



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025**

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- Duración: 1 hora y 30 minutos**
- Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.
- En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)e^x$.

- [1,5 puntos]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.
- [1 punto]** Estudia y calcula las asíntotas de la función.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^2$.

- [0,75 puntos]** Esboza el recinto acotado y limitado por la gráfica de f y la recta $y = a$ con $a > 0$.
- [1,75 puntos]** Calcula $a > 0$ para que el área del recinto acotado y limitado por la gráfica de f y la recta $y = a$ sea $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(2x) & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(\pi x) - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcula $\int_{-\frac{\pi}{4}}^1 f(x) dx$.



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Sean los puntos $A(3, -1, 1)$, $B(1, 3, -3)$ y $C(-2, -2, 1)$.

- a) [1 punto] Calcula el área del triángulo de vértices A , B y C .
b) [1,5 puntos] Halla los puntos D pertenecientes al eje OZ para que el tetraedro de vértices A , B , C y D tenga un volumen de 20 unidades cúbicas.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv 2x + y + 2z + 5 = 0$.

- a) [1,5 puntos] Calcula el punto simétrico de $P(1, 0, 1)$ respecto de π .
b) [1 punto] Calcula los planos paralelos a π y que disten 2 unidades de π .

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + 4 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha + 4 & \alpha \end{pmatrix}$

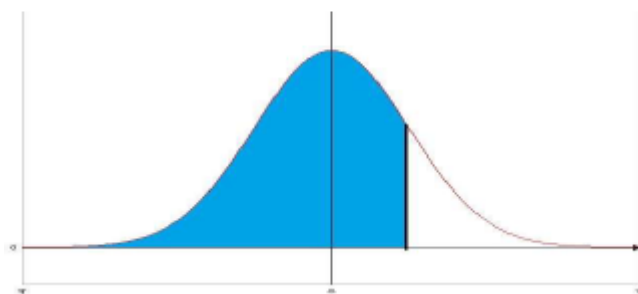
- a) [1 punto] Indica para qué valores de α la matriz A admite inversa.
b) [1,5 puntos] Para $\alpha = 1$ determina, si es posible, la matriz inversa de A .

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Los rodamientos de las ruedas de un coche se configuran con unas bolas cuyos diámetros siguen una distribución normal de media 13 mm y desviación típica 0,1 mm. Para que el funcionamiento del rodamiento sea óptimo el diámetro debe estar entre 12,9 mm y 13,15 mm. No obstante, la máquina que los elabora es muy sensible a los cambios de temperatura y pierde eficacia cuando ésta sube considerablemente. El 15 de julio, tras una rotura del sistema de refrigeración, la máquina configura bolas cuyos diámetros siguen una distribución normal de media 12,9 mm y desviación típica 0,2 mm.

- a) [1,25 puntos] En circunstancias ideales, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina elabore piezas con rodamiento óptimo?
b) [1,25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el 15 de julio la máquina elabore piezas con rodamiento óptimo?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $N(0, 1)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)e^x$.

- a) **[1,5 puntos]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.
 b) **[1 punto]** Estudia y calcula las asíntotas de la función.

- a) Hallamos la segunda derivada de la función y averiguamos cuando se anula (candidato a punto de inflexión).

$$f(x) = (x-1)e^x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-1)e^x = (x-1+1)e^x = xe^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (x+1)e^x = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

Sustituimos $x = -1$ en la tercera derivada y vemos si no se anula.

$$f'''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x \Rightarrow f'''(-1) = (-1+2)e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0$$

La función tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

Hallamos el valor de la función y de su derivada para $x = -1$.

$$f(x) = (x-1)e^x \Rightarrow f(-1) = (-1-1)e^{-1} = \frac{-2}{e}$$

$$f'(x) = xe^x \Rightarrow f'(-1) = (-1)e^{-1} = \frac{-1}{e}$$

Hallamos la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión $x = -1$.

$$\text{Recta tangente} \rightarrow y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \Rightarrow y - \frac{-2}{e} = \frac{-1}{e}(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + \frac{2}{e} = \frac{-1}{e}x - \frac{1}{e} \Rightarrow y = \frac{-1}{e}x - \frac{1}{e} - \frac{2}{e} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{e}x - \frac{3}{e}}$$

$$\text{Recta normal} \rightarrow y - f(-1) = \frac{-1}{f'(-1)}(x - (-1)) \Rightarrow y - \frac{-2}{e} = \frac{-1}{\frac{-1}{e}}(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + \frac{2}{e} = e(x+1) \Rightarrow y = ex + e - \frac{2}{e} \Rightarrow \boxed{y = ex + \frac{e^2 - 2}{e}}$$

b) Asíntotas verticales. $x = a$

La función tiene como dominio todos los números reales. No tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

Estudiamos la situación cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = (+\infty)e^{+\infty} = +\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Estudiamos la situación cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{e^{+\infty}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-e^{+\infty}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

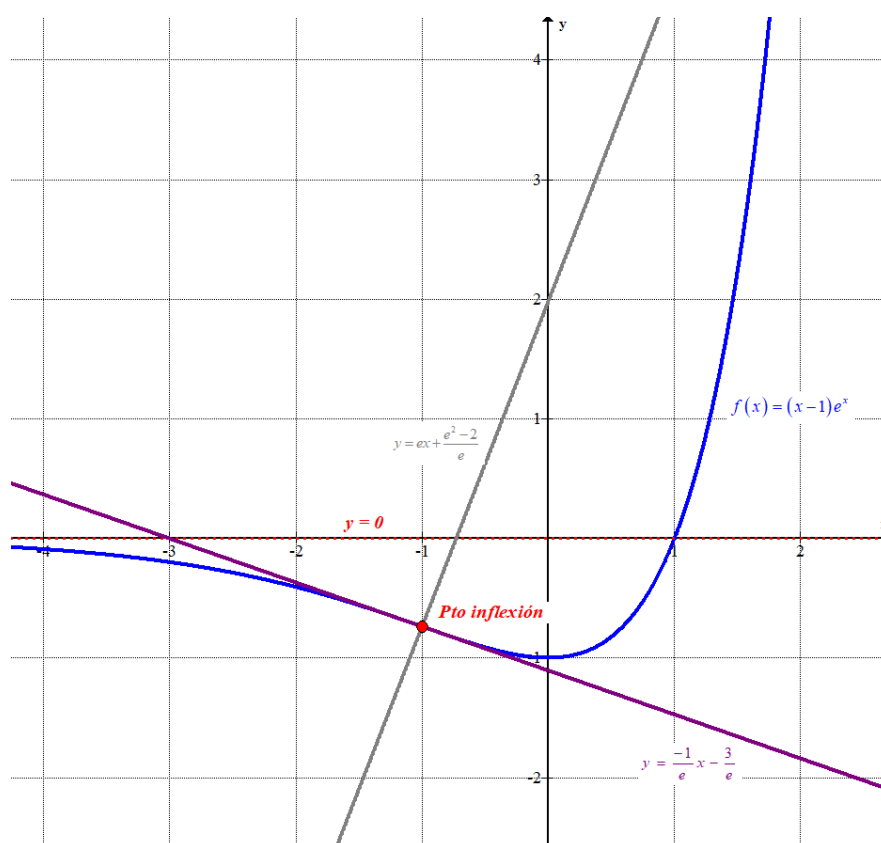
Estudiamos la situación cuando x tiende a $+\infty$. Como no tiene asíntota horizontal puede tener asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{1}{x} \right) e^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^x = \left(1 - \frac{1}{+\infty} \right) e^{+\infty} = (1-0)(+\infty) = +\infty$$

La función no tiene asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$.

Estudiamos la situación cuando x tiende a $-\infty$. Como la función tiene asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.



EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^2$.

a) [0,75 puntos] Esboza el recinto acotado y limitado por la gráfica de f y la recta $y = a$ con $a > 0$.

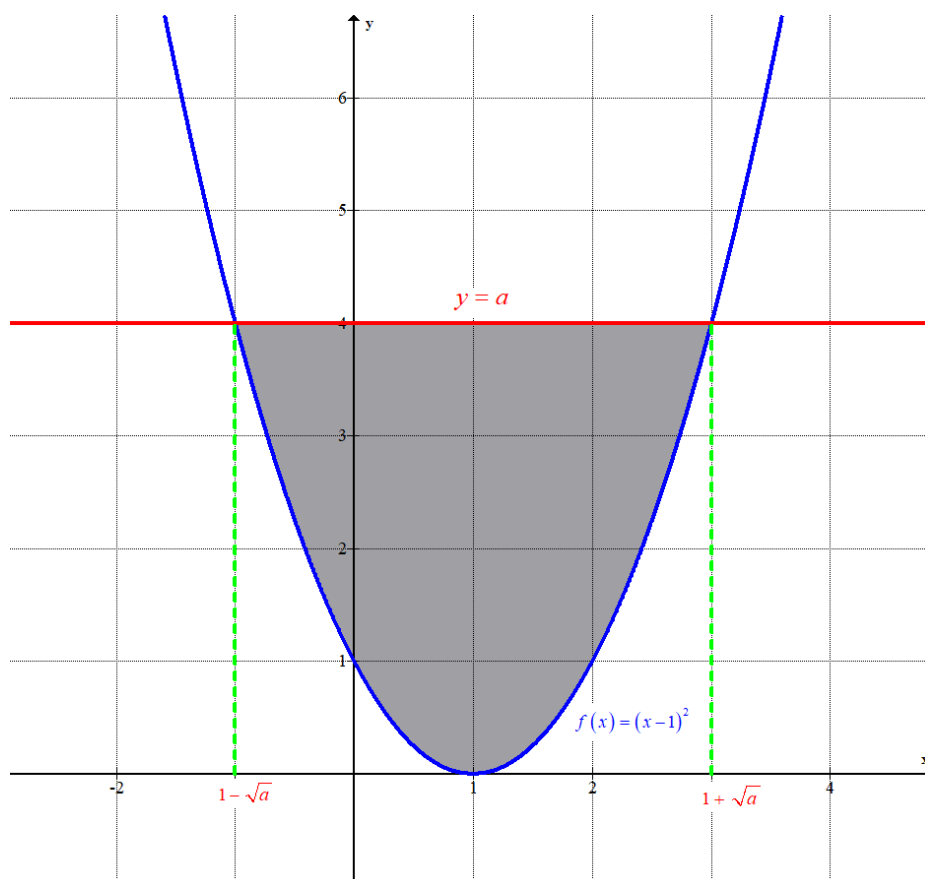
b) [1,75 puntos] Calcula $a > 0$ para que el área del recinto acotado y limitado por la gráfica de f y la recta $y = a$ sea $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

a) Hallamos los puntos de corte de la recta y la parábola.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x-1)^2 \\ y = a \end{array} \right\} \Rightarrow (x-1)^2 = a \Rightarrow \{a > 0\} \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{a} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{a} \rightarrow \boxed{x = 1 + \sqrt{a}} \\ x-1 = -\sqrt{a} \rightarrow \boxed{x = 1 - \sqrt{a}} \end{cases}$$

Dibujamos la gráfica de la parábola y dibujamos la recta $y = 4$ para hacer una aproximación de la situación planteada.

x	$f(x) = (x-1)^2$	x	$y = 4$
-1	4	-1	4
0	1	0	4
1	0	1	4
2	1	2	4
3	4	3	4



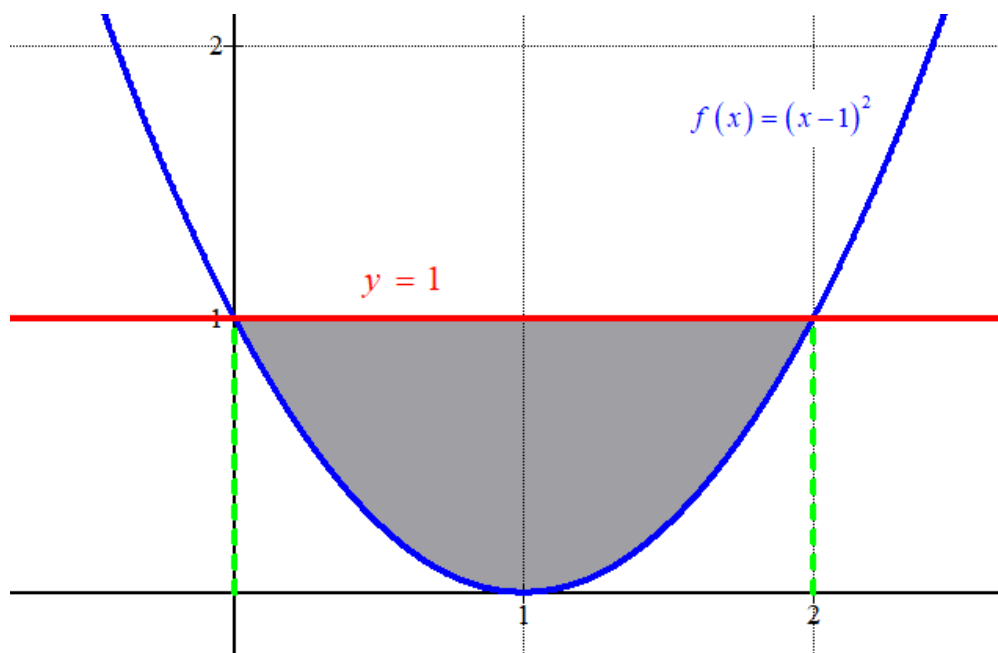
- b) Hallamos la expresión del área como la integral definida de $1 - \sqrt{a}$ a $1 + \sqrt{a}$ de la diferencia entre la recta y la parábola.

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_{1-\sqrt{a}}^{1+\sqrt{a}} a - (x-1)^2 dx = \left[ax - \frac{(x-1)^3}{3} \right]_{1-\sqrt{a}}^{1+\sqrt{a}} = \\
 &= \left[a(1+\sqrt{a}) - \frac{(1+\sqrt{a}-1)^3}{3} \right] - \left[a(1-\sqrt{a}) - \frac{(1-\sqrt{a}-1)^3}{3} \right] = \\
 &= \cancel{a} + a\sqrt{a} - \frac{\sqrt{a^3}}{3} - \cancel{a} + a\sqrt{a} - \frac{\sqrt{a^3}}{3} = 2a\sqrt{a} - \frac{2\sqrt{a^3}}{3} = \\
 &= 2\sqrt{a^3} - \frac{2\sqrt{a^3}}{3} = \left(2 - \frac{2}{3}\right)\sqrt{a^3} = \boxed{\frac{4}{3}\sqrt{a^3}}
 \end{aligned}$$

Averiguamos cuando el área vale $\frac{4}{3}$.

$$\text{Área} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4}{3}\sqrt{a^3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \sqrt{a^3} = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{1} = 1}$$

Para $a=1$ se cumple lo pedido.



EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(2x) & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(\pi x) - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Calcula $\int_{-\frac{\pi}{4}}^1 f(x) dx$.

La función en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, 1\right]$ tiene un cambio de definición por lo que la integral definida la dividimos en suma de dos integrales definidas.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^1 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 x \operatorname{sen}(2x) dx + \int_0^1 \cos(\pi x) - 1 dx = \dots$$

$$\int x \operatorname{sen}(2x) dx = \left. \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(2x) dx \rightarrow v = \int \operatorname{sen}(2x) dx = \frac{-1}{2} \cos(2x) \end{array} \right\} =$$

$$= x \cdot \frac{-1}{2} \cos(2x) - \int \frac{-1}{2} \cos(2x) dx = \frac{-x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx =$$

$$= \frac{-x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) = \frac{-x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + C$$

$$\dots = \left[\frac{-x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^0 + \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x) - x \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{-0}{2} \cos(2 \cdot 0) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2 \cdot 0) \right] - \left[\frac{\pi/4}{2} \cos\left(2 \cdot \frac{-\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{-\pi}{4}\right) \right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi \cdot 1) - 1 \right] - \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi \cdot 0) - 0 \right] =$$

$$= -\frac{\pi}{8} \cdot \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi) - 1 = \frac{1}{4} - 1 = \boxed{\frac{-3}{4}}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)Sean los puntos $A(3, -1, 1)$, $B(1, 3, -3)$ y $C(-2, -2, 1)$.

a) [1 punto] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) [1,5 puntos] Halla los puntos D pertenecientes al eje OZ para que el tetraedro de vértices A, B, C y D tenga un volumen de 20 unidades cúbicas.

a) El área del triángulo de vértices A, B y C es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(3, -1, 1) \\ B(1, 3, -3) \\ C(-2, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 3, -3) - (3, -1, 1) = (-2, 4, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, -2, 1) - (3, -1, 1) = (-5, -1, 0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & -4 \\ -5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 20j + 2k + 20k - 4i = -4i + 20j + 22k = (-4, 20, 22)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 20^2 + 22^2}}{2} = 15 u^2$$

El área del triángulo de vértices A, B y C tiene un valor de 15 unidades cuadradas.

b) El punto D tiene coordenadas $D(0, 0, c)$. El volumen del tetraedro ABCD se obtiene como la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$.

$$\left. \begin{array}{l} A(3, -1, 1) \\ D(0, 0, c) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (0, 0, c) - (3, -1, 1) = (-3, 1, c-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-2, 4, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (-5, -1, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (-3, 1, c-1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -5 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & c-1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(c-1) + 0 + 20 + 12 + 20(c-1) - 0 = 2c - 2 + 20 + 12 + 20c - 20 = 22c + 10$$

$$\text{Volumen } ABCD = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6} = \frac{|22c + 10|}{6} = \frac{|11c + 5|}{3}$$

Averiguamos cuando el volumen vale 20 unidades cúbicas.

$$\text{Volumen } ABCD = 20 \Rightarrow \frac{|11c + 5|}{3} = 20 \Rightarrow |11c + 5| = 60 \Rightarrow \begin{cases} 11c + 5 = 60 \rightarrow c = \frac{55}{11} = 5 \\ 11c + 5 = -60 \rightarrow c = \frac{-65}{11} \end{cases}$$

El valor buscado puede ser $c_1 = 5$ y el punto del eje Z que cumple lo pedido es $D_1(0, 0, 5)$

.

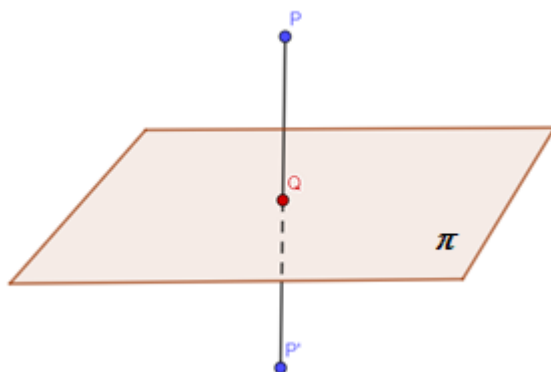
O bien $c_2 = \frac{-65}{11}$ y el punto del eje Z que cumple lo pedido es $D_2\left(0, 0, \frac{-65}{11}\right)$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv 2x + y + 2z + 5 = 0$.

- a) [1,5 puntos] Calcula el punto simétrico de $P(1, 0, 1)$ respecto de π .
 b) [1 punto] Calcula los planos paralelos a π y que disten 2 unidades de π .

- a) Buscamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P, luego determinamos el punto Q de corte de recta y plano. Por último, determinamos el punto P' simétrico de P respecto de π .



Determinamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv 2x + y + 2z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, 1, 2) \\ P(1, 0, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto Q de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R} \\ \pi \equiv 2x + y + 2z + 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + \lambda + 2(1 + 2\lambda) + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 4\lambda + \lambda + 2 + 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow 9 + 9\lambda = 0 \Rightarrow 9\lambda = -9 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2(-1) = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 + 2(-1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(-1, -1, -1)}$$

Obtenemos el punto P' sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (-1, -1, -1) - (1, 0, 1) = (-2, -1, -2)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (-1, -1, -1) + (-2, -1, -2) = (-3, -2, -3)$$

El punto simétrico de $P(1, 0, 1)$ respecto de π es el punto $P'(-3, -2, -3)$.

b) Un plano paralelo a $\pi \equiv 2x + y + 2z + 5 = 0$ tiene ecuación $\pi' \equiv 2x + y + 2z + D = 0$.

Como estos planos son paralelos la distancia entre ellos es el valor de la distancia entre un punto del plano π y el plano π' .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ x = -2 \\ y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-2) - 1 + 2z + 5 = 0 \Rightarrow -4 - 1 + 2z + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow A(-2, -1, 0) \in \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} A(-2, -1, 0) \in \pi \\ \pi' \equiv 2x + y + 2z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, \pi') = d(A, \pi') = \frac{|2(-2) - 1 + 2 \cdot 0 + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-5 + D|}{3}$$

Averiguamos cuando esta distancia vale 2.

$$d(\pi, \pi') = 2 \Rightarrow \frac{|-5 + D|}{3} = 2 \Rightarrow |-5 + D| = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -5 + D = 6 \rightarrow D = 11 \rightarrow \boxed{\pi_1 : 2x + y + 2z + 11 = 0} \\ -5 + D = -6 \rightarrow D = -1 \rightarrow \boxed{\pi_2 : 2x + y + 2z - 1 = 0} \end{array} \right.$$

Los planos paralelos a π y que distan 2 unidades de π son $\pi_1 : 2x + y + 2z + 11 = 0$ y $\pi_2 : 2x + y + 2z - 1 = 0$.



EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+4 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha+4 & \alpha \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Indica para qué valores de α la matriz A admite inversa.

b) [1,5 puntos] Para $\alpha = 1$ determina, si es posible, la matriz inversa de A.

a) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.
Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha+4 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha+4 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + 0 + 0 - 0 - \alpha(\alpha+4) - \alpha(\alpha+4) = \alpha^3 - 2\alpha(\alpha+4) =$$

$$= \alpha[\alpha^2 - 2(\alpha+4)] = \alpha[\alpha^2 - 2\alpha - 8]$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \alpha[\alpha^2 - 2\alpha - 8] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bullet \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-8)}}{2} = \\ \frac{2+6}{2} = 4 = \alpha \\ \frac{2-6}{2} = -2 = \alpha \\ \bullet \alpha = 0 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de α distinto de -2 , 0 y 4 .

b) Como hemos visto en el apartado anterior para $\alpha = 1$ existe la inversa de la matriz A. La

matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos la inversa de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 5 - 5 = -9 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-9} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Los rodamientos de las ruedas de un coche se configuran con unas bolas cuyos diámetros siguen una distribución normal de media 13 mm y desviación típica 0,1 mm. Para que el funcionamiento del rodamiento sea óptimo el diámetro debe estar entre 12,9 mm y 13,15 mm. No obstante, la máquina que los elabora es muy sensible a los cambios de temperatura y pierde eficacia cuando ésta sube considerablemente. El 15 de julio, tras una rotura del sistema de refrigeración, la máquina configura bolas cuyos diámetros siguen una distribución normal de media 12,9 mm y desviación típica 0,2 mm.

- a) [1,25 puntos] En circunstancias ideales, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina elabore piezas con rodamiento óptimo?
- b) [1,25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el 15 de julio la máquina elabore piezas con rodamiento óptimo?

Sea X = Diámetro de las bolas de los rodamientos de las ruedas de un coche en milímetros.
 $X = N(13, 0.1)$.

Sea Y = Diámetro de las bolas de los rodamientos de las ruedas de un coche en milímetros el 15 de julio con mucho calor y la máquina funcionando mal. $Y = N(12.9, 0.2)$.

- a) En circunstancias ideales el diámetro de las bolas sigue la ley normal $X = N(13, 0.1)$. Nos piden calcular la probabilidad $P(12.9 \leq X \leq 13.15)$.

$$P(12.9 \leq X \leq 13.15) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 13}{0.1} \end{array} \right\} = P\left(\frac{12.9 - 13}{0.1} \leq Z \leq \frac{13.15 - 13}{0.1}\right) =$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1.5) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \geq 1) =$$

$$= P(Z \leq 1.5) - [1 - P(Z \leq 1)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9332 - (1 - 0.8413) = \boxed{0.7745}$$

z	0.00
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643

z	0.00
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643
1.2	0.8849
1.3	0.9032
1.4	0.9192
1.5	0.9332

En circunstancias ideales, la probabilidad de que la máquina elabore piezas con rodamiento óptimo es de 0.7745.

- b) El 15 de Julio el diámetro de las bolas sigue la ley normal $Y = N(12.9, 0.2)$. Nos piden calcular la probabilidad $P(12.9 \leq Y \leq 13.15)$.

$$P(12.9 \leq Y \leq 13.15) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 12.9}{0.2} \end{array} \right\} = P\left(\frac{12.9 - 12.9}{0.2} \leq Z \leq \frac{13.15 - 12.9}{0.2}\right) =$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.25) = P(Z \leq 1.25) - P(Z \leq 0) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8944 - 0.5 = \boxed{0.3944}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115

El 15 de Julio la probabilidad de que la máquina elabore piezas con rodamiento óptimo es de 0.3944.