

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2
- Junio, Ejercicio 3
- Reserva 1, Ejercicio 1
- Reserva 2, Ejercicio 1
- Reserva 3, Ejercicio 2
- Reserva 3, Ejercicio 3
- Reserva 4, Ejercicio 2
- Reserva 4, Ejercicio 3
- Julio, Ejercicio 6

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) - ax + 2 - 2\cos(x)}{e^x - x\cos(x) - 1}$ es finito, calcula a y el valor del límite

MATEMÁTICAS II. 2025. JUNIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) - ax + 2 - 2\cos(x)}{e^x - x\cos(x) - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - a + 2\text{sen}(x)}{e^x - \cos(x) + x\text{sen}(x)} = \frac{1-a}{0} \Rightarrow$$

Como el límite es finito, entonces, $a = 1$ y podemos seguir aplicando la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + 2\text{sen}(x)}{e^x - \cos(x) + x\text{sen}(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen}(x) + 2\cos(x)}{e^x + \text{sen}(x) + \text{sen}(x) + x\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a + \frac{\ln(x)}{x^2}$

a) Calcula a para que $y = 1$ sea una asíntota horizontal de la gráfica de f .

b) Para $a = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento f . Estudia y halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2025. JUNIO. EJERCICIO 3

RESOLUCIÓN

a) Calculamos la asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{\ln x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax^2 + \ln x}{x^2} \right) = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'HOPITAL} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2ax + \frac{1}{x}}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'HOPITAL} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2a - \frac{1}{x^2}}{2} = a$$

Luego, la asíntota horizontal $y = a = 1 \Rightarrow a = 1$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{(1 - 2 \ln x)}{x^3} = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = 1'65$$

	$\left(0, e^{\frac{1}{2}} \right)$	$\left(e^{\frac{1}{2}}, \infty \right)$
Signo f'	+	−
Función	C	D

Creciente: $\left(0, e^{\frac{1}{2}} \right)$

Decreciente: $\left(e^{\frac{1}{2}}, \infty \right)$

Máximo: $\left(e^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2e} \right)$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1) \cdot e^x$.

a) Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

b) Estudia y calcula las asíntotas de la función.

MATEMÁTICAS II. 2025. RESERVA 1. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada: $f'(x) = e^x + (x-1) \cdot e^x = x \cdot e^x$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x) = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x = 0 \Rightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
Signo f'	—	+
Función	Cn	Cx

Luego, en $x = -1$ hay un punto de inflexión.

La ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es: $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x+1)$

$$- f(-1) = -\frac{2}{e}$$

$$- f'(-1) = -\frac{1}{e}$$

Luego, la recta tangente es: $y + \frac{2}{e} = -\frac{1}{e} \cdot (x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{e}x - \frac{3}{e}$

La ecuación de la recta normal en $x = -1$ es: $y - f(-1) = -\frac{1}{f'(-1)} \cdot (x+1)$

Luego, la recta normal es: $y + \frac{2}{e} = -\frac{1}{-\frac{1}{e}} \cdot (x+1) \Rightarrow y = e \cdot x + e - \frac{2}{e}$

b) Asíntota vertical: No tiene, ya que el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \cdot e^x = \infty \Rightarrow$ No tiene.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) \cdot e^x = (-\infty) \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$$

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1) \cdot e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + (x-1) \cdot e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot e^x}{1} = \infty \Rightarrow \text{No tiene}$$

asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$

Cuando $x \rightarrow -\infty \Rightarrow$ No tiene asíntota oblicua, ya que tiene horizontal

Sea $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 - e & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

a) Estudia la derivabilidad de f .

b) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)

MATEMÁTICAS II. 2025. RESERVA 2. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $x = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad f(1) = 1 - e \\ 2. \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - e^x = 1 - e \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 1 - e = 1 - e \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 - e \Rightarrow \text{Continua en } x = 1 \end{array} \right\}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -e^x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = -e \\ f'(1^+) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x = 1$$

Luego, la función es continua en $[0, 2]$ y derivable en $[0, 1) \cup (1, 2]$

b) En el intervalo $[0, 1)$ la derivada es $f'(x) = -e^x$ (negativa) con lo cual la función es decreciente.

En el intervalo $[1, 2]$ la derivada es $f'(x) = 2$ (positiva) con lo cual la función es creciente.

Calculamos los extremos absolutos

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1 - e = -1.71 \Rightarrow$ Mínimo absoluto en $(1, -1.71)$
- $f(2) = 3 - e \Rightarrow$ Máximo absoluto en $(2, 3 - e)$

Considera la función $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{(1-|x|)^2}$.

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función f .

b) Halla, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2025. RESERVA 3. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función: $f(x) = \frac{1}{(1-|x|)^2} = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{(1+0)^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(1+x)^2} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \text{Continua en } x = 0$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(1+x)^3} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{2}{(1-x)^3} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(0^-) = -2 \neq f'(0^+) = 2 \Rightarrow \text{No derivable en } x = 0$$

Luego, la función es continua en $(-1,1)$ y derivable en $(-1,0) \cup (0,1)$.

b) Al igualar la derivada a 0 no sale ningún valor de x , luego

	$(-1,0)$	$(0,1)$
Signo f'	—	+
Función	D	C

La función es decreciente en $(-1,0)$ y creciente en $(0,1)$. Tiene un mínimo relativo y absoluto en $(0,1)$. No tiene máximo absoluto.

Sean las funciones $f : (-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{e}\right)$ y

$$g(x) = x^3 + 2.$$

a) Calcula $a \neq 0$ de forma que en el punto $(a, f(a))$ la recta normal a la gráfica de la función f sea paralela a la recta tangente a la gráfica de g en el punto $(a, g(a))$.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f .

MATEMÁTICAS II. 2025. RESERVA 3. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) La pendiente de la recta normal a $f(x)$ en el punto $x = a$ es $\frac{-1}{f'(a)}$. La pendiente de la recta tangente a $g(x)$ en el punto $x = a$ es $g'(a)$. Como son paralelas se tiene que cumplir que las dos pendientes sean iguales, luego:

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2x}{e}}{\frac{x^2}{e}} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{-1}{f'(a)} = \frac{-1}{\frac{2}{a}} = \frac{-a}{2} \\ g'(x) &= 3x^2 \Rightarrow g'(a) = 3a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-a}{2} = 3a^2 \Rightarrow 6a^2 + a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Luego, $a = -\frac{1}{6}$, ya que $a \neq 0$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow$ No tiene solución

	$(-1, 0)$	$(0, 1)$
Signo y'	—	+
Función	D	C

La función es decreciente en $(-1, 0)$ y creciente en $(0, 1)$

Un náufrago se encuentra en una isla situada en el punto de coordenadas $(2,0)$ de un plano. Se sabe que un ferry navega en el mismo plano siempre en la trayectoria dada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$. ¿Hacia qué punto de la trayectoria debe nadar el náufrago para recorrer la menor distancia posible? Calcula dicha distancia.

MATEMÁTICAS II. 2025. RESERVA 4. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Función que queremos que sea mínimo: La distancia entre los puntos $(2,0)$ y $(x, \sqrt{x+1})$.

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x+1}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$$

Derivamos e igualamos a cero

$$d' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+5}} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Comprobamos que es un mínimo

	$(-1, 1.5)$	$(1.5, +\infty)$
Signo d'	—	+
Función	D	C

Luego el punto es: $P = \left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

La distancia mínima es: $d = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 5} = \sqrt{\frac{11}{4}} \approx 1.66 \text{ u}$

Sea la función $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|}$.

a) Estudia la derivabilidad de f .

b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

MATEMÁTICAS II. 2025. RESERVA 4. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función: $f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|} = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{1+x}{1-x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1+0}{1-0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-x}{1+x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x}{1-x} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \text{Continua en } x = 0$$

Vamos a estudiar si es derivable en $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(1+x)^2} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{2}{(1+x)^2} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= -2 \\ f'(0^+) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x = 0.$$

Luego, la función es continua en $(-1,1)$ y derivable en $(-1,0) \cup (0,1)$.

b) Al igualar la primera derivada a cero, no sale ningún valor de x , luego:

	$(-1,0)$	$(0,1)$
Signo f'	—	+
Función	D	C

La función es decreciente en $(-1,0)$ y creciente en $(0,1)$

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)}{bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)} = 1$ (donde $\ln$ denota la función

logaritmo neperiano)

MATEMÁTICAS II. 2025. JULIO. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)}{bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) + x \cos(x) + a \cdot e^x + \cos(x)}{2bx + 1 - \cos(x)} = \frac{a+1}{0} \Rightarrow$$

Como el límite es finito, entonces, $a = -1$ y podemos seguir aplicando la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) + x \cos(x) - e^x + \cos(x)}{2bx + 1 - \cos(x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + \cos(x) - x \operatorname{sen}(x) - e^x - \operatorname{sen}(x)}{2b + \operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{2b} = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Luego, los valores son: $a = -1$; $b = \frac{1}{2}$