

Responde siempre razonadamente:

1. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A) = 0.5; \quad p(A \cap \bar{B}) = 0.2 \quad y \quad p(B) = 0.7$$

Calcula:

- a) $p(A \cap B)$
 - b) $p(A \cup B)$
 - c) $p(A/\bar{B})$
 - d) $p(\bar{B}/\bar{A})$
2. En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por ese punto. Se sabe que el 50% de los vehículos que pasan por el radar son coches, el 30% camiones y el resto motocicletas. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículo supere la velocidad máxima permitida al pasar por el radar y sea multado es $1/10$ para un coche, $1/40$ para un camión y $1/4$ para una motocicleta. En un momento dado, un vehículo pasa por el radar:
- a) Calcula la probabilidad de que el vehículo sea multado.
 - b) Si el vehículo ha sido multado, ¿cuál es la probabilidad de que sea una motocicleta?
 - c) Calcula la probabilidad de que sea un coche y no sea multado.
3. Según un estudio, el 40% de los hogares europeos tienen contratado acceso a internet, el 33% tiene contratada televisión por cable y el 20% dispone de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar:
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada televisión por cable?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ningún servicio?
- 4.
- a) Un examen de opción múltiple está compuesto por 8 preguntas con cuatro respuestas posibles cada una, de las que sólo una es la correcta. Si un alumno responde todas las preguntas al azar, calcula la probabilidad de que conteste correctamente como mucho 6 preguntas.
 - b) Si el examen tuviera 120 preguntas, calcula la probabilidad de que el alumno falle más de 80 preguntas.
5. El tiempo de espera de un viajero en una estación de tren, en minutos, sigue una distribución normal de media 8 y desviación típica 2. Sabiendo que cada mañana 320 viajeros acceden a la estación, calcula cuántos de ellos esperan más de 6 minutos y medio y menos de 8 minutos y medio.

Responde siempre razonadamente:

1. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A) = 0.5; \quad p(A \cap \bar{B}) = 0.2 \quad y \quad p(B) = 0.7$$

Calcula:

a) $p(A \cap B)$

b) $p(A \cup B)$

c) $p(A/\bar{B})$

d) $p(\bar{B}/\bar{A})$

a) Utilizamos la siguiente fórmula:

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) \rightarrow p(A \cap B) = p(A) - p(A \cap \bar{B}) = 0.5 - 0.2 = 0.3$$

b) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.5 + 0.7 - 0.3 = 0.9$

c) Utilizamos la probabilidad condicionada $p(A/\bar{B}) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$

d) Utilizamos la probabilidad condicionada $p(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(\bar{A})} = \frac{1 - p(A \cup B)}{p(\bar{A})} \Leftrightarrow p(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{0.1}{0.5} = 0.2$

2. En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por ese punto. Se sabe que el 50% de los vehículos que pasan por el radar son coches, el 30% camiones y el resto motocicletas. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículo supere la velocidad máxima permitida al pasar por el radar y sea multado es 1/10 para un coche, 1/40 para un camión y 1/4 para una motocicleta. En un momento dado, un vehículo pasa por el radar:

a) Calcula la probabilidad de que el vehículo sea multado.

b) Si el vehículo ha sido multado, ¿cuál es la probabilidad de que sea una motocicleta?

c) Calcula la probabilidad de que sea un coche y no sea multado.

Definimos los sucesos:

A = "el vehículo es un coche"

B = "el vehículo es un camión"

C = "el vehículo es una motocicleta"

S = "el vehículo es multado"

a) Utilizamos el Teorema de la probabilidad total:

$$p(S) = p(A) \cdot p(S/A) + p(B) \cdot p(S/B) + p(C) \cdot p(S/C) = 0.5 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.025 + 0.2 \cdot 0.25 = 0.1075$$

b) Utilizamos el Teorema de Bayes:

$$p(C/S) = \frac{p(S/C) \cdot p(C)}{p(S)} = \frac{0.25 \cdot 0.2}{0.1075} \cong 0.47$$

c) $p(A \cap \bar{S}) = p(A) \cdot p(\bar{S}/A) = 0.5 \cdot 0.9 = 0.45$

3. Según un estudio, el 40% de los hogares europeos tienen contratado acceso a internet, el 33% tiene contratada televisión por cable y el 20% dispone de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada televisión por cable?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ningún servicio?

a) Definimos los sucesos:

$A = \text{"tiene contratado acceso a internet"}$ $B = \text{"tiene contratada televisión por cable"}$

Sabemos que: $p(A) = 0,4$; $p(B) = 0,33$; $p(A \cap B) = 0,2$

Nos piden: $p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) = 0,33 - 0,2 = 0,13$

b) Tenemos que calcular $p(\bar{A} \cap \bar{B})$. Para ello, utilizamos la Ley de Morgan:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$$

Calculamos $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,4 + 0,33 - 0,2 = 0,53$

Por tanto: $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,53 = 0,47$

4.

a) Un examen de opción múltiple está compuesto por 8 preguntas con cuatro respuestas posibles cada una, de las que sólo una es la correcta. Si un alumno responde todas las preguntas al azar, calcula la probabilidad de que conteste correctamente como mucho 6 preguntas.

Si consideramos la variable $X = \text{"número de preguntas correctas"}$, se trata de una binomial de parámetros $n = 8$ y $p = \frac{1}{4} = 0,25$, $X \sim B(8, 0,25)$. La función de probabilidad asociada a X es:

$$p(X = k) = \binom{8}{k} \cdot 0,25^k \cdot 0,75^{8-k} \quad k = 0, 1, \dots, 8$$

Nos piden:

$$p(X \leq 6) = 1 - p(X > 6) = 1 - [p(X = 7) + p(X = 8)] = 1 - \left[\binom{8}{7} \cdot 0,25^7 \cdot 0,75 + \binom{8}{8} 0,25^8 \right] \cong 1 - 0,00038147 = 0,9996$$

b) Si el examen tuviera 120 preguntas, calcula la probabilidad de que el alumno falle más de 80 preguntas.

Si consideramos la variable $X = \text{"número de preguntas incorrectas"}$, se trata de una binomial de parámetros $n = 120$ y $p = 0,75$, $X \sim B(120, 0,75)$. Como $n \cdot p = 120 \cdot 0,75 = 90 > 5$ vamos a utilizar la aproximación de la distribución Binomial a la distribución Normal. Así:

$$X \sim B(120, 0,75) \xrightarrow{\text{APROXIMACIÓN}} X_N \sim N(90, 4,74)$$

Nos piden calcular $p(X > 80)$, utilizaremos la aproximación anterior y las correcciones de Yates:

(En lo que sigue, consideramos que $Z \sim N(0,1)$)

$$p(X > 80) = p(X_N > 80,5) = p\left(\frac{X_N - 90}{4,74} > \frac{80,5 - 90}{4,74}\right) = p(Z > -2) = p(Z < 2) = 0,9772$$

5. El tiempo de espera de un viajero en una estación de tren, en minutos, sigue una distribución normal de media 8 y desviación típica 2. Sabiendo que cada mañana 320 viajeros acceden a la estación, calcula cuántos de ellos esperan más de 6 minutos y medio y menos de 8 minutos y medio.

Se trata de una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 8 y desviación típica 2.

$$X \sim N(8, 2) \quad X = \text{"tiempo medio de espera"}$$

$$p(6,5 < X < 8,5) = p\left(\frac{6,5 - 8}{2} < \frac{X - 8}{2} < \frac{8,5 - 8}{2}\right) = p(-0,75 < Z < 0,25) =$$

$$= p(Z < 0,25) - p(Z < -0,75) = p(Z < 0,25) - 1 + p(Z < 0,75) = 0,5987 - 1 + 0,7734 = 0,3721$$

Como cada mañana van a la estación 320 viajeros, esperan entre 6,5 minutos y 8,5 minutos:

$$320 \cdot 0,3721 = 119,07 \cong 119 \text{ viajeros aproximadamente.}$$