



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026**

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- Duración: 1 hora y 30 minutos**
- Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- Este examen consta de seis ejercicios distribuidos en una parte con dos ejercicios obligatorios y una parte con dos bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- Deberá resolverlos dos ejercicios obligatorios y solamente un ejercicio de cada uno de los dos bloques con optatividad. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. Se permitirá el uso de regla.

PARTE OBLIGATORIA Resuelve los dos ejercicios siguientes:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

La contaminación por dióxido de nitrógeno, NO_2 , en cierta estación de medición de una ciudad, durante el pasado mes de abril, se puede modelar por la función:

$$c(t) = 80 - 6t + \frac{23t^2}{20} - \frac{t^3}{30}$$

medido en mg/m^3 , donde $t \in [0, 30]$ representa el tiempo, expresado en días, transcurrido desde las 0 horas del día 1 de abril.

- [0,5 puntos]** ¿Qué nivel de NO_2 había a las 12 horas del día 10 de abril?
- [1,25 puntos]** ¿En qué momento se alcanzó el máximo nivel de NO_2 ?, ¿cuál fue ese nivel máximo?
- [0,75 puntos]** Calcula, mediante $\frac{1}{30} \int_0^{30} c(t) dt$, el nivel promedio del mes.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-k}{2}$ y $s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$.

- [1,5 puntos]** Determina k sabiendo que ambas se cortan en un punto.
- [1 punto]** Para $k = 0$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s .

PARTE OPTATIVA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1,5 puntos] Determina a y b para que $A^2 = 4I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
 b) [1 punto] Para $a = -1$ y $b = 1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple $A^2 X = B^t$.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera el sistema $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- a) [1,75 puntos] Determina los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado.
 b) [0,75 puntos] Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 2$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

Considera la función $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 + \cos(x)}}$.

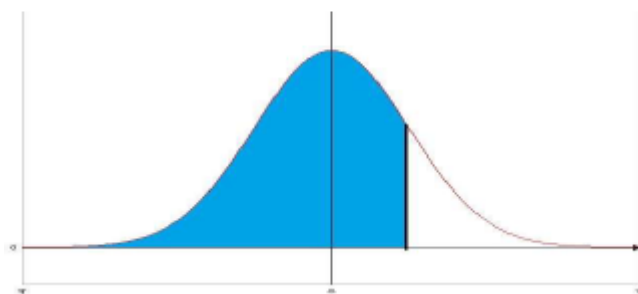
- a) [2 puntos] Calcula $\int_0^\pi f(x) dx$.
 b) [0,5 puntos] Estudia la simetría de la función f y deduce de ella el valor de $\int_{-\pi}^\pi f(x) dx$.

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

El peso de las manzanas producidas en una granja sigue una distribución normal de media 200 gramos y desviación típica desconocida.

- a) [1,25 puntos] Si el 33% de las manzanas pesan más de 230 gramos, calcula la desviación típica del peso de las manzanas.
 b) [1,25 puntos] Si la desviación típica es de 50 gramos, calcula el porcentaje de manzanas que pesan entre 160 y 220 gramos.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $N(0, 1)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES

Análisis 50%	Geometría 25%	Álgebra 25%	Probabilidad y Estadística 0%
---------------------	----------------------	--------------------	--------------------------------------

O

Análisis 25%	Geometría 25%	Álgebra 25%	Probabilidad y Estadística 25%
---------------------	----------------------	--------------------	---------------------------------------

Pregunta 1. (Obligatoria) Análisis.**Pregunta 2. (Obligatoria) Geometría.****Pregunta 3. (Con optatividad) Álgebra.****Pregunta 4. (Con optatividad) Análisis o Probabilidad y estadística.****EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

La contaminación por dióxido de nitrógeno, NO_2 , en cierta estación de medición de una ciudad, durante el pasado mes de abril, se puede modelar por la función:

$$c(t) = 80 - 6t + \frac{23t^2}{20} - \frac{t^3}{30}$$

medido en mg/m^3 , donde $t \in [0, 30]$ representa el tiempo, expresado en días, transcurrido desde las 0 horas del día 1 de abril.

a) **[0,5 puntos]** ¿Qué nivel de NO_2 había a las 12 horas del día 10 de abril?

b) **[1,25 puntos]** ¿En qué momento se alcanzó el máximo nivel de NO_2 ?, ¿cuál fue ese nivel máximo?

c) **[0,75 puntos]** Calcula, mediante $\frac{1}{30} \int_0^{30} c(t) dt$, el nivel promedio del mes.

a) Hasta las 12 horas del día 10 de abril han pasado 9 días y medio $\rightarrow t = 9.5$.

Debemos hallar $c(9.5)$.

$$c(9.5) = 80 - 6 \cdot 9.5 + \frac{23 \cdot 9.5^2}{20} - \frac{9.5^3}{30} \approx 98.21 \text{ mg} / \text{m}^3$$

El nivel de NO_2 que había a las 12 horas del día 10 de abril es de $98.21 \text{ mg}/\text{m}^3$.

b) Obtenemos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$c(t) = 80 - 6t + \frac{23t^2}{20} - \frac{t^3}{30} \Rightarrow c'(t) = -6 + \frac{23 \cdot 2t}{20} - \frac{3t^2}{30} = -6 + \frac{23t}{10} - \frac{t^2}{10}$$

$$c'(t) = 0 \Rightarrow -6 + \frac{23t}{10} - \frac{t^2}{10} = 0 \Rightarrow -60 + 23t - t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-23 \pm \sqrt{23^2 - 4(-1)(-60)}}{2(-1)} = \frac{-23 \pm 17}{-2} = \begin{cases} \frac{-23+17}{-2} = \boxed{3=t} \\ \frac{-23-17}{-2} = \boxed{20=t} \end{cases}$$

Sustituimos el valor de los dos puntos críticos obtenidos en la segunda derivada.

$$c'(t) = -6 + \frac{23t}{10} - \frac{t^2}{10} \Rightarrow c''(t) = \frac{23}{10} - \frac{2t}{10} \Rightarrow \begin{cases} c''(3) = \frac{23}{10} - \frac{2 \cdot 3}{10} = \frac{17}{10} > 0 \rightarrow \text{Mínimo} \\ c''(20) = \frac{23}{10} - \frac{2 \cdot 20}{10} = \frac{-17}{10} < 0 \rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

El nivel máximo se alcanzó en $t = 20$, es decir, transcurridos 20 días (21 de abril).

c) Calculamos la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \frac{1}{30} \int_0^{30} c(t) dt &= \frac{1}{30} \int_0^{30} 80 - 6t + \frac{23t^2}{20} - \frac{t^3}{30} dt = \frac{1}{30} \left[80t - 3t^2 + \frac{23t^3}{20 \cdot 3} - \frac{t^4}{30 \cdot 4} \right]_0^{30} = \\ &= \frac{1}{30} \left[80t - 3t^2 + \frac{23t^3}{60} - \frac{t^4}{120} \right]_0^{30} = \\ &= \frac{1}{30} \left(\left[80 \cdot 30 - 3 \cdot 30^2 + \frac{23 \cdot 30^3}{60} - \frac{30^4}{120} \right] - \left[80 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 + \frac{23 \cdot 0^3}{60} - \frac{0^4}{120} \right] \right) = \\ &= \frac{1}{30} (2400 - 2700 + 10350 - 6750) = \frac{3300}{30} = \boxed{110 \text{ mg} / \text{m}^3} \end{aligned}$$

El nivel promedio del mes tiene un valor de $110 \text{ mg} / \text{m}^3$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-k}{2}$ y $s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$.

a) [1,5 puntos] Determina k sabiendo que ambas se cortan en un punto.

b) [1 punto] Para $k = 0$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s .

a) Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-k}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ P_r(0, 2, k) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ Q_s(-2, -3, 1) \end{cases}$$

Estas rectas no son paralelas ni coincidentes pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{1}$$

Para que las rectas se corten en un punto el producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ debe ser nulo.

Obtenemos el valor de k que consigue anular el producto mixto.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, 2, k) \\ Q_s(-2, -3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (-2, -3, 1) - (0, 2, k) = (-2, -5, 1-k)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-2, -5, 1-k) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 1-k \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - 2k + 2 + 10 + 8 - 1 + k + 5 = 26 - k$$

$$[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = 0 \Rightarrow 26 - k = 0 \Rightarrow \boxed{k = 26}$$

Para $k = 26$ las rectas se cortan en un punto.

b) Para $k = 0$ las rectas quedan $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$.

El plano π que contiene a la recta r y es paralelo a s tiene como vectores directores los vectores directores de ambas rectas y pasa por el punto $P_r(0, 2, 0)$ de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{u} = \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ P_r(0, 2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - 2y + 4 + 2z - z - y + 2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x - 3y + z + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : 5x + 3y - z - 6 = 0}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación $\pi : 5x + 3y - z - 6 = 0$.

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) **[1,5 puntos]** Determina a y b para que $A^2 = 4I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
 b) **[1 punto]** Para $a = -1$ y $b = 1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple $A^2 X = B^t$.

a) Determinamos los valores de a y b .

$$A^2 = 4I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + 3b & 3a + 3 \\ ab + b & 3b + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 3b = 4 \\ 3a + 3 = 0 \rightarrow 3a = -3 \rightarrow \boxed{a = -1} \\ ab + b = 0 \\ 3b + 1 = 4 \rightarrow 3b = 3 \rightarrow \boxed{b = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1)^2 + 3 \cdot 1 = 4 \rightarrow \text{¡Ok!} \\ (-1) \cdot 1 + 1 = 0 \rightarrow \text{¡Ok!} \end{cases}$$

Para que se cumpla lo pedido debe ser $a = -1$ y $b = 1$.

b) Para $a = -1$ y $b = 1$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hemos visto en el

apartado anterior que para estos valores se cumple la igualdad $A^2 = 4I$.
 Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A^2 X = B^t \Rightarrow \{A^2 = 4I\} \Rightarrow 4IX = B^t \Rightarrow 4X = B^t \Rightarrow X = \frac{1}{4} B^t$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4} B^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación $A^2 X = B^t$ tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera el sistema
$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) [1,75 puntos] Determina los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado.

b) [0,75 puntos] Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 2$.

a) Obtenemos la expresión del sistema que se nos plantea.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2y - 3z = mx \\ 2x - 2z = my \\ 3x - 2y - z = mz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2y - 3z - mx = 0 \\ 2x - 2z - my = 0 \\ 3x - 2y - z - mz = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (5-m)x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - my - 2z = 0 \\ 3x - 2y + (-m-1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-m & -2 & -3 \\ 2 & -m & -2 \\ 3 & -2 & -m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema que se nos plantea es un sistema homogéneo que siempre es compatible. Será indeterminado cuando el rango de la matriz de coeficientes sea menor de 3, es decir, cuando su determinante sea nulo.

$$\begin{vmatrix} 5-m & -2 & -3 \\ 2 & -m & -2 \\ 3 & -2 & -m-1 \end{vmatrix} = \{Columna 3^a + Columna 1^a\} = \begin{vmatrix} 5-m & -2 & 2-m \\ 2 & -m & 0 \\ 3 & -2 & 2-m \end{vmatrix} =$$

$$= \{Fila 1^a - Fila 3^a\} = \begin{vmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ 2 & -m & 0 \\ 3 & -2 & 2-m \end{vmatrix} = (2-m)(-m)(2-m) = -m(2-m)^2$$

Averiguamos cuando se anula el determinante.

$$\begin{vmatrix} 5-m & -2 & -3 \\ 2 & -m & -2 \\ 3 & -2 & -m-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -m(2-m)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 2-m = 0 \rightarrow m = 2 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado cuando $m = 0$ o $m = 2$.

b) Hemos visto en el apartado anterior que para $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado. Obtenemos la expresión de sus soluciones.

$$\begin{cases} (5-m)x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - my - 2z = 0 \\ 3x - 2y + (-m-1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{Ecuación 1^a = Ecuación 3^a\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 3z = 2y \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - (3x - 3z) - 2z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 3x + 3z - 2z = 0 \Rightarrow -x + z = 0 \Rightarrow \boxed{x = z} \Rightarrow 2y = 3z - 3z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$, siendo λ cualquier número real.

EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

Considera la función $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}}$.

a) [2 puntos] Calcula $\int_0^\pi f(x) dx$.

b) [0,5 puntos] Estudia la simetría de la función f y deduce de ella el valor de $\int_{-\pi}^\pi f(x) dx$.

a) Calculo primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = \cos(x) \rightarrow dt = -\sin(x) dx \rightarrow \\ \rightarrow dx = \frac{dt}{-\sin(x)} \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+t}} \frac{dt}{-\sin(x)} = - \int \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt = - \int (1+t)^{-1/2} dt = - \frac{(1+t)^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \\ &= - \frac{(1+t)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{1+t} = \boxed{-2\sqrt{1+\cos(x)} + K} \end{aligned}$$

Aplicamos lo obtenido en el cálculo de la integral definida.

$$\int_0^\pi f(x) dx = \left[-2\sqrt{1+\cos(x)} \right]_0^\pi = -2\sqrt{1+\cos(\pi)} - \left(-2\sqrt{1+\cos(0)} \right) = -2\sqrt{0} + 2\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

b) Comparamos $f(x)$ y $f(-x)$.

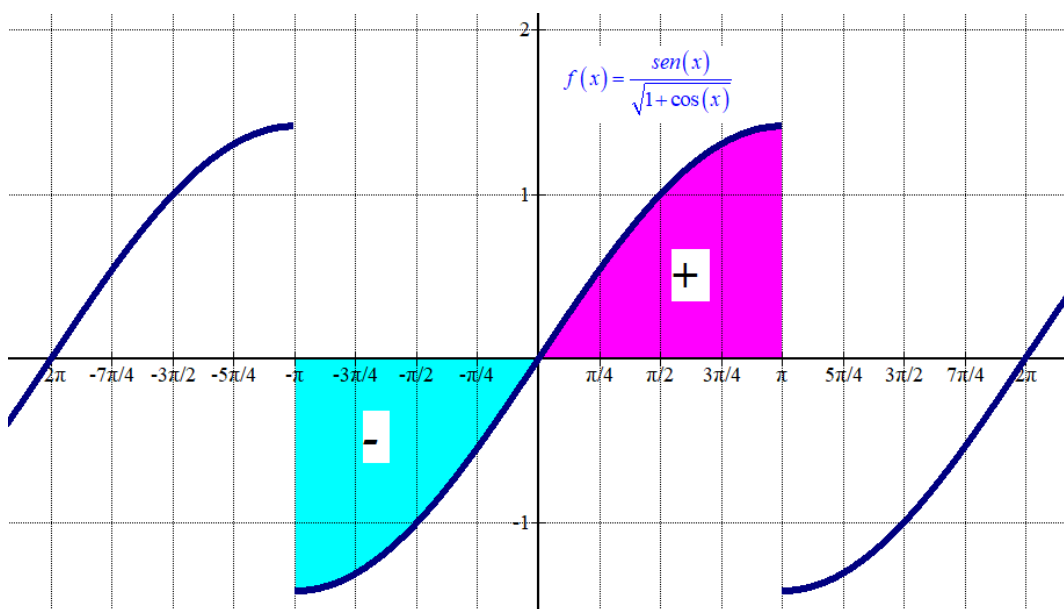
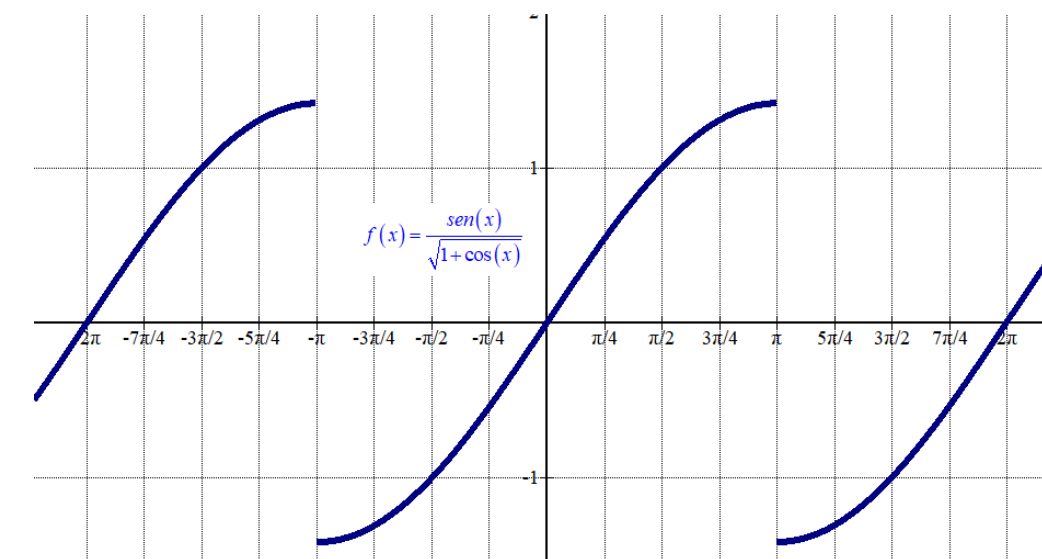
$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\sqrt{1+\cos(-x)}} = \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\pi, \pi) \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin(-x) = -\sin(x) \\ \cos(-x) = \cos(x) \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \frac{-\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}} = -f(x)$$

La función es impar.

Por este motivo la integral definida $\int_{-\pi}^\pi f(x) dx$ valdrá 0.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi f(x) dx &= \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^\pi f(x) dx = - \int_{-\pi}^0 -f(x) dx + \int_0^\pi f(x) dx = \\ &= - \int_{-\pi}^0 f(-x) dx + \int_0^\pi f(x) dx = - \int_0^\pi f(x) dx + \int_0^\pi f(x) dx = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \boxed{0} \end{aligned}$$

Lo comprobamos en el dibujo siguiente.



EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

El peso de las manzanas producidas en una granja sigue una distribución normal de media 200 gramos y desviación típica desconocida.

- a) [1,25 puntos] Si el 33% de las manzanas pesan más de 230 gramos, calcula la desviación típica del peso de las manzanas.
 b) [1,25 puntos] Si la desviación típica es de 50 gramos, calcula el porcentaje de manzanas que pesan entre 160 y 220 gramos.

a) Sea X = Peso en gramos de las manzanas producidas en una granja. $X = N(200, \sigma)$.

Nos dicen que $P(X > 230) = 0.33$. Utilizamos esta información para obtener el valor de σ .

$$P(X > 230) = 0.33 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z > \frac{230 - 200}{\sigma}\right) = 0.33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{30}{\sigma}\right) = 0.33 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{30}{\sigma}\right) = 0.33 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{30}{\sigma}\right) = 1 - 0.33 = 0.67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{30}{\sigma} = 0.44 \Rightarrow \sigma = \frac{30}{0.44} = \frac{750}{11} \approx 68.1818$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700

La desviación típica vale $\sigma = \frac{750}{11} \approx 68.1818$ gramos.

b) Nos dicen que $X = N(200, 50)$. Calculamos $P(160 \leq X \leq 220)$.

$$P(160 \leq X \leq 220) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{160 - 200}{50} \leq Z \leq \frac{220 - 200}{50}\right) =$$

$$= P(-0.8 \leq Z \leq 0.4) = P(Z \leq 0.4) - P(Z \leq -0.8) = P(Z \leq 0.4) - P(Z \geq 0.8) =$$

$$= P(Z \leq 0.4) - [1 - P(Z \leq 0.8)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6554 - 1 + 0.7881 = \boxed{0.4435}$$

z	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7615
0,8	0,7881	0,7915

El porcentaje de manzanas que pesan entre 160 y 220 gramos es del 44.35 %.