



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2025-2026
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

El examen consta de cinco preguntas, las tres primeras obligatorias. Las dos últimas preguntas tienen opcionalidad interna.

Cada pregunta se puntúa con 2 puntos.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras que aparecen en el listado publicado en la web de la Universidad de La Rioja. No se permite el préstamo de materiales (ni bolígrafos, ni títex, ni materiales auxiliares) entre el alumnado, durante el examen.

PARTE A (Contesta TODAS las preguntas de esta parte. Preguntas 1, 2 y 3.)

Pregunta 1.

[2 puntos] En un examen de matemáticas, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0.6 y -0.8 y sus notas reales 94 y 73, respectivamente. Calcula:

- la media y desviación típica de las puntuaciones del examen que siguen una distribución normal.
- entre que puntuaciones alrededor de la media está la nota del 60% de los estudiantes. (Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Pregunta 2.

Contesta justificadamente los siguientes apartados.

- La suma de los perímetros de dos jardines en forma de cuadrado y de triángulo equilátero es 100 metros. Justifica si es posible determinar las medidas de los lados de los dos jardines, cuadrado y del triángulo, para que la suma de sus áreas sea máxima. [1 punto]
- Determina el dominio, los intervalos de crecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = e^{2x}(1 - 2x + 2x^2) - 1$. [1 punto]

Pregunta 3

Contesta justificadamente los siguientes apartados.

- Determina la relación entre a y b , con $a, b \in \mathbb{R}$ conocidos, para que el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ -2x - y + 3z = b \end{cases}$$

sea compatible. ¿Puede ser compatible determinado?. Justifica la respuesta [1 punto]

- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, tal que $A = BB^T$, donde B^T es la matriz traspuesta de B . Justifica si la matriz B puede ser única. [1 punto]

PARTE B (preguntas 4 y 5.)**Ejercicio 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)****4.1** Dada la función

$$f(x) = (1 - x^2) \tan(x)$$

Con **tan** función tangente. Demuestra que tiene un máximo relativo en el intervalo $[0, \pi/2)$.
[2 puntos]

4.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

- a) Determina el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. [1 punto]
- b) Calcula $\int x^2 e^{2x} dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtén algún **a** para que $\int_a^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{4}(e^2 - 1)$. [1 punto]

Ejercicio 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)**5.1** Contesta justificadamente los siguientes apartados:

- a) Sean las rectas

$$r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{8} \quad s: \begin{cases} x+2y-z=3 \\ -2x+y+nz=4 \end{cases}$$

Determina el valor de **n** para que las rectas sean paralelas. En este caso, calcula la ecuación del único plano que contiene a las dos rectas. [1 punto]

- b) Calcula el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos A(-1,0,2) y B(1,-2,-2). [1 punto]

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Determina los valores de **a** para que los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \pi_1: x + y + z = a - 1 \\ \pi_2: 2x + y + az = a \\ \pi_3: x + ay + z = 1 \end{cases}$$

- a) se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte. [0.75 puntos]
- b) se corten en una recta. En este caso, determina la recta en su forma paramétrica. [0.75 puntos]
- c) no se corten. [0.5 puntos]

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

Soluciones

Probabilidad y Estadística 20%	Álgebra 20 %	Geometría 20%	Análisis 40%
--------------------------------	--------------	---------------	--------------

Pregunta 1. (Obligatoria) Probabilidad y estadística.

Pregunta 2. (Obligatoria) Análisis.

Pregunta 3. (Obligatoria) Álgebra.

Pregunta 4. (Con optatividad) Análisis.

Pregunta 5. (Con optatividad) Geometría.

Pregunta 1.

[2 puntos] En un examen de matemáticas, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0.6 y -0.8 y sus notas reales 94 y 73, respectivamente. Calcula:

- la media y desviación típica de las puntuaciones del examen que siguen una distribución normal.
 - entre que puntuaciones alrededor de la media está la nota del 60% de los estudiantes.
- (Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

a) Llamamos X = Nota de un estudiante en un examen de matemáticas. $X = N(\mu, \sigma)$.

Esta variable tipificada es $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Siendo $Z = N(0,1)$.

Por los datos proporcionados sabemos que $\begin{cases} \frac{94 - \mu}{\sigma} = 0.6 \\ \frac{73 - \mu}{\sigma} = -0.8 \end{cases}$. Resolvemos el sistema planteado.

$$\begin{cases} \frac{94 - \mu}{\sigma} = 0.6 \\ \frac{73 - \mu}{\sigma} = -0.8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 94 - \mu = 0.6\sigma \\ 73 - \mu = -0.8\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 94 - 0.6\sigma = \mu \\ 73 + 0.8\sigma = \mu \end{cases} \Rightarrow 94 - 0.6\sigma = 73 + 0.8\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21 = 1.4\sigma \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{21}{1.4} = 15} \Rightarrow \boxed{\mu = 94 - 0.6 \cdot 15 = 85}$$

La media de la distribución de notas es 85 y la desviación típica 15.

b) Nos piden hallar el valor de “a” tal que $P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0.60$.

$$P(85 - a \leq X \leq 85 + a) = 0.60 \Rightarrow P(X \leq 85 + a) - P(X \leq 85 - a) = 0.60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X \leq 85 + a) - P(X \geq 85 + a) = 0.60 \Rightarrow P(X \leq 85 + a) - [1 - P(X \leq 85 + a)] = 0.60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P(X \leq 85 + a) - 1 = 0.6 \Rightarrow 2P(X \leq 85 + a) = 1.6 \Rightarrow P(X \leq 85 + a) = \frac{1.6}{2} = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{X - 85}{15} \leq \frac{85 + a - 85}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en} \\ \text{la tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{15} = \frac{0.84 + 0.85}{2} \Rightarrow \boxed{a = 15 \cdot 0.845 = 12.675}$$

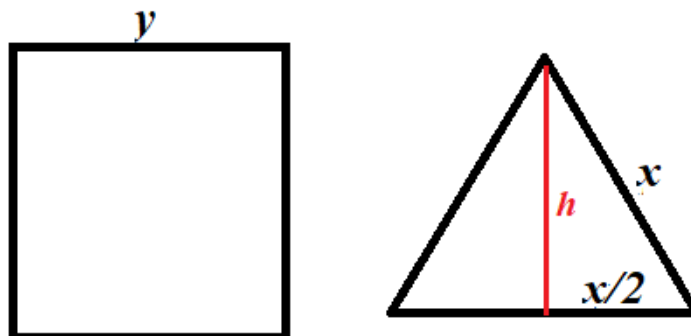
El 60% de las notas están entre $85 - 12.675 = 72.325$ y $85 + 12.675 = 97.675$.

Pregunta 2.**Contesta justificadamente los siguientes apartados.**

a) La suma de los perímetros de dos jardines en forma de cuadrado y de triángulo equilátero es 100 metros. Justifica si es posible determinar las medidas de los lados de los dos jardines, cuadrado y del triángulo, para que la suma de sus áreas sea máxima. [1 punto]

b) Determina el dominio, los intervalos de crecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = e^{2x}(1 - 2x + 2x^2) - 1$. [1 punto]

a) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



El cuadrado tiene de lado “y”, el triángulo equilátero tiene de lado “x”.

La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es 100 metros.

$$4y + 3x = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - 3x}{4} = 25 - \frac{3}{4}x$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos “h” y “x/2”.

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Obtenemos la expresión de la suma de las áreas de cuadrado y triángulo.

$$A(x, y) = y^2 + \frac{hx}{2} \Rightarrow \left\{ h = \frac{\sqrt{3}}{2}x \right\} \Rightarrow A(x, y) = y^2 + \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = y^2 + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ y = 25 - \frac{3}{4}x \right\} \Rightarrow A(x) = \left(25 - \frac{3}{4}x \right)^2 + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} =$$

$$= 625 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{150}{4}x + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 600x + 10000}{16}$$

Derivamos la función área y vemos cuando se anula dicha derivada.

$$A(x) = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 600x + 10000}{16} \Rightarrow A'(x) = \frac{2(9 + 4\sqrt{3})x - 600}{16}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(9+4\sqrt{3})x - 600}{16} = 0 \Rightarrow 2(9+4\sqrt{3})x - 600 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{600}{18+8\sqrt{3}} \approx 18.83}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- Antes de $x=18.83$ tomamos $x=10$ y la derivada vale

$$A'(10) = \frac{2(9+4\sqrt{3})10 - 600}{16} \approx -17 < 0. \text{ La función decrece antes de } x=18.83.$$

- Después de $x=18.83$ tomamos $x=20$ y la derivada vale

$$A'(20) = \frac{2(9+4\sqrt{3})20 - 600}{16} \approx 2.32 > 0. \text{ La función crece después de } x=18.83.$$

Como la función decrece antes y crece después podemos afirmar que en $x=18.83$ la función tiene un mínimo.

Como debe cumplirse que $4y + 3x = 100$, entonces el valor de “x” está en el intervalo

$\left(0, \frac{100}{3}\right)$ y el valor de “y” está en el intervalo $(0, 25)$.

La función $A(x) = \frac{(9+4\sqrt{3})x^2 - 600x + 10000}{16}$ decrece hasta $x=18.83$ y crece después, por

lo que el valor máximo debe situarse en los extremos del intervalo de definición de “x”.

Obtenemos el área para $x=0$ y para $x = \frac{100}{3}$.

$$A(0) = \frac{(9+4\sqrt{3}) \cdot 0^2 - 600 \cdot 0 + 10000}{16} = \frac{10000}{16} = 625 m^2$$

$$A\left(\frac{100}{3}\right) = \frac{(9+4\sqrt{3})\left(\frac{100}{3}\right)^2 - 600\frac{100}{3} + 10000}{16} = 481.12 m^2$$

Para $x=0$ se consigue una suma de áreas máxima, que en realidad es el área del cuadrado

pues el triángulo no existe (lado 0). El valor del lado del cuadrado es $y = 25 - \frac{3}{4} \cdot 0 = 25$

El área máxima se puede conseguir sin triángulo y solo con un cuadrado de lado 25 metros.

- b) El dominio de la función $f(x) = e^{2x}(1-2x+2x^2) - 1$ es todo $\mathbb{R}$, pues la función exponencial siempre existe, la función polinómica también y el producto de ambas no plantea ningún problema de definición.

Obtenemos la derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = e^{2x}(1-2x+2x^2) - 1 \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}(1-2x+2x^2) + e^{2x}(-2+4x) =$$

$$= e^{2x}(2-4x+4x^2-2+4x) = 4x^2 e^{2x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 e^{2x} = 0 \Rightarrow \{e^{2x} \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Obtenemos un único punto crítico $x=0$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ consideramos $x=-1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = 4(-1)^2 e^{2(-1)} = \frac{4}{e^2} > 0. \text{ La función crece en el intervalo } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, +\infty)$ consideramos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = 4 \cdot 1^2 e^{2 \cdot 1} = 4e^2 > 0$. La función crece en el intervalo $(0, +\infty)$.

La función crece en todo su dominio $\mathbb{R}$.

La función no presenta extremos relativos.

Hallamos la segunda derivada y averiguamos cuando se anula (posibles puntos de inflexión).

$$f'(x) = 4x^2 e^{2x} \Rightarrow f''(x) = 8xe^{2x} + 8x^2 e^{2x} = 8xe^{2x}(1+x)$$

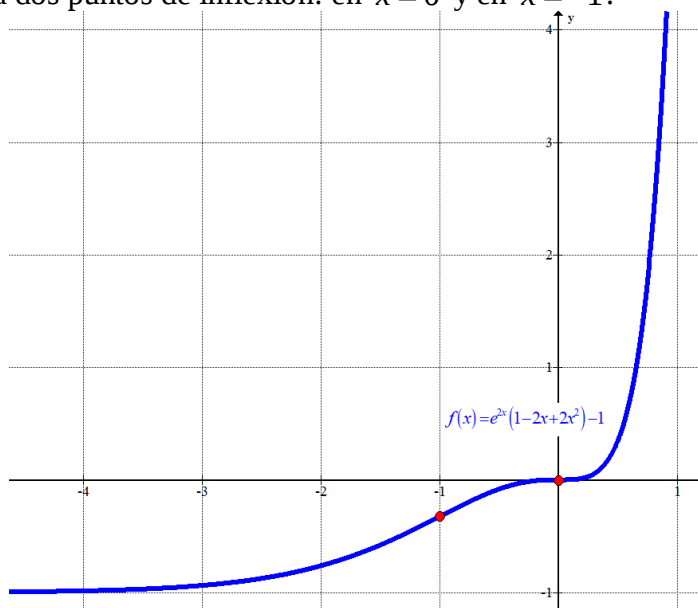
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 8xe^{2x}(1+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 0 \\ 1+x=0 \rightarrow \boxed{x=-1} \end{cases}$$

Sustituimos estos dos valores en la tercera derivada y comprobamos que no se anula.

$$f''(x) = e^{2x}(8x + 8x^2) \Rightarrow f'''(x) = 2e^{2x}(8x + 8x^2) + e^{2x}(8 + 16x) = e^{2x}(8 + 32x + 16x^2)$$

$$\begin{cases} f'''(-1) = e^{2(-1)}(8 + 32(-1) + 16(-1)^2) = -8e^{-2} \neq 0 \\ f'''(0) = e^{2 \cdot 0}(8 + 32 \cdot 0 + 16 \cdot 0^2) = 8 \neq 0 \end{cases}$$

La función presenta dos puntos de inflexión: en $x=0$ y en $x=-1$.



Pregunta 3**Contesta justificadamente los siguientes apartados.**a) Determina la relación entre a y b , con $a, b \in \mathbb{R}$ conocidos, para que el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ -2x - y + 3z = b \end{cases}$$

sea compatible. ¿Puede ser compatible determinado?. Justifica la respuesta [1 punto]

b) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, tal que $A = BB^T$, donde B^T es la matriz traspuesta de B . Justifica si la matriz B puede ser única. [1 punto]a) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & a \\ -2 & -1 & 3 & b \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es 1, pues la fila segunda es igual que la fila primera multiplicada por -1 .Para que el sistema sea compatible el rango de la matriz ampliada también debe ser 1, y para ello la fila segunda debe ser proporcional a la primera $\rightarrow b = -a$.En esta situación tenemos que $\text{rango } A = \text{rango } A/B = 1 < \text{N}^\circ \text{ incógnitas} = 3$. El sistema es compatible indeterminado.El sistema es compatible cuando $b = -a$.El sistema nunca puede ser compatible determinado, pues hay 3 incógnitas y el rango de la matriz de coeficientes es 1 menor que el número de incógnitas (3). El sistema solo puede ser compatible indeterminado ($b = -a$) o incompatible ($b \neq -a$).b) Resolvemos la igualdad $A = BB^T$.

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$A = BB^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 0 & ab + 0 \\ ab + 0 & b^2 + c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 + c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ ab = -1 \\ b^2 + c^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{4} = \pm 2 \\ ab = -1 \\ b^2 + c^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \rightarrow \begin{cases} 2b = -1 \rightarrow \boxed{b = -1/2} \\ b^2 + c^2 = 4 \end{cases} \rightarrow (-1/2)^2 + c^2 = 4 \rightarrow \frac{1}{4} + c^2 = 4 \rightarrow c^2 = 4 - \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{15}{4}}} \\ a = -2 \rightarrow \begin{cases} -2b = -1 \rightarrow \boxed{b = 1/2} \\ b^2 + c^2 = 4 \end{cases} \rightarrow (1/2)^2 + c^2 = 4 \rightarrow \frac{1}{4} + c^2 = 4 \rightarrow c^2 = 4 - \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{15}{4}}} \end{cases}$$

La matriz B no es única. Existen 4 soluciones a lo planteado:

$$a = 2; b = -\frac{1}{2}; c = +\frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 0 & +\sqrt{15}/2 \end{pmatrix}$$

$$a = 2; b = -\frac{1}{2}; c = -\frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 0 & -\sqrt{15}/2 \end{pmatrix}$$

$$a = -2; b = \frac{1}{2}; c = +\frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow B_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ 0 & +\sqrt{15}/2 \end{pmatrix}$$

$$a = -2; b = \frac{1}{2}; c = -\frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow B_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ 0 & -\sqrt{15}/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)**4.1** Dada la función

$$f(x) = (1 - x^2) \tan(x)$$

Con **tan** función tangente. Demuestra que tiene un máximo relativo en el intervalo $[0, \pi/2)$. [2 puntos]

Aplicamos el teorema de Rolle a la función $f(x) = (1 - x^2) \tan(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ contenido en $[0, \pi/2)$. La función $f(x) = (1 - x^2) \tan(x)$ es continua en el intervalo $[0, 1]$. La función tangente es discontinua en $x = \frac{\pi}{2}$ que no pertenece al intervalo considerado. La función también es derivable en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, siendo su derivada:

$$f(x) = (1 - x^2) \tan(x) \Rightarrow f'(x) = -2x \tan(x) + (1 - x^2) \frac{1}{\cos^2 x}$$

Se cumple que $f(0) = (1 - 0^2) \tan(0) = 0$ y $f(1) = (1 - 1^2) \tan(1) = 0$, por lo que $f(0) = f(1)$. Podemos aplicar el teorema de Rolle y afirmar que existe $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Este valor es el candidato a máximo relativo, falta comprobar que la función crece antes y decrece después de este valor.

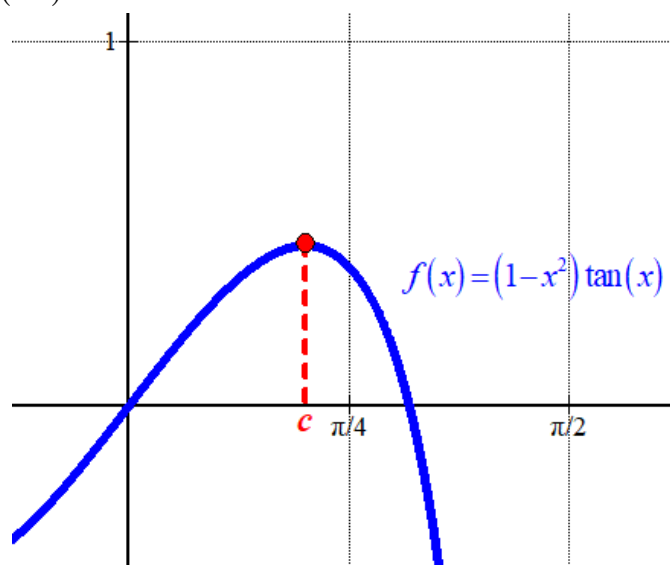
En el intervalo $[0, c)$ consideramos $x = 0$ y tenemos que

$$f'(0) = -2 \cdot 0 \cdot \tan(0) + (1 - 0^2) \frac{1}{\cos^2 0} = 0 + 1 = 1 > 0, \text{ la función crece antes de } x = c.$$

En el intervalo $(c, 1]$ consideramos $x = 1$ y tenemos que

$$f'(1) = -2 \cdot 1 \cdot \tan(1) + (1 - 1^2) \frac{1}{\cos^2 1} = -2 \tan 1 + 0 \approx -3.11 < 0, \text{ la función decrece después de } x = c.$$

Como la derivada se anula para $x = c$ y la función crece antes y decrece después de este valor sabemos que en $c \in (0, 1)$ existe un máximo de la función.



4.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

- a) Determina el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. [1 punto]
- b) Calcula $\int x^2 e^{2x} dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtén algún a para que $\int_a^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{4}(e^2 - 1)$. [1 punto]

- a) El denominador de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ nunca se anula por lo que su dominio es $\mathbb{R}$.

Hallamos su derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

La función presenta un punto crítico en $x = -1$ y otro en $x = 1$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los dos valores obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ consideramos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{1-(-2)^2}{((-2)^2+1)^2} = \frac{-3}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 1)$ consideramos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{1-0^2}{(0^2+1)^2} = 1 > 0$.

La función crece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ consideramos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{1-2^2}{(2^2+1)^2} = \frac{-3}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (1, +\infty).$$

La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(-1, 1)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función presenta un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$.

Para obtener los puntos de inflexión obtenemos la expresión de la derivada segunda y averiguamos cuando se anula.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{(x^2+1)^4} = \\
 &= \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)4x}{(x^2+1)^4} = \\
 &= \frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(x^2+1)^4} = \frac{-6x+2x^3}{(x^2+1)^4} \\
 f''(x) &= 0 \Rightarrow \frac{-6x+2x^3}{(x^2+1)^4} = 0 \Rightarrow -6x+2x^3 = 0 \Rightarrow 2x(-3+x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -3+x^2=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Para comprobar que los tres valores que anulan la segunda derivada son puntos de inflexión estudiamos la concavidad y convexidad antes, entre y después de los valores obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$ tomamos $x = -2$ y la derivada segunda vale

$$f''(-2) = \frac{-6(-2) + 2(-2)^3}{((-2)^2 + 1)^4} = \frac{-4}{5^4} < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en } (-\infty, -\sqrt{3}).$$

- En el intervalo $(-\sqrt{3}, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale

$$f''(-1) = \frac{-6(-1) + 2(-1)^3}{((-1)^2 + 1)^4} = \frac{4}{16} > 0. \text{ La función es convexa } (\cup) \text{ en } (-\sqrt{3}, 0).$$

- En el intervalo $(0, +\sqrt{3})$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale

$$f''(1) = \frac{-6 \cdot 1 + 2 \cdot 1^3}{(1^2 + 1)^4} = \frac{-4}{16} < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en } (0, +\sqrt{3}).$$

- En el intervalo $(+\sqrt{3}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale

$$f''(2) = \frac{-6 \cdot 2 + 2 \cdot 2^3}{(2^2 + 1)^4} = \frac{4}{5^4} > 0. \text{ La función es convexa } (\cup) \text{ en } (+\sqrt{3}, +\infty).$$

La función presenta puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = +\sqrt{3}$.

b) Calculamos la integral indefinida pedida.

$$\begin{aligned}
 \int x^2 e^{2x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = x^2 \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} 2x dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} e^{2x} - \int e^{2x} x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \left[x \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \right] = \\
 &= \frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} = \boxed{\frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C}
 \end{aligned}$$

Calculamos el valor de la integral definida.

$$\begin{aligned}
 \int_a^1 x^2 e^{2x} dx &= \left[\frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} \right]_a^1 = \\
 &= \left[\frac{1^2}{2} e^{2 \cdot 1} - \frac{1}{2} e^{2 \cdot 1} + \frac{1}{4} e^{2 \cdot 1} \right] - \left[\frac{a^2}{2} e^{2 \cdot a} - \frac{a}{2} e^{2 \cdot a} + \frac{1}{4} e^{2 \cdot a} \right] = \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{a^2 e^{2a}}{2} + \frac{a e^{2a}}{2} - \frac{e^{2a}}{4} = \frac{1}{4} (e^2 - e^{2a} + 2a^2 e^{2a} + 2a e^{2a})
 \end{aligned}$$

Igualemos este resultado a $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$ y obtenemos el valor de “a”.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} (e^2 - e^{2a} + 2a^2 e^{2a} + 2a e^{2a}) &= \frac{1}{4} (e^2 - 1) \Rightarrow \cancel{e^2} - e^{2a} + 2a^2 e^{2a} + 2a e^{2a} = \cancel{e^2} - 1 \Rightarrow \\
 \Rightarrow -e^{2a} (1 - 2a^2 - 2a) &= -1
 \end{aligned}$$

Esta igualdad no se puede resolver, pero se cumple para $a = 0$.
Para $a = 0$ se cumple lo pedido.

Ejercicio 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)**5.1** Contesta justificadamente los siguientes apartados:

a) Sean las rectas

$$r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{8} \quad s: \begin{cases} x+2y-z=3 \\ -2x+y+nz=4 \end{cases}$$

Determina el valor de n para que las rectas sean paralelas. En este caso, calcula la ecuación del único plano que contiene a las dos rectas. [1 punto]

b) Calcula el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos $A(-1,0,2)$ y $B(1,-2,-2)$. [1 punto]

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{8} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (4, 2, 8) \rightarrow \vec{u}_r = (2, 1, 4) \\ P_r(3, -1, -1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x+2y-z=3 \\ -2x+y+nz=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2y+z \\ -2(3-2y+z)+y+nz=4 \end{cases} \Rightarrow -2(3-2y+z)+y+nz=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6+4y-2z+y+nz=4 \Rightarrow 5y+(n-2)z=10 \Rightarrow 5y=(2-n)z+10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2-n}{5}z + 2 \Rightarrow x = 3 - 2\left(\frac{2-n}{5}z + 2\right) + z = 3 - \frac{4-2n}{5}z - 4 + z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 + \frac{-4+2n+5}{5}z = -1 + \frac{1+2n}{5}z \Rightarrow s: \begin{cases} x = -1 + \frac{1+2n}{5}z \\ y = 2 + \frac{2-n}{5}z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = \left(\frac{1+2n}{5}, \frac{2-n}{5}, 1\right) \rightarrow \vec{v}_s = (1+2n, 2-n, 5) \\ Q_s(-1, 2, 0) \end{cases}$$

Para que las rectas sean paralelas deben tener vectores directores proporcionales y no coincidir en ningún punto.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 1, 4) \\ \vec{v}_s = (1+2n, 2-n, 5) \\ \vec{u}_r \parallel \vec{v}_s \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1+2n} = \frac{1}{2-n} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2-n} = \frac{4}{5} \rightarrow 5 = 8 - 4n \rightarrow 4n = 3 \rightarrow \boxed{n = \frac{3}{4}} \\ \frac{2}{1+2n} = \frac{4}{5} \rightarrow 10 = 4 + 8n \rightarrow 6 = 8n \rightarrow \boxed{n = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}} \end{array} \right.$$

Para $n = \frac{3}{4}$ las rectas son paralelas o coincidentes. Comprobamos que el punto $Q_s(-1, 2, 0)$ de la recta s no pertenece a la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} Q_s(-1, 2, 0) \in r? \\ r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{-1-3}{4} = \frac{2+1}{2} = \frac{0+1}{8} ? \Rightarrow \frac{-4}{4} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{1}{8}$$

No se cumplen las igualdades y para $n = \frac{3}{4}$ las rectas r y s son paralelas.

Hallamos la ecuación del plano que contiene ambas rectas que es el plano que contiene el punto $Q_s(-1, 2, 0)$ y con vectores directores $\vec{u}_r = (2, 1, 4)$ y $\overrightarrow{P_r Q_s}$.

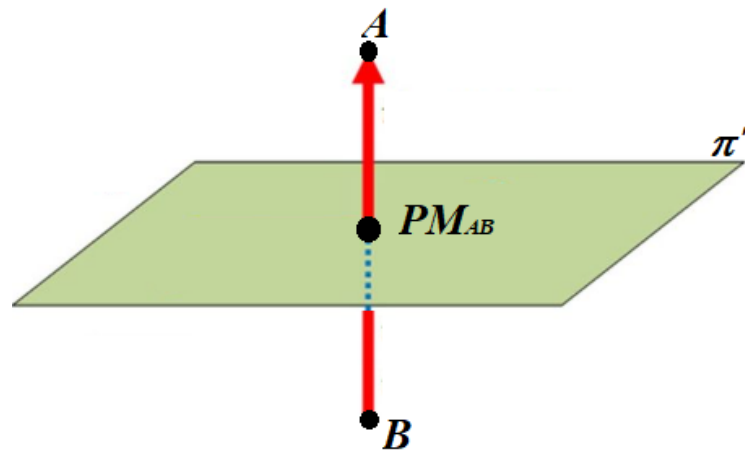
$$\left. \begin{array}{l} Q_s(-1, 2, 0) \\ P_r(3, -1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (-1, 2, 0) - (3, -1, -1) = (-4, 3, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{P_r Q_s} = (-4, 3, 1) \\ \vec{v} = \vec{u}_r = (2, 1, 4) \\ Q_s(-1, 2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x + 12 + 2y - 4 - 4z - 6z + 16y - 32 - x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 11x + 18y - 10z - 25 = 0}$$

La ecuación del plano que contiene ambas rectas es $\pi: 11x + 18y - 10z - 25 = 0$.

- b) El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos $A(-1, 0, 2)$ y $B(1, -2, -2)$ es el plano que pasa por el punto medio del segmento AB y que tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{AB}$.



$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (1, -2, -2) - (-1, 0, 2) = (2, -2, -4) \rightarrow \vec{n'} = (1, -1, -2) \\ PM_{AB} &= \frac{(1, -2, -2) + (-1, 0, 2)}{2} = (0, -1, 0) \in \pi' \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \pi': x - y - 2z + D &= 0 \\ PM_{AB} = (0, -1, 0) &\in \pi' \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 - (-1) - 2 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi': x - y - 2z - 1 = 0}$$

El lugar geométrico buscado es el plano de ecuación $\pi': x - y - 2z - 1 = 0$.

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Determina los valores de a para que los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \pi_1 : x + y + z = a - 1 \\ \pi_2 : 2x + y + az = a \\ \pi_3 : x + ay + z = 1 \end{cases}$$

a) se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte. [0.75 puntos]

b) se corten en una recta. En este caso, determina la recta en su forma paramétrica. [0.75 puntos]

c) no se corten. [0.5 puntos]

Planteamos el problema como un sistema de ecuaciones. Estudiamos la compatibilidad del mismo en función del valor de a .

El sistema tiene asociada una matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a + 2a - 1 - 2 - a^2 = -2 + 3a - a^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2 + 3a - a^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-2)(-1)}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = \boxed{1=a} \\ \frac{-3-1}{-2} = \boxed{2=a} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

En este caso el determinante de la matriz de coeficientes A es no nulo y su rango es 3. El rango de la matriz ampliada A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas.

El sistema tiene solución y es única. Esta solución son las coordenadas del punto de corte de los tres planos.

CASO 2. Si $a = 1$.

En este caso la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, su determinante es nulo y su rango no es 3.

El rango de la matriz A es 2, pues el menor que resulta de quitar la tercera fila y la tercera columna tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la segunda columna (igual que la tercera columna).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-0-0-2-1 = -1 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3.

Tenemos que $2 = \text{rango } A \neq \text{rango } A/B = 3$. El sistema es incompatible. En este caso los tres planos no tienen ningún punto en común.

CASO 3. Si $a = 2$.

En este caso la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, su determinante es nulo y su rango no es 3.

El rango de la matriz A es 2, pues el menor que resulta de quitar la tercera fila y la tercera columna tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0$$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos que la tercera y cuarta

columna son iguales, por lo que el rango de la matriz A/B es el mismo que el de la matriz A y también es 2.

Tenemos que $\text{rango } A = \text{rango } A/B = 2 < 3 = \text{número de incógnitas}$.

El sistema tiene infinitas soluciones que son los infinitos puntos de la recta en la que se cortan los tres planos.

- a) Los tres planos se cortan en un punto cuando $a \neq 1$ y $a \neq 2$. Hallamos el punto de corte resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 : x + y + z = a - 1 \\ \pi_2 : 2x + y + az = a \\ \pi_3 : x + ay + z = 1 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x \quad +y \quad +az \quad = a \\ -2x \quad -2y \quad -2z \quad = -2a + 2 \\ \hline 0 \quad -y \quad +(a-2)z \quad = 2-a \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 2^a \end{array} \right. \right\}$$

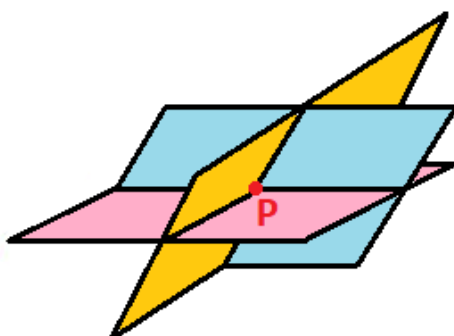
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x + ay + z = 1 \\ -x - y - z = -a + 1 \\ \hline 0 \quad (a-1)y \quad 0 = 2-a \rightarrow \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ -y + (a-2)z = 2 - a \Rightarrow \\ (a-1)y = 2 - a \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \{a-1 \neq 0\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ -y + (a-2)z = 2 - a \Rightarrow \\ \boxed{y = \frac{2-a}{a-1}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{2-a}{a-1} + z = a - 1 \\ -\frac{2-a}{a-1} + (a-2)z = 2 - a \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + z = a - 1 - \frac{2-a}{a-1} = \frac{a^2 + 1 - 2a - 2 + a}{a-1} = \frac{a^2 - a - 1}{a-1} \\ (a-2)z = 2 - a + \frac{2-a}{a-1} = \frac{2a - 2 - a^2 + a + 2 - a}{a-1} = \frac{2a - a^2}{a-1} \end{array} \right. \Rightarrow \{a-2 \neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + z = \frac{a^2 - a - 1}{a-1} \\ \boxed{z = \frac{2-a}{(a-1)(a-2)} = \frac{-1}{a-1}} \end{array} \right. \Rightarrow x - \frac{1}{a-1} = \frac{a^2 - a - 1}{a-1} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a^2 - a}{a-1} = \frac{a(a-1)}{a-1} = a}$$

El punto P de corte de los tres planos tiene coordenadas $P\left(a, \frac{2-a}{a-1}, \frac{-1}{a-1}\right)$.

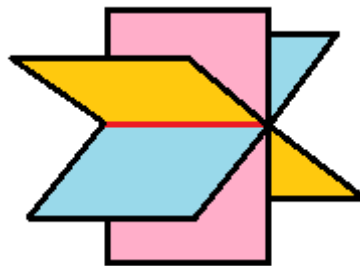


b) Para $a = 2$ los planos se cortan en una recta. Hallamos las ecuaciones paramétricas de esta recta r .

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 : x + y + z = 1 \\ \pi_2 : 2x + y + 2z = 2 \Rightarrow \\ \pi_3 : x + 2y + z = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x + 2y + z = 1 \\ -x - y - z = -1 \\ \hline 0 + y + 0 = 0 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + y + 2z = 2 \\ -2x - 2y - 2z = -2 \\ \hline 0 - y + 0 = 0 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ -y = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 - z \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$



c) Para $a=1$ los planos no se cortan.

Las ecuaciones de los planos son $\begin{cases} \pi_1 : x + y + z = 0 \\ \pi_2 : 2x + y + z = 1 \\ \pi_3 : x + y + z = 1 \end{cases}$. Observamos que los planos π_1 y π_3 son paralelos y el plano π_2 los corta en rectas paralelas.

