



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025**

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- Duración: 1 hora y 30 minutos**
- Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.
- En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 5)$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{(1 - |x|)^2}$.

- [1,25 puntos]** Estudia la continuidad y derivabilidad de la función f .
- [1,25 puntos]** Halla, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sean las funciones $f : (-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{e}\right)$ y $g(x) = x^3 + 2$.

- [1,5 puntos]** Calcula $a \neq 0$ de forma que en el punto $(a, f(a))$ la recta normal a la gráfica de la función f sea paralela a la recta tangente a la gráfica de g en el punto $(a, g(a))$.
- [1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f .



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025

MATEMÁTICAS II

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [1,25 puntos] Calcula A^4 y A^{31} .
b) [1,25 puntos] Halla razonadamente el determinante de la matriz $4A^{25}(A^t)^4$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Halla razonadamente el determinante de una matriz X que verifica $X^3AX^2 = B^2$.
b) [1,5 puntos] Determina, si existe, una matriz Y que verifique $A^3YB^{-1} = A^2$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(2,1,0)$.

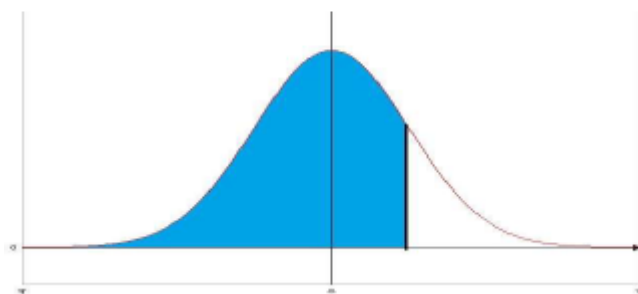
- a) [1,25 puntos] Halla la distancia del punto P a la recta r .
b) [1,25 puntos] Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta r y al punto P .

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Una empresa fabrica bolígrafos en tres provincias: Almería, Barcelona y Cáceres. El porcentaje de producción total de bolígrafos que se fabrica en cada provincia es, respectivamente, del 20%, 50% y 30%. Además, el porcentaje de bolígrafos defectuosos en cada una de ellas es del 7%, 6% y 2%, respectivamente.

- a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que un bolígrafo, tomado al azar, sea defectuoso?
b) [1,5 puntos] Si se ha escogido un bolígrafo no defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de Almería?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $N(0, 1)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 5)$.

Calculamos la integral indefinida de la función.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{x^3+1}{x^2+1} dx = \int \frac{x^3+x-x+1}{x^2+1} dx = \\
 &= \int \frac{x^3+x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \\
 &= \int \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \\
 &= \int x dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} + \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C
 \end{aligned}$$

Determinamos el valor de C aplicando que $F(0) = 5$.

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2}{2} + \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C \\ F(0) &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5 = \frac{0^2}{2} + \arctg(0) - \frac{1}{2} \ln(0^2+1) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 = C \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} + \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 5}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^2}{2} + \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 5$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{(1-|x|)^2}$.

- a) [1,25 puntos] Estudia la continuidad y derivabilidad de la función f .
 b) [1,25 puntos] Halla, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) Obtenemos la expresión de la función como una función definida a trozos.

$$f(x) = \frac{1}{(1-|x|)^2} = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Esta expresión racional tiene un denominador que no se anula en el intervalo de definición de la función siendo continua y derivable en $(-1,0) \cup (0,1)$.

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+0)^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

La función es continua en $x = 0$. La función es continua en $(-1,1)$.

$$\text{La derivada de la función en } (-1,0) \cup (0,1) \text{ es } f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(1+x)^3} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{2}{(1-x)^3} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Estudiamos la derivabilidad de la función en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{(1+x)^3} = \frac{-2}{(1+0)^3} = -2 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-0)^3} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = -2 \neq 2 = f'(0^+)$$

Las derivadas laterales no coinciden y la función no es derivable en $x = 0$.

La función es derivable en $(-1,0) \cup (0,1)$.

b) La función en el intervalo $(-1,0)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ y su derivada es

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}.$$

Esta expresión de la derivada nunca se anula y siempre es negativa en el

intervalo $(-1,0)$. La función es decreciente en $(-1,0)$.

La función en el intervalo $(0,1)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ y su derivada es

$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$. Esta expresión de la derivada nunca se anula y siempre es positiva en el

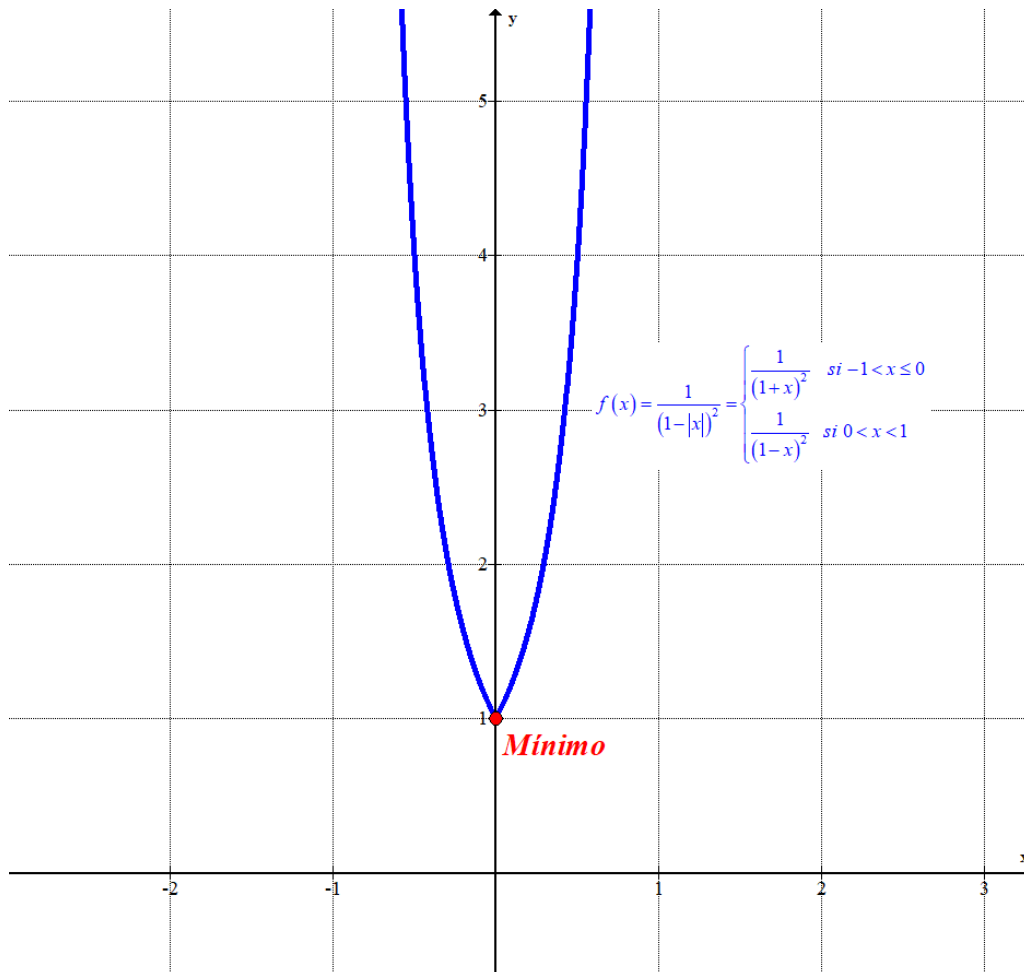
intervalo $(0,1)$. La función es creciente en $(0,1)$.

La función decrece antes de $x=0$ y crece después. La función tiene un mínimo relativo en $x=0$. En este punto la función vale $f(0)=1$

Valoramos la función en $x=0$ y hallamos los límites de la función cuando se acerca a los extremos del intervalo de definición $(-1,1)$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ f(0) &= \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\}$$

La función tiene un mínimo absoluto en $x=0$, siendo $f(0)=1$. La función no tiene máximos absolutos.



EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sean las funciones $f : (-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{e}\right)$ y $g(x) = x^3 + 2$.

- a) **[1,5 puntos]** Calcula $a \neq 0$ de forma que en el punto $(a, f(a))$ la recta normal a la gráfica de la función f sea paralela a la recta tangente a la gráfica de g en el punto $(a, g(a))$.
- b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f .

a) Para que sean paralelas dos rectas deben tener la misma.

La pendiente de la recta normal a la gráfica de la función f es $\frac{-1}{f'(a)}$. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de g es $g'(a)$.

Debemos buscar cuando se cumple la igualdad $\frac{-1}{f'(a)} = g'(a)$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{x^2}{e}\right) = \ln(x^2) - \ln e = 2 \ln x - 1 \rightarrow f'(x) = \frac{2}{x} \\ g(x) &= x^3 + 2 \rightarrow g'(x) = 3x^2 \\ \frac{-1}{f'(a)} &= g'(a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{\frac{2}{a}} = 3a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 = 3a^2 \frac{2}{a} \Rightarrow -1 = 6a \Rightarrow a = \frac{-1}{6}$$

Para $a = \frac{-1}{6}$ se cumple lo pedido.

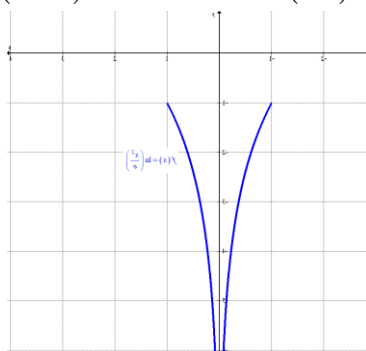
b) La derivada de la función $f(x)$ es $f'(x) = \frac{2}{x}$. Esta expresión de la derivada nunca se anula.

En el intervalo $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale $f'(-0.5) = \frac{2}{-0.5} = -4 < 0$. La derivada es negativa en $(-1, 0)$ y la función es decreciente.

En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{2}{0.5} = 4 > 0$. La

derivada es positiva en $(-1, 0)$ y la función es creciente.

La función es decreciente en $(-1, 0)$ y creciente en $(0, 1)$.



EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1,25 puntos] Calcula A^4 y A^{31} .

b) [1,25 puntos] Halla razonadamente el determinante de la matriz $4A^{25}(A^t)^4$.

a) Calculamos las potencias pedidas.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^4 = A^2 A^2 = (-I)(-I) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{31} = A^{4 \cdot 7 + 3} = (A^4)^7 A^3 A = I^7 \cdot (-I) A = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Calculamos el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Calculamos el determinante pedido aplicando las propiedades de los determinantes.

$$\left| 4A^{25}(A^t)^4 \right| = \left| 4A^{25} \right| \cdot \left| (A^t)^4 \right| = \left\{ \begin{array}{l} A^{25} \text{ es una matriz } 2 \times 2 \\ |4A^{25}| = 4^2 |A^{25}| \end{array} \right\} = 4^2 |A^{25}| |A^t|^4 =$$

$$= \left\{ |A^t| = |A| \right\} = 16 |A|^{25} |A|^4 = 16 |A|^{29} = 16 \cdot 1^{29} = \boxed{16}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Obtenemos la expresión de la matriz $4A^{25}(A^t)^4$ y luego calculamos su determinante.

$$A^{25} = A^{4 \cdot 6 + 1} = (A^4)^6 A^1 = I^6 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^t)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$(A^t)^4 = (A^t)^2 (A^t)^2 = (-I)(-I) = I$$

$$4A^{25}(A^t)^4 = 4A \cdot I = 4A = 4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| 4A^{25}(A^t)^4 \right| = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{16}$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Halla razonadamente el determinante de una matriz X que verifica $X^3AX^2 = B^2$.
 b) [1,5 puntos] Determina, si existe, una matriz Y que verifique $A^3YB^{-1} = A^2$.

a) Calculamos el determinante de las matrices A y B.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$$

Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$|X^3AX^2| = |B^2| \Rightarrow |X|^3 |A| |X|^2 = |B|^2 \Rightarrow 2 \cdot |X|^5 = 4^2 \Rightarrow |X|^5 = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow |X| = \sqrt[5]{8}$$

b) Despejamos Y de la ecuación matricial.

$$A^3YB^{-1} = A^2 \Rightarrow A^{-1}AA^2YB^{-1} = A^{-1}AA^2 \Rightarrow A^2YB^{-1} = A \Rightarrow A^{-1}AA^2YB^{-1} = A^{-1}AA^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AYB^{-1} = I \Rightarrow A^{-1}AYB^{-1} = A^{-1}I \Rightarrow YB^{-1} = A^{-1} \Rightarrow YB^{-1}B = A^{-1}B \Rightarrow Y = A^{-1}B$$

La matriz Y cumpliendo lo pedido existe. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Y = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12-4 & 4-4 \\ -9+4 & -3+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

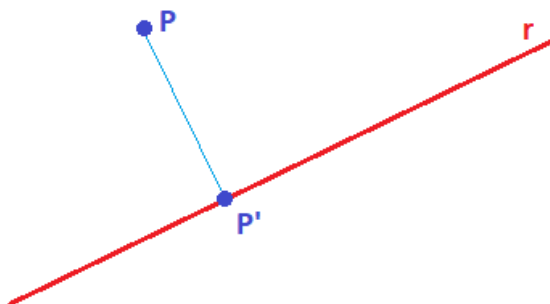
La matriz buscada es $Y = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(2,1,0)$.

- a) [1,25 puntos] Halla la distancia del punto P a la recta r .
 b) [1,25 puntos] Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta r y al punto P .

- a) Para hallar la distancia del punto P a la recta r hallamos el punto P' proyección ortogonal de P sobre la recta. La distancia de P a la recta será la distancia de P a P' .



Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = z \end{cases} \Rightarrow x + z + z = 0 \Rightarrow x = -2z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

El punto P' pertenece a la recta r , por lo que sus coordenadas son $P'(-2\alpha, \alpha, \alpha)$.

El vector $\overrightarrow{PP'}$ debe ser ortogonal al vector director de la recta $\vec{v}_r = (-2, 1, 1)$. Su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_r &= (-2, 1, 1) \\ \overrightarrow{PP'} &= (-2\alpha, \alpha, \alpha) - (2, 1, 0) = (-2\alpha - 2, \alpha - 1, \alpha) \\ \overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_r &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (-2\alpha - 2, \alpha - 1, \alpha)(-2, 1, 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\alpha + 4 + \alpha - 1 + \alpha = 0 \Rightarrow 6\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \Rightarrow P'\left(1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

La distancia de P a la recta es la distancia de P a P' y esta distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\overrightarrow{PP'} = \left(1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right) - (2, 1, 0) = \left(-1, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

$$d(P, r) = d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2} \approx 1.871u$$

La distancia del punto P a la recta r tiene un valor de $\frac{\sqrt{14}}{2} \approx 1.871$ unidades.

- b) El plano que contiene a la recta r y al punto P tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta. Otro vector director del plano es el vector que une un punto cualquiera de la recta con el punto P .

$$r \equiv \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_r(0,0,0) \\ \vec{v}_r = (-2,1,1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v}_r = (-2,1,1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{Q_r P} = (2,1,0) - (0,0,0) = (2,1,0) \\ Q_r(0,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y - 2z - 2z - x = 0 \Rightarrow -x + 2y - 4z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - 2y + 4z = 0}$$

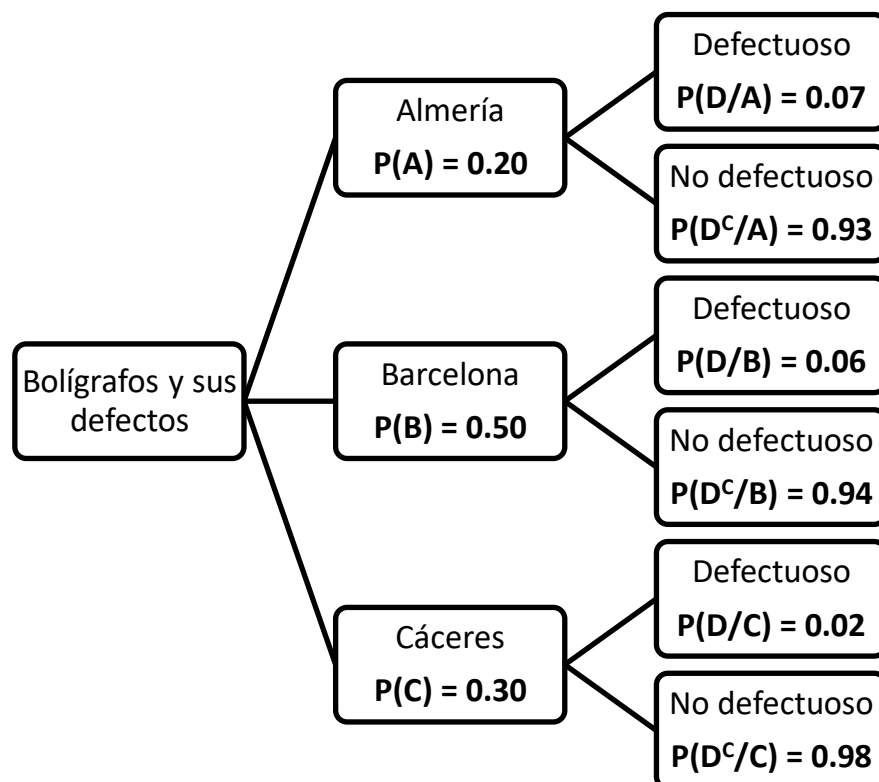
La ecuación del plano que contiene a la recta r y al punto P es $\pi : x - 2y + 4z = 0$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Una empresa fabrica bolígrafos en tres provincias: Almería, Barcelona y Cáceres. El porcentaje de producción total de bolígrafos que se fabrica en cada provincia es, respectivamente, del 20%, 50% y 30%. Además, el porcentaje de bolígrafos defectuosos en cada una de ellas es del 7%, 6% y 2%, respectivamente.

- a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que un bolígrafo, tomado al azar, sea defectuoso?
 b) [1,5 puntos] Si se ha escogido un bolígrafo no defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de Almería?

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\
 &= 0.2 \cdot 0.07 + 0.5 \cdot 0.06 + 0.3 \cdot 0.02 = \boxed{0.05}
 \end{aligned}$$

- b) Debemos calcular $P(A/D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^c) = \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A)P(D^c/A)}{1 - P(D)} = \frac{0.2 \cdot 0.93}{1 - 0.05} = \frac{93}{475} \approx 0.1958$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL PROBLEMA

Pasamos los datos porcentuales a absolutos. Suponemos que se fabrican un total de 1000 bolígrafos. En Almería se fabrican $0.20 \cdot 1000 = 200$, en Barcelona $0.50 \cdot 1000 = 500$ y en Cáceres $0.30 \cdot 1000 = 300$. De los fabricados en Almería hay $0.07 \cdot 200 = 14$ defectuosos, de los fabricados en Barcelona hay $0.06 \cdot 500 = 30$ defectuosos y de los fabricados en

Cáceres hay $0.02 \cdot 300 = 6$ defectuosos. Hay un total de $14 + 30 + 6 = 50$ bolígrafos defectuosos de un total de 1000 bolígrafos fabricados.

a) Hay 50 bolígrafos defectuosos de un total de 1000 bolígrafos fabricados. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al elegir al azar un bolígrafo este sea defectuoso vale $\frac{50}{1000} = 0.05$.

b) Hay 50 bolígrafos defectuosos, por lo que hay $1000 - 50 = 950$ bolígrafos no defectuosos. Siendo $200 - 14 = 186$ los bolígrafos no defectuosos fabricados en Almería. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al elegir un bolígrafo no defectuoso este haya sido fabricado en Almería vale $\frac{186}{950} = \frac{93}{475} \approx 0.1958$.