

 COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	PAU Convocatoria ordinaria 2025 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIAIS II CÓDIGO 40
---	---

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

CONTEXTO

En la actualidad, existen varias empresas de cosméticos orientadas hacia el público juvenil que elaboran cremas para la piel. Una empresa quiere comercializar una nueva crema para reducir los brotes de acné, para lo que ha contratado los servicios de una compañía de publicidad. Los publicistas proponen lanzar una primera campaña empleando anuncios en prensa escrita y buzoneo. Una vez finalizada esta primera campaña, si la probabilidad de que la nueva crema sea conocida entre el público juvenil es menor que 0,6, pasarán a una segunda campaña colocando cartelera luminosa en lugares estratégicos.

Después de analizar los datos de la primera campaña, han llegado a las siguientes conclusiones: la probabilidad de que el público juvenil conozca la nueva crema por los anuncios en prensa escrita es 0,3 y la probabilidad de que sea conocida por buzoneo es 0,4. Puede suponerse que son independientes los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo".

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Lanzará la empresa la segunda campaña de publicidad?

1.2. Suponga que la empresa ha decidido emplear la cartelera luminosa. De los que conocen la nueva crema por buzoneo el 25% también la conocen por la cartelera luminosa, y entre los que conocen la nueva crema por la cartelera luminosa, el 20% también la conocen por buzoneo. De los tres medios empleados (prensa escrita, buzoneo y cartelera luminosa), ¿cuál ha sido el que ha tenido mayor impacto para que la nueva crema sea conocida?

1.3. ¿Son incompatibles los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo"?

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Calcule la matriz inversa de A , A^{-1} .

2.1.2. Calcule la inversa de la matriz traspuesta de A , $(A^t)^{-1}$, utilizando el apartado anterior.

2.1.3. Despeje y calcule el valor de X en la siguiente ecuación matricial $AX - A^t = X$.

2.2. Se considera el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \geq y - 4$$

$$x + y \leq 8$$

$$3x + 2y \geq -2$$

$$x - 2 \leq 2y$$

- 2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.
- 2.2.2. Justifique si los puntos $P(-1,1)$ y $Q(5,1)$ pertenecen o no a la región anterior.
- 2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x,y) = 2x - 4y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

3.1. Dada la siguiente función

$$B(t) = (4-t)(t-1)^2, \quad 0 \leq t \leq 4.$$

- 3.1.1. Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen.
- 3.1.2. Estudie sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.
- 3.1.3. Represente la gráfica de la función $B(t)$.

3.2. Dada la función $f(x) = ax^2 + bx - 3$, siendo a, b números reales.

- 3.2.1. Calcule a y b sabiendo que dicha función pasa por el punto $(4, 5)$ y tiene un mínimo en $x = 1$.
- 3.2.2. Para $a = 1$ y $b = -2$, calcule el área limitada por $f(x)$ y la recta $y = x - 3$.

PREGUNTA 4. TRES BLOQUES DE LA MATERIA. (2,5 puntos)

Responda uno de los siguientes apartados: 4.1., 4.2. o cualquiera de los apartados no escogidos de las preguntas 2 y 3 (2.1, 2.2, 3.1 o 3.2)

4.1. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A) = 0.40, P(A \cap B) = 0.21 \text{ y } P(A/B) = 0.60.$$

4.1.1. Calcule $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ y $P(\bar{B}/A)$.

4.1.2. Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

4.2. Una encuesta realizada a 100 individuos de una población revela que 80 de ellos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

4.2.1. Calcule un intervalo con un 95% de confianza para la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

4.2.2. Si se sabe que 8 de cada 10 individuos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica y se toma una muestra de 100 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica sea superior al 87%?

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

CONTEXTO

En la actualidad, existen varias empresas de cosméticos orientadas hacia el público juvenil que elaboran cremas para la piel. Una empresa quiere comercializar una nueva crema para reducir los brotes de acné, para lo que ha contratado los servicios de una compañía de publicidad. Los publicistas proponen lanzar una primera campaña empleando anuncios en prensa escrita y buzoneo. Una vez finalizada esta primera campaña, si la probabilidad de que la nueva crema sea conocida entre el público juvenil es menor que 0,6, pasarán a una segunda campaña colocando cartelera luminosa en lugares estratégicos.

Después de analizar los datos de la primera campaña, han llegado a las siguientes conclusiones: la probabilidad de que el público juvenil conozca la nueva crema por los anuncios en prensa escrita es 0,3 y la probabilidad de que sea conocida por buzoneo es 0,4. Puede suponerse que son independientes los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo".

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Lanzará la empresa la segunda campaña de publicidad?

1.2. Suponga que la empresa ha decidido emplear la cartelera luminosa. De los que conocen la nueva crema por buzoneo el 25% también la conocen por la cartelera luminosa, y entre los que conocen la nueva crema por la cartelera luminosa, el 20% también la conocen por buzoneo. De los tres medios empleados (prensa escrita, buzoneo y cartelera luminosa), ¿cuál ha sido el que ha tenido mayor impacto para que la nueva crema sea conocida?

1.3. ¿Son incompatibles los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo"?

Llamamos A al suceso "conocer la nueva crema por prensa escrita" y B a "conocer la nueva crema por buzoneo". Como se suponen sucesos independientes se cumple $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$.

1.1. Debemos comprobar si $P(A \cup B)$ es mayor o menor de 0.6. Calculamos esta probabilidad.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.12 = 0.58 < 0.60$$

Al ser la probabilidad menor de 0.6 la empresa lanzará la segunda campaña.

1.2. Llamamos C al suceso "conocer la nueva crema por cartelera luminosa". Nos dicen que $P(C/B) = 0.25$ y que $P(B/C) = 0.20$.

Nos piden calcular y comparar $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$.

$$P(C/B) = 0.25 \Rightarrow \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = 0.25 \Rightarrow \frac{P(B \cap C)}{0.4} = 0.25 \Rightarrow P(B \cap C) = 0.25 \cdot 0.4 = 0.1$$

$$P(B/C) = 0.20 \Rightarrow \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = 0.20 \Rightarrow \frac{0.1}{0.2} = P(C) \Rightarrow P(C) = 0.5$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.3 \\ \text{Como } P(B) = 0.4 \\ P(C) = 0.5 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) < P(B) < P(C), \text{ el que ha tenido mayor impacto para que la}$$

nueva crema sea conocida es la cartelería luminosa.

1.3. Nos preguntan ¿Son incompatibles los sucesos $A = \text{"conocer la nueva crema por prensa escrita"}$ y $B = \text{"conocer la nueva crema por buzono"}$?

Para ello debe ser $A \cap B = \emptyset$ y para ello debería ser $P(A \cap B) = 0$.

Como $P(A \cap B) = 0.12 \neq 0$ los sucesos no son incompatibles.

2.1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Calcule la matriz inversa de A , A^{-1} .

2.1.2. Calcule la inversa de la matriz traspuesta de A , $(A^t)^{-1}$, utilizando el apartado anterior.

2.1.3. Despeje y calcule el valor de X en la siguiente ecuación matricial $AX - A^t = X$.

2.1.1. Comprobamos si la matriz A tiene determinante no nulo y por tanto existe su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 4 - 6 - 0 - 0 = -3 \neq 0$$

Al ser el determinante distinto de cero la inversa de la matriz A existe. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 7/3 & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Utilizamos que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 7/3 & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 7/3 & 1/3 \\ 2/3 & -4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

2.1.3. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX - A^t = X \Rightarrow AX - X = A^t \Rightarrow (A - I)X = A^t \Rightarrow X = (A - I)^{-1} A^t$$

Calculamos la inversa de la matriz $(A - I)$.

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A-I| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 4 - 0 - 0 - 0 = 4 \neq 0$$

$$(A-I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A-I)^t)}{|A-I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X = (A-I)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1+2 & 2-3/2 & 3-3/2-1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

2.2. Se considera el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \geq y - 4$$

$$x + y \leq 8$$

$$3x + 2y \geq -2$$

$$x - 2 \leq 2y$$

2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

2.2.2. Justifique si los puntos $P(-1,1)$ y $Q(5,1)$ pertenecen o no a la región anterior.

2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x, y) = 2x - 4y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

2.2.1. Representamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$$x = y - 4$$

$$x + y = 8$$

$$3x + 2y = -2$$

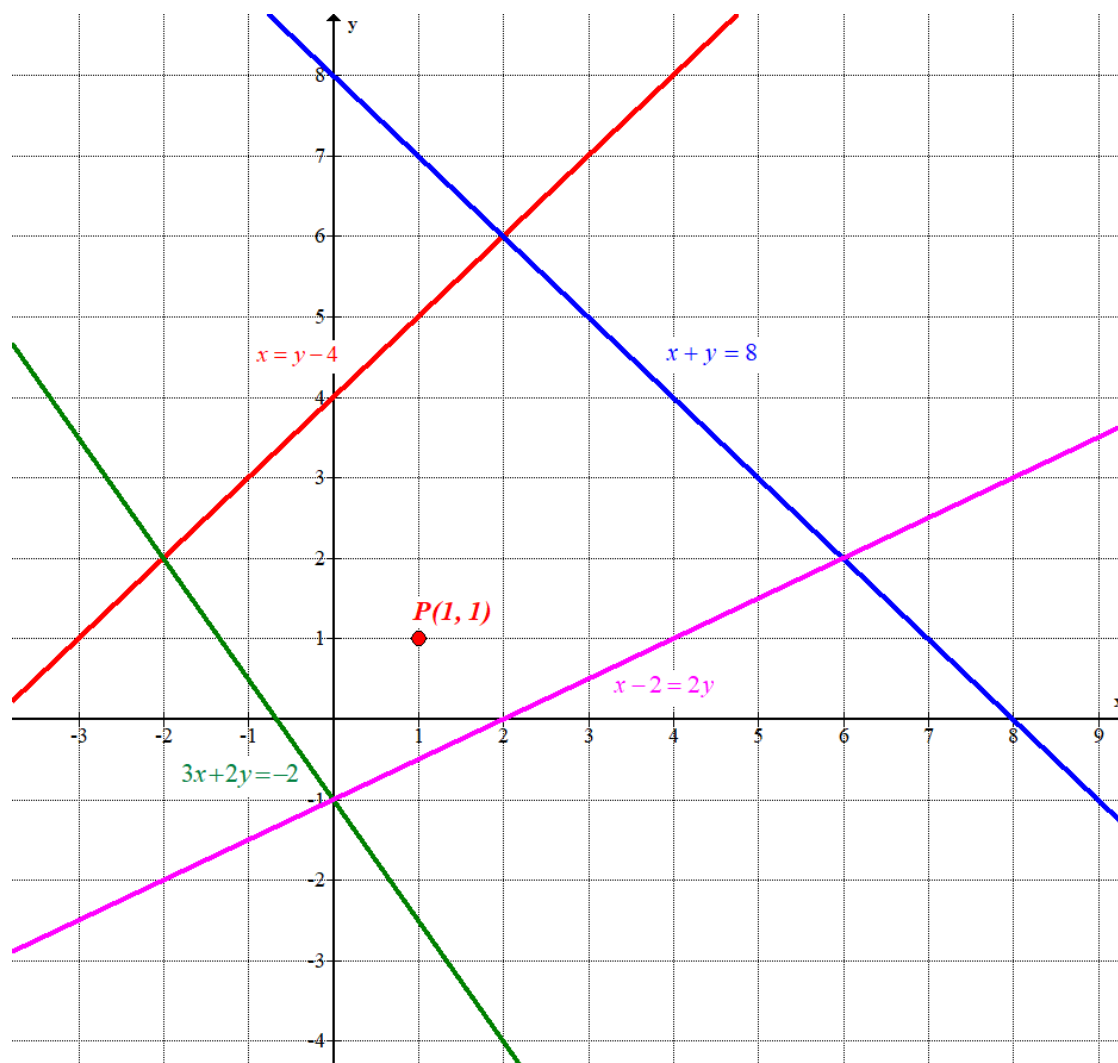
$$x - 2 = 2y$$

x	$y = x + 4$
-2	2
0	4
2	6

x	$y = 8 - x$
2	6
6	2
8	0

x	$y = \frac{-2-3x}{2}$
-2	2
0	-1
2	-4

x	$y = \frac{x-2}{2}$
0	-1
2	0
6	2



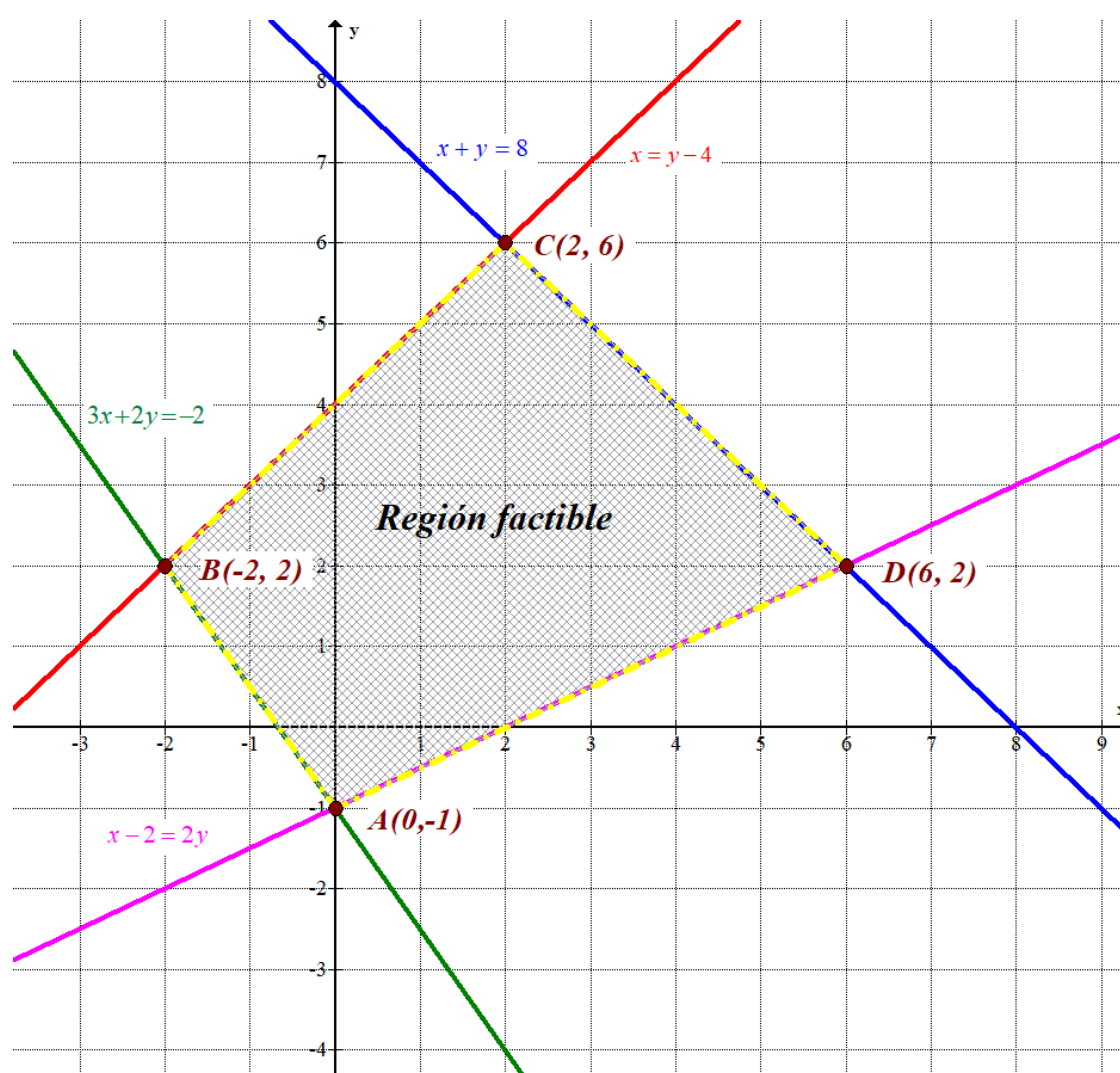
Como las inecuaciones son
$$\left. \begin{array}{l} x \geq y - 4 \\ x + y \leq 8 \\ 3x + 2y \geq -2 \\ x - 2 \leq 2y \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del plano situada}$$

por debajo de las rectas azul y roja y por encima de las rectas verde y rosa.

Comprobamos que el punto P(1, 1) perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

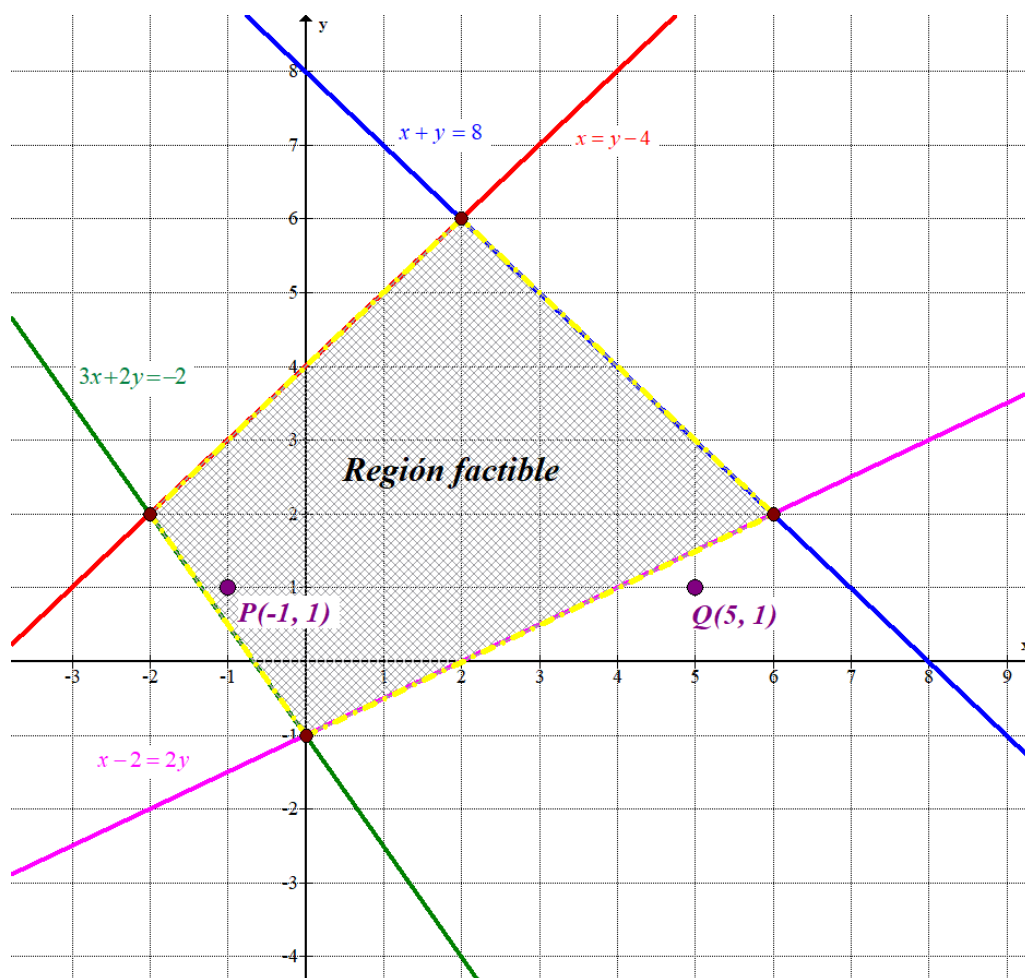
$$\left. \begin{array}{l} 1 \geq 1 - 4 \\ 1 + 1 \leq 8 \\ 3 + 2 \geq -2 \\ 1 - 2 \leq 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 \geq -3 \\ 2 \leq 8 \\ 5 \geq -2 \\ -1 \leq 2 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Los vértices de la región factible son los puntos A(0, -1), B(-2, 2), C(2, 6) y D(6, 2).

2.2.2. Colocamos los puntos P y Q en el dibujo superior y comprobamos si pertenecen a la región factible o no.



Se observa que el punto $P(-1, 1)$ si pertenece y el punto $Q(5, 1)$ está situado fuera de la región factible.

2.2.3. Valoramos la función $f(x, y) = 2x - 4y$ en cada uno de los vértices en busca de los valores máximo y mínimo.

$$A(0, -1) \rightarrow f(0, -1) = 2 \cdot 0 - 4(-1) = 4 \text{ Máximo}$$

$$B(-2, 2) \rightarrow f(-2, 2) = 2(-2) - 4 \cdot 2 = -12$$

$$C(2, 6) \rightarrow f(2, 6) = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 6 = -20 \text{ Mínimo}$$

$$D(6, 2) \rightarrow f(6, 2) = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 2 = 4 \text{ Máximo}$$

El valor mínimo es -20 y se alcanza en el punto $C(2, 6)$.

El valor máximo es 4 y se alcanza en los punto $A(0, -1)$ y en $D(6, 2)$. Por lo que el valor máximo se alcanza también en cualquier punto del segmento $\overline{AD}$. Además de los puntos A y D se alcanza en infinitos puntos, por ejemplo, en $(2, 0)$, $(4, 1)$, ...etc.

3.1. Dada la siguiente función

$$B(t) = (4-t)(t-1)^2, \quad 0 \leq t \leq 4.$$

3.1.1. Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen.**3.1.2.** Estudie sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.**3.1.3.** Represente la gráfica de la función $B(t)$.**3.1.1.** Buscamos los valores que anulan la derivada de la función (puntos críticos).

$$\begin{aligned} B(t) &= (4-t)(t-1)^2 \Rightarrow B'(t) = (-1)(t-1)^2 + (4-t)2(t-1) = \\ &= -(t^2 + 1 - 2t) + 2(4t - 4 - t^2 + t) = -t^2 - 1 + 2t + 8t - 8 - 2t^2 + 2t = -3t^2 + 12t - 9 \end{aligned}$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 12t - 9 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=t} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=t} \end{cases}$$

Hemos encontrado dos puntos críticos que pertenecen al intervalo de definición de la función. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $[0,1)$ consideramos $t = 0.5$ y la derivada vale
 $B'(0.5) = -3 \cdot 0.5^2 + 12 \cdot 0.5 - 9 = -3.75 < 0$. La función decrece en $[0,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ consideramos $t = 2$ y la derivada vale
 $B'(2) = -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 9 = 3 > 0$. La función crece en $(1,3)$.
- En el intervalo $(3,4]$ consideramos $t = 3.5$ y la derivada vale
 $B'(3.5) = -3 \cdot 3.5^2 + 12 \cdot 3.5 - 9 = -3.75 < 0$. La función decrece en $(3,4]$.

La función decrece en $[0,1) \cup (3,4]$ y crece en $(1,3)$.

La función tiene un mínimo en $t = 1$ y un máximo relativo en $t = 3$.

Como $B(1) = (4-1)(1-1)^2 = 0$ las coordenadas del mínimo relativo son $(1, 0)$.

Como $B(3) = (4-3)(3-1)^2 = 4$ las coordenadas del máximo relativo son $(3, 4)$.

3.1.2. Buscamos los candidatos a puntos de inflexión como los valores que anulan la segunda derivada.

$$B'(t) = -3t^2 + 12t - 9 \Rightarrow B''(t) = -6t + 12$$

$$B''(t) = 0 \Rightarrow -6t + 12 = 0 \Rightarrow 6t = 12 \Rightarrow \boxed{t = 2}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de $t = 2$.

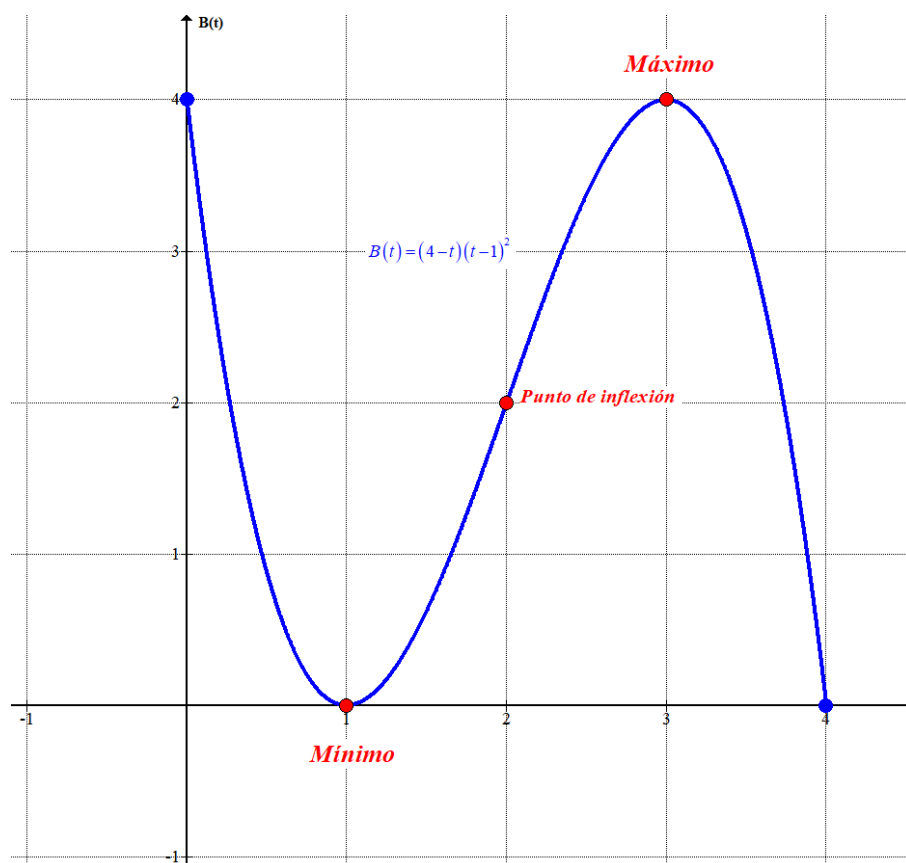
- En el intervalo $[0, 2)$ consideramos $t = 1$ y la segunda derivada vale $B''(1) = -6 \cdot 1 + 12 = 6 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $[0, 2)$.
- En el intervalo $(2, 4]$ consideramos $t = 3$ y la segunda derivada vale $B''(3) = -6 \cdot 3 + 12 = -6 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(2, 4]$.

La función presenta un punto de inflexión en $t = 2$.

Como $B(2) = (4-2)(2-1)^2 = 2$ las coordenadas del punto de inflexión son $(2, 2)$.

3.1.3. Con los datos obtenidos y completando una tabla de valores dibujamos la gráfica de la función.

t	$B(t) = (4-t)(t-1)^2$
0	4
1	0
2	2
3	4
4	0



3.2. Dada la función $f(x) = ax^2 + bx - 3$, siendo a, b números reales.

3.2.1. Calcule a y b sabiendo que dicha función pasa por el punto $(4, 5)$ y tiene un mínimo en $x = 1$.

3.2.2. Para $a = 1$ y $b = -2$, calcule el área limitada por $f(x)$ y la recta $y = x - 3$.

3.2.1. Si la función pasa por el punto $(4, 5)$ se cumple que $f(4) = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx - 3 \\ f(4) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 = a \cdot 4^2 + 4b - 3 \Rightarrow 16a + 4b = 8 \Rightarrow 4a + b = 2 \Rightarrow \boxed{b = 2 - 4a}$$

La función queda $f(x) = ax^2 + (2 - 4a)x - 3$.

Si la función tiene un mínimo en $x = 1$ entonces $f'(1) = 0$ y $f''(1) > 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + (2 - 4a)x - 3 \Rightarrow f'(x) = 2ax + 2 - 4a \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2a + 2 - 4a \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Obtenemos el valor de b siendo $a = 1 \rightarrow b = 2 - 4 \cdot 1 = -2$.

La función queda $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Comprobamos que la segunda derivada es positiva para $x = 1$.

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f''(x) = 2 \Rightarrow f''(1) = 2 > 0$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = -2$.

3.2.2. Para $a = 1$ y $b = -2$ la función queda $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Hallamos los puntos de corte de la parábola y la recta.

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 3 \\ f(x) = x^2 - 2x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow$$

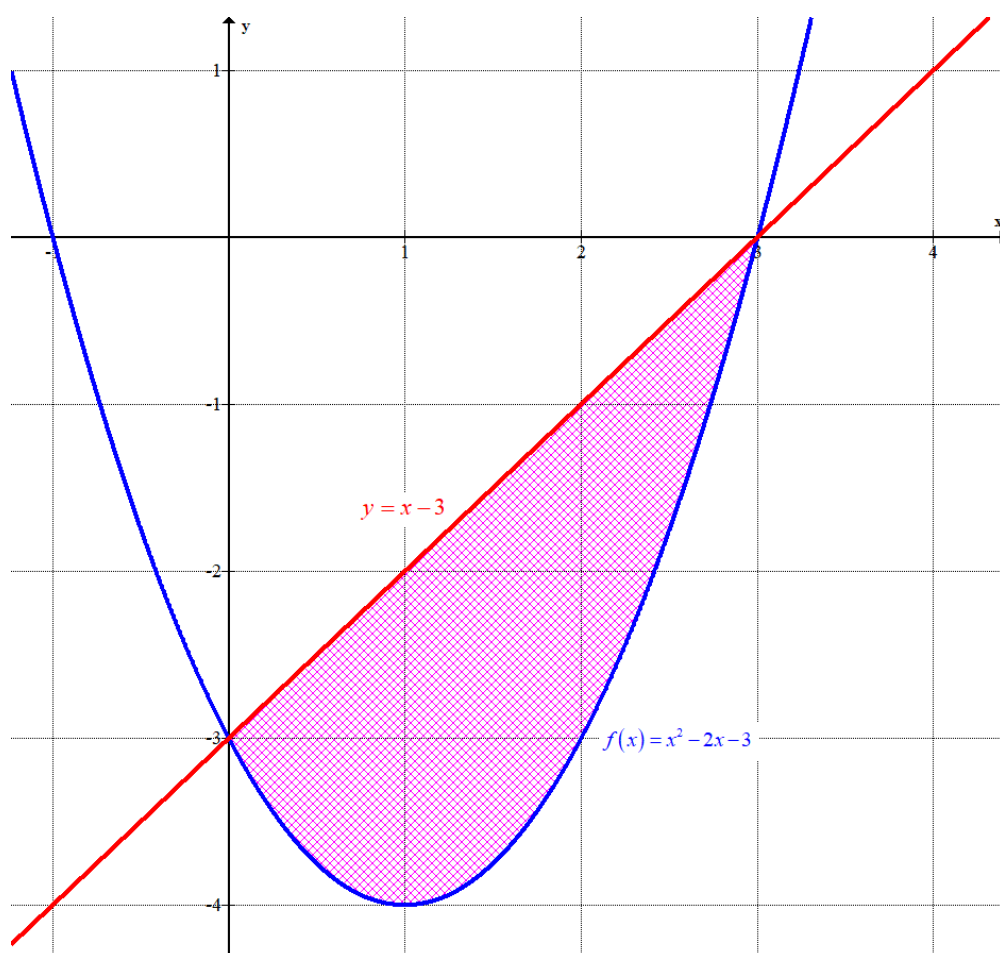
$$\Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3} \end{array} \right.$$

El área que deseamos calcular es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 3 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_0^3 x^2 - 2x - 3 - (x - 3) dx = \int_0^3 x^2 - 2x - 3 - x + 3 dx = \int_0^3 x^2 - 3x dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \left[\frac{3^3}{3} - 3 \frac{3^2}{2} \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 3 \frac{0^2}{2} \right] = 9 - \frac{27}{2} = \frac{-9}{2} = -4.5$$

El área limitada por $f(x)$ y la recta $y = x - 3$ tiene un valor de 4.5 unidades cuadradas.



4.1. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A) = 0.40, P(A \cap B) = 0.21 \text{ y } P(A/B) = 0.60.$$

4.1.1. Calcule $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ y $P(\bar{B}/A)$.

4.1.2. Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

4.1.1. Determinamos el valor de $P(B)$.

$$P(A/B) = 0.60 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.6 \Rightarrow \frac{0.21}{P(B)} = 0.6 \Rightarrow P(B) = \frac{0.21}{0.6} = 0.35$$

Hallamos $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.40 + 0.35 - 0.21 = 0.54$$

Hallamos $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ usando una de las leyes de Morgan.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.54 = 0.46$$

Hallamos $P(\bar{B}/A)$ utilizando el teorema de Bayes.

$$P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.40 - 0.21}{0.40} = \frac{0.19}{0.40} = 0.475$$

4.1.2. Para que dos sucesos sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.21 \\ P(A)P(B) = 0.4 \cdot 0.35 = 0.14 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.21 \neq 0.14 = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

4.2. Una encuesta realizada a 100 individuos de una población revela que 80 de ellos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

4.2.1. Calcule un intervalo con un 95% de confianza para la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

4.2.2. Si se sabe que 8 de cada 10 individuos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica y se toma una muestra de 100 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica sea superior al 87%?

4.2.1. Tamaño de la muestra = $n = 100$. La proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica vale $pr = \frac{80}{100} = 0.8$.

Con un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803

Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}} = 0.0784$$

El intervalo de confianza es:

$$(pr - Error, pr + Error) = (0.8 - 0.0784, 0.8 + 0.0784) = (0.7216, 0.8784)$$

4.2.2. La distribución de las proporciones sigue una ley normal con media $\mu = pr = \frac{8}{10} = 0.8$ y

con desviación típica $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}} = 0.04$. $p = N(0.8, 0.04)$

Nos piden calcular $P(p > 0.87)$.

$$P(p > 0.87) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{0.87 - 0.8}{0.04}\right) = P(Z > 1.75) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.75) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9599 = \boxed{0.0401}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8769
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9684

La probabilidad de que la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica sea superior al 87% es de 0.0401.