



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025**

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d) Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.
- e) En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- h) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- i) Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-k}{2}$ y $s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$.

- a) **[1,5 puntos]** Determina k sabiendo que ambas se cortan en un punto.
- b) **[1 punto]** Para $k = 0$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s .

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Un naufrago se encuentra en una isla situada en el punto de coordenadas $(2, 0)$ de un plano. Se sabe que un ferry navega en el mismo plano siempre en la trayectoria dada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$. ¿Hacia qué punto de la trayectoria debe nadar el naufrago para recorrer la menor distancia posible? Calcula dicha distancia.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea la función $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|}$.

- a) **[1,5 puntos]** Estudia la derivabilidad de f .
- b) **[1 punto]** Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Se considera la matriz $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ con determinante igual a -5 .

a) [1,25 puntos] Calcula $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & 2a_{21} \\ 3a_{12} & 3a_{32} & 6a_{22} \\ 2a_{13} & 2a_{33} & 4a_{23} \end{vmatrix}$.

b) [1,25 puntos] Calcula $\begin{vmatrix} 2a_{11} - 3a_{31} & 2a_{12} - 3a_{32} & 4a_{13} - 6a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) [1,5 puntos] Determina a y b para que $A^2 = 4I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) [1 punto] Para $a = -1$ y $b = 1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple $A^2 X = B^t$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -e^x$ y $g(x) = -e^{-x}$.

a) [1 punto] Esboza las gráficas de dichas funciones.

b) [1,5 puntos] Calcula la suma de las áreas de los recintos acotados y limitados por las gráficas de dichas funciones y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

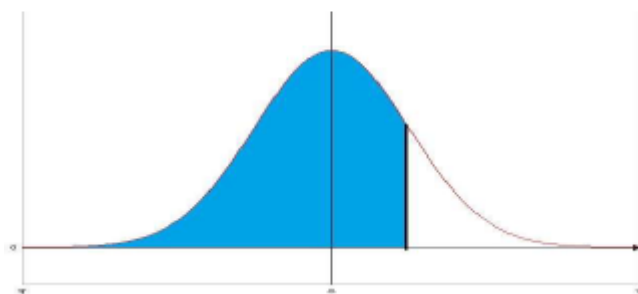
EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

El peso de las manzanas producidas en una granja sigue una distribución normal de media 200 gramos y desviación típica desconocida.

a) [1,25 puntos] Si el 33% de las manzanas pesan más de 230 gramos, calcula la desviación típica del peso de las manzanas.

b) [1,25 puntos] Si la desviación típica es de 50 gramos, calcula el porcentaje de manzanas que pesan entre 160 y 220 gramos.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $N(0, 1)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-k}{2}$ y $s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$.

a) **[1,5 puntos]** Determina k sabiendo que ambas se cortan en un punto.

b) **[1 punto]** Para $k=0$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s .

a) Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-k}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ P_r(0, 2, k) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ Q_s(-2, -3, 1) \end{cases}$$

Estas rectas no son paralelas ni coincidentes pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

Para que las rectas se corten en un punto el producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]$ debe ser nulo.

$$\left. \begin{matrix} P_r(0, 2, k) \\ Q_s(-2, -3, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (-2, -3, 1) - (0, 2, k) = (-2, -5, 1-k)$$

$$\left. \begin{matrix} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (-2, -5, 1-k) \end{matrix} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 1-k \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - 2k + 2 + 10 + 8 - 1 + k + 5 = 26 - k$$

$$[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = 0 \Rightarrow 26 - k = 0 \Rightarrow \boxed{k = 26}$$

Para $k = 26$ las rectas se cortan en un punto.

b) Para $k=0$ las rectas quedan $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$.

El plano que contiene a la recta r y es paralelo a s tiene como vectores directores los vectores directores de ambas rectas y pasa por el punto $P_r(0, 2, 0)$ de la recta r .

$$\left. \begin{matrix} \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{u} = \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ P_r(0, 2, 0) \in \pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - 2y + 4 + 2z - z - y + 2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

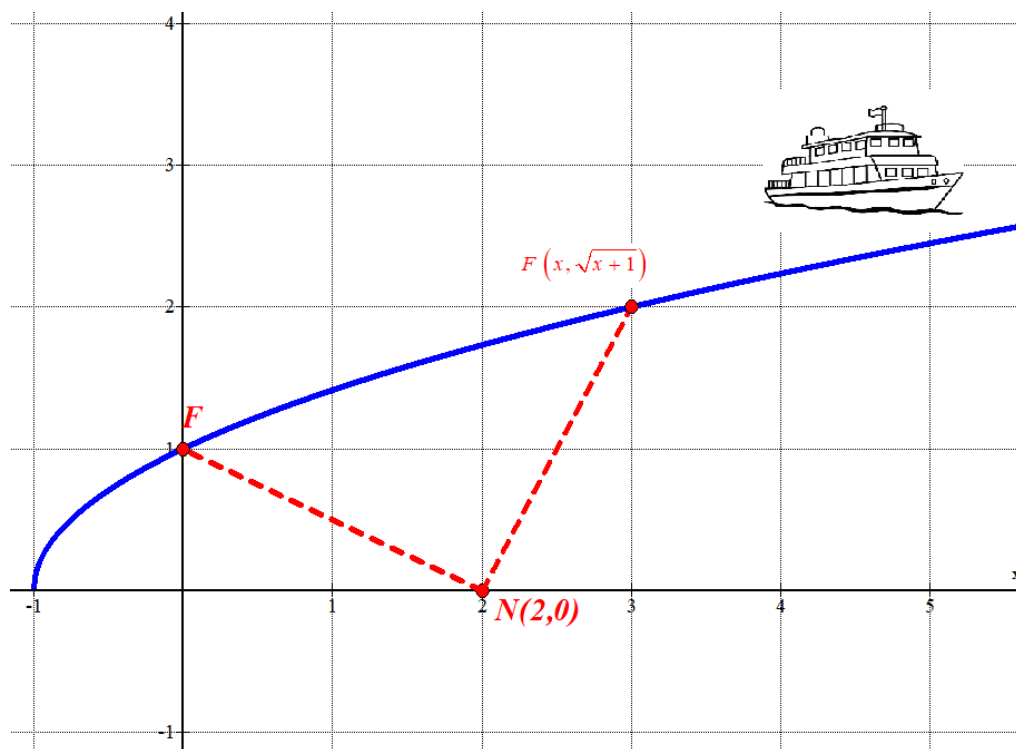
$$\Rightarrow -5x - 3y + z + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 5x + 3y - z - 6 = 0}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación $\pi: 5x + 3y - z - 6 = 0$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Un naufrago se encuentra en una isla situada en el punto de coordenadas $(2, 0)$ de un plano. Se sabe que un ferry navega en el mismo plano siempre en la trayectoria dada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$. ¿Hacia qué punto de la trayectoria debe nadar el naufrago para recorrer la menor distancia posible? Calcula dicha distancia.

Dibujamos la situación planteada.



Obtenemos la expresión de la distancia del naufrago a un punto de la trayectoria del barco.

Un punto de la trayectoria tiene coordenadas $(x, \sqrt{1+x})$, siendo $x \geq -1$.

$$\overrightarrow{NF} = (x, \sqrt{1+x}) - (2, 0) = (x-2, \sqrt{1+x})$$

$$d(x) = d(\text{Naufrago}, \text{Ferry}) = |\overrightarrow{NF}|$$

$$d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{1+x})^2} = \sqrt{x^2 + 4 - 4x + 1 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$$

Calculamos la derivada de la función distancia a recorrer por el naufrago y averiguamos cuando se anula.

$$d(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5} \Rightarrow d'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 5}}$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 5}} = 0 \Rightarrow 2x-3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2} = 1.5}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=1.5$.

- En el intervalo $[-1, 1.5)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale

$$d'(0) = \frac{2 \cdot 0 - 3}{2\sqrt{0^2 - 3 \cdot 0 + 5}} = \frac{-3}{2\sqrt{5}} < 0. \text{ La función decrece antes de } x=1.5.$$

- En el intervalo $(1.5, +\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale

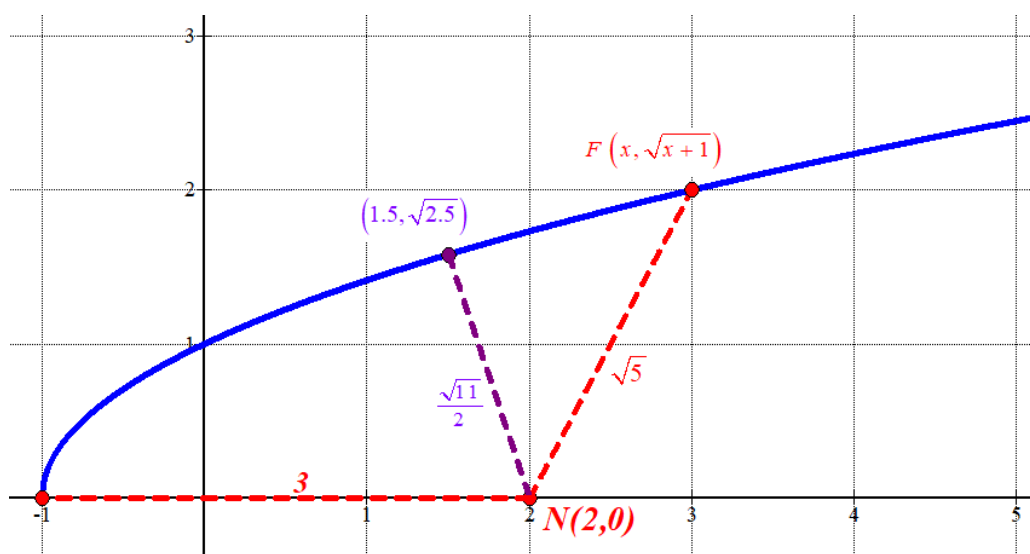
$$d'(2) = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2\sqrt{2^2 - 3 \cdot 2 + 5}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} > 0. \text{ La función crece después de } x=1.5.$$

La distancia tiene un mínimo en $x=1.5$.

Para este valor tenemos que $y = \sqrt{1+1.5} = \sqrt{2.5} \approx 1.58$.

El punto hacia el que debe nadar tiene coordenadas $(1.5, \sqrt{2.5})$. La distancia mínima que

debe recorrer tiene un valor de $d(1.5) = \sqrt{1.5^2 - 3 \cdot 1.5 + 5} = \frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1.6583$ unidades.



EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea la función $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|}$.

a) [1,5 puntos] Estudia la derivabilidad de f .

b) [1 punto] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

a) Obtenemos la expresión de la función como una función definida a trozos.

$$f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|} = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{1+x}{1-x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

La función es continua en $(-1,0) \cup (0,1)$.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1+|0|}{1-|0|} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x}{1-x} = \frac{1+0}{1-0} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

La función es continua en $x = 0$. La función es continua en todo su dominio $(-1,1)$.

La función en el intervalo $(-1,0)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, es derivable siendo su

$$\text{derivada } f'(x) = \frac{-1 \cdot (1+x) - 1 \cdot (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

La función en el intervalo $(0,1)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, es derivable siendo su

$$\text{derivada } f'(x) = \frac{1 \cdot (1-x) - (-1) \cdot (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-0)^2} = 2 \\ f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+0)^2} = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^+) = 2 \neq -2 = f'(0^-)$$

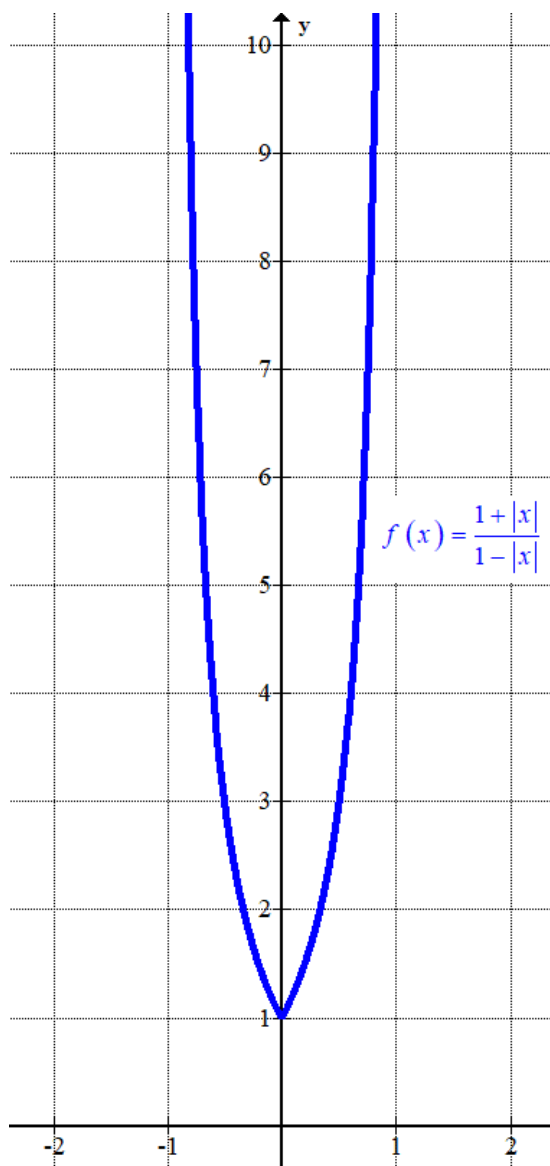
Las derivadas laterales no coinciden y la función no es derivable en $x = 0$.

La función es derivable en $(-1,0) \cup (0,1)$.

b) La derivada de la función en el intervalo $(-1,0)$ tiene la expresión $f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2}$. Esta expresión de la derivada siempre es negativa. La función decrece en $(-1,0)$.

La derivada de la función en el intervalo $(0,1)$ tiene la expresión $f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$. Esta expresión de la derivada siempre es positiva. La función crece en $(0,1)$.

La función decrece en $(-1,0)$ y crece en $(0,1)$.



EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Se considera la matriz $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ con determinante igual a -5 .

a) [1,25 puntos] Calcula $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & 2a_{21} \\ 3a_{12} & 3a_{32} & 6a_{22} \\ 2a_{13} & 2a_{33} & 4a_{23} \end{vmatrix}$.

b) [1,25 puntos] Calcula $\begin{vmatrix} 2a_{11}-3a_{31} & 2a_{12}-3a_{32} & 4a_{13}-6a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$.

a) Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & 2a_{21} \\ 3a_{12} & 3a_{32} & 6a_{22} \\ 2a_{13} & 2a_{33} & 4a_{23} \end{vmatrix} = \left\{ |A^t| = |A| \right\} = \begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{12} & 2a_{13} \\ a_{31} & 3a_{32} & 2a_{33} \\ 2a_{21} & 6a_{22} & 4a_{23} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos 3 de la 2ª columna} \\ \text{Sacamos 2 de la 3ª columna} \end{array} \right\} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \end{vmatrix} = \left\{ \text{Sacamos 2 de la 3ª fila} \right\} = 12 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambiamos la fila 2ª y 3ª} \\ \text{el determinante cambia de signo} \end{array} \right\} = 12(-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -12(-5) = \boxed{60}$$

b) Calculamos el determinante aplicando las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} 2a_{11}-3a_{31} & 2a_{12}-3a_{32} & 4a_{13}-6a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 4a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3a_{31} & 3a_{32} & 6a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{En el 2º determinante la 1ª fila} = 3 \times 3^a \\ \text{El determinante vale 0} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 4a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos 2} \\ \text{de la 1ª fila} \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos 2} \\ \text{de la 3ª columna} \end{array} \right\} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 4(-5) = \boxed{-20}$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) **[1,5 puntos]** Determina a y b para que $A^2 = 4I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
 b) **[1 punto]** Para $a = -1$ y $b = 1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple $A^2 X = B^t$.

a) Determinamos el valor de a y b .

$$A^2 = 4I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + 3b & 3a + 3 \\ ab + b & 3b + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 3b = 4 \\ 3a + 3 = 0 \rightarrow 3a = -3 \rightarrow \boxed{a = -1} \\ ab + b = 0 \\ 3b + 1 = 4 \rightarrow 3b = 3 \rightarrow \boxed{b = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1)^2 + 3 \cdot 1 = 4 \rightarrow \text{¡Ok!} \\ (-1) \cdot 1 + 1 = 0 \rightarrow \text{¡Ok!} \end{cases}$$

Para que se cumpla lo pedido debe ser $a = -1$ y $b = 1$.

b) Para $a = -1$ y $b = 1$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hemos visto en el

apartado anterior que $A^2 = 4I$.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A^2 X = B^t \Rightarrow 4IX = B^t \Rightarrow 4X = B^t \Rightarrow X = \frac{1}{4} B^t$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4} B^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

La matriz tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -e^x$ y $g(x) = -e^{-x}$.

- a) [1 punto] Esboza las gráficas de dichas funciones.
 b) [1,5 puntos] Calcula la suma de las áreas de los recintos acotados y limitados por las gráficas de dichas funciones y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

a) La derivada de la función f es $f'(x) = -e^x$. Esta derivada nunca se anula y siempre es negativa. La función f es decreciente en $\mathbb{R}$.

La derivada de la función g es $g'(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. Esta derivada nunca se anula y siempre es positiva. La función g es creciente en $\mathbb{R}$.

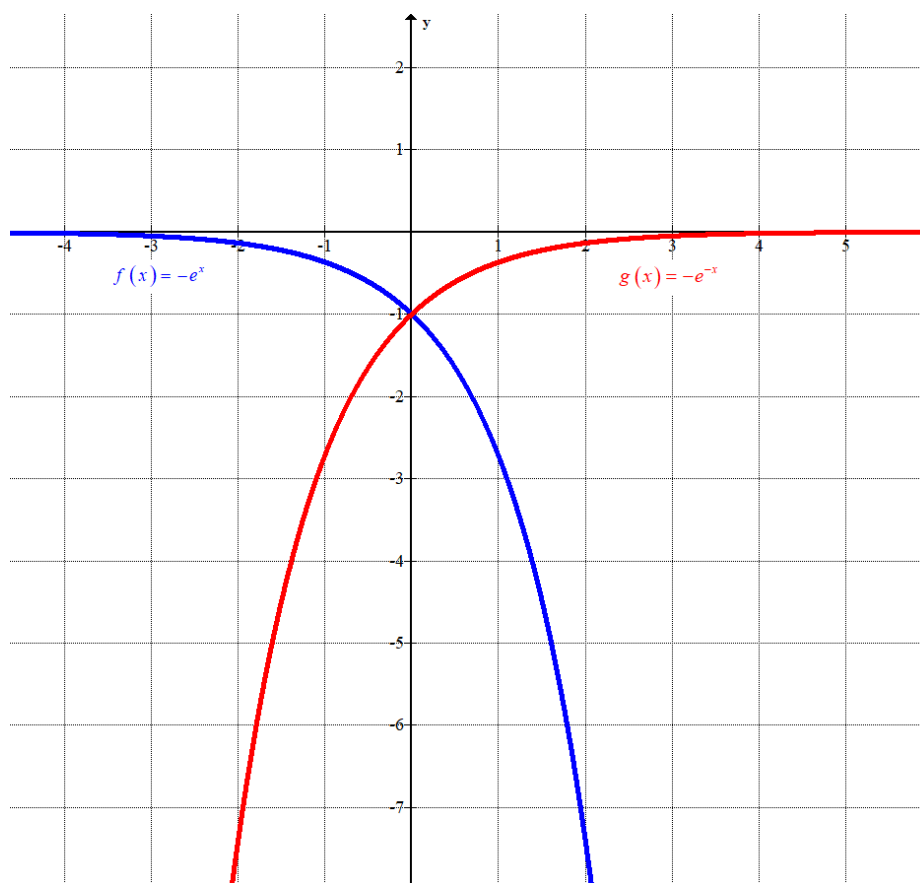
Determinamos los puntos de corte de las dos gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -e^x = -e^{-x} \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow e^x = \frac{1}{e^x} \Rightarrow e^x e^x = 1 \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

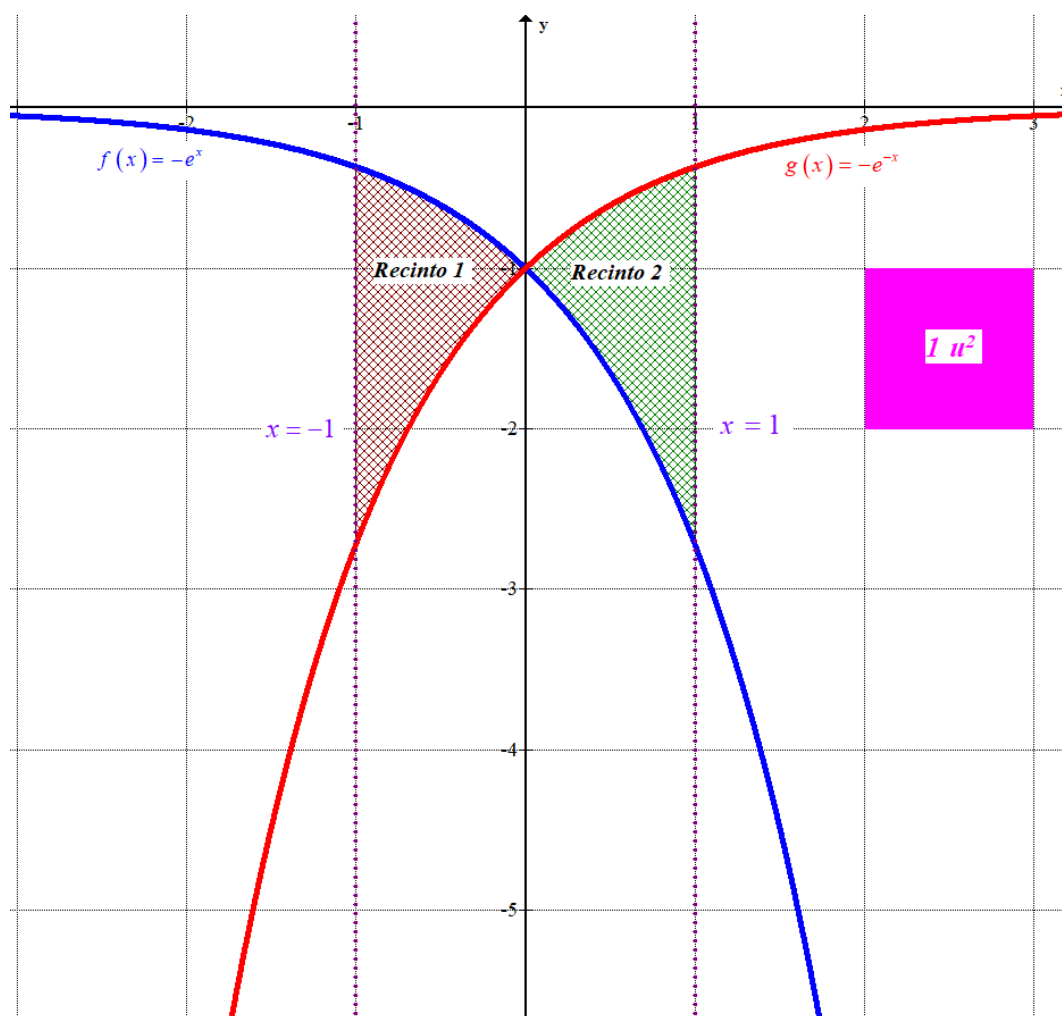
Las gráficas coinciden en el punto $(0, -1)$.

Hacemos una pequeña tabla de valores y dibujamos las gráficas de las dos funciones.

x	$f(x) = -e^x$	x	$g(x) = -e^{-x}$
-2	$-1/e^2$	-2	$-e^2$
-1	$-1/e$	-1	$-e$
0	-1	0	-1
1	$-e$	1	$-1/e$
2	$-e^2$	2	$-1/e^2$



b) Dibujamos la situación planteada.



Los recintos son simétricos, y por tanto el área del recinto 1 es igual que la del recinto 2. Calculamos el área del recinto 1.

$$\begin{aligned} \text{Área Recinto 1} &= \int_0^1 -e^{-x} - (-e^x) dx = \int_0^1 -e^{-x} + e^x dx = \\ &= \left[e^{-x} + e^x \right]_0^1 = \left[e^{-1} + e^1 \right] - \left[e^{-0} + e^0 \right] = \boxed{\frac{1}{e} + e - 2 \approx 1.0861 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

La suma de las áreas de los recintos acotados y limitados por las gráficas de las dos funciones y las rectas $x = -1$ y $x = 1$ es el doble del área del recinto 1: $\frac{2}{e} + 2e - 4 \approx 2.1723$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

El peso de las manzanas producidas en una granja sigue una distribución normal de media 200 gramos y desviación típica desconocida.

- a) [1,25 puntos] Si el 33% de las manzanas pesan más de 230 gramos, calcula la desviación típica del peso de las manzanas.
 b) [1,25 puntos] Si la desviación típica es de 50 gramos, calcula el porcentaje de manzanas que pesan entre 160 y 220 gramos.

a) Sea X = Peso en gramos de las manzanas producidas en una granja. $X = N(200, \sigma)$.

Nos dicen que $P(X > 230) = 0.33$. Utilizamos esta información para obtener el valor de σ .

$$P(X > 230) = 0.33 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{230 - 200}{\sigma}\right) = 0.33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{30}{\sigma}\right) = 0.33 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{30}{\sigma}\right) = 0.33 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{30}{\sigma}\right) = 1 - 0.33 = 0.67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{30}{\sigma} = 0.44 \Rightarrow \sigma = \frac{30}{0.44} = \frac{750}{11} \approx 68.1818$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700

La desviación típica vale $\sigma = \frac{750}{11} \approx 68.1818$.

b) Tenemos que $X = N(200, 50)$. Calculamos $P(160 \leq X \leq 220)$.

$$P(160 \leq X \leq 220) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{160 - 200}{50} \leq Z \leq \frac{220 - 200}{50}\right) =$$

$$= P(-0.8 \leq Z \leq 0.4) = P(Z \leq 0.4) - P(Z \leq -0.8) = P(Z \leq 0.4) - P(Z \geq 0.8) =$$

$$= P(Z \leq 0.4) - [1 - P(Z \leq 0.8)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6554 - 1 + 0.7881 = 0.4435$$

z	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7615
0,8	0,7881	0,7915

El porcentaje de manzanas que pesan entre 160 y 220 gramos es del 44.35 %.