



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: MODEL 2026	CONVOCATORIA: MODELO 2026
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <u>Cada problema se puntuará hasta 2,5 puntos.</u> La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Los vuelos que llegan a un aeropuerto se clasifican en tres grupos: vuelos puntuales, vuelos con retrasos de hasta tres horas y vuelos con retrasos de más de tres horas. La puntualidad de los vuelos se ve afectada por las condiciones meteorológicas del momento. Si las condiciones meteorológicas son buenas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 70% mientras que el 10% llegan con más de tres horas de retraso. Si las condiciones meteorológicas son malas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 40% mientras que el 30% llegan con más de tres horas de retraso. Se calcula que el 90% de los días las condiciones meteorológicas son buenas.

- 1.1 (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo llegue con más de 3 horas de retraso?
- 1.2 (1 punto) Sabiendo que un vuelo ha sido puntual, ¿cuál es la probabilidad de que las condiciones meteorológicas fueran malas?
- 1.3 (1 punto) Un pasajero realiza un vuelo a dicho aeropuerto, desde donde debe tomar otro vuelo a su destino final. Este segundo vuelo enlaza si el primero llega con 3 horas o menos de retraso. Si realiza este viaje una vez al mes durante un año y viaja siempre en condiciones meteorológicas buenas ¿cuál es la probabilidad de que pueda enlazar con el vuelo a su destino final en todos sus viajes?

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 Una empresa de ingeniería estructural está diseñando un sistema de soporte para un edificio que depende de un parámetro real m relacionado con la resistencia de uno de los materiales empleados. Para garantizar la estabilidad de la estructura, es necesario analizar una matriz que representa las relaciones entre fuerzas internas y externas en los puntos de unión de la estructura. Para este análisis, se considera la siguiente matriz de rigidez

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde m representa el coeficiente de resistencia ajustable del material en uno de los puntos de unión.

Asimismo, se cuenta con un vector de cargas externas y un vector de desplazamientos iniciales:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La estabilidad y respuesta de la estructura dependen de las propiedades de la matriz D y de su relación con los vectores E y F . Se pide:

2.1.1 (0.5 puntos) Determinar para qué valores de m la matriz D es invertible, es decir, cuándo la estructura es estable.

2.1.2 (0.5 puntos) Si la estabilidad del sistema dependiera de que la matriz D^2 fuera invertible, explica razonadamente si hay algún valor de m que ponga en riesgo la estabilidad del sistema sin necesidad de resolver toda la ecuación matricial.

2.1.3 (0.5 puntos) Calcular las matrices EF y $(FE)^t$, si existen.

2.1.4 (1 punto) Resolver, para $m = 0$, la ecuación matricial con incógnita X :

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1}.$$

2.2 Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3m \end{pmatrix}$.

2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones $Ax = b$ en función del parámetro real m .

2.2.2 (0.75 puntos) Calcular, si existe, la solución para $m = 0$.

2.2.3 (0.75 puntos) Hallar la solución en el caso en que el sistema tenga infinitas soluciones.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Considera los planos $\pi_1 : 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2 : (a - 1)x - ay - z = a$, donde a representa un parámetro real. Se pide:

3.1.1 (1.5 puntos) Analizar en función de a la posición relativa de los dos planos.

3.1.2 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, el ángulo entre los dos planos.

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, la distancia entre el punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 .

3.2 Dada la recta $r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi : 2x + y - 3 = 0$ se pide:

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano perpendicular a π y que contiene a r .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano paralelo a π y que contenga a r .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

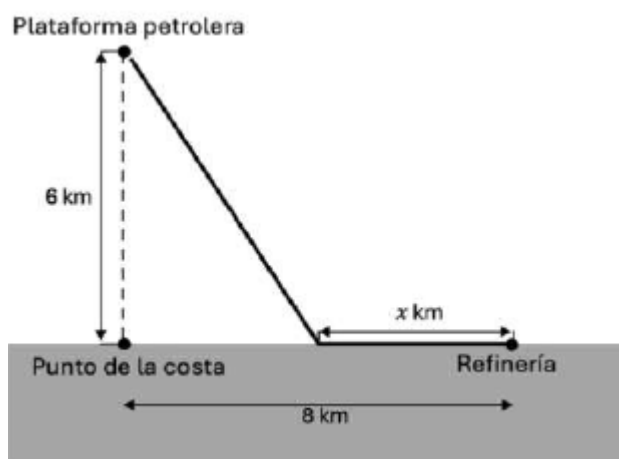
Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Considera las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$. Obtener:

4.1.1 (1.25 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos, si existen. Dibuja $f(x)$.

4.1.2 (1.25 puntos) Los puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$ y el área comprendida entre ambas curvas.

4.2 Una costa marítima se extiende en línea recta hacia la derecha desde un punto P de la costa. A 8 km de P hay una refinería situada en la costa. Además, hay una plataforma petrolífera en el mar que está situada a 6 km de distancia de P en la recta perpendicular a la costa desde el punto P. Se construirá un oleoducto desde la plataforma hasta la refinería. El coste de construir el oleoducto bajo el agua es de 1 millón de euros por kilómetro y el de construirlo sobre tierra, de 0,6 millones de euros por kilómetro.



4.2.1 (0.5 puntos) Encontrar la función del coste de construcción del oleoducto dependiendo de la distancia, x , entre el primer punto donde el oleoducto toca la costa y la refinería.

4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.

4.2.3 (0.5 puntos) Calcular dicho coste.

Tabla de la distribución Binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805

10	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2	0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3	1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4	1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5	1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
11	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	0	0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1	0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2	0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3	1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4	1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5	1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
12	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	0	0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1	0,9938	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2	0,9998	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3	1,0000	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4	1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
13	5	1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	0	0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1	0,9928	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0385	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
13	2	0,9997	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3	1,0000	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4	1,0000	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5	1,0000	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9653	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
13	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

Probabilidad y Estadística 25%	Álgebra 25 %	Análisis 25%	Geometría 25%
---------------------------------------	---------------------	---------------------	----------------------

Pregunta 1. (Obligatoria) Probabilidad y estadística.

Pregunta 2. (Con optatividad) Álgebra.

Pregunta 3. (Con optatividad) Geometría.

Pregunta 4. (Con optatividad) Análisis.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Los vuelos que llegan a un aeropuerto se clasifican en tres grupos: vuelos puntuales, vuelos con retrasos de hasta tres horas y vuelos con retrasos de más de tres horas. La puntualidad de los vuelos se ve afectada por las condiciones meteorológicas del momento. Si las condiciones meteorológicas son buenas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 70% mientras que el 10% llegan con más de tres horas de retraso. Si las condiciones meteorológicas son malas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 40% mientras que el 30% llegan con más de tres horas de retraso. Se calcula que el 90% de los días las condiciones meteorológicas son buenas.

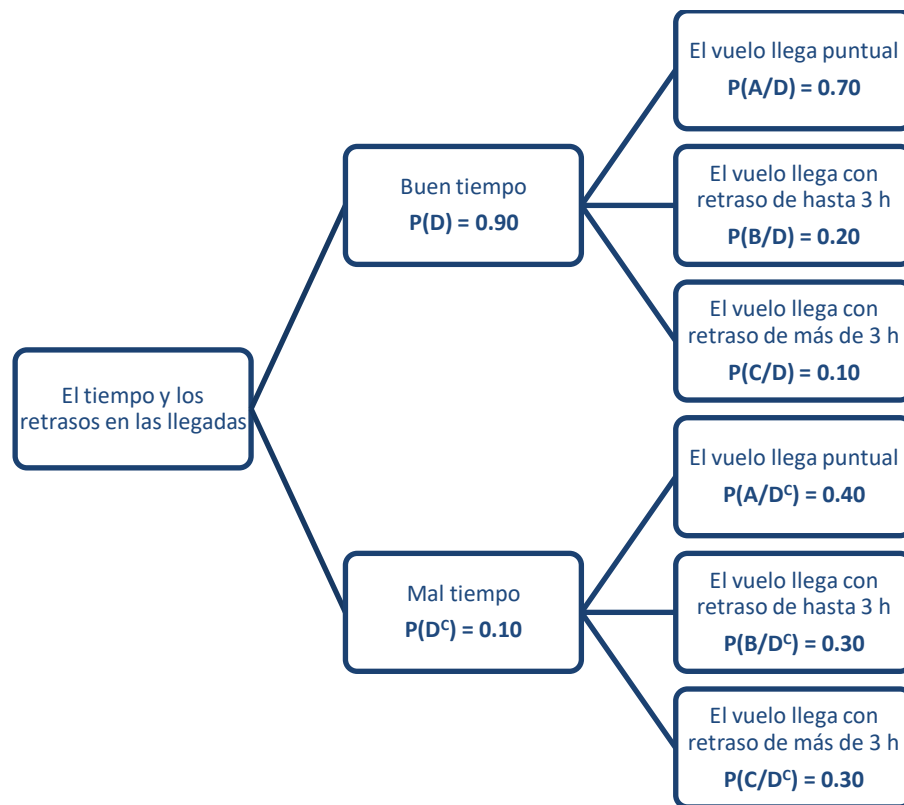
- 1.1 **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo llegue con más de 3 horas de retraso?
- 1.2 **(1 punto)** Sabiendo que un vuelo ha sido puntual, ¿cuál es la probabilidad de que las condiciones meteorológicas fueran malas?
- 1.3 **(1 punto)** Un pasajero realiza un vuelo a dicho aeropuerto, desde donde debe tomar otro vuelo a su destino final. Este segundo vuelo enlaza si el primero llega con 3 horas o menos de retraso. Si realiza este viaje una vez al mes durante un año y viaja siempre en condiciones meteorológicas buenas ¿cuál es la probabilidad de que pueda enlazar con el vuelo a su destino final en todos sus viajes?

Llamamos A = “el vuelo llega puntual”, B = “el vuelo llega con 3 horas o menos de retraso”, C = “el vuelo llega con más de 3 horas de retraso” y D = “las condiciones meteorológicas del momento son buenas”.

Nos dicen que “Si las condiciones meteorológicas son buenas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 70% mientras que el 10% llegan con más de tres horas de retraso”, por lo que el restante $100 - 70 - 10 = 20\%$ llega con retraso de hasta 3 horas.

Nos dicen que “Si las condiciones meteorológicas son malas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 40% mientras que el 30% llegan con más de tres horas de retraso”, por lo que el restante $100 - 40 - 30 = 30\%$ llega con retraso de hasta 3 horas.

Realizamos un diagrama de árbol con las probabilidades asociadas a cada uno de los sucesos de este experimento aleatorio.



1.1 Nos piden calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(D)P(C/D) + P(D^c)P(C/D^c) = 0.9 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.3 = \boxed{\frac{3}{25} = 0.12}$$

La probabilidad de que un vuelo llegue con más de 3 horas de retraso es de 0.12.

1.2 Nos piden calcular $P(D^c / A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(D^c / A) = \frac{P(D^c \cap A)}{P(A)} = \frac{P(D^c)P(A/D^c)}{P(D)P(A/D) + P(D^c)P(A/D^c)} =$$

$$= \frac{0.1 \cdot 0.4}{0.9 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.4} = \boxed{\frac{4}{67} \approx 0.0597}$$

La probabilidad de que las condiciones meteorológicas fueran malas sabiendo que el vuelo ha llegado puntual tiene un valor aproximado de 0.0597.

1.3 Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de vuelos que **no** le permiten enlazar de un total de 12 vuelos que realiza al año.

El número de repeticiones es $n = 12$. Sabemos que en condiciones meteorológicas buenas llegan con más de 3 horas de retraso el 10 % de los vuelos, por lo que no pueden enlazar el 10% de los vuelos. Tenemos que $p = 0.1$.

La variable X es una binomial. $X = B(12, 0.1)$.

Nos piden calcular $P(X = 0)$. Si miramos en la tabla de la binomial obtenemos que $P(X = 0) = 0.2824$

n	k	p	0,01	0,05	0,10
12	0		0,8861	0,5481	0,2824
	1		0,9938	0,8816	0,6590
	2		0,9998	0,9804	0,8891
	3		1,0000	0,9978	0,9744
	4		1,0000	0,9998	0,9957
	5		1,0000	1,0000	0,9995

OTRA FORMA DE RESOLVERLO.

Sin uso de la binomial.

Con buenas condiciones meteorológicas puede enlazar el 90% de los vuelos diarios, por lo que la probabilidad de enlazar un vuelo es 0.9.

La probabilidad de que pueda enlazar todos los vuelos de los 12 que hace al mes es el producto de las probabilidades de enlazar el vuelo cada día y al ser sucesos independientes la probabilidad es $0.9 \cdot 0.9 \cdot \dots \cdot 0.9 = 0.9^{12} \approx 0.2824$

2.1 Una empresa de ingeniería estructural está diseñando un sistema de soporte para un edificio que depende de un parámetro real m relacionado con la resistencia de uno de los materiales empleados. Para garantizar la estabilidad de la estructura, es necesario analizar una matriz que representa las relaciones entre fuerzas internas y externas en los puntos de unión de la estructura. Para este análisis, se considera la siguiente matriz de rigidez

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde m representa el coeficiente de resistencia ajustable del material en uno de los puntos de unión.

Asimismo, se cuenta con un vector de cargas externas y un vector de desplazamientos iniciales:

$$E = (1 \quad 4 \quad 3) \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La estabilidad y respuesta de la estructura dependen de las propiedades de la matriz D y de su relación con los vectores E y F . Se pide:

2.1.1 (0.5 puntos) Determinar para qué valores de m la matriz D es invertible, es decir, cuándo la estructura es estable.

2.1.2 (0.5 puntos) Si la estabilidad del sistema dependiera de que la matriz D^2 fuera invertible, explica razonadamente si hay algún valor de m que ponga en riesgo la estabilidad del sistema sin necesidad de resolver toda la ecuación matricial.

2.1.3 (0.5 puntos) Calcular las matrices EF y $(FE)^t$, si existen.

2.1.4 (1 punto) Resolver, para $m = 0$, la ecuación matricial con incógnita X :

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1}.$$

2.1.1 Averiguamos cuando la matriz D tiene determinante nulo.

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - m^2 - 0 - 0 - 1 = -m^2 - 1$$

$$|D| = 0 \Rightarrow -m^2 - 1 = 0 \Rightarrow -1 = m^2 \Rightarrow m = \sqrt{-1} = \text{¡Imposible!}$$

El determinante de la matriz D nunca se anula y por tanto la matriz D siempre es invertible, independientemente del valor de m .

La estructura siempre es estable.

2.1.2 El determinante de la matriz D^2 es el valor del determinante de D elevado al cuadrado por lo que tampoco se anulará el determinante de D^2 y no existe ningún valor de m que haga peligrar la estabilidad del sistema.

$$\left. \begin{aligned} |D^2| &= |D \cdot D| = |D| \cdot |D| \\ |D| &\neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |D^2| \neq 0$$

2.1.3 Determinamos la expresión de la matriz EF .

$$EF = (1 \quad 4 \quad 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (1+8-3) = (6)$$

$$1 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 1 \rightarrow 1 \times 1$$

Determinamos la expresión de la matriz $(FE)^t$.

$$FE = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \quad 4 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (FE)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{1 \cdot 1} \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$$

Ambas matrices existen siendo $EF = (6)$ y $(FE)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

2.1.4 Despejamos X de la ecuación matricial.

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1} \Rightarrow \frac{1}{2}X = D^{-1} - D \Rightarrow X = 2(D^{-1} - D)$$

Para $m=0$ la matriz D queda $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, hallamos la expresión de D^{-1}

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = -1 \neq 0$$

$$D^{-1} = \frac{Adj(D^T)}{|D|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de X.

$$X = 2(D^{-1} - D) = 2 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2.2 \text{ Dada } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3m \end{pmatrix}.$$

2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones $Ax = b$ en función del parámetro real m .

2.2.2 (0.75 puntos) Calcular, si existe, la solución para $m = 0$.

2.2.3 (0.75 puntos) Hallar la solución en el caso en que el sistema tenga infinitas soluciones.

2.2.1 La matriz de coeficientes A y la matriz ampliada del sistema A/B son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 & 3 \\ 0 & 1 & m & 3 \\ m-1 & 0 & 5 & 3m \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - m(m-1) + 0 - (m+1)(m-1) - 0 - 0 =$$

$$= 5 - m^2 + m - (m^2 - 1^2) = 5 - m^2 + m - m^2 + 1 = -2m^2 + m + 6$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = 0 \Rightarrow -2m^2 + m + 6 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)6}}{2(-2)} = \frac{-1 \pm 7}{-4} = \begin{cases} \frac{-1+7}{-4} = \frac{-3}{2} = m \\ \frac{-1-7}{-4} = 2 = m \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m \neq \frac{-3}{2}$ y $m \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la matriz A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = \frac{-3}{2}$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

$$\text{La matriz de coeficientes queda } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3/2+1 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ -3/2-1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ -5/2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la primera columna su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 0 = 5 \neq 0$$

El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 & 3 \\ 0 & 1 & -3/2 & 3 \\ -5/2 & 0 & 5 & -9/2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna y vemos si su determinante es nulo o no.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1/2 & 3 \\ 1 & -3/2 & 3 \\ 0 & 5 & -9/2 \end{vmatrix} = \frac{-27}{4} + 0 + 15 - 0 - \frac{9}{4} + 15 = 30 - \frac{36}{4} = 21 \neq 0$$

Al ser no nulo el rango de A/B es 3.

El rango de A y el de A/B son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $m = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2-1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Si tomamos el

menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la primera columna su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 0 = 5 \neq 0$$

El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3

que resulta de quitar la primera columna y vemos si su determinante es nulo o no.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -12 + 0 + 15 - 0 - 18 + 15 = 0$$

Al no ser nulo el rango de A/B no es 3. El rango de A/B es 2 igual que la matriz A.

El rango de A y el de A/B son iguales (2), pero es menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $m \neq \frac{-3}{2}$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado y si $m = \frac{-3}{2}$ el sistema es incompatible.

2.2.2 Resolvemos el sistema para $m = 0$. Para este valor el sistema es compatible determinado (estudiado en el apartado anterior). Utilizamos el método de Cramer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{15+0+0-0+15-0}{5+0+0+1-0-0} = \frac{30}{6} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{15+0+0+3-0-0}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{0+3+0+3-0-0}{5+0+0+1-0-0} = \frac{6}{6} = 1$$

La solución del sistema para $m=0$ es $x=5$; $y=3$; $z=1$

2.2.3 El sistema tiene infinitas soluciones para $m=2$.

$$\text{El sistema es } Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ y + 2z = 3 \\ x + 5z = 6 \end{cases}. \text{ Lo resolvemos.}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ y + 2z = 3 \\ x + 5z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ y + 2z = 3 \\ x = 6 - 5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 - 5z - y + 3z = 3 \\ y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y - 2z = -3 \\ y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow y + 2z = 3 \Rightarrow y = 3 - 2z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 6 - 5\lambda \\ y = 3 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema para $m=2$ tienen la expresión $\begin{cases} x = 6 - 5\lambda \\ y = 3 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

3.1 Considera los planos $\pi_1 : 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2 : (a - 1)x - ay - z = a$, donde a representa un parámetro real. Se pide:

3.1.1 (1.5 puntos) Analizar en función de a la posición relativa de los dos planos.

3.1.2 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, el ángulo entre los dos planos.

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, la distancia entre el punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 .

3.1.1 Estudiamos la posición relativa de los planos teniendo en cuenta sus vectores normales.

$$\pi_1 : 2x - a^2y - az = a - 1 \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, -a^2, -a)$$

$$\pi_2 : (a - 1)x - ay - z = a \Rightarrow \vec{n}_2 = (a - 1, -a, -1)$$

Estudiamos cuando los vectores normales de los planos tienen la misma dirección (coordenadas proporcionales).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (2, -a^2, -a) \\ \vec{n}_2 = (a - 1, -a, -1) \\ \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{a - 1} = \frac{-a^2}{-a} = \frac{-a}{-1} \Rightarrow \{a \neq 0\} \Rightarrow \frac{2}{a - 1} = a = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = a^2 - a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \boxed{2 = a} \\ \frac{1-3}{2} = \boxed{-1 = a} \end{cases}$$

Para $a \neq 0, a \neq 2$ y $a \neq -1$ los vectores normales de los dos planos no tienen coordenadas proporcionales y por tanto los planos son secantes (coinciden en una recta).

Para $a = 0$ los planos quedan $\pi_1 : 2x = -1$ y $\pi_2 : -x - z = 0 \Rightarrow \pi_2 : x + z = 0$. Los planos son secantes (coinciden en una recta)

Para $a = 2$ los planos quedan $\pi_1 : 2x - 4y - 2z = 1 \rightarrow \pi_1 : x - 2y - z = \frac{1}{2}$ y $\pi_2 : x - 2y - z = 2$.

Como las ecuaciones de los planos solo difieren en el coeficiente D los planos no son coincidentes y son paralelos.

Para $a = -1$ los planos quedan $\pi_1 : 2x - y + z = -2$ y $\pi_2 : -2x + y - z = -1 \rightarrow 2x - y + z = 1$.

$\pi_2 : x - 2y - z = 2$. Como las ecuaciones de los planos solo difieren en el coeficiente D los planos son paralelos.

Resumiendo: Si $a \neq 2$ y $a \neq -1$ los planos son secantes (coinciden en una recta) y si $a = 2$ o $a = -1$ los planos son paralelos.

3.1.2 Para $a = 0$ los planos son secantes y sus ecuaciones son $\pi_1 : 2x = -1$ y $\pi_2 : x + z = 0$.

Hallamos el ángulo que forman los vectores normales de los planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x = -1 \rightarrow \vec{n}_1 = (2, 0, 0) \\ \pi_2 : x + z = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{(2, 0, 0)(1, 0, 1)}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

El ángulo entre los planos es de 45° , pues es el mismo que existe entre sus vectores normales.

3.1.3 Para $a = 0$ el plano π_1 tiene ecuación $\pi_1 : 2x = -1$. Hallamos la distancia pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x + 1 = 0 \\ P = (1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi_1) = \frac{|2 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ unidades}$$

Para $a = 0$ la distancia entre el punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 tiene un valor de 1.5 unidades.

3.2 Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y - 3 = 0$ se pide:

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano perpendicular a π y que contiene a r .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano paralelo a π y que contenga a r .

3.2.1 Obtenemos un punto y un vector director de la recta r .

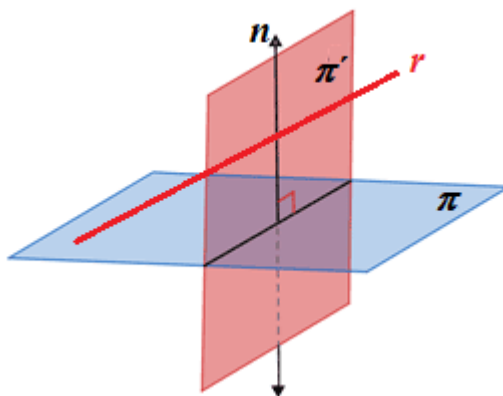
$$r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -2, 0) \\ P_r(1, -1, 1) \end{cases}$$

El plano π' perpendicular a π tiene como vector director el vector normal del plano π . Al contener a la recta r otro de sus vectores directores es el vector director de la recta $\vec{v}_r = (1, -2, 0)$, además debe contener el punto $P_r(1, -1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y - 3 = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{n} = (2, 1, 0) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -2, 0) \\ P_r(1, -1, 1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 0 - 4(z-1) - (z-1) - 0 - 0 = 0 \Rightarrow -5(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': z-1=0}$$

La ecuación del plano π' perpendicular a π y que contiene a r es $\pi': z-1=0$.



3.2.2 La recta r es paralela al plano π . Lo comprobamos viendo que el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares, es decir, su producto escalar es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, 0) \\ \vec{v}_r = (1, -2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (2, 1, 0) \cdot (1, -2, 0) = 2 - 2 + 0 = 0$$

Por este motivo podemos decir que si existe un plano π'' paralelo al plano π que contenga la recta r .

Este plano al ser paralelo a $\pi: 2x + y - 3 = 0$ debe tener ecuación $\pi'': 2x + y + D = 0$.

Como el plano contiene la recta r debe contener el punto $P_r(1, -1, 1)$ de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, -1, 1) \in \pi'' \\ \pi'': 2x + y + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi'': 2x + y - 1 = 0}$$

El plano π'' paralelo a π y que contiene a r existe y tiene ecuación $\pi'': 2x + y - 1 = 0$.

4.1 Considera las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$. Obtener:

4.1.1 (1.25 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos, si existen. Dibuja $f(x)$.

4.1.2 (1.25 puntos) Los puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$ y el área comprendida entre ambas curvas.

4.1.1 Hallamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$f(x) = x^4 - 7x^2 + 16 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 14x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 14x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 7 = 0 \rightarrow 2x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \end{cases}$$

La función tiene tres puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ tomamos el valor $x = -10$ y la derivada vale

$$f'(-10) = 4(-10)^3 - 14(-10) = -3860 < 0. \text{ La función decrece en } \left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right).$$

- En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right)$ tomamos el valor $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = 4(-1)^3 - 14(-1) = 10 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right).$$

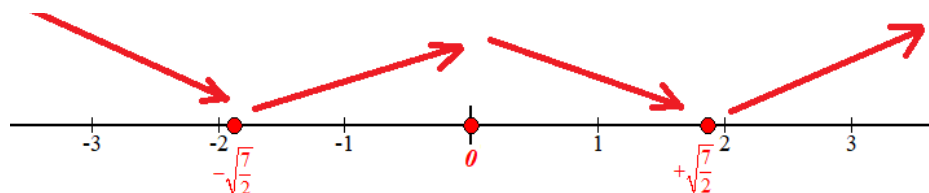
- En el intervalo $\left(0, +\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ tomamos el valor $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 14 \cdot 1 = -10 < 0. \text{ La función decrece en } \left(0, +\sqrt{\frac{7}{2}}\right).$$

- En el intervalo $\left(+\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty\right)$ tomamos el valor $x = 10$ y la derivada vale

$$f'(10) = 4 \cdot 10^3 - 14 \cdot 10 = 3860 > 0. \text{ La función crece en } \left(+\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty\right).$$

La función sigue el esquema siguiente.



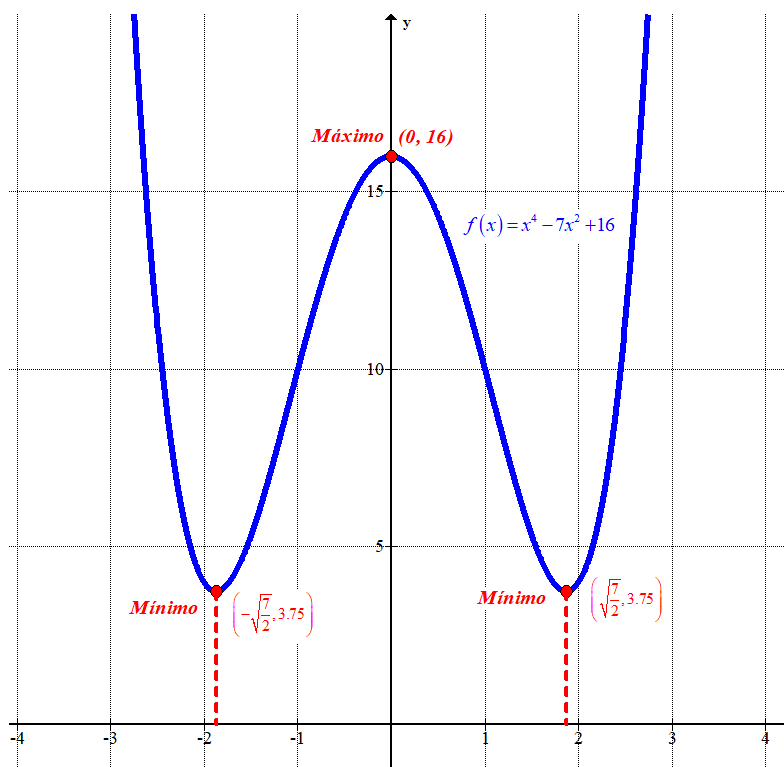
La función decrece en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \cup \left(0, +\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ y crece en $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right) \cup \left(+\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty\right)$.

Como $f\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^4 - 7\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 + 16 = 3.75$ la función presenta un mínimo relativo en $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 3.75\right)$.

Como $f(0) = 0^4 - 7 \cdot 0^2 + 16 = 16$ la función presenta un máximo relativo en $(0, 16)$.

Como $f\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^4 - 7\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 + 16 = 3.75$ la función presenta un mínimo relativo en $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}, 3.75\right)$.

Dibujamos la gráfica de la función.



4.1.2 Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^4 - 7x^2 + 16 \\ g(x) = x^2 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^4 - 7x^2 + 16 = x^2 \Rightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \Rightarrow$$

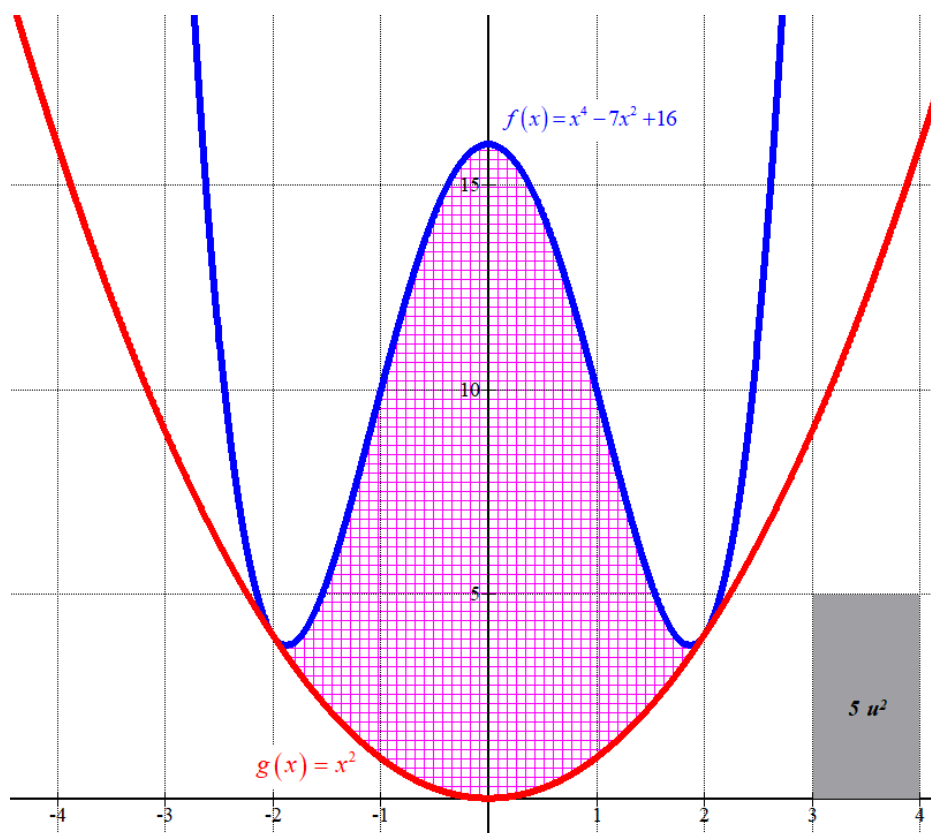
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación bicuadrada} \\ x^2 = t \rightarrow x^4 = t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow t^2 - 8t + 16 = 0 \Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^4 - 7(-2)^2 + 16 = 4 \rightarrow \boxed{A(-2, 4)} \\ x = 2 \rightarrow f(2) = 2^4 - 7 \cdot 2^2 + 16 = 4 \rightarrow \boxed{B(2, 4)} \end{cases}$$

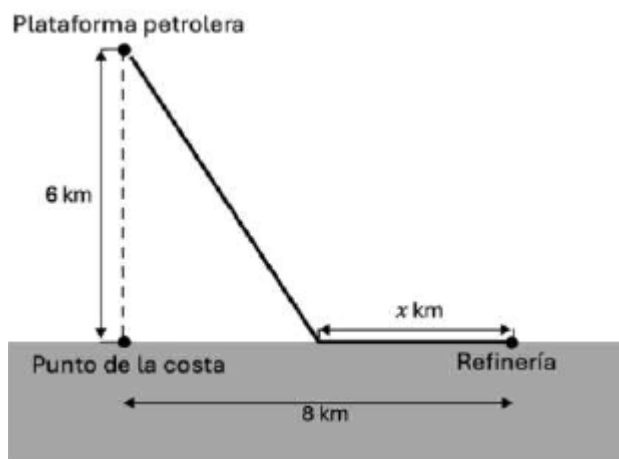
Los puntos de corte de ambas gráficas son $A(-2, 4)$ y $B(2, 4)$.

Como $\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^4 - 7 \cdot 0 + 16 = 16 \\ g(0) = 0^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) > g(0)$ el área comprendida entre ambas curvas es el valor de la integral definida entre -2 y 2 de $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^2 f(x) - g(x) dx = \int_{-2}^2 x^4 - 7x^2 + 16 - x^2 dx = \int_{-2}^2 x^4 - 8x^2 + 16 dx = \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right]_{-2}^2 = \left[\frac{2^5}{5} - \frac{8 \cdot 2^3}{3} + 16 \cdot 2 \right] - \left[\frac{(-2)^5}{5} - \frac{8(-2)^3}{3} + 16(-2) \right] = \\ &= \frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 + \frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 = \boxed{\frac{512}{15} \approx 34.13 u^2} \end{aligned}$$



4.2 Una costa marítima se extiende en línea recta hacia la derecha desde un punto P de la costa. A 8 km de P hay una refinería situada en la costa. Además, hay una plataforma petrolífera en el mar que está situada a 6 km de distancia de P en la recta perpendicular a la costa desde el punto P. Se construirá un oleoducto desde la plataforma hasta la refinería. El coste de construir el oleoducto bajo el agua es de 1 millón de euros por kilómetro y el de construirlo sobre tierra, de 0,6 millones de euros por kilómetro.

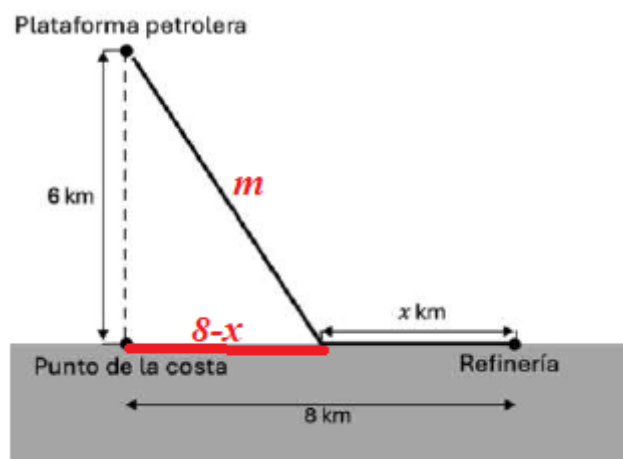


4.2.1 (0.5 puntos) Encontrar la función del coste de construcción del oleoducto dependiendo de la distancia, x , entre el primer punto donde el oleoducto toca la costa y la refinería.

4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.

4.2.3 (0.5 puntos) Calcular dicho coste.

4.2.1 Añadimos datos al dibujo para obtener los valores de longitud m del oleoducto en el mar.



Para obtener el valor de m aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos 6 y $8 - x$.

$$m^2 = 6^2 + (8 - x)^2 \Rightarrow m^2 = 36 + 64 + x^2 - 16x = x^2 - 16x + 100 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{x^2 - 16x + 100}}$$

Como el coste de construir el oleoducto bajo el agua es de 1 millón de euros por kilómetro y el de construirlo sobre tierra, de 0,6 millones de euros por kilómetro tenemos que el coste total del oleoducto es $C(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2 - 16x + 100} + 0.6x = 0.6x + \sqrt{x^2 - 16x + 100}$, siendo $0 \leq x \leq 8$. El coste está expresado en millones de euros.

4.2.2 Averiguamos cuando se anula la derivada de la función coste.

$$C(x) = 0.6x + \sqrt{x^2 - 16x + 100} \Rightarrow C'(x) = 0.6 + \frac{2x - 16}{2\sqrt{x^2 - 16x + 100}}$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 0.6 + \frac{2x - 16}{2\sqrt{x^2 - 16x + 100}} = 0 \Rightarrow \frac{2x - 16}{2\sqrt{x^2 - 16x + 100}} = -0.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - 8}{\sqrt{x^2 - 16x + 100}} = -0.6 \Rightarrow x - 8 = -0.6\sqrt{x^2 - 16x + 100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 8)^2 = \left(-0.6\sqrt{x^2 - 16x + 100}\right)^2 \Rightarrow x^2 + 64 - 16x = 0.36(x^2 - 16x + 100) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 64 - 16x = 0.36x^2 - 5.76x + 36 \Rightarrow 0.64x^2 - 10.24x + 28 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{10.24 \pm \sqrt{(-10.24)^2 - 4 \cdot 0.64 \cdot 28}}{2 \cdot 0.64} = \frac{10.24 \pm 5.76}{1.28} = \begin{cases} \frac{10.24 + 5.76}{1.28} = 12.5 \notin [0, 8] \\ \frac{10.24 - 5.76}{1.28} = 3.5 \in [0, 8] \end{cases}$$

La función coste tiene un punto crítico para $x = 3.5$. Comprobamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $[0, 3.5)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$C'(1) = 0.6 + \frac{1 - 8}{\sqrt{1^2 - 16 \cdot 1 + 100}} = 0.6 + \frac{-7}{\sqrt{85}} \approx -0.16 < 0. \text{ La función decrece en } [0, 3.5).$$

- En el intervalo $(3.5, 8]$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale

$$C'(5) = 0.6 + \frac{5 - 8}{\sqrt{5^2 - 16 \cdot 5 + 100}} = 0.6 + \frac{-3}{\sqrt{45}} \approx 0.15 > 0. \text{ La función crece en } (3.5, 8].$$

Como la función decrece antes y crece después de $x = 3.5$ podemos afirmar que la función presenta un mínimo en $x = 3.5$.

El coste mínimo del oleoducto se consigue entrando en tierra a 3.5 kilómetros de la refinería.

4.2.3 Calculamos el valor del coste mínimo.

$$C(3.5) = 0.6 \cdot 3.5 + \sqrt{3.5^2 - 16 \cdot 3.5 + 100} = 9.6$$

El coste mínimo del oleoducto es de 9.6 millones de euros.