

EJERCICIOS DE COMBINATORIA RESUELTOS

1. Un alumno tiene que elegir 7 de las 10 preguntas de las que consta un examen. ¿De cuántas formas podría hacerlo? ¿Y si las 4 primeras son obligatorias?

Si el alumno tuviera que escoger 7 preguntas de las 10 posibles, se trata de 10 elementos tomados de 7 en 7 en los que no importa el orden.

Combinación sin repetición.

$C_{10,7} = 120$ posibles exámenes.

En cambio, si las cuatro primeras son obligatorias, ya solo nos quedan 6 posibles preguntas de las cuales podemos escoger 3 más, sin importarnos el orden.

Combinación sin repetición.

$C_{6,3} = 20$ posibles exámenes.

2. Una línea de ferrocarriles tiene 25 estaciones. ¿Cuántos billetes habrá que imprimir si cada billete lleva impresas las estaciones de origen y destino?

Suponiendo que desde cada estación se puede ir a cualquiera de las demás pero no tiene sentido volver a la estación de partida, que aparecen dos estaciones en cada billete y que el orden en el que aparecen escritas importa ya que refleja el sentido:

Variación sin repetición.

$V_{25,2} = 600$ billetes diferentes.

3. En un hospital se utilizan 5 símbolos para clasificar las historias clínicas. Los dos primeros símbolos son letras y los tres últimos dígitos. ¿Cuántas historias clínicas podrían hacerse en los casos en que se puedan repetir letras y en caso de que no?

- *En el caso de que no se admitiera repetición, por un lado, las dos letras serían escogidas de entre las 27 letras del abecedario, y su orden sería distintivo. Y por otro lado los tres números estarían escogidos entre las 10 cifras posibles del 0-9, y el orden también sería importante.*

Variación sin repetición de 27 letras cogidas de 2 en 2 por las variaciones sin repetición de 10 cifras tomadas de 3 en 3.

$$V_{27,2} \cdot V_{10,3} = 505440$$

Portanto 505440 historias clínicas.

- *En cambio si se admite repetición, tanto para letras como para números seguiría importando el orden:*

Variación con repetición de 27 letras cogidas de 2 en 2 por variaciones con repetición de 10 cifras tomadas de 3 en 3.

$$VR_{27,2} \cdot VR_{10,3} = 792000$$

792000 historias clínicas.

4. Calcula el número de diagonales que tienen un cuadrado y un hexágono.

Las diagonales de un cuadrado son las líneas que unen dos vértices, a excepción de las líneas que unen dos vértices consecutivos, que son 4, los lados. No importa el orden, ya que es la misma diagonal la que une vértice1-vértice3 que la que une vértice3-vértice1. Y no existe repetición ya que un vértice no puede unirse consigo mismo.

Combinación sin repetición de 4 vértices tomados de 2 en 2 menos los 4 lados.

$$C_{4,2} - 4 = 2 \text{ diagonales tiene un cuadrado.}$$

En el caso del hexágono es exactamente el mismo razonamiento, solo cambia el número de vértices y el número de lados.

Combinación sin repetición de 6 vértices tomados de 2 en 2 menos los 6 lados.

$$C_{6,2} - 6 = 9 \text{ diagonales tiene un hexágono.}$$

5. De cuántas formas se pueden sentar en una fila 5 hombres y 4 mujeres de manera que no aparezcan nunca juntos ni dos hombres ni dos mujeres.

Considerando que esta fila estaría formada por 9 individuos, si consideráramos a todos los hombres iguales y todas las mujeres iguales:

- Hombres en las posiciones pares y mujeres en las impares

M H M H M H M  No es posible

- Hombres en las posiciones impares y mujeres en las pares.

H M H M H M H M H La única manera de que no coincidan

Así, distinguiendo entre hombres y mujeres: Las 4 mujeres podrán colocarse en 4 posibles posiciones, y los 5 hombres en 5 posibles posiciones.

Permutación sin repetición de 4 elementos por Permutación sin repetición de 5 elementos.

$$P_4 \cdot P_5 = 2880$$

2880 formas de colocarse.

6. Sin considerar el año de nacimiento, calcula el número de fechas de cumpleaños que pueden darse en un grupo de 10 amigos.

Hay 366 días, entre los cuales se encuentran los 10 cumpleaños. Importa el orden ya que hace referencia a cada amigo, y se puede dar el caso de que dos de ellos cumplan años el mismo día, así que hay repetición.

Variación con repetición de 366 elementos tomados de 10 en 10.

$$VR_{366, 10} = 4.3133 \cdot 10^{25} \text{ posibles cumpleaños.}$$

7. Calcula las formas distintas en que pueden colocarse en una estantería 4 libros de matemáticas, 6 de física y 2 de química teniendo en cuenta:

- a) Los libros de cada materia han de estar juntos
b) Sólo los de matemáticas han de estar juntos

- a) Considerando en primer lugar los libros de la misma materia como un solo bloque, habrá tres bloques que tienen 3 posibles posiciones y en los que importa el orden. Pero profundizando, los libros de la misma materia no son idénticos entre ellos, por esto habrá posibles reordenaciones dentro de cada materia: entre los 4 libros de matemáticas habrá 4 posibles posiciones para cada libro, entre los 6 de física habrá 6 posiciones distintas para cada libro y entre los 2 de química, 2 posiciones para cada libro.

$$P_3 \cdot P_4 \cdot P_6 \cdot P_2 = 207360$$

207360 formas de colocar los libros.

- b) Considerando ahora que tenemos que colocar un bloque de matemáticas (podemos verlo como un "libro gordo") y 8 libros más, y que el bloque de matemáticas hay 3 libros con P_3 formas distintas de "pegarlos"

$$P_9 \cdot P_3 = 2177280.$$

2177280 formas de colocar los libros.

8. En una clase de 10 alumnos van a distribuirse 3 premios diferentes. Indica de cuántos modos puede hacerse teniendo en cuenta que: una persona puede acaparar todos los premios en los casos:

- a) Una persona puede acaparar varios premios.
b) Una persona sólo puede tener un premio

- a) De los 10 individuos, 1, 2 ó 3 de ellos van a recibir 3 premios distintos, por lo que el orden sí importa, pero no intervienen todos los elementos y cada uno de ellos puede recibir más de un premio.

Veamos algunas agrupaciones y su interpretación

1º premio	2º premio	3º premio	Interpretación
2	2	1	El alumno 2 recibe 1º y 2º premio, 1 el 3º
3	1	3	El alumno 3 recibe 1º y 3º premio, 1 el 2º
9	9	9	El alumno 9 recibe todos los premios

Variación con repetición de 10 individuos tomados de 3 en tres

$$VR_{10,3} = 1000$$

1000 posibles repartos diferentes.

- b) En cambio, si un alumno no puede acaparar premios, las ternas anteriores no admiten repetición.

Veamos algunas agrupaciones y su interpretación

1º premio	2º premio	3º premio	Interpretación
2	3	1	El alumno 2 recibe 1º el 3 y 2º premio, 1 el 3º
3	1	2	El alumno 3 recibe 1º 1 el 2º y 2 el 3º premio
2	1	3	El alumno 2 recibe 1º, 1 el 2º y 3 el 3º premio

Variaciones sin repetición de 10 elementos tomados de 3 en 3

$$V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

720 formas distintas de repartir los premios

9. Indica el coeficiente del término de grado 1 del desarrollo de $(x + \sqrt{2})^4$

$$(x + \sqrt{2})^4 = \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 \times \sqrt{2} + \binom{4}{2} x^2 \times 2 + \binom{4}{3} x \times \sqrt{2}^3 + \binom{4}{4} 4$$

Y sabiendo que $\binom{4}{3} = 4$ y que $\sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}$, el coeficiente de x será $8\sqrt{2}$

10. En una prueba de atletismo en la que participan 8 atletas, se pueden clasificar para la final sólo 3 atletas. ¿Cuántos grupos distintos de finalistas se pueden formar?

En el ejercicio sólo interesa el grupo de finalistas y no el orden de llegada entre ellos, por tanto estamos ante un problema de combinaciones de 8 elementos tomados de 3 en 3

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = 56$$

56 grupos de finalistas diferentes.

11. Con las letras M M A A A T T E I C S , indica las distintas palabras con significado o no de 11 letras se pueden formar.

Número de palabras que se pueden formar con las letras M M A A A T T E I C S. Se trata de hallar todas las posibles reordenaciones de estas letras, utilizando los 11 elementos o letras y además importa el orden de estas. Permutación con repetición de 11 letras de las cuales una se repite 2 veces, otra 3, otra 2 y las demás 1 vez.

$$PR_{11}^{2,3,2,1,1,1,1} = \frac{11!}{2!3!2!} = 1663200$$

1663200 palabras posibles.

12. Indica el número de partidos que tendrían que jugar los equipos de una liga que tenga 5 participantes.

Si suponemos que el orden importa ya que es una liga de ida y vuelta y el orden nos indica quien juega en casa; tenemos 5 elementos de los cuales en cada partido juegan solo 2.

Estamos por tanto ante una variación sin repetición de 5 equipos tomados de 2 en 2.

$$V_{5,2} = 20$$

20 partidos jugarán.

13. Si queremos fabricar lápices bicolors de doble punta y disponemos de los colores rojo, azul, verde y negro. ¿Cuántos tipos de lápices puedo hacer?

En Primer lugar razonamos que no influye el orden (el lápiz azul rojo es el mismo que el rojo azul) y que no se pueden repetir elementos. Por tanto

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6 \text{ modelos diferentes de lápices}$$

14. Si quisiéramos construir un juego de dominó con 9 cifras. ¿Cuántas fichas tendría?

Cada ficha estará formada por la composición de dos números con posibilidad de repetirse y además no influye el orden, (la ficha 2,1 es la misma que la 1, 2). Estamos por tanto ante combinaciones con repetición de 9 elementos tomados de 2 en 2

$$CR_{9,2} = \binom{9+2-1}{2} = \binom{10}{2} = 45 \text{ fichas distintas}$$

15. ¿De cuántas formas se pueden repartir 3 polos iguales entre 6 amigos de manera que una persona pueda acaparar varios polos?

Razonamos que los amigos serían 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Al ser los polos iguales no importa el orden; es decir la terna 112 significa dos polos al primero y uno al segundo. Lo mismo significaría 121 ó 211.

Serían combinaciones con repetición de 6 elementos tomados de 3 en 3

$$CR_{6,3} = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56 \text{ formas distintas de reparto}$$

16. ¿De cuántas formas se pueden repartir 3 polos iguales entre 6 amigos de manera que una persona no pueda acaparar más de un polo?

Al ser los polos iguales, no influirá el orden en que escojamos a los amigos y al no poder acaparar más de un polo, no se pueden repetir elementos. Estamos por tanto ante combinaciones sin repetición de 6 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = 20$$

17. Se quieren repartir 3 premios iguales entre 9 personas mediante sorteo con reemplazamiento de los números 1 al 9. Esto posibilita que a una persona le puedan tocar varios premios. ¿De cuántas formas puede hacerse? ¿En cuántas de ellas alguna persona recibe más de un premio?

Al ser los premios iguales no influye el orden y al poder acaparar una persona varios premios, se podrán repetir elementos. Por tanto estamos ante combinaciones con repetición de 9 elementos tomados de 3 en 3.

$$CR_{9,3} = \binom{9+3-1}{3} = \binom{11}{3} = 165 \text{ formas distintas de reparto}$$

Para ver en cuántas de ellas alguna persona recibe más de un premio. Calculamos primero en cuántas cada una recibe un único premio y posteriormente restamos este valor al anterior.

Un único premio, se puede razonar que serían combinaciones sin repetición de 9 elementos tomados de 3 en 3 ya que no se pueden repetir elementos y que no influye el orden. Por tanto:

$$C_{9,3} = \binom{9}{3} = 84 \text{ es decir en 84 formas de reparto cada persona recibe como mucho un premio.}$$

$$CR_{9,3} - C_{9,3} = \binom{9+3-1}{3} - \binom{9}{3} = 165 - 84 = 81 \text{ formas de reparto en las que una persona recibe más de un premio}$$

18. Imagina que estás haciendo la maleta para hacer un viaje y que quieres meter en ella 3 de los 8 pantalones que tienes y 5 de las 9 camisas que tienes. ¿De cuántas formas distintas lo puedes hacer?

Para los pantalones:

No influye el orden y no se pueden repetir elementos. Por tanto: $C_{8,3} = \binom{8}{3} = 56$

Para las camisas:

No influye el orden y no se pueden repetir elementos. Por tanto: $C_{9,5} = \binom{9}{5} = 126$

Por el principio general, la composición de pantalón y camisa:

$$C_{8,3} \cdot C_{9,5} = 7056 \text{ composiciones de maletas distintas.}$$

19. Para un examen de matemáticas el profesor propone 10 problemas de los que el alumno deberá elegir 6. ¿De cuántas formas los podrás elegir?. Si entre ellos hay 2 de los que no tienes ni idea ¿reduce eso mucho tus posibilidades de selección?

Como debemos elegir 6 de entre 10 y podemos hacerlo en el orden que queramos, estamos ante combinaciones de 10 elementos tomados de 6 en 6.

$$C_{10,6} = \binom{10}{6} = 210$$

Si reducimos los problemas a 8,

$$C_{10,6} = \binom{8}{6} = 28$$

Es decir nuestras posibilidades de selección se reducen casi el 87%

20. Sé que para mi cumpleaños me vas a regalar 2 películas y 3 discos. Por ese motivo te hice una lista de 8 películas y 5 discos que me interesan. ¿Cuántos regalos distintos puedo esperar que me hagas?

Ni para las películas ni para los discos importa el orden y se entiende que no me regalarás discos o películas repetidos.

$$C_{8,2} \cdot C_{5,3} = \binom{8}{2} \cdot \binom{5}{3} = 28 \cdot 10 = 280 \text{ posibles regalos diferentes}$$

21. Las 28 fichas de un dominó se reparten entre cuatro jugadores. ¿Cuántos juegos distintos podrá tener cada jugador?

Si las 28 fichas se reparten entre los 4 jugadores, cada uno tendrá 7 fichas. No importa el orden en que reciban las fichas.

Combinación de 28 elementos tomados de 7 en 7.

$$C_{28,7} = \binom{28}{7} = 1184040$$

1184040 posibles juegos.

22. Señala 8 puntos en una circunferencia. Traza todas las cuerdas que unen cada punto con los demás. ¿Cuántas cuerdas distintas puedes trazar? ¿Cuántas diagonales tiene un octógono?

Al estar los puntos sobre una circunferencia puedo asegurar que no hay posibilidad de que más de dos estén alineados. Respecto al número total de cuerdas posibles, tenemos 8 puntos y una cuerda se forma por la unión de 2 puntos distintos, tomando puntos de 2 en 2. Y el orden en el que se unen los puntos no importa, ya que la cuerda que va del punto1-punto3 = punto3-punto1.

Combinación sin repetición de 8 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{8,2} = 28$$

28 cuerdas.

Y respecto a las diagonales del octógono, serán el conjunto de cuerdas, menos las 8 que constituyen los lados del octógono.

28-8= 20 diagonales tiene un octógono.

23. Para matricularte en un curso d especialización, tienes que elegir dos de las siguientes materias: Música, Teatro, Expresión Corporal, Comunicación, Informática y Periodismo.

a) ¿De cuántas formas puedes hacer la elección?

b) Si en secretaría te advierten que las seis asignaturas las escribas por orden de preferencia, ¿de cuántas formas las puedes escribir?

a) Suponiendo que no importa el orden sino las materias que escoges, hay 6 materias a elegir y podemos coger 2 de ellas y no se pueden repetir.

Combinación sin repetición de 6 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = 15$$

15 posibles elecciones.

c) En cambio, si es necesario que las ordenemos por orden de preferencia; como tampoco se pueden repetir materias, estaríamos ante una variación sin repetición

$$V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30$$

30 posibles ordenaciones.

24. ¿Cuántos triángulos se pueden hacer de modo que tengan los vértices en los puntos de las redes?



a) Disponemos de 4 puntos, y un triángulo se forma con 3 puntos no alineados. No importa el orden en que unamos los puntos, el triángulo resultante sería el mismo.

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$$

4 posibles triángulos.

b) En este caso disponemos de 6 puntos.

Razonando de la misma forma, combinaciones sin repetición de 6 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = 20$$

Ahora bien; debemos excluir las 2 agrupaciones de 3 puntos alineados que no formarían triángulos. En total $20 - 2 = 18$ triángulos.

c) Y por último, 9 puntos.

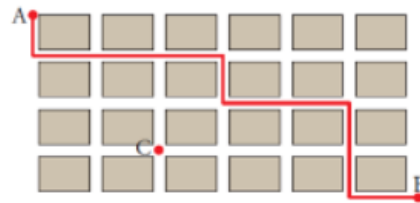
Combinaciones sin repetición de 9 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{9,3} = \binom{9}{3} = 84$$

Pero dentro de estas 84 posibles agrupaciones, debemos excluir las 8 agrupaciones de ternas alineadas, por tanto, $84 - 8 = 76$ posibles triángulos.

25. La siguiente cuadrícula representa el plano de una ciudad.

- a) Caminos mínimos para ir de A a C
- b) Caminos mínimos para ir de C a B
- c) Caminos mínimos para ir de A a B pasando por C
- d) Caminos mínimos para ir de A a B



- a) Interpretamos camino mínimo como aquellos que sean lo más cortos posibles, por tanto no está permitido retroceder a la izquierda o derecha ni arriba o abajo. Así para ir de un punto a otro tenemos que tener en cuenta calles a la derecha o izquierda hay que avanzar y cuántas calles arriba o abajo hay que tomar. De A a C, habrá que avanzar dos calles hacia la izquierda y tres calles hacia abajo, y las distintas ordenaciones de estos cinco pasos darán lugar a los distintos caminos posibles.

Permutación con repetición de 5 pasos de los cuales se repiten: hacia la derecha 2 veces y hacia abajo 3 veces.

$$PR_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$$

10 posibles caminos.

- b) Para ir de C a B, hay 4 calles hacia la derecha y 1 hacia abajo.

$$PR_5^{4,1} = \frac{5!}{4!1!} = \binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$$

5 posibles caminos.

- c) Para ir de A a B, pasando por C, habrá que considerar primero todos los posibles caminos de A a C y después, de C a B.

$$PR_5^{3,2} \cdot PR_5^{4,1} = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{5!}{4!1!} = \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} = 10 \cdot 5 = 50$$

50 posibles caminos.

- d) Para ir de A a B, habrá que cruzar calles 6 hacia la derecha y 4 hacia abajo.

$$PR_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6!4!} = \binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210$$

210 posibles caminos.

26. Una secretaria ha escrito 10 cartas distintas dirigidas a 10 personas. También escribe las direcciones en 10 sobres. Si mete al azar las cartas en los sobres:

a) ¿De cuántas formas posibles se pueden meter las cartas en los sobres?

b) ¿En cuántos casos la carta de señor Pérez estará en su sobre correspondiente?

a) Las diferentes agrupaciones carta-sobre se diferencian por el orden en que se meten las cartas en los sobres. Intervienen los 10 elementos.
Permutación de 10 elementos.

$$P_{10} = 10! = 3628800$$

3628800 formas posibles.

b) De todos los casos, el número de casos en los que la carta del señor Pérez estará en su sobre, será:

Permutación de 9 elementos.

$$P_9 = 9! = 362880$$

$P_4 = 362800$ posibilidades.

27. Calcula cuántos productos de tres factores distintos podemos formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

La multiplicación es conmutativa, por tanto el orden de los factores no altera el producto. Tenemos en total 7 cifras, que tomamos de 3 en 3.

Combinación sin repetición de 7 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = 35$$

35 productos diferentes.

28. Calcula cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. ¿Cuánto sumarían todos?

Podríamos dividir el ejercicio en dos apartados:

a) Cantidad de números que podríamos formar.

Influye el orden y no intervienen los 7 elementos, pero sí que se pueden repetir.

Variación con repetición de 7 elementos tomados de 4 en 4.

$$VR_{7,4} = 7^4 = 2401$$

2401 números distintos.

b) ¿Cuánto suman esos 2401 números?

Podemos estudiar cuanto suman las unidades, decenas, centenas y millares

Unidades.

Contamos cuántos números de los anteriores acaban en 1, cuántos acaban en 2 y así sucesivamente hasta cuántos acaban en 7. Nos damos cuenta de que siempre hay los mismos.

$$\text{Acaban en 1; } VR_{7,3} = 343$$

$$\text{Acaban en 2; } VR_{7,3} = 343$$

....

$$\text{Acaban en 7; } VR_{7,3} = 343$$

Por tanto la suma de la cifra de las unidades de los 2401 números contruidos sería:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \cdot 343$$

Pero es que el razonamiento de lo que suman las cifras de las decenas, centenas y millares es exactamente el mismo. Concluimos por tanto:

La suma de todos los números será

$$\begin{aligned} \text{SUMA} &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \cdot 343 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \cdot 10 \cdot 343 \\ &+ (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \cdot 100 \cdot 343 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \cdot 1000 \cdot 343 = \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \cdot 343 \cdot (1 + 10 + 100 + 1000) = \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \cdot 343 \cdot 1111 = 28 \cdot 343 \cdot 1111 = 10670044 \end{aligned}$$

29. Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar de manera que sean pares?



Ocupada por 2, 4, ó 6

Fijando la última cifra . Números que acaben en 2; $V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$

Números que acaben en 4; $V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$

Números que acaben en 6; $V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$

Total de números pares con todas las cifras distintas 60 números

30. Para formar un equipo de petanca se necesitan 4 jugadores y un entrenador, que se pueden seleccionar de entre 10 jugadores y 3 entrenadores. ¿Cuántos equipos distintos se podrían formar?

En estos casos lo importante son los integrantes del equipo y no el orden. Estaríamos en el caso de la elección de los 4 jugadores ante combinaciones de 10 elementos tomados de 4 en 4. Y por cada equipo podemos elegir uno de los tres entrenadores que hay.

$$3 \cdot C_{10,4} = 3 \cdot \binom{10}{4} = 3 \cdot 210 = 630$$

630 equipos diferentes

31. Un grupo de 13 amigos entre los que hay 7 chicas y 6 chicos deciden hacerse una foto colocados en fila. En la foto no pueden aparecer ni dos chicas juntas ni dos chicos juntos. ¿De cuántas formas podrán fotografiarse?

Para que no haya dos chicas juntas ni dos chicos juntos la fila debe empezar por chica y finalizar con chica según el esquema:

A O A O A O A O A O A

Formas de colocar a las chicas: $P_7 = 7! = 5040$

Por cada una de estas permutaciones los chicos se pueden colocar: $P_6 = 6! = 720$

En total portanto $P_7 \cdot P_6 = 7! \cdot 6! = 5040 \cdot 720 = 3628800$

3628800 formas diferentes de fotografiarse.

32. Se pretende pintar una bandera de tres franjas verticales. Para ello se dispone de 8 colores. Si queremos que cada franja sea de color distinto. ¿Cuántas banderas se pueden confeccionar que contengan el color verde?. ¿Y si queremos que aparezca el rojo pero no el blanco?

En ambos casos influye el orden.

Si el verde debe aparecer, puede hacerlo en las 3 franjas. Una vez fijado en una, para las otras dos puedo elegir entre 7 colores.

$$3 \cdot V_{7,2} = 3 \cdot 7 \cdot 6 = 126$$

126 banderas en las que aparece el verde

En el segundo supuesto, si queremos que aparezca el rojo, razonamos igual que antes, pero al no poder aparecer el blanco nos quedan solamente 6 colores.

$$3 \cdot V_{6,2} = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$$

90 banderas en las que aparece el rojo y no el blanco

33. En un concurso en el que se reparte un apartamento y un coche, participan 7 concursantes. Sabiendo que la misma persona no puede acaparar los dos premios. ¿de cuántas formas se pueden distribuir los premios?

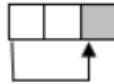
No se pueden repetir personas, los premios son diferentes y el orden importa. Por consiguiente estamos ante variaciones sin repetición de 7 elementos tomados de 2 en 2

$$V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$$

34. Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. ¿cuántos números capicúas de cuatro cifras se pueden formar? ¿Y capicúas de cinco cifras?

Un número capicúa es aquél que se lee igual en los dos sentidos

Capicúa de tres cifras

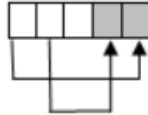


La primera cifra fija también la última.

Para la 1ª y 3ª pues, se dispone de 9 posibles cifras. Para la segunda también se dispone de 9 posibles cifras.

Número de capicúas = $9 \cdot 9 = 81$

Capicúa de cinco cifras



La primera cifra fija también la última. Y la 2ª la penúltima

Para la 1ª, 2ª y 3ª pues, se dispone de 9 posibles cifras.

Número de capicúas = $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$

35. Con las letras de la palabra JULIO. ¿cuántas palabras con o sin sentido de cinco letras se pueden formar? Si se ordenan de forma alfabética, ¿qué lugar ocuparía la palabra JULIO'?

En primer lugar el número de palabras sería $P_5 = 5! = 120$

Si se ordenan. Contamos:

Empiezan por J ____ $P_4 = 4! = 24$

De entre las que empiezan por J contamos J I ____ $P_3 = 3! = 6$

De entre las que empiezan por J contamos J L ____ $P_3 = 3! = 6$

De entre las que empiezan por J contamos J O ____ $P_3 = 3! = 6$

De entre las que empiezan por J contamos J U I ____ $P_2 = 2! = 2$

La siguiente es J U L I O

Por tanto contando las anteriores $24 + 6 + 6 + 6 + 2 = 44$ por tanto el lugar sería el 45

36. Cuántas palabras de seis letras pueden formarse con las letras de la palabra CANDIL, que empiecen y terminen en consonante?

En primer lugar contamos las formas de colocar las consonantes al principio y al final.

$V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$. Por cada una de estas disposiciones podemos elegir las otras cuatro letras mediante $P_4 = 4! = 24$

En total $V_{4,2} \cdot P_4 = 12 \cdot 24 = 288$ palabras con o sin sentido que empiecen y terminen en consonante.

37. El sistema de matriculación de vehículos combina 4 cifras y después 3 letras sin contar la ñ. ¿Cuántas matrículas distintas se pueden realizar?

Tanto a la hora de colocar las cifras como las letras, se puede observar que interviene el orden y que se pueden repetir tanto cifras como letras. Además también tienen sentido las cifras con la cifra 0 a la izquierda, (matrícula 0021 AXV, matrícula 0001 AAZ, ...)

Por tanto:

$$VR_{10,4} \cdot VR_{26,3} = 10^4 \cdot 26^3 = 175760000$$

175760000 matrículas diferentes

38. De cuántas formas pueden ordenarse 10 personas entre las que figuran María, Juan y Luis de manera que el grupo de amigos anterior aparezca siempre junto.

El problema puede resolverse pensando que unimos el grupo María, Juan y Luis y junto con las otras 7 personas los hacemos permutar.

$P_8 = 8! = 40320$. ahora bien el grupo anterior también puede unirse de $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes.

El total de ordenaciones sería

$$P_8 \cdot P_3 = 8! \cdot 3! = 40320 \cdot 6 = 241920$$

241920 ordenaciones distintas

39. Con seis pesas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 gramos. ¿Cuántas pesadas diferentes pueden hacerse utilizando solamente tres pesas?

Una vez elegidas las pesas, el orden en las que las coloquemos no variará la pesada. Por tanto estamos ante combinaciones de 6 elementos tomados de 3 en 3

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = 20$$

20 pesadas diferentes utilizando tres piezas

40. De cuántas formas diferentes pueden bajarse de un ascensor 4 personas en un edificio de 8 plantas

A	B	C	D	Interpretación
1	2	1	1	Las personas A, C y D se bajan en 1ª planta y B en la 2ª
8	1	2	8	A y D en la 8ª, B en la 1ª y C en la 2ª
7	7	7	7	Todos en la 7ª planta
...	...	...	...	

En realidad cualquier situación que se nos ocurra se puede interpretar como una variación con repetición de 8 elementos tomados de 4 en 4.

$$VR_{8,4} = 8^4 = 4096$$

41. En el lenguaje informático se entiende por byte a una agrupación de 8 dígitos formados por ceros y unos. Calcula:

- ¿Cuántos bytes diferentes se pueden conseguir con 4 ceros y 4 unos?
- ¿Cuántos empiezan por 1?
- ¿Cuántos acaban en 001

- Interviene el orden y siempre se emplean los mismos elementos 4 ceros y 4 unos. Por tanto serían permutaciones con repetición de 8 elementos donde uno se repite 4 veces y el otro otras 4.*

$$PR_8^{4,4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$$

70 bytes

- Fijando el primer lugar por un 1. $PR_7^{3,4} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$*

35 bytes comienzan por 1

- Fijando los tres últimos lugares por 001. $PR_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$*

10 bytes acaban en 001

42. En una clase de 30 alumnos se quieren elegir un comité que los represente formado por 4 de ellos. ¿De cuántas formas se podría elegir dicho comité?. ¿En cuántos de esos grupos no resultará elegida Nieves?

La elección de un comité de 4 personas implica que no importa el orden en que hayan sido elegidas. Obviamente no pueden repetirse elementos.

$$C_{30,4} = \binom{30}{4} = 27405$$

27405 comités

Buscamos todos los que se pueden formar quitando a Nieves del proceso.

$$C_{29,4} = \binom{29}{4} = 23751$$

43. Resuelve la ecuación $V_{x,4} = 20 \cdot V_{x,2}$

$$V_{x,4} = 20 \cdot V_{x,2} \Rightarrow x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) = 20 \cdot x \cdot (x-1) \Rightarrow$$

$$(x-2) \cdot (x-3) = 20 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 20 \Rightarrow$$

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2} =$$

$$x = 7$$

$$x = -2$$

La solución negativa no tiene sentido, por tanto la única solución sería $x = 7$

44. Resuelve la ecuación $P_x = 30 \cdot P_{x-2}$

$$P_x = 30 \cdot P_{x-2} \Rightarrow x! = 30 \cdot (x-2)! \Rightarrow$$

$$x \cdot (x-1) \cdot (x-2)! = 30 \cdot (x-2)! \Rightarrow$$

$$x \cdot (x-1) = 30 \Rightarrow x^2 - x - 30 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2} \Rightarrow$$

$$x = 6$$

$$x = -5$$

Descartamos la solución negativa por no tener sentido, por tanto la única solución

De la ecuación sería $x = 6$

45. Resuelve $C_{n,3} = 4 \cdot V_{n,2}$

$$C_{n,3} = 4 \cdot V_{n,2} \Rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 4 \cdot n \cdot (n-1) \Rightarrow$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{3!(n-3)!} = 4 \cdot n \cdot (n-1) \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} = 4 \cdot n \cdot (n-1) \Rightarrow$$

$$(n-2) = 4 \cdot 3! \Rightarrow n = 26$$

Solución $n = 26$

46. Calcula el desarrollo de los siguientes binomios

a) $(2x - y)^8$

b) $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$

$$\begin{aligned} a) (2x - y)^8 &= \binom{8}{0} \cdot (2x)^8 - \binom{8}{1} \cdot (2x)^7 \cdot y + \binom{8}{2} \cdot (2x)^6 \cdot y^2 - \binom{8}{3} \cdot (2x)^5 \cdot y^3 + \binom{8}{4} \cdot (2x)^4 \cdot y^4 \\ &- \binom{8}{5} \cdot (2x)^3 \cdot y^5 + \binom{8}{6} \cdot (2x)^2 \cdot y^6 - \binom{8}{7} \cdot (2x)^1 \cdot y^7 + \binom{8}{8} \cdot y^8 = \\ &256x^8 - 1024x^7 \cdot y + 1792x^6 \cdot y^2 - 1792x^5 \cdot y^3 + 1120x^4 \cdot y^4 - 448x^3 \cdot y^5 + 112x^2 \cdot y^6 - 16x \cdot y^7 + y^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \left(x + \frac{2}{x}\right)^6 &= \binom{6}{0} \cdot x^6 + \binom{6}{1} \cdot x^5 \cdot \left(\frac{2}{x}\right) + \binom{6}{2} \cdot x^4 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 + \binom{6}{3} \cdot x^3 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^3 + \binom{6}{4} \cdot x^2 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^4 + \\ &\binom{6}{5} \cdot x \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^5 + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^6 = \\ &x^6 + 12x^4 + 60x^2 + 160 + \frac{240}{x^2} + \frac{192}{x^4} + \frac{64}{x^6} \end{aligned}$$

47. Indica razonadamente si el polinomio $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{20}$ puede tener término independiente

independiente

El término independiente aparece cuando el término general del desarrollo no tenga "x". Como los términos del desarrollo presenta la forma:

$$\binom{20}{a} (3x^2)^{20-a} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^a \Rightarrow \binom{20}{a} \cdot 3^{20-a} \cdot x^{40-2a} \cdot \left(\frac{1}{x^a}\right) \Rightarrow \dots \frac{x^{40-2a}}{x^a} \Rightarrow 40 - 2a - a = 0 \Rightarrow$$

$$40 - 3a = 0 \Rightarrow a = \frac{40}{3} \text{ que no es un número entero}$$

Portanto no tiene término independiente

48. Calcula $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \dots + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}$

La suma $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \dots + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}$ corresponde al desarrollo del binomio

$$(1+1)^{10} = \binom{10}{0} \cdot 1^{10} + \binom{10}{1} \cdot 1^9 \cdot 1 + \dots + \binom{10}{9} \cdot 1 \cdot 1^9 + \binom{10}{10} \cdot 1^{10} = 2^{10} = 1024$$

49. El sistema para matricular vehículos en un determinado país consta de un primer bloque de 3 letras elegidas de entre 26 y a continuación un número de 5 cifras. Calcula:

- El número de vehículos que podría matricularse.
- ¿Cuántos vehículos tendrían alguna cifra repetida?
- ¿Cuántos vehículos tendrían en su matrícula la letra A?
- ¿Cuántos vehículos acabarían en 57?

- a) Para calcular el número total de vehículos debemos tener en cuenta que hay dos conjuntos que pueden variar: uno corresponde a un "bloque" constituido por letras y otro "bloque" formado por números. Los dos corresponden a variaciones con repetición, ya que en ellos influirá el orden de los elementos y no van a participar todos a la vez, sino que serán tomados, en el caso de las letras, de 3 en 3, y en el caso de los números, de 5 en 5.

Aplicando el principio general de recuento

$$\text{Letras : } V_{26,3} = 26^3 ; \text{ Números : } VR_{10,5} = 10^5 ;$$

$$N^{\circ} \text{ total de vehículos : } 26^3 \cdot 10^5 = 1.757.600.000$$

- b) Si realizamos la diferencia de las variaciones con repetición con las variaciones sin repetición que podemos configurar con el grupo de los números, obtendremos el número de posibilidades en las que se repetirán al menos una cifra. Teniendo en cuenta también la variación con repetición del conjunto de letras, aplicamos el principio general de recuento para calcular el número de vehículos que tendrán alguna cifra repetida.

$$(VR_{10,5} - V_{10,5}) \cdot VR_{26,3} = (10^5 - 30.240) \cdot 26^3 = 1.226.101.760$$

- c) En primer lugar calculamos cuántas matrículas no figuran la letra A, y una vez hecho esto restamos del total de matrículas para hallar el número en el que se contempla al menos una letra A. El número de matrículas que no poseen la letra A viene dado por una variación con repetición de 25 elementos (26-1, restando la letra A) tomados de 3 en 3.

$$N^{\circ} \text{ vehículos : } (VR_{26,3} \cdot VR_{10,5}) - (VR_{25,3} \cdot VR_{10,5}) = 195.100.000$$

- d) El conjunto de los números se reduce debido a la restricción de que aparezca en el final de la matrícula el número 57. El conjunto de números serán variaciones con repetición de 10 cifras tomadas de 3 en 3, que aplicando el principio general de recuento, calculamos cuántos vehículos recogen esta característica en su matrícula.

$$N^{\circ} \text{ vehículos : } VR_{26,3} \cdot VR_{10,3} = 17.576.000$$

50. ¿De cuántas formas pueden ordenarse 10 personas entre las que figuran María, Juan y Luis de manera que el grupo de amigos anterior aparezca siempre junto?

Debido a que el orden influye en cada una de las disposiciones y a que todos los elementos participan sin repetición, se trata de una permutación sin repetición. Teniendo en cuenta que María, Juan y Luis conforman un bloque que no podemos separar, la permutación será de 8 elementos (7 personas y un bloque de tres personas). Dentro de este bloque de tres personas podemos distribuirlas de 3! formas diferentes.

$$N^{\circ} \text{ formas de ordenación : } 3! \cdot 8! = 241.920$$

51. ¿Cuántas de las posibles permutaciones de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, empezarían por 3?, ¿cuántas terminarían en 67?

En el primer caso, al tratarse de permutaciones sin repetición, el hecho de que empiece por 3 nos permite permutar 6 elementos de 6! formas diferentes. En el segundo caso, al contar solamente los números acabados en 67, se restringe las permutaciones: serían de 5 elementos, que podrán ser reordenados de 5! formas diferentes.

52. Con seis pesas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 gramos. ¿Cuántas pesadas diferentes pueden hacerse?

Podemos tomar cualquier número de pesas para realizar las pesadas, sin repetir ninguna de estas. No influirá el orden en el que dispongamos las pesas. Estamos ante 6 combinaciones de 6 elementos tomados de 1 en 1, de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5 y de 6 en 6.

$$N^{\circ} \text{ pesadas: } \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 63$$

53. Cuántas palabras de diez letras puedes formar con las letras M R U I C E G A O L. Si las ordenas alfabéticamente, indica el lugar que ocuparía la palabra murciélago.

Para calcular cuántas palabras de diez letras se pueden formar con letras diferentes, basta con realizar la operación $10!$

Para realizar el segundo apartado, debemos descartar en primer lugar las permutaciones que comiencen por A, C, E, G, I, L ($6 \cdot 9!$). En segundo lugar, descartamos las que empiecen por MA, MC, ME, MG, MI, ML, MO, MR ($8 \cdot 8!$). Siguiendo el mismo procedimiento, eliminaremos MUA, MUC, MUE, MUG, MUI, MUL, MUO ($7 \cdot 7!$); MURA ($6!$); MURCA, MURCE, MURCG ($3 \cdot 5!$); MURCIA ($4!$); MURCIEA, MURCIEG ($2 \cdot 3!$).

$$(6 \cdot 9!) + (8 \cdot 8!) + (7 \cdot 7!) + 6! + (3 \cdot 5!) + 4! + (2 \cdot 3!) = 358260 \text{ permutaciones descartadas;}$$

La siguiente será la palabra MURCIELAGO, Posición: 358261

54. ¿De cuántas formas puedes meter 5 bolas iguales en tres cajas A, B, y C?

Podemos entender el problema de la siguiente forma: se asigna a cada bola igual una caja, de forma que se pueda repetir dicha asignación (que más de una bola entre en una caja). No influirá el orden del reparto, ya que son bolas iguales. Por ejemplo:

AAAAA significa las 5 bolas en la caja A

AABAA significa 4 bolas en A y 1 en B

ABAAA significa lo mismo que antes (no importa el orden)

El viceversa también sería fácil. Por ejemplo si queremos asociar una codificación a:

3 bolas en A, ninguna en B y 2 en C, nos serviría cualquiera de las siguientes.

AAACC, ACCAA, AACCA, ... en definitiva una combinación con repetición de 3 (ABC) tomada de 5 en 5 en la que la A aparece 3 veces y la C 2 veces.

Se trata de combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de 5 en 5.

$$\binom{3+5-1}{5} = 21 \text{ formas.}$$

55. Las franjas de una diana circular están numeradas del 1 al 10. Un jugador lanza tres dardos y anota la puntuación. ¿Cuántas jugadas distintas podrían producirse?

En esta situación no va a influir el orden en el que el jugador tire los dardos y anote sus puntuaciones. El jugador, al tirar, puede acertar en la misma franja en cada una de los intentos. Nos encontramos ante combinaciones con repetición de 10 elementos tomados de 3 en 3. Por tanto el número de combinaciones con repetición de 10 elementos tomados de 3 en 3 sería:

$$\binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3} = 220 \text{ jugadas (sin contar jugadas nulas).}$$

56. Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, calcula:

¿Cuántos números de cuatro cifras distintas puedes formar?, ¿cuánto suman todos esos números?

Debemos formar números de cuatro cifras distintas, por lo que no habrá repetición de elementos. Influirá el orden de disposición de los elementos y al ser números de cuatro cifras, no intervendrán todos los elementos. Nos encontramos ante variaciones sin repetición de 7 elementos tomados de 4 en 4.

$$N^{\circ} \text{ de cifras posibles: } V_{7,4} = 840$$

Para saber lo que suman todos los números debemos averiguar cuanto suman individualmente las unidades, decenas, centenas y unidades de millar. En el caso de las unidades encontramos para cada valor una variación sin repetición de 6 elementos (descontando el número que hayamos colocado en la unidad) tomados de 3 en 3:

$V_{6,3} = 120$ números acabados en 1... 120 números acabados en 7. La suma de las unidades de todos los números será:

$$\text{Suma de unidades: } (1+2+3+4+5+6+7) \cdot 120 = 3360$$

Repitiendo el proceso con decenas debemos tener en cuenta que sumarán $10n$, siendo n la suma de las unidades. En centenas, la suma será $100n$, y en unidades de millar, $1000n$. Obtenemos la expresión:

$$\text{Suma de los 840 números: } (1+2+3+4+5+6+7) \cdot 120 \cdot (1+10+100+1000) = 3.732.960$$

57. Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, calcula:

¿Cuántos números de cuatro cifras puedes formar?, ¿cuánto suman todos esos números?

Debemos formar números de cuatro cifras que pueden ser iguales o no. Influirá el orden de disposición de las cifras, y al ser números de cuatro cifras, no intervendrán todos los elementos en cada una de las disposiciones. Nos encontramos ante variaciones con repetición de 7 elementos tomados de 4 en 4.

$$N^{\circ} \text{ de cifras posibles: } VR_{7,4} = 2401$$

Para saber lo que suman todos estos números debemos averiguar cuánto suman individualmente las unidades, decenas, centenas y unidades de millar. En el caso de las unidades, encontramos para cada valor una variación con repetición de 7 elementos tomados de 3 en 3: $VR_{7,3} = 343$ números acabados en 1, 343 acabados en 2... 343 acabados en 7. La suma de las unidades de todos los números posibles será:

$$\text{Suma de las unidades: } (1+2+3+4+5+6+7) \cdot 343 = 9604$$

Si repetimos el proceso en las decenas, debemos tener en cuenta que al ser decenas sumarán $10n$, siendo n la cantidad que correspondía a la suma de las unidades. En las centenas, será $100n$, y en las unidades de millar, $1000n$. Como resultado obtenemos la expresión:

$$\text{Suma de los 2401 números: } (1+2+3+4+5+6+7) \cdot 343 \cdot (1+10+100+1000) = 10.670.044$$

58. Calcula el término de grado 16 del desarrollo de: $(2x^2 - 3)^{20}$

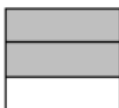
Para encontrar el término de grado 16, la "x" debe quedar elevada a dicho número. Al estar elevada inicialmente a 2, concluimos que deberá ser elevado a 8.

$$\binom{20}{12} \cdot (2x^2)^8 \cdot 3^{12} = 125.970 \cdot 256 \cdot x^{16} \cdot 531.441 = 1'7138 \cdot 10^{13} \cdot x^{16}$$

59. Se desea confeccionar banderas de tres franjas con los siete colores del arco iris, de forma que se considere que franjas contiguas del mismo color sean franjas independientes. ¿Cuántas banderas se pueden formar en los siguientes casos?

- a) Bicolor con tres franjas
- b) Tricolor
- c) De cualquier tipo

a) *Influirá el orden, ya que obtendremos, dependiendo de donde situemos cada franja, una bandera distinta. Siendo bicolor, no podremos repetir los colores, y no podremos utilizar todos los colores que componen el arco iris. Teniendo en cuenta que las franjas de dos colores iguales pueden situarse en tres posiciones distintas respecto a la franja de color distinto, podemos calcular el número de banderas mediante tres variaciones sin repetición de 7 elementos tomados de dos en dos.*



Nº banderas bicolors de 3 franjas : $3V_{7,2} = 126$

b) *Siendo tricolor, podremos utilizar tres colores de los siete que componen el arco iris. Influirá el orden de disposición de cada franja coloreada, que dependiendo de la ordenación obtendremos una bandera u otra. Siendo tricolor, no podemos repetir ningún color, debido a que solo contamos con tres franjas. Variación sin repetición de 7 elementos tomados de 3 en 3.*

Nº banderas tricolor: $V_{7,3} = 210$

c) *A parte de las posibilidades de una banderas bicolor y banderas tricolor, debemos añadir una tercera correspondiente al caso de que las banderas fueran monocolor. Por tanto, para obtener todas las combinaciones posibles basta sumar al número de banderas bicolor y tricolor que se pueden formar el número de banderas monocolor, que únicamente podremos formar siete, una por cada color del arco iris.*

Nº banderas: $3V_{7,2} + V_{7,3} + 7 = 343$