

Matemáticas II

INDICACIONES

- Para obtener la máxima calificación, se debe responder a una cuestión de cada apartado/bloque.
- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, se debe responder solo a una de las opciones. Si se realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo del examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

APARTADO 1 (Bloque A+D) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (1A o 1B):

1A) Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) [0.75 puntos] Si tiene sentido la operación, calcula: $(2A + B)^2$.
- b) [0.75 puntos] Si tiene sentido la operación, calcula: $C(AC)^t$.
- c) [1 punto] Obtén, si es posible, la matriz X que satisface la ecuación matricial: $2AX = C$.

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - z = a + \frac{3}{2} \\ 5x + (3 - a)y = 5 \\ 3x + y + (2a + 2)z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- a) [1,5 puntos] Determina los valores de a para los cuales el sistema es incompatible.
- b) [1 punto] Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

APARTADO 2 (Bloque B) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (2A o 2B):

2A) Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera: $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$.

- a) [0,5 puntos] Determina el dominio de definición de $f(x)$.
- b) [1 punto] Calcula el máximo absoluto de $f(x)$.
- c) [1 punto] Halla la expresión de la recta tangente a $f(x)$ en $x=1$.

2B) Considera la siguiente función: $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$

- a) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) [0.5 puntos] Determina los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de abscisas OX.
- c) [1 punto] Calcula el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

APARTADO 3 (Bloque C) [2.5 PUNTOS]

3) Considera la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$ y el punto $P = (1, 1, 1)$.

- a) [0.5 puntos] Expresa la recta r en forma continua.
- b) [1 punto] Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π en función del valor de a .
- c) [1 punto] Si $Q = (1, 0, 0)$ es un punto de π , ¿cuál es la distancia entre r y π ?

APARTADO 4 (Bloque E) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (4A o 4B)

4A) En un ensayo clínico, se administró una medicación a un grupo de personas con cierta dolencia. La medicación demostró ser efectiva en el 85% de los casos. Paralelamente, se administró un placebo en un grupo control con el mismo número de personas, en el que solo el 5% de los participantes mejoró de forma espontánea.

- a) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que un participante tratado con el medicamento no mejore?
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que un participante elegido al azar no haya mejorado.
- c) [1 punto] Si se escoge al azar un participante que haya mejorado, ¿cuál es la probabilidad de que se le haya administrado el placebo?

4B) En una universidad, el 25% de los estudiantes utiliza la bicicleta para ir a clase y el 70% utiliza el transporte público. Solo un 15% de los estudiantes no utiliza ni bicicleta ni transporte público.

- a) [0,5 puntos] Si se escoge a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice tanto la bicicleta como el transporte público?
- b) [1 punto] Si se escoge a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice solo la bicicleta o solo el transporte público?
- c) [1 punto] Si se escoge a un estudiante que no utiliza el transporte público, ¿cuál es la probabilidad de que utilice bicicleta?

SOLUCIONES**APARTADO 1 (Bloque A+D) [2.5 PUNTOS]****1A)** Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) [0.75 puntos] Si tiene sentido la operación, calcula: $(2A + B)^2$.b) [0.75 puntos] Si tiene sentido la operación, calcula: $C(AC)^t$.c) [1 punto] Obtén, si es posible, la matriz X que satisface la ecuación matricial: $2AX = C$.a) Intentamos calcular la matriz resultante de $(2A + B)^2$.

$$2A + B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 0-2 \\ -2-1 & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(2A + B)^2 = (2A + B)(2A + B) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25+6 & -10-12 \\ -15-18 & 6+36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -22 \\ -33 & 42 \end{pmatrix}$$

La operación $(2A + B)^2$ es posible obteniéndose la matriz $(2A + B)^2 = \begin{pmatrix} 31 & -22 \\ -33 & 42 \end{pmatrix}$.

b) Intentamos calcular la matriz resultante de $C(AC)^t$.

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (AC)^t = \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 1 \rightarrow 2 \times 1$

$$C(AC)^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{1 \cdot 1} \times 2 \rightarrow 2 \times 2$

La operación $C(AC)^t$ es posible obteniéndose la matriz $C(AC)^t = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

c) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$2AX = C \Rightarrow AX = \frac{1}{2}C \Rightarrow X = \frac{1}{2}A^{-1}C$$

Obtenemos la matriz inversa de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Terminamos de calcular la expresión de la matriz X .

$$X = \frac{1}{2} A^{-1} C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 + 0 \\ -2 + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

La matriz X que satisface la ecuación matricial: $2AX = C$ tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/6 \end{pmatrix}$.

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - z = a + \frac{3}{2} \\ 5x + (3 - a)y = 5 \\ 3x + y + (2a + 2)z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

a) [1,5 puntos] Determina los valores de a para los cuales el sistema es incompatible.

b) [1 punto] Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

a) El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3-a & 0 \\ 3 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$ y la matriz

$$\text{ampliada } A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & a + \frac{3}{2} \\ 5 & 3-a & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2a+2 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema es compatible cuando el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada son distintos. Para que ocurra esto lo primero que debe pasar es que el rango de A no sea 3, es decir que el determinante de A sea nulo.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3-a & 0 \\ 3 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix} = (3-a)(2a+2) + 0 - 5 + 3(3-a) - 0 - 0 =$$

$$= 6a + 6 - 2a^2 - 2a - 5 + 9 - 3a = -2a^2 + a + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a^2 + a + 10 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)10}}{2(-2)} = \frac{-1 \pm 9}{-4} = \begin{cases} \frac{-1+9}{-4} = \boxed{-2 = a} \\ \frac{-1-9}{-4} = \boxed{2.5 = a} \end{cases}$$

Sabemos que para un valor de a distinto de -2 y 2.5 el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema va a ser compatible determinado.

Vemos que ocurre para $a = -2$ y para $a = 2.5$.

Para $a = -2$ la matriz A tiene determinante nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su

rango y el de la matriz ampliada. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 5 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 5 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 1^a - \text{Fila } 3^a \\ 2 \quad 0 \quad -2 \quad -1 \\ -3 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \\ \hline -1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Fila } 1^a + \text{Fila } 2^a \\ -5 \quad -5 \quad 0 \quad -5 \\ 5 \quad 5 \quad 0 \quad 5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}^{A/B} \\ 5 \quad 5 \quad 0 \quad 5 \\ \underbrace{3 \quad 1 \quad -2 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el rango de A/B , por lo que el sistema es compatible para $a = -2$.

Para $a = 2.5$ la matriz A tiene determinante nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su

rango y el de la matriz ampliada. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 5 & 0.5 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 5 & 0.5 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad 7 \quad 0 \\ -3 \quad 0 \quad 3 \quad -12 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 10 \quad -12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 5 \quad 0.5 \quad 0 \quad 5 \\ -5 \quad 0 \quad 5 \quad -20 \\ \hline 0 \quad 0.5 \quad 5 \quad -15 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0.5 & 5 & -15 \\ 0 & 1 & 10 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 10 \quad -12 \\ 0 \quad -1 \quad -10 \quad 30 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 18 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad -1 \quad 4}^{A/B} \\ 0 \quad 0.5 \quad 5 \quad -15 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 18}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible para $a = 2.5$.

El sistema es incompatible solo para $a = 2.5$.

- b) Por lo visto en el apartado anterior sabemos que para $a = 0$ el sistema es compatible determinado. Hallamos la solución del sistema.

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} x - z = \frac{3}{2} \\ 5x + 3y = 5 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \text{ . Lo resolvemos.}$$

$$\begin{cases} x - z = \frac{3}{2} \\ 5x + 3y = 5 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} + z \\ 5x + 3y = 5 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\left(\frac{3}{2} + z\right) + 3y = 5 \\ 3\left(\frac{3}{2} + z\right) + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{15}{2} + 5z + 3y = 5 \\ \frac{9}{2} + 3z + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5z + 3y = 5 - \frac{15}{2} \\ \frac{9}{2} + y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5z + 3y = \frac{-5}{2} \\ y = -5z - \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5z + 3\left(-5z - \frac{9}{2}\right) = \frac{-5}{2} \Rightarrow 5z - 15z - \frac{27}{2} = \frac{-5}{2} \Rightarrow -10z = \frac{22}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{11}{-10} = -1.1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = \frac{3}{2} - 1.1 = 0.4} \\ \boxed{y = -5(-1.1) - \frac{9}{2} = 5.5 - 4.5 = 1} \end{cases}$$

Para $a = 0$ la solución del sistema es $x = 0.4$, $y = 1$, $z = -1.1$

APARTADO 2 (Bloque B) [2.5 PUNTOS]

2A) Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera: $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$.

- a) [0,5 puntos] Determina el dominio de definición de $f(x)$.
- b) [1 punto] Calcula el máximo absoluto de $f(x)$.
- c) [1 punto] Halla la expresión de la recta tangente a $f(x)$ en $x=1$.

a) El dominio de la función son todos los números reales mayores o iguales que cero pues la raíz cuadrada sólo existe si el radicando es positivo o cero. Dominio = $[0, +\infty)$.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x}e^{-x} &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} + \sqrt{x}(-1)e^{-x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} - \sqrt{x}e^{-x} = \\ &= e^{-x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = e^{-x} \left(\frac{1 - 2(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \right) = e^{-x} \left(\frac{1 - 2x}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{1 - 2x}{2e^x \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - 2x}{2e^x \sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = \frac{1}{2}$.

- En el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ tomamos $x = 0.25$ y la derivada vale

$$f'(0.25) = \frac{1 - 2 \cdot 0.25}{2e^{0.25} \sqrt{0.25}} = \frac{0.5}{2e^{0.25} \sqrt{0.25}} > 0. \text{ La función crece en } \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1 - 2 \cdot 1}{2e^1 \sqrt{1}} = \frac{-1}{2e} < 0$.

La función decrece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

La función crece en $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ y decrece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Por lo que la función presenta un máximo relativo en $x = \frac{1}{2}$ que es un máximo absoluto por la evolución de la función. Para este valor

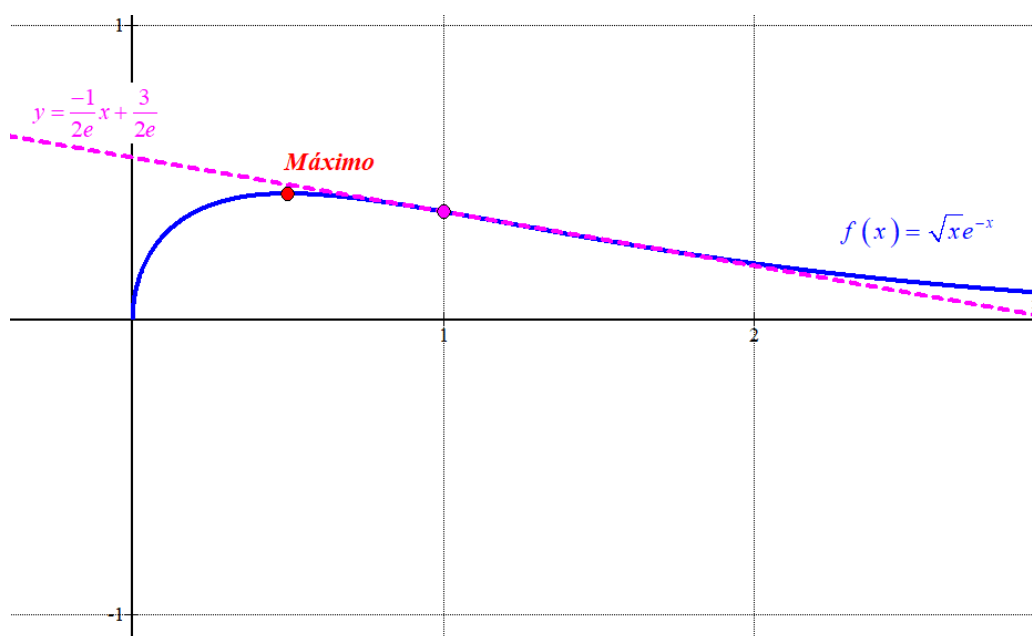
$$\text{la función vale } f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}} = \frac{\sqrt{2e}}{2e}.$$

c) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=1$ tiene la expresión $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \sqrt{1}e^{-1} = \frac{1}{e} \\ f'(1) = \frac{-1}{2e} \\ y - f(1) = f'(1)(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{e} = \frac{-1}{2e}(x-1) \Rightarrow y - \frac{1}{e} = \frac{-1}{2e}x + \frac{1}{2e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{2e}x + \frac{1}{2e} + \frac{1}{e} \Rightarrow y = \frac{-1}{2e}x + \frac{1}{2e} + \frac{2}{2e} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{2e}x + \frac{3}{2e}}$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=1$ tiene la expresión $y = \frac{-1}{2e}x + \frac{3}{2e}$.



2B) Considera la siguiente función: $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$

- a) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) [0.5 puntos] Determina los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de abscisas OX.
- c) [1 punto] Calcula el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

a) Estudiamos el cambio de signo de la derivada empezando por averiguar cuando se anula.

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(x^2 + 1) - 2x \cdot 3x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3 - 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3 - 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ consideramos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{3 - 3(-2)^2}{((-2)^2 + 1)^2} = \frac{-9}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 1)$ consideramos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{3 - 3 \cdot 0^2}{(0^2 + 1)^2} = 3 > 0. \text{ La función crece en } (-1, 1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ consideramos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{3 - 3 \cdot 2^2}{(2^2 + 1)^2} = \frac{-9}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (1, +\infty).$$

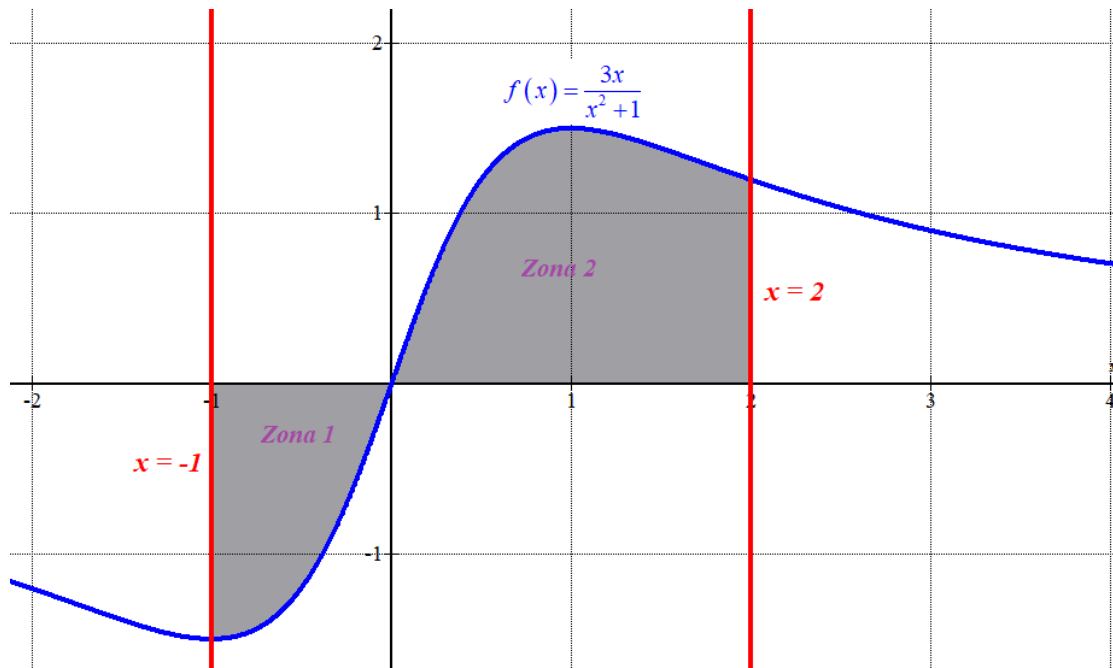
La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(-1, 1)$.

b) Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de abscisas OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \boxed{A(0, 0)}$$

El punto de corte de la función con el eje de abscisas es $A(0, 0)$.

- c) La gráfica de la función corta el eje OX en $x = 0 \in [-1, 2]$. El área pedida es la suma del valor absoluto de la integral definida de la función entre -1 y 0 y el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 2 .



Calculamos el área de la zona 1.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 \frac{3x}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_{-1}^0 = \\ &= \frac{3}{2} \left(\ln(0^2+1) - \ln((-1)^2+1) \right) = \frac{-3\ln 2}{2}\end{aligned}$$

El área de la zona 1 tiene un valor de $\frac{3\ln 2}{2}$ unidades cuadradas.

Calculamos el área de la zona 2.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 \frac{3x}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_0^2 = \\ &= \frac{3}{2} \left(\ln(2^2+1) - \ln(0^2+1) \right) = \frac{3\ln 5}{2}\end{aligned}$$

El área de la zona 2 tiene un valor de $\frac{3\ln 5}{2}$ unidades cuadradas.

El área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$ es la suma de los dos valores obtenidos: $\frac{3\ln 5}{2} + \frac{3\ln 2}{2} = \frac{3\ln 5 + 3\ln 2}{2} \approx 3.45$ unidades cuadradas.

APARTADO 3 (Bloque C) [2.5 PUNTOS]

3) Considera la recta $r: \begin{cases} x+y+2=0 \\ y+2z-5=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 5x+3y-4z+a=0$.

- a) [0.5 puntos] Expresa la recta r en forma continua.
 b) [1 punto] Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π en función del valor de a .
 c) [1 punto] Si $Q = (1, 0, 0)$ es un punto de π , ¿cuál es la distancia entre r y π ?

a) Obtenemos la ecuación continua de la recta.

$$r: \begin{cases} x+y+2=0 \\ y+2z-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ y=5-2z \end{cases} \Rightarrow x+5-2z+2=0 \Rightarrow x=-7+2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x=-7+2\lambda \\ y=5-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, -2, 1) \\ Q_r(-7, 5, 0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r: \frac{x+7}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{1}}$$

b) La recta tiene como vector director $\vec{v}_r = (2, -2, 1)$ y el plano tiene como vector normal $\vec{n} = (5, 3, -4)$.

Comprobamos si estos vectores son perpendiculares, es decir, si su producto escalar es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, -2, 1) \\ \vec{n} = (5, 3, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (5, 3, -4)(2, -2, 1) = 10 - 6 - 4 = 0$$

Estos vectores son perpendiculares y la recta o está contenida en el plano o es paralela al plano.

Si el punto $Q_r(-7, 5, 0)$ de la recta r pertenece al plano la recta está contenida en el plano.

De no ser así la recta es paralela al plano.

$$\left. \begin{array}{l} Q_r(-7, 5, 0) \in \pi \\ \pi: 5x+3y-4z+a=0 \end{array} \right\} \Rightarrow -35+15-0+a=0 \Rightarrow -20+a=0 \Rightarrow \boxed{a=20}$$

Si $a=20$ la recta está contenida en el plano. Si a es distinto de 20 la recta es paralela al plano.

c) Si $Q = (1, 0, 0)$ es un punto de π entonces cumple su ecuación.

$$5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + a = 0 \rightarrow 5 + a = 0 \rightarrow a = -5$$

Este valor es distinto de 20, por lo que la recta es paralela al plano $\pi: 5x+3y-4z-5=0$.

La distancia de la recta al plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} Q_r(-7, 5, 0) \in r \\ \pi: 5x+3y-4z-5=0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(Q_r, \pi) = \frac{|5(-7) + 3 \cdot 5 - 4 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{5^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{25}{\sqrt{50}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} u$$

APARTADO 4 (Bloque E) [2.5 PUNTOS]

4A) En un ensayo clínico, se administró una medicación a un grupo de personas con cierta dolencia. La medicación demostró ser efectiva en el 85% de los casos. Paralelamente, se administró un placebo en un grupo control con el mismo número de personas, en el que solo el 5% de los participantes mejoró de forma espontánea.

- a) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que un participante tratado con el medicamento no mejore?
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que un participante elegido al azar no haya mejorado.
- c) [1 punto] Si se escoge al azar un participante que haya mejorado, ¿cuál es la probabilidad de que se le haya administrado el placebo?

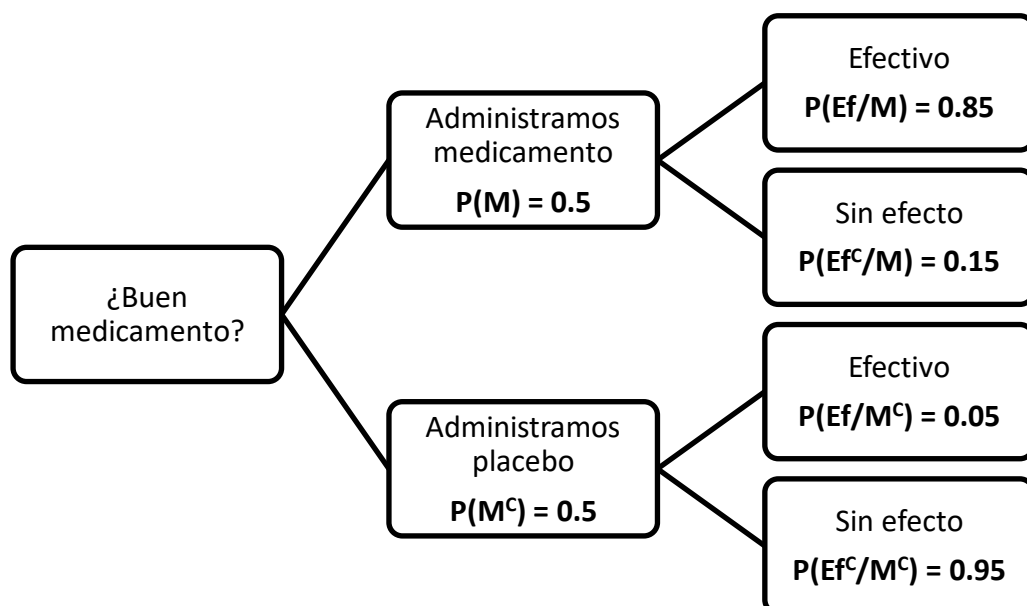
a) En el 85 % de los casos a los que se administró el medicamento demostró ser efectivo, en el restante 15 % no fue efectivo. la probabilidad de que un participante tratado con el medicamento no mejore es de 0.15.

b) Supongamos que son 100 personas a las que se administra el medicamento. De estas hay 85 que mejoran. También son 100 personas a las que se le administra el placebo y de estas solo mejoran 5. De las 200 personas que participan en el ensayo clínico son $85 + 5 = 90$ las personas que mejoran y 110 las que no mejoran. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que un participante elegido al azar no haya mejorado tiene un valor de $\frac{110}{200} = 0.55$.

c) De los 200 participantes en el estudio hay 90 que han mejorado y de estos solo 5 han recibido el placebo. La probabilidad de que al elegir un participante que ha mejorado se le haya administrado el placebo tiene un valor de $\frac{5}{90} = \frac{1}{18} \approx 0.0556$.

OTRA FORMA DE HACERLO

Construimos un diagrama de árbol. Como se eligen grupos con el mismo número de personas para hacer un control la probabilidad de que al elegir una persona se le haya administrado un placebo o un medicamento tienen el mismo valor y valen 0.5.



a) Nos piden el valor de $P(Ef^c / M)$. Esta probabilidad es de 0.15.

b) No piden el valor de $P(Ef^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(Ef^c) = P(M)P(Ef^c / M) + P(M^c)P(Ef^c / M^c) = 0.5 \cdot 0.15 + 0.5 \cdot 0.95 = \boxed{0.55}$$

c) Nos piden calcular $P(M^c / Ef)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M^c / Ef) = \frac{P(M^c \cap Ef)}{P(Ef)} = \frac{P(M^c)P(Ef / M^c)}{1 - P(Ef^c)} = \frac{0.5 \cdot 0.05}{1 - 0.55} = \boxed{\frac{1}{18} \approx 0.0556}$$

4B) En una universidad, el 25% de los estudiantes utiliza la bicicleta para ir a clase y el 70% utiliza el transporte público. Solo un 15% de los estudiantes no utiliza ni bicicleta ni transporte público.

- a) [0,5 puntos] Si se escoge a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice tanto la bicicleta como el transporte público?
- b) [1 punto] Si se escoge a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice solo la bicicleta o solo el transporte público?
- c) [1 punto] Si se escoge a un estudiante que no utiliza el transporte público, ¿cuál es la probabilidad de que utilice bicicleta?

Construimos una tabla de contingencia para obtener la información implícita en los datos proporcionados

	Bicicleta	No bicicleta	
Transporte público			70
No transporte público		15	
	25		100

Completamos la tabla.

	Bicicleta	No bicicleta	
Transporte público	10	60	70
No transporte público	15	15	30
	25	75	100

- a) Hay un 10 % de los estudiantes que utilizan ambos medios de transporte. La probabilidad de que al escoger un estudiante al azar utilice tanto la bicicleta como el transporte público vale 0.10.
- b) Hay un 60 % de los estudiantes que utilizan solo el transporte público y un 15 % que solo utiliza la bicicleta. Son un $15 + 60 = 75$ % los que utilizan solo la bicicleta o solo el transporte público, por lo que la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar utilice solo la bicicleta o solo el transporte público es del 0.75.
- c) Un 30 % de los estudiantes no utiliza el transporte público y un 15 % de los estudiantes no utiliza el transporte público, pero si utiliza la bicicleta. La probabilidad de que al escoger a un estudiante que no utiliza el transporte público este utilice bicicleta vale $\frac{15}{30} = 0.5$.