

Ejercicio 1.-

1.1 [2 puntos] Halla la derivada de las siguientes funciones y simplifica su expresión:

$$f(x) = \sqrt[3]{\cos^2(x^2)}$$

$$f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1.2 [1,5 puntos] De entre todos los rectángulos de diagonal 10 cm, calcula las dimensiones del que tiene mayor área.

Ejercicio 2.-

Dada la siguiente función $f(x) = \frac{3x^4 - 8x^3}{4}$, determina:

- a) [0,5 puntos]** Dominio y puntos de corte con los ejes.
- b) [1 punto]** Monotonía y extremos.
- c) [1 punto]** Curvatura y puntos de inflexión, si los tuviera.
- d) [1 punto]** Con la información anterior, haz un esbozo de su gráfica.

Ejercicio 1

1.1)

$$f(x) = \sqrt[3]{\cos^2 x^2} = (\cos x^2)^{2/3}$$

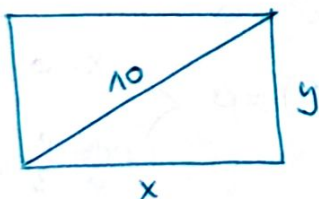
$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot (\cos x^2)^{-1/3} \cdot (-2x) \cdot \sin x^2 = - \frac{4x \cdot \sin x^2}{3 (\cos x^2)^{1/3}} = - \frac{4x \cdot \sin x^2}{3 \sqrt[3]{\cos x^2}}$$

$$f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{1-x^2} - (1-x) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-\sqrt{1-x^2} + \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{\frac{-(1-x^2) + x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1+x^2+x-x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x-1}{(1-x)(1+x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$$

1.2)



- variables: x, y
- Función a optimizar: $A(x, y) = x \cdot y$
- Relación de ligadura: $10^2 = x^2 + y^2$

Despejando de la relación de ligadura: $y = \sqrt{100 - x^2}$

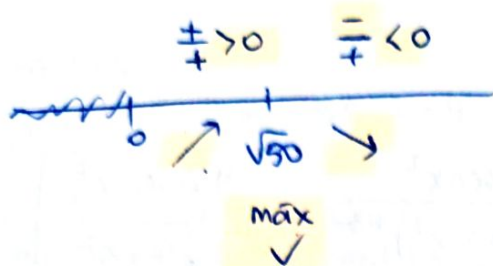
Entonces: $A(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$

Derivamos e igualamos a cero: $A'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} =$

$$= \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \quad A'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 50 \Rightarrow x = \pm \sqrt{50}. \text{ Descartamos la solución negativa.}$$

Comprobamos que se trata de un máximo.



$$\text{Si } x = \sqrt{50} \Rightarrow y = \sqrt{100 - (\sqrt{50})^2} = 50.$$

Se trata de un cuadrado de lado $\sqrt{50}$ cm

Ejercicio 2

$$f(x) = \frac{3x^4 - 8x^3}{4}$$

(a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, por tratarse de un polinomio.

PC en y : $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$

PC en x : $y=0 \Rightarrow \frac{3x^4 - 8x^3}{4} = 0 \Rightarrow 3x^4 - 8x^3 = 0$

$$x^3(3x-8)=0 \begin{cases} x=0 \Rightarrow (0,0) \\ x=\frac{8}{3} \Rightarrow (\frac{8}{3}, 0) \end{cases}$$

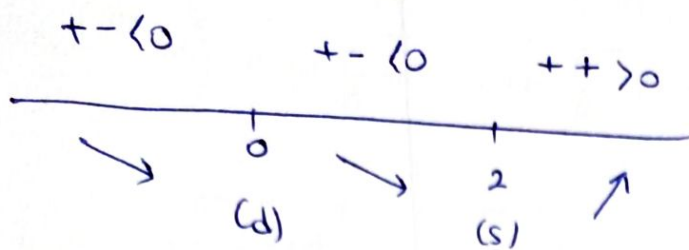
(b) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (3x^4 - 8x^3)$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot (12x^3 - 24x^2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 24x^2 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 = 0$$

$$x^2(x-2)=0 \begin{cases} x=0 \text{ (d)} \\ x=2 \text{ (s)} \end{cases}$$



$$f'(x) = \frac{1}{4}(12x^3 - 24x^2) = 3x^3 - 6x^2 = 3x^2(x-2)$$

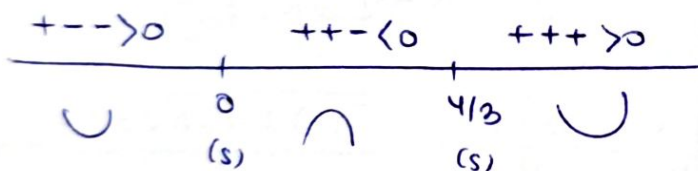
$$f(0) = 0$$

$$f(2) = \frac{1}{4}(3 \cdot 16 - 8 \cdot 8) = -4$$

f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, 2)$
 f es creciente en $(2, +\infty)$
 f tiene un mínimo relativo y absoluto en $(2, -4)$

© $f''(x) = 9x^2 - 12x$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(3x - 4) = 0 \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{matrix}$$

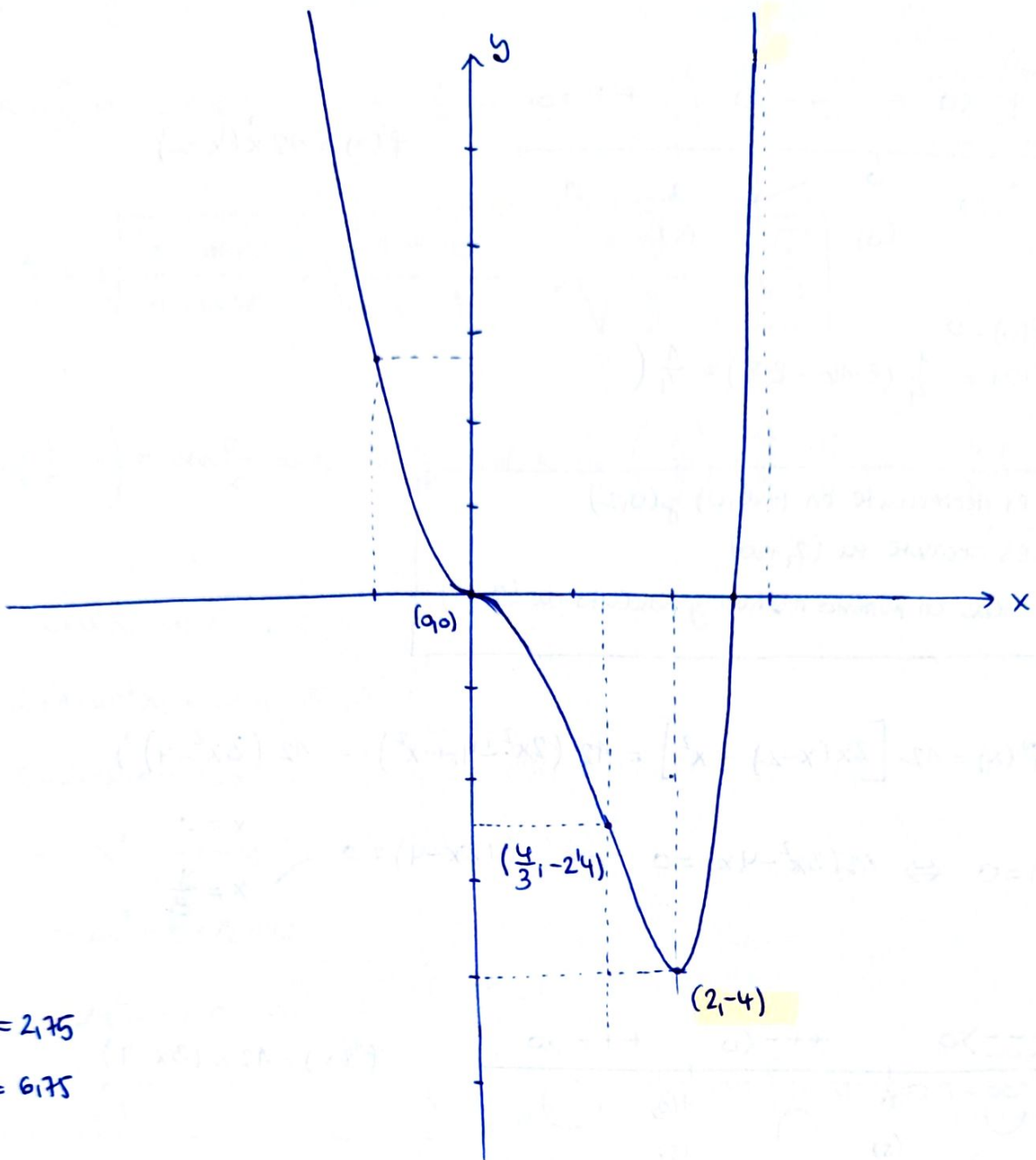


$$f''(x) = 3x(3x - 4)$$

$$f(0) = 0$$

$$f(4/3) = \frac{1}{4} \left(3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 - 8 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \right) = -2\frac{1}{4}$$

f es cóncava en $(-\infty, 0) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$
 f es cóncava en $(0, \frac{4}{3})$
 f tiene puntos de inflexión en $(0, 0)$ y $(\frac{4}{3}, -2\frac{1}{4})$



$$f(-1) = 2.75$$

$$f(3) = 6.75$$