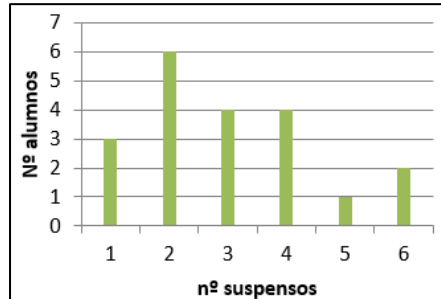


PARTE 1: ESTADÍSTICA UNIDIMENSIONAL Y BIDIMENSIONAL

1. El siguiente diagrama de barras representa el número de suspensos que han tenido los alumnos de 1º bachillerato en la asignatura de matemáticas.



- a) Calcula la tabla de frecuencias
b) Calcula las medidas de centralización.
c) Calcula las medidas de dispersión.
d) ¿Qué porcentaje de alumnos tienen menos de 4 suspensos?
2. La siguiente tabla muestra para cada alumno, la nota de matemáticas (X) y la nota de física (Y):

Matemáticas (X)	5	7	8	8	9	10	4	5	5
Física (Y)	6	6	7	8	10	10	3	3	5

- a) Calcula el coeficiente de correlación, indicando todos los cálculos necesarios e interpretando el resultado. ¿Qué puedes decir de la dependencia lineal entre ambas variables?
b) Para un alumno con un 6 en matemáticas, ¿qué nota se espera que obtenga en física? ¿Es una buena estimación?
3. De una variable bidimensional (X, Y) sabemos que:
- La recta de regresión de X sobre Y es $x = 0,6 - 0,44 \cdot y$
 - $r = -0,8$; $\sigma_y = 1,8$
- Calcula la varianza de la variable X.

PARTE 2: PROBABILIDAD

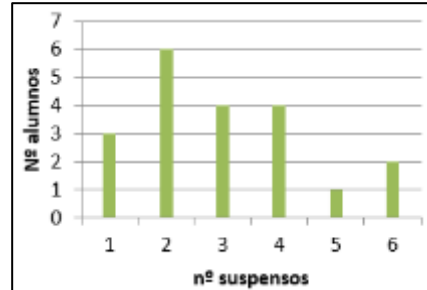
1. En una clase el 60% de los alumnos juega al fútbol o al baloncesto y el 10% practica ambos deportes. Si además hay un 60% que no juega al fútbol, cuál será la probabilidad de que, escogido un alumno al azar de la clase:
 - a) no practique ningún deporte
 - b) juegue al fútbol sabiendo que no juega al baloncesto.
 - c) practique solo uno de los dos deportes.

2. Tenemos dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 2 bolas blancas. La urna B contiene 2 bolas rojas y 4 bolas blancas. Se considera el experimento aleatorio que consiste en extraer una bola al azar de la urna A y depositarla en la urna B. Seguidamente se extrae una segunda bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:
 - a) La segunda bola extraída sea roja.
 - b) Las dos bolas extraídas sean blancas.
 - c) Si la segunda bola ha sido roja, también lo haya sido la primera.

3. La probabilidad de que un tenista obtenga un punto de saque directo es de 0,02:
 - a) Si durante un partido realiza 8 servicios, ¿cuál es la probabilidad de que consiga al menos 2 saques directos?
 - b) Si durante un torneo realiza 3000 servicios, ¿cuál es la probabilidad de que consiga más de 80 saques directos?Llamamos X a la variable "número de saques directos", se trata de una binomial $X \hookrightarrow B(8, 0'02)$. ¡

PARTE 1: ESTADÍSTICA UNIDIMENSIONAL Y BIDIMENSIONAL

1. El siguiente diagrama de barras representa el número de suspensos que han tenido los alumnos de 1º bachillerato en la asignatura de matemáticas.



- a) Calcula la tabla de frecuencias:

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	%	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
1	3	3	0,15	0,15	15%	3	3
2	6	9	0,3	0,45	30%	12	24
3	4	13	0,2	0,65	20%	12	36
4	4	17	0,2	0,85	20%	16	64
5	1	18	0,05	0,9	5%	5	25
6	2	20	0,1	1	10%	12	72
$N = 20$			1		100%	60	224

- b) Calcula las medidas de centralización.

Calculamos la media: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{N} = \frac{60}{20} = 3$ suspensos

La moda es: $Mo = 2$ porque es el valor de mayor frecuencia absoluta, el que más se repite.

Al ser un número par de datos ($N = 20$), la mediana es la media de los dos datos centrales después de ordenarlos de menor a mayor, que corresponden a los situados en las posiciones 10 y 11, que son 3 y 3 respectivamente. Por tanto, la mediana es: $Me = 3$ suspensos.

- c) Calcula las medidas de dispersión.

El rango es la diferencia entre el mayor y el menor dato, es decir: $R = 6 - 1 = 5$

La varianza se calcula de la siguiente forma:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 f_i}{N} - \bar{x}^2 = \frac{224}{20} - 3^2 = 2,2$$

La desviación típica se define como la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{2,2} = 1,48$

El coeficiente de variación es $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,493 \approx 49,3\%$

- d) ¿Qué porcentaje de alumnos tienen menos de 4 suspensos?

Menos de 4 suspensos, equivale a 1, 2 o 3 suspensos. Observando la tabla de frecuencias, podemos concluir que el porcentaje de alumnos con menos de 4 suspensos es 65%.

2. La siguiente tabla muestra para cada alumno, la nota de matemáticas (X) y la nota de física (Y):

Matemáticas (X)	5	7	8	8	9	10	4	5	5
Física (Y)	6	6	7	8	10	10	3	3	5

- a) Calcula el coeficiente de correlación, indicando todos los cálculos necesarios e interpretando el resultado. ¿Qué puedes decir de la dependencia lineal entre ambas variables?

Se trata de datos de una variable bidimensional, que relaciona las notas de matemáticas (X) y las notas de física (Y) de 9 alumnos.

El coeficiente de correlación es una medida que indica el grado de dependencia lineal que existe entre ambas variables y toma siempre un valor comprendido entre -1 y 1.

La forma de calcularlo es a partir de la covarianza y de las desviaciones típicas de las variables:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Comenzamos calculando la nota media de matemáticas:

$$\bar{x} = \frac{5 + 7 + 8 + 8 + 9 + 10 + 4 + 5 + 5}{9} = \frac{61}{9} = 6,78$$

La nota media de física será:

$$\bar{y} = \frac{6 + 6 + 7 + 8 + 10 + 10 + 3 + 3 + 5}{9} = \frac{58}{9} = 6,44$$

Calculamos la covarianza de X y de Y:

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{\sum x_i \cdot y_i}{9} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \\ &= \frac{5 \cdot 6 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 5}{9} - 6,78 \cdot 6,44 = 4,56\end{aligned}$$

Calculamos las desviaciones típicas. En primer lugar, calculamos la varianza de X y la varianza de Y:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{9} - \bar{x}^2 = \frac{25 + 49 + 64 + 64 + 81 + 100 + 16 + 25 + 25}{9} - 6,78^2 = 3,92$$

$$\text{Luego, } \sigma_x = \sqrt{3,92} = 1,98$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum y_i^2 \cdot f_i}{9} - \bar{y}^2 = \frac{36 + 36 + 49 + 64 + 100 + 100 + 9 + 9 + 25}{9} - 6,44^2 = 6,08$$

$$\text{Luego, } \sigma_y = \sqrt{6,08} = 2,47$$

Por tanto, el coeficiente de correlación es: $r = \frac{4,56}{1,98 \cdot 2,47} = 0,93 \approx 1$ Hay una dependencia lineal fuerte y positiva entre ambas variables.

- a) Para un alumno con un 6 en matemáticas, ¿qué nota se espera que obtenga en física? ¿Es una buena estimación?

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X es la siguiente:

$$y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot x + \bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot \bar{x}$$

Sustituyendo:

$$y = \frac{4,56}{3,92} \cdot x + 6,44 - \frac{4,56}{3,92} \cdot 6,78 = 1,16 \cdot x - 1,45$$

Se trata de estimar el valor de la variable Y sabiendo que X=6. Para ello, sustituimos el valor de x en la recta de regresión anterior:

$$\text{b) } y = 1,16 \cdot 6 - 1,45 = 5,51 \text{ en física}$$

A la vista del valor del coeficiente de correlación calculado anteriormente, podemos concluir que al existir una dependencia lineal fuerte entre ambas variables, se trata de una buena estimación y es bastante fiable.

3. De una variable bidimensional (X, Y) sabemos que:

- La recta de regresión de X sobre Y es $x = 0,6 - 0,44 \cdot y$

- $r = -0,8$; $\sigma_y = 1,8$

Calcula la varianza de la variable X.

La ecuación de la recta de regresión de X sobre Y es la siguiente:

$$x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} \cdot y + \bar{x} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} \cdot \bar{y}$$

Y sabemos que, la ecuación es: $x = 0,6 - 0,44 \cdot y$

Por tanto, identificando el primer coeficiente:

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = -0,44 \rightarrow \frac{\sigma_{xy}}{1,8^2} = -0,44 \rightarrow \sigma_{xy} = -1,4256$$

Por otro lado, $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$:

$$-0,8 = \frac{-1,4256}{1,8 \cdot \sigma_x} = \sigma_x \rightarrow \frac{-1,4256}{-0,8 \cdot 1,8} = 0,99 \rightarrow \sigma_x^2 = 0,9801$$

PARTE 2: PROBABILIDAD

1. En una clase el 60% de los alumnos juega al fútbol o al baloncesto y el 10% practica ambos deportes. Si además hay un 60% que no juega al fútbol, cuál será la probabilidad de que, escogido un alumno al azar de la clase:

- a) no practique ningún deporte
- b) juegue al fútbol sabiendo que no juega al baloncesto. (Sol. 0,2)
- c) practique solo uno de los dos deportes. (Sol. 0,5)

Definimos A ="el alumno juega al fútbol" ; B ="el alumno juega al baloncesto".

Sabemos que $p(A \cup B) = 0,6$; $p(A \cap B) = 0,1$; $p(\bar{A}) = 0,6 \rightarrow p(A) = 0,4$

- a) Tenemos que calcular $p(\bar{A} \cap \bar{B})$. Para ello, utilizamos la Ley de Morgan:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,6 = 0,4$$

a) Nos piden $p\left(\frac{A}{\bar{B}}\right) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})}$

$$\begin{aligned} \text{Calculamos } p(\bar{B}) \rightarrow p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \rightarrow p(B) = p(A \cup B) - p(A) + p(A \cap B) = \\ &= 0,6 - 0,4 + 0,1 = 0,3 \rightarrow p(\bar{B}) = 0,7 \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } p\left(\frac{A}{\bar{B}}\right) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{0,3}{0,7} = 3/7$$

b) $p(A \cap \bar{B}) + p(B \cap \bar{A}) = p(A) - p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B) = 0,4 - 0,1 + 0,3 - 0,1 = 0,5$

2. Tenemos dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 2 bolas blancas. La urna B contiene 2 bolas rojas y 4 bolas blancas. Se considera el experimento aleatorio que consiste en extraer una bola al azar de la urna A y depositarla en la urna B. Seguidamente se extrae una segunda bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:

- a) La segunda bola extraída sea roja.
- b) Las dos bolas extraídas sean blancas.
- c) Si la segunda bola ha sido roja, también lo haya sido la primera.

Consideramos los sucesos siguientes:

R_1 = "La bola extraída de la urna A es roja" ; B_1 = "La bola extraída de la urna A es blanca"

R_2 = "La bola extraída de la urna B es roja" ; B_2 = "La bola extraída de la urna B es blanca"

- a) Aplicando el teorema de la probabilidad total obtenemos:

$$p(R_2) = p(R_1) \cdot p(R_2|R_1) + p(B_1) \cdot p(R_2|B_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{35}$$

- b)

$$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \cdot p(B_2|B_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

- c) Aplicando el teorema de Bayes:

$$p\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \frac{p\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \cdot p(R_1)}{p(R_2)} = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{13}{35}} = \frac{9}{13}$$

3. La probabilidad de que un tenista obtenga un punto de saque directo es de 0,02
- a) Si durante un partido realiza 8 servicios, ¿cuál es la probabilidad de que consiga al menos 2 saques directos?
 - b) Si durante un torneo realiza 3000 servicios, ¿cuál es la probabilidad de que consiga más de 80 saques directos?
- a) Llamamos X a la variable "número de saques directos", se trata de una binomial $X \hookrightarrow B(8, 0'02)$. La función de probabilidad asociada a X es:

$$p(X = k) = \binom{8}{k} \cdot 0,02^k \cdot 0,98^{8-k} \quad k = 0,1, \dots, 8$$

Nos piden:

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)] = 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0'02^0 \cdot 0'98^8 + \binom{8}{1} 0,02 \cdot 0'98^7 \right] \cong 0,01034$$

b) En este caso $X \hookrightarrow B(3000, 0'02)$. Como $np(1 - p) > 10$ se puede aproximar por una normal

$N(3000 \cdot 0,02, \sqrt{3000 \cdot 0'02 \cdot 0'98})$ y operando tenemos $N(60, 7,67)$.

Por tanto:

$$\begin{aligned} p(X > 80) &= 1 - p(X \leq 80) = 1 - p(X \leq 80'5) = 1 - p\left(Z \leq \frac{80'5 - 60}{7'67}\right) = 1 - p(Z \leq 2'67) \\ &= 1 - 0'9962 = 0'0038 \end{aligned}$$