

Responde siempre razonadamente:

1. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A \cap B) = 0,3 ; p(A \cap \bar{B}) = 0,2 \text{ y } p(B) = 0,7$$

Calcula:

- $p(A)$
 - $p(A \cup B)$
 - $p(\bar{A} \cap \bar{B})$
 - $p(\bar{B}/\bar{A})$
2. Una bolsa contiene 10 caramelos de fresa y 5 de limón. Se extrae un caramelo de la bolsa y, sin devolverlo, se extrae un segundo caramelo. Calcula la probabilidad de que:
- El segundo caramelo sea de fresa.
 - Si el segundo caramelo ha sido de fresa, también lo haya sido el primero.
 - Los dos caramelos sean de limón.
3. Según un estudio de mercado en un centro comercial, la probabilidad de que un cliente compre un producto A es 0,6; la probabilidad de que compre un producto B es 0,5. Además, la probabilidad de que compre el producto B sabiendo que no ha comprado el producto A es 0,4. Seleccionado un cliente al azar:
- ¿Cuál es la probabilidad de que compre el producto B y no compre el producto A?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que compre ambos productos?
4. El 45% de la población de una ciudad son hombres:
- Elegidas 5 personas al azar, calcula:
 - La probabilidad de que 4 sean hombres.
 - La probabilidad de que como mucho cuatro sean mujeres.
 - Si la ciudad tiene 1500 habitantes, ¿cuál es la probabilidad de que haya entre 620 y 700 hombres?
5. El tiempo de espera de un viajero en una estación de tren, en minutos, sigue una distribución normal de media 8 y desviación típica 2. Sabiendo que cada mañana 450 viajeros acceden a la estación, calcula cuántos de ellos esperan más de 7 minutos y medio y menos de 9 minutos y medio.

1. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A \cap B) = 0,3; \quad p(A \cap \bar{B}) = 0,2 \quad \text{y} \quad p(B) = 0,7$$

Calcula:

- a) $p(A)$
- b) $p(A \cup B)$
- c) $p(\bar{A} \cap \bar{B})$
- d) $p(\bar{B}/\bar{A})$

- a) Utilizamos la siguiente fórmula:

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) \rightarrow p(A) = p(A \cap \bar{B}) + p(A \cap B) \rightarrow p(A) = 0,2 + 0,3 = 0,5$$

- b) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,5 + 0,7 - 0,3 = 0,9$

- c) Ley de Morgan: $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,9 = 0,1$

- d) Utilizamos la probabilidad condicionada $p(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(\bar{A})} \Leftrightarrow p(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$

2. Una bolsa contiene 10 caramelos de fresa y 5 de limón. Se extrae un caramelo de la bolsa y, sin devolverlo, se extrae un segundo caramelo. Calcula la probabilidad de que:

- a) El segundo caramelo sea de fresa.
- b) Si el segundo caramelo ha sido de fresa, también lo haya sido el primero.
- c) Los dos caramelos sean de limón.

Definimos los sucesos:

F1 = "el primer caramelo extraído es de fresa"

L1 = "el primer caramelo extraído es de limón"

F2 = "el segundo caramelo extraído es de fresa"

L2 = "el segundo caramelo extraído es de limón"

- a) Utilizamos el Teorema de la probabilidad total:

$$p(F2) = p(F1) \cdot p(F2/F1) + p(L1) \cdot p(F2/L1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{7} + \frac{5}{21} = \frac{9+5}{21} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

- b) Utilizamos el Teorema de Bayes:

$$p(F1/F2) = \frac{p(F2/F1) \cdot p(F1)}{p(F2)} = \frac{\frac{9}{14} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{14}$$

- c) Para que los dos caramelos sean de limón:

$$p(L1 \cap L2) = p(L1) \cdot p(L2/L1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$$

3. Según un estudio de mercado en un centro comercial, la probabilidad de que un cliente compre un producto A es 0,6; la probabilidad de que compre un producto B es 0,5. Además, la probabilidad de que compre el producto B sabiendo que no ha comprado el producto A es 0,4. Seleccionado un cliente al azar:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que compre el producto B y no compre el producto A?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que compre ambos productos?

Los datos recogidos del enunciado son:

A = "Comprar el producto A"; B = "Comprar el producto B"

$$p(A) = 0,6; p(B) = 0,5; p(B/\bar{A}) = 0,4$$

a) No comprar A y comprar B, corresponde al suceso $B \cap \bar{A}$. Utilizamos la probabilidad condicionada:

$$p(B/\bar{A}) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(\bar{A})} \Leftrightarrow p(\bar{A} \cap B) = p(B/\bar{A}) \cdot p(\bar{A}) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$$

b) Comprar ambos productos corresponde al suceso $A \cap B$. Utilizamos la siguiente fórmula:

$$p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) \rightarrow p(A \cap B) = p(B) - p(B \cap \bar{A}) = 0,5 - 0,16 = 0,34$$

4. El 45% de la población de una ciudad son hombres:

a) Elegidas 5 personas al azar, calcula:

i. La probabilidad de que 4 sean hombres.

ii. La probabilidad de que como mucho cuatro sean mujeres.

b) Si la ciudad tiene 1500 habitantes, ¿cuál es la probabilidad de que haya entre 620 y 700 hombres?

a) Se trata de una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros $n=5$ y $p=0,45$. Es decir:

$$X \sim B(5, 0'45) \text{ donde } X = \text{"número de hombres"}$$

Esta variable aleatoria indica la probabilidad de obtener un determinado número de hombres n un grupo de 5 personas elegidas al azar. La función de probabilidad asociada a X es:

$$p(X = k) = \binom{5}{k} \cdot 0,45^k \cdot 0,55^{5-k} \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

ii) Nos piden la probabilidad de que existan 4 hombres:

$$p(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0,45^4 \cdot 0,55 = 0,1128$$

iii) Si como mucho hay 4 mujeres, quiere decir que por lo menos hay 1 hombre. Nos piden:

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0,45^0 \cdot 0,55^5 = 0,9497$$

b) Si la ciudad tiene 1500 habitantes, se trata de una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros $n=1500$ y $p=0,45$. Como $n \cdot p = 1500 \cdot 0,45 = 675 > 5$ vamos a utilizar la aproximación de la distribución Binomial a la distribución Normal. Así:

$$X \sim B(1500, 0'45) \xrightarrow{\text{APROXIMACIÓN}} X_N \sim N(675, 19'27)$$

Nos piden calcular $p(620 \leq X \leq 700)$, utilizaremos la aproximación anterior y las correcciones de Yates:

(En lo que sigue, consideramos que $Z \sim N(0,1)$)

$$\begin{aligned} p(620 \leq X \leq 700) &= p(619,5 \leq X_N \leq 700,5) = p\left(\frac{619,5 - 675}{19,27} \leq \frac{X_N - 675}{19,27} \leq \frac{700,5 - 675}{19,27}\right) = \\ &= p(-2,88 \leq Z \leq 1,32) = p(Z \leq 1,32) - p(Z \leq -2,88) = p(Z \leq 1,32) - p(Z \geq 2,88) = \\ &= p(Z < 1,32) - (1 - p(Z < 2,88)) = p(Z < 1,32) - 1 + p(Z < 2,88) = 0,9066 - 1 + 0,9980 = 0,9046 \end{aligned}$$

5. El tiempo de espera de un viajero en una estación de tren, en minutos, sigue una distribución normal de media 8 y desviación típica 2. Sabiendo que cada mañana 450 viajeros acceden a la estación, calcula cuántos de ellos esperan más de 7 minutos y medio y menos de 9 minutos y medio.

Se trata de una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 8 y desviación típica 2.

$$X \sim N(8,2) \quad X = \text{"tiempo medio de espera"}$$

$$\begin{aligned} p(7,5 < X < 9,5) &= p\left(\frac{7,5 - 8}{2} < \frac{X - 8}{2} < \frac{9,5 - 8}{2}\right) = p(-0,25 < Z < 0,75) = \\ &= p(Z < 0,75) - p(Z < -0,25) = p(Z < 0,75) - 1 + p(Z < 0,25) = 0,7734 - 1 + 0,5987 = 0,3721 \end{aligned}$$

Como cada mañana van a la estación 450 viajeros, esperan entre 7,5 minutos y 9,5 minutos:

$$450 \cdot 0,3721 = 167,4 \simeq 167 \text{ aproximadamente.}$$