

Responde siempre razonadamente. Redondea los resultados con 4 decimales:

1. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A \cap B) = 0,1; \quad p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6 \quad \text{y} \quad p(A/B) = 0,5$$

Calcula:

- a) $p(B)$
 - b) $p(A \cup B)$
 - c) $p(A)$
 - d) $p(\bar{A} \cup \bar{B})$
2. Una urna contiene 5 caramelos de fresa y 10 de menta. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por otros 2 del sabor contrario. A continuación, se vuelve a extraer un segundo caramelo de la urna. Calcula la probabilidad de que:
- a) El segundo caramelo sea de fresa.
 - b) Si el segundo caramelo ha sido de fresa, entonces el primero haya sido de menta.
 - c) Los dos caramelos extraídos sean del mismo sabor.
3. Se consideran dos actividades de ocio: A = "ir al cine" y B = "visitar museos". En una ciudad, la probabilidad de que un adulto realice la actividad A es 0,46; la probabilidad de que realice B es 0,33 y la probabilidad de que realice ambas es 0,15. Seleccionado un adulto al azar:
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que no realice ninguna de las dos actividades anteriores?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que realice sólo una de las dos actividades?
4. El 30% de las piezas fabricadas por una empresa son defectuosas.
- a) Elegidas 5 piezas al azar, calcula:
 - i. La probabilidad de que 2 piezas sean defectuosas.
 - ii. La probabilidad de que 2 o más piezas sean defectuosas.
 - b) En un pedido de 200 piezas, ¿cuál es la probabilidad de que haya entre 50 y 70 piezas defectuosas?
5. La temperatura media en una ciudad en el mes de marzo, en grados centígrados, sigue una distribución normal de media 15 y desviación típica 3. Sabiendo que el mes de marzo tiene 31 días, calcula:
- a) ¿cuántos días hay una temperatura superior a 18 grados?
 - b) Calcula el intervalo simétrico centrado en la media que contiene el 75% de las temperaturas registradas en marzo.

1. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A \cap B) = 0,1; \quad p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6 \quad \text{y} \quad p(A/B) = 0,5$$

Calcula:

- a) $p(B)$
- b) $p(A \cup B)$
- c) $p(A)$
- d) $p(\bar{A} \cup \bar{B})$

- a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Leftrightarrow p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A/B)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

$$b) \quad p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$c) \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Leftrightarrow p(A) = p(A \cup B) + p(A \cap B) - p(B) = 0,4 + 0,1 - 0,2 = 0,3$$

$$d) \quad p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$$

2. Una urna contiene 5 caramelos de fresa y 10 de menta. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por otros 2 del sabor contrario. A continuación, se vuelve a extraer un segundo caramelo de la urna. Calcula la probabilidad de que:

- a) El segundo caramelo sea de fresa.
- b) Si el segundo caramelo ha sido de fresa, entonces el primero haya sido de menta.
- c) Los dos caramelos extraídos sean del mismo sabor.

Definimos los sucesos:

F1 = "el primer caramelo extraído es de fresa"

M1 = "el primer caramelo extraído es de menta"

F2 = "el segundo caramelo extraído es de fresa"

M2 = "el segundo caramelo extraído es de menta"

- a) Utilizamos el Teorema de la probabilidad total:

$$p(F2) = p(F1) \cdot p(F2/F1) + p(M1) \cdot p(F2/M1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{16} = \frac{3}{8}$$

- b) Utilizamos el Teorema de Bayes:

$$p(M1/F2) = \frac{p(F2/M1) \cdot p(M1)}{p(F2)} = \frac{\frac{7}{16} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{3}{8}} = \frac{\frac{7}{24}}{\frac{3}{8}} = \frac{7}{9}$$

- c) Para que los dos caramelos sean del mismo sabor, tienen que ser ambos de fresa o ambos de menta.

$$p((F1 \cap F2) \cup (M1 \cap M2)) = p(F1 \cap F2) + p(M1 \cap M2) = p(F1) \cdot p(F2/F1) + p(M1) \cdot p(M2/M1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{11}{24}$$

3. Se consideran dos actividades de ocio: A = "ir al cine" y B = "visitar museos". En una ciudad, la probabilidad de que un adulto realice la actividad A es 0,46; la probabilidad de que realice B es 0,33 y la probabilidad de que realice ambas es 0,15. Seleccionado un adulto al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no realice ninguna de las dos actividades anteriores?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que realice sólo una de las dos actividades?

Los datos recogidos del enunciado son: $p(A) = 0,46$; $p(B) = 0,33$; $p(A \cap B) = 0,15$

a) No realizar ninguna de las dos actividades, corresponde al suceso $\bar{A} \cap \bar{B}$:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$$

$$\text{Calculamos } p(A \cup B): \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,46 + 0,33 - 0,15 = 0,64$$

$$\text{Por tanto: } p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,64 = 0,36$$

b) Realizar sólo una de las dos actividades, se traduce en realizar A y no realizar B, o en realizar B y no realizar A. Es decir:

$$\begin{aligned} p((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) &= p(A \cap \bar{B}) + p(B \cap \bar{A}) = p(A) - p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= p(A) + p(B) - 2 \cdot p(A \cap B) = 0,46 + 0,33 - 2 \cdot 0,15 = 0,49 \end{aligned}$$

4. El 30% de las piezas fabricadas por una empresa son defectuosas.

a) Elegidas 5 piezas al azar, calcula:

i. La probabilidad de que 2 piezas sean defectuosas.

ii. La probabilidad de que 2 o más piezas sean defectuosas.

b) En un pedido de 200 piezas, ¿cuál es la probabilidad de que haya entre 50 y 70 piezas defectuosas?

a) Se trata de una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros $n=5$ y $p=0,3$. Es decir:

$$X \sim B(5, 0'3)$$

Esta variable aleatoria indica la probabilidad de obtener un determinado número de piezas defectuosas de entre las 5 fabricadas. La función de probabilidad asociada a X es:

$$p(X = k) = \binom{5}{k} \cdot 0,3^k \cdot 0,7^{5-k} \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

Nos piden la probabilidad de obtener 2 piezas defectuosas:

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^3 = 0,3087$$

b) Si se fabrican 200 piezas, se trata de una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros $n=200$ y $p=0,3$. Como $n \cdot p = 200 \cdot 0,3 = 60 > 5$ vamos a utilizar la aproximación de la distribución Binomial a la distribución Normal. Así:

$$X \sim B(200, 0'3) \xrightarrow{\text{APROXIMACIÓN}} X_N \sim N(60, 6'48)$$

Nos piden calcular $p(50 < X < 70)$, utilizaremos la aproximación anterior y las correcciones de Yates:

(En lo que sigue, consideramos que $Z \sim N(0,1)$)

$$\begin{aligned} p(50 < X < 70) &= p(50 + 0,5 < X_N < 70 - 0,5) = p(50,5 < X_N < 69,5) = p\left(\frac{50,5 - 60}{6,48} < Z < \frac{69,5 - 60}{6,48}\right) = \\ &= p(-1,47 < Z < 1,47) = p(Z < 1,47) - p(Z < -1,47) = p(Z < 1,47) - p(Z > 1,47) = \\ &= p(Z < 1,47) - (1 - p(Z < 1,47)) = p(Z < 1,47) - 1 + p(Z < 1,47) = 2 \cdot p(Z < 1,47) - 1 = 0,8584 \end{aligned}$$

5. La temperatura media en una ciudad en el mes de marzo, en grados centígrados, sigue una distribución normal de media 15 y desviación típica 3. Sabiendo que el mes de marzo tiene 31 días, calcula:
- ¿cuántos días hay una temperatura superior a 18 grados?
 - Calcula el intervalo simétrico centrado en la media que contiene el 75% de las temperaturas registradas en marzo.

- a) Se trata de una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 15 y desviación típica 3.

$$X \sim N(15, 3)$$

$$p(X > 18) = p\left(Z > \frac{18 - 15}{3}\right) = p(Z > 1) = 1 - p(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

Como el mes de marzo tiene 31 días, el número de días con temperaturas superiores a 18 grados son:
 $0,1587 \cdot 31 = 4,9197 \simeq 5$ días aproximadamente.

- b) Un intervalo simétrico centrado en la media será del tipo $(15 - k, 15 + k)$

$$\begin{aligned} p(15 - k < X < 15 + k) &= 0,75 \Leftrightarrow p\left(\frac{15 - k - 15}{3} < Z < \frac{15 + k - 15}{3}\right) = 0,75 \Leftrightarrow p\left(\frac{-k}{3} < Z < \frac{k}{3}\right) = 0,75 \Leftrightarrow \\ p\left(Z < \frac{k}{3}\right) - p\left(Z < \frac{-k}{3}\right) &= 0,75 \Leftrightarrow p\left(Z < \frac{k}{3}\right) - p\left(Z > \frac{k}{3}\right) = 0,75 \Leftrightarrow p\left(Z < \frac{k}{3}\right) - 1 + p\left(Z < \frac{k}{3}\right) = 0,75 \Leftrightarrow \\ 2 \cdot p\left(Z < \frac{k}{3}\right) &= 1,75 \Leftrightarrow p\left(Z < \frac{k}{3}\right) = 0,875 \end{aligned}$$

Buscamos el valor 0,875 en la tabla de probabilidades de la distribución $Z \sim N(0,1)$ y observamos que
 $p(Z < 1,15) = 0,8749 \simeq 0,875$

$$\text{Por tanto: } \left\{ \begin{array}{l} p\left(Z < \frac{k}{3}\right) = 0,875 \\ p(Z < 1,15) = 0,875 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{k}{3} = 1,15 \Leftrightarrow k = 3,45$$

De esta forma, el intervalo simétrico centrado en 15 que contiene el 75% de las temperaturas registradas es: $(15 - 3'45, 15 + 3'45) = (11'55, 18'45)$