

Responde siempre razonadamente.

Cada ejercicio tiene una puntuación máxima de 2,5 puntos

1. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A) = 0,5 ; p(A \cap \bar{B}) = 0,2 \text{ y } p(B) = 0,7$$

Calcula:

- a) $p(A \cap B)$
 - b) $p(A \cup B)$
 - c) $p(A/\bar{B})$
 - d) $p(\bar{B}/\bar{A})$
2. De los trabajadores que se jubilaron en el último año, 40% pertenecían al sector de educación, 40% al de sanidad y el resto al sector de justicia. Al 80% de los trabajadores en educación que se jubilan, sus compañeros les hacen una fiesta de despedida, también al 60% de los trabajadores de justicia y al 30% de los de sanidad.
- a) Calcula la probabilidad de que a un trabajador de estos sectores, que se jubile, le hicieran una fiesta.
 - b) Sabemos que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcúlese la probabilidad de que fuera de sanidad.
3. La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0,55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0,40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0,25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste:
- a) al menos uno de los dos tipos de música.
 - b) los dos tipos de música.
4. Responde razonadamente:
- a) Un examen de opción múltiple está compuesto por 8 preguntas con cuatro respuestas posibles cada una, de las que sólo una es la correcta. Si un alumno responde todas las preguntas al azar, calcula:
 - i) probabilidad de que conteste correctamente como mucho 6 preguntas.
 - ii) Si el examen tuviera 120 preguntas, calcula la probabilidad de que el alumno falle más de 80 preguntas.
 - b) La temperatura media en una ciudad en el mes de marzo, en grados centígrados, sigue una distribución normal de media 15 y desviación típica 2. Si marzo tiene 31 días, ¿cuántos días se espera una temperatura superior a 12 grados y medio y menor de 14 grados?

1. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A) = 0,5; \quad p(A \cap \bar{B}) = 0,2 \quad \text{y} \quad p(B) = 0,7$$

Calcula:

- a) $p(A \cap B)$
- b) $p(A \cup B)$
- c) $p(A/\bar{B})$
- d) $p(\bar{B}/\bar{A})$

a) Utilizamos la siguiente fórmula:

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) \rightarrow p(A \cap B) = p(A) - p(A \cap \bar{B}) = 0,5 - 0,2 = 0,3$$

$$b) \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,5 + 0,7 - 0,3 = 0,9$$

$$c) \quad \text{Utilizamos la probabilidad condicionada} \quad p(A/\bar{B}) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}$$

$$d) \quad \text{Utilizamos la probabilidad condicionada} \quad p(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(\bar{A})} = \frac{1 - p(A \cup B)}{p(\bar{A})} \Leftrightarrow p(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

2. De los trabajadores que se jubilaron en el último año, 40% pertenecían al sector de educación, 40% al de sanidad y el resto al sector de justicia. Al 80% de los trabajadores en educación que se jubilan, sus compañeros les hacen una fiesta de despedida, también al 60% de los trabajadores de justicia y al 30% de los de sanidad.

a) Calcula la probabilidad de que a un trabajador de estos sectores, que se jubile, le hicieran una fiesta.

b) Sabemos que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcúlese la probabilidad de que fuera de sanidad.

Definimos los sucesos:

A = "trabajador del sector de educación"

B = "trabajador del sector de sanidad"

C = "trabajador del sector de justicia"

S = "hacen fiesta de despedida"

a) Utilizamos el Teorema de la probabilidad total:

$$p(S) = p(A) \cdot p(S/A) + p(B) \cdot p(S/B) + p(C) \cdot p(S/C) = 0,4 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,56$$

b) Utilizamos el Teorema de Bayes:

$$p(B/\bar{S}) = \frac{p(\bar{S}/B) \cdot p(B)}{p(\bar{S})} = \frac{p(\bar{S}/B) \cdot p(B)}{1 - p(S)} = \frac{0,7 \cdot 0,4}{1 - 0,56} \cong 0,6364$$

3. La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0,55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0,40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0,25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste:

- a) al menos uno de los dos tipos de música.
- b) los dos tipos de música.

a) Definimos los sucesos:

A = "le gusta la música moderna" B = "le gusta la música clásica"

Sabemos que: $p(A) = 0,55$; $p(B) = 0,4$; $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,25$

Nos piden $p(A \cup B)$ y utilizamos la Ley de Morgan:

$$p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

b) Tenemos que calcular $p(A \cap B)$

Utilizamos la Ley de la Adición $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,55 + 0,4 - 0,75 = 0,2$$

4. Responde razonadamente:

a) Un examen de opción múltiple está compuesto por 8 preguntas con cuatro respuestas posibles cada una, de las que sólo una es la correcta. Si un alumno responde todas las preguntas al azar, calcula:

i) probabilidad de que conteste correctamente como mucho 6 preguntas.

Si consideramos la variable X = "número de preguntas correctas", se trata de una binomial de parámetros $n = 8$ y $p = \frac{1}{4} = 0,25$, $X \sim B(8, 0,25)$. La función de probabilidad es:

$$p(X = k) = \binom{8}{k} \cdot 0,25^k \cdot 0,75^{8-k} \quad k = 0,1, \dots, 8$$

Nos piden:

$$\begin{aligned} p(X \leq 6) &= 1 - p(X > 6) = 1 - [p(X = 7) + p(X = 8)] \\ &= 1 - \left[\binom{8}{7} \cdot 0,25^7 \cdot 0,75 + \binom{8}{8} 0,25^8 \right] \cong 1 - 0,00038147 = 0,9996 \end{aligned}$$

ii) Si el examen tuviera 120 preguntas, calcula la probabilidad de que el alumno falle más de 80 preguntas.

Si consideramos la variable X = "número de preguntas incorrectas", se trata de una binomial de parámetros $n = 120$ y $p = 0,75$, $X \sim B(120, 0,75)$. Como $n \cdot p = 120 \cdot 0,75 = 90 > 5$ vamos a utilizar la aproximación de la distribución Binomial a la distribución Normal. Así:

$$X \sim B(120, 0,75) \xrightarrow{\text{APROXIMACIÓN}} X_N \sim N(90, 4,74)$$

Nos piden calcular $p(X > 80)$, utilizaremos la aproximación anterior y las correcciones de Yates:

(En lo que sigue, consideramos que $Z \sim N(0,1)$)

$$\begin{aligned} p(X > 80) &= 1 - p(X \leq 80) = 1 - p(X_N \leq 80,5) = 1 - p\left(\frac{X_N - 90}{4,74} \leq \frac{80,5 - 90}{4,74}\right) = \\ &= 1 - p(Z \leq -2) = 1 - p(Z > 2) = 1 - (1 - p(Z \leq 2)) = p(Z \leq 2) = 0,9772 \end{aligned}$$

b) La temperatura media en una ciudad en el mes de marzo, en grados centígrados, sigue una distribución normal de media 15 y desviación típica 2. Si marzo tiene 31 días, ¿cuántos días se espera una temperatura superior a 12 grados y medio y menor de 14 grados?

Se trata de una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 15 y desviación típica 2.

X = temperatura media en grados" $X \sim N(15, 2)$

$$\begin{aligned} p(12,5 < X < 14) &= p\left(\frac{12,5 - 15}{2} < Z < \frac{14 - 15}{2}\right) = p(-1,25 < Z < -0,5) = \\ &= p(Z < -0,5) - p(Z < -1,25) = p(Z > 0,5) - p(Z > 1,25) = 1 - p(Z \leq 0,5) - 1 + p(Z \leq 1,25) = \\ &= 0,8944 - 0,6915 = 0,2029 \end{aligned}$$

$$\text{Aproximadamente } 0,2029 \cdot 31 = 6,2899 \cong 6 \text{ días}$$