defectuosa independientemente de las otras, compruebe que la expresión que nos da la probabilidad de que en un paquete de 5 piezas haya exactamente 4 defectuosas (en función de p) es $f(p) = 5(p^4 - p^5)$ [0,75 puntos]
- c) Considere la función $f(p)$ del apartado anterior. Determine el valor máximo que toma $f(p)$ cuando $p \geq 0$. [1 punto]

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Debemos calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(H)P(D/H) + P(H^c)P(D/H^c) = 0.6 \cdot 0.05 + 0.4 \cdot 0.03 = \boxed{0.042}$$

- b) Consideramos la variable aleatoria X = Número de piezas defectuosas en un paquete de 5 piezas. $X = B(5, p)$. Calculamos la expresión de $P(X = 4)$.

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} p^4 \cdot (1-p)^1 = 5p^4(1-p) = 5(p^4 - p^5)$$

Se cumple que $f(p) = P(X = 4) = 5(p^4 - p^5)$.

- c) Derivamos la función y vemos cuando se anula la derivada, siempre cumpliendo que $p \geq 0$.

$$f(p) = 5(p^4 - p^5) \Rightarrow f'(p) = 5(4p^3 - 5p^4) = 5p^3(4 - 5p)$$

$$f'(p) = 0 \Rightarrow 5p^3(4 - 5p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ 4 - 5p = 0 \Rightarrow 5p = 4 \Rightarrow p = \frac{4}{5} = 0.8 \end{cases}$$

Estudiamos la evolución de la función antes y después de $p = 0.8$.

- En el intervalo $(0, 0.8)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale
 $f'(0.5) = 5 \cdot 0.5^3(4 - 5 \cdot 0.5) = 0.9375 > 0$. La función crece en $(0, 0.8)$.
- En el intervalo $(0.8, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale
 $f'(1) = 5 \cdot 1^3(4 - 5 \cdot 1) = -5 < 0$. La función decrece en $(0.8, +\infty)$.

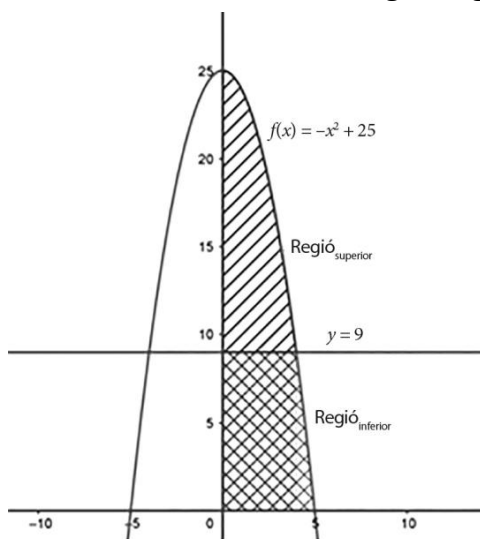
La función crece antes y decrece después de $p = 0.8$. La función tiene un máximo relativo y absoluto en $p = 0.8$. Este valor máximo de la función es $f(p) = 5(0.8^4 - 0.8^5) = 0.4096$

Ejercicio 4

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

La vela mayor de un velero tiene forma semiparabólica y está delimitada por las gráficas de $f(x) = -x^2 + 25$, $y = 0$ y $x = 0$ tal como se indica en la figura siguiente:



La vela tiene dos partes separadas por la recta $y = 9$. Para su construcción, se emplea un tejido de nylon en la parte superior, que cuesta 50 €/u², y un tejido de poliéster en la parte inferior, que cuesta 70 €/u². Calcule el coste total del material que se necesita para construir esta vela.

[2.5 puntos]

Hallamos el área total de la vela como la integral definida entre 0 y 5 de la función

$$f(x) = -x^2 + 25.$$

$$\text{Área total} = \int_0^5 f(x) dx = \int_0^5 -x^2 + 25 dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 25x \right]_0^5 =$$

$$= \left[\frac{-5^3}{3} + 25 \cdot 5 \right] - \left[\frac{-0^3}{3} + 25 \cdot 0 \right] = 125 - \frac{125}{3} = \boxed{\frac{250}{3} \text{ u}^2}$$

Obtenemos el punto de corte de la parábola con la recta $y = 9$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 9 \\ f(x) = -x^2 + 25 \end{array} \right\} \Rightarrow 9 = -x^2 + 25 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{16} = 4}$$

Calculamos el valor del área superior como el valor de la integral definida entre 0 y 4 de la diferencia entre $f(x) = -x^2 + 25$ e $y = 9$.

$$\text{Área superior} = \int_0^4 -x^2 + 25 - 9 dx = \int_0^4 -x^2 + 16 dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 16x \right]_0^4 =$$

$$= \left[\frac{-4^3}{3} + 16 \cdot 4 \right] - \left[\frac{-0^3}{3} + 16 \cdot 0 \right] = 64 - \frac{64}{3} = \boxed{\frac{128}{3} \text{ u}^2}$$

El área de la parte inferior la obtenemos restando al área total el área de la parte superior.

$$\text{Área inferior} = \frac{250}{3} - \frac{128}{3} = \boxed{\frac{122}{3} u^2}$$

Una vez que tenemos el valor del área de cada trozo calculamos el coste total del material.

$$\text{Coste} = 50 \cdot \frac{128}{3} + 70 \cdot \frac{122}{3} = 4980 \text{ €}$$

El coste de todo el material necesario para hacer la vela es de 4980 euros.

Ejercicio 4 OPCIÓN B

Considere el plano π de ecuación $x + y = 0$.

- a) Calcule la ecuación del plano π' que es perpendicular a π y contiene los puntos $P = (1, -1, 2)$ y $Q = (3, -3, 6)$. [1 punto]
- b) Calcule la ecuación paramétrica de la recta contenida en π' y que contiene los puntos de π' que están a la misma distancia de P que de Q. [1.5 puntos]

- a) El plano perpendicular a π tiene como uno de sus vectores directores el vector normal de π . El otro vector director del plano π' es el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\pi: x + y = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 0) \qquad \overrightarrow{PQ} = (3, -3, 6) - (1, -1, 2) = (2, -2, 4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (1, 1, 0) \\ \vec{v} = \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} (2, -2, 4) = (1, -1, 2) \\ P(1, -1, 2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2 - z + 2 - z + 2 - 2y - 2 = 0 \Rightarrow 2x - 2y - 2z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x - y - z = 0}$$

El plano π' que es perpendicular a π y contiene los puntos $P = (1, -1, 2)$ y $Q = (3, -3, 6)$ tiene ecuación $\pi': x - y - z = 0$.

- b) Los puntos que equidistan de P y Q constituyen una recta. El vector director de esta recta es perpendicular al vector normal del plano π' pues la recta está contenida en el plano, también es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}$. Podemos tomar como vector director de la recta el producto vectorial del vector $\vec{n}'$ y $\overrightarrow{PQ}$. Además, esta recta pasa por el punto medio del segmento PQ.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (2, -2, 4) \\ \pi': x - y - z = 0 \rightarrow \vec{n}' = (1, -1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}' \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4i - 2j - 2k + 2k - 4j - 2i = -6i - 6j = (-6, -6, 0)$$

Hallamos el punto medio del segmento PQ y la ecuación de la recta r pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{(3, -3, 6) + (1, -1, 2)}{2} = (2, -2, 4) \in r \\ \vec{v}_r = \frac{1}{-6} \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{-6} (-6, -6, 0) = (1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$$

La recta que buscamos tiene ecuación $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$.