CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

ABAU
Convocatoria ordinaria 2024
MATEMÁTICAS II

CÓDIGO 20

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Sean A y B dos matrices tales que $A+2B=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ y $A+B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2.

b) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A^2X-(A+B)^T=3I-2X$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $(A+B)$.

PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3\\ 2mx + 3my + 2z = 5\\ (m-4)y + mz = m\end{cases}$

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

a) Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.

b) Calcule $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}$ b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{x^2}$

PREGUNTA 5. Geometría. (2 puntos)

a) Considere el plano $\pi: 4x+2y+bz=2$ y la recta $r:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-c}{2}=\dfrac{z-3}{4}$ donde *b* y *c* son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar *b* y *c* para que la recta *r* esté contenida en π.

b) Calcule la distancia del punto $P(1,3,1)$ al plano $\pi': 4x+2y-4z=2$.

PREGUNTA 6. Geometría. (2 puntos)

a) Considere los puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ y $S(0,1,2)$. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a *Q*, *R* y *S*.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,-1)$ y sea perpendicular al plano $\pi: 4x+23y+6z-35=0$.

PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Sabiendo que $P(A)=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{1}{2}$.

a) Suponiendo que A y B son sucesos independientes, calcule $P(A\cup B)$ y $P\left(\overline{A}/\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)$.

b) Suponiendo que A y B son sucesos incompatibles, calcule $P(A\cup B)$ y $P\left(\overline{A}/\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)$.

(Nota: $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son los sucesos contrarios o complementarios de *A* y *B*, respectivamente).

PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?

b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5% de estas botellas?

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Sean A y B dos matrices tales que $A+2B=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A+B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2.

b) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A^2X-(A+B)^T=3I-2X$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $(A+B)$.

a) Resolvemos el sistema matricial planteado para obtener la expresión de las matrices A y B.

$$\left.\begin{array}{l} A+2B=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ A+B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 1^{\text{a}} - \text{ Ecuación } 2^{\text{a}}\} \Rightarrow 2B-B=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A+\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculamos A^2.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+0 & 2+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz $A^2=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial planteada.

$$A^2X-(A+B)^T=3I-2X \Rightarrow A^2X+2X=(A+B)^T+3I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A^2+2I)X=(A+B)^T+3I \Rightarrow X=(A^2+2I)^{-1}\left[(A+B)^T+3I\right]$$

Calculamos la expresión de la matriz X haciendo uso de lo obtenido en el apartado anterior.

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^T=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2+2I=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A^2+2I|=\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=18\neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$\left(A^2+2I\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A^2+2I\right)^T\right)}{\left|A^2+2I\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}6 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix}}{18}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}3 & -3\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$X=\left(A^2+2I\right)^{-1}\left[(A+B)^T+3I\right]=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}3 & -3\\ 0 & 6\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}3 & -3\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}21+3 & 0-15\\ 0-6 & 0+30\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}24 & -15\\ -6 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3 & -5/6\\ -1/3 & 5/3\end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X=\begin{pmatrix}4/3 & -5/6\\ -1/3 & 5/3\end{pmatrix}$.

PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3 \\ 2mx + 3my + 2z = 5 \\ (m-4)y + mz = m \end{cases}$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{pmatrix}$.y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 & 3 \\ 2m & 3m & 2 & 5 \\ 0 & m-4 & m & m \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{vmatrix} = 3m^3 + 0 + 2m(m-4) - 0 - 2m^2(m+2) - 2m(m-4) =$$

$$= 3m^3 + \cancel{2m^2} - 8m - 2m^3 - 4m^2 - \cancel{2m^2} + 8m = m^3 - 4m^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^3 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m^2(m-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m-4 = 0 \to m = 4 \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq 0 \;\; y \;\; m \neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

El sistema queda tan sencillo que lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} 2y + z = 3 \\ -2z = 5 \\ -4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + z = 3 \\ z = \frac{-5}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 0 + \frac{-5}{2} = 3 \Rightarrow \frac{-5}{2} = 3 \text{ ¡Imposible!}$$

El sistema es **incompatible** (sin solución)

CASO 3. $m = 4$

Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}4&6&1&3\\8&12&2&5\\0&0&4&4\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,2^{a}-2\cdot Fila\,1^{a}\\ \begin{array}{cccc}8&12&2&5\\-8&-12&-2&-6\\\hline 0&0&0&-1\end{array}\rightarrow Nueva\,Fila\,2^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}4&6&1&3\\0&0&0&-1\\0&0&4&4\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{Fila\,2^{a}\leftrightarrow Fila\,3^{a}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}4&6&1\\0&0&4\\0&0&0\end{matrix}}_{A}&\begin{matrix}3\\4\\-1\end{matrix}\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m\neq 0$ y $m\neq 4$ el sistema es compatible determinado y si $m=0$ o $m=4$ el sistema es incompatible.

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)
a) Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.
b) Calcule $\int x^3 e^{x^2} dx$

a) Está en los libros de texto.

b) Utilizamos integración por partes.

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int x^2 2xe^{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = 2xe^{x^2} dx \Rightarrow v = \int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\left[x^2 e^{x^2} - \int 2xe^{x^2} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right) = \frac{e^{x^2}}{2}\left(x^2 - 1 \right) + C$$

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)
Calcule los siguientes límites:
a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{x}}{x^2}$

a) Calculamos el valor del primer límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}=\frac{\sin 0-\ln(1+0)}{0\cdot\sin 0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\frac{1}{1+x}}{\sin x+x\cos x}=\frac{\cos 0-\frac{1}{1+0}}{\sin 0+0\cdot\cos 0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{-\sin 0+\frac{1}{(1+0)^2}}{\cos 0+\cos 0-0\cdot\sin 0}=\frac{0+1}{1+1-0}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Calculamos el valor del segundo límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{x}}{x^2}=\frac{e^{\sin 0}-e^{0}}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot e^{\sin x}-e^{x}}{2x}=\frac{\cos 0\cdot e^{\sin 0}-e^{0}}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x\cdot e^{\sin x}+\cos x\cdot\cos x\cdot e^{\sin x}-e^{x}}{2}=\frac{-\sin 0\cdot e^{\sin 0}+\cos 0\cdot\cos 0\cdot e^{\sin 0}-e^{0}}{2}=$$

$$=\frac{1-1}{2}=\boxed{0}$$

PREGUNTA 5. Geometría. (2 puntos)

a) Considere el plano $\pi : 4x + 2y + bz = 2$ y la recta $r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$ donde b y c son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar b y c para que la recta r esté contenida en π.

b) Calcule la distancia del punto $P(1,3,1)$ al plano $\pi' : 4x + 2y - 4z = 2$.

a) Para que la recta esté contenida en el plano cualquier punto de la recta debe pertenecer al plano (debe cumplir su ecuación).
Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4} \Rightarrow r : \begin{cases} P_r(2,c,3) \\ \overrightarrow{v_r} = (3,2,4) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = c + 2\lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases}$$

Hallamos otro punto de la recta que también debe pertenecer al plano.

$$\left. \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = c + 2\lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases} \\ \lambda = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow Q_r(5, c+2, 7)$$

El punto $Q_r(5, c+2, 7)$ pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} Q_r(5, c+2, 7) \in \pi \\ \pi : 4x + 2y + bz = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \cdot 5 + 2(c+2) + b \cdot 7 = 2 \Rightarrow 20 + 2c + 4 + 7b = 2 \Rightarrow \boxed{2c + 7b = -22}$$

El punto $P_r(2,c,3)$ pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(2,c,3) \in \pi \\ \pi : 4x + 2y + bz = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \cdot 2 + 2 \cdot c + b \cdot 3 = 2 \Rightarrow 8 + 2c + 3b = 2 \Rightarrow \boxed{2c + 3b = -6}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2c + 3b = -6 \\ 2c + 7b = -22 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2c = -6 - 3b \\ 2c = -22 - 7b \end{array} \right\} \Rightarrow -6 - 3b = -22 - 7b \Rightarrow 4b = -16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{-16}{4} = -4} \Rightarrow 2c = -6 - 3(-4) = 6 \Rightarrow \boxed{c = \frac{6}{2} = 3}$$

Los valores buscados son $b = -4$ y $c = 3$.

b) Calculamos la distancia pedida usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,3,1) \\ \pi' : 4x + 2y - 4z - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi') = \frac{|4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3} \simeq 0.66\ u}$$

PREGUNTA 6. Geometría. (2 puntos)
a) Considere los puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ y $S(0,1,2)$. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a *Q*, *R* y *S*.
b) Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,-1)$ y sea perpendicular al plano $\pi: 4x+23y+6z-35=0$.

a) El plano π´ que contiene a los tres puntos tiene como vectores directores los vectores $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{QS}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{QR}=(3,1,0)-(-1,3,-5)=(4,-2,5) \\ \vec{v}=\overrightarrow{QS}=(0,1,2)-(-1,3,-5)=(1,-2,7) \\ S(0,1,2)\in\pi' \end{array}\right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14x+5(y-1)-8(z-2)+2(z-2)-28(y-1)+10x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14x+5y-5-8z+16+2z-4-28y+28+10x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x-23y-6z+35=0 \Rightarrow \boxed{\pi': 4x+23y+6z-35=0}$$

La ecuación del plano π´ que contiene a los puntos *Q*, *R* y *S* es $\pi': 4x+23y+6z-35=0$.

b) La recta perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 4x+23y+6z-35=0 \Rightarrow \vec{n}=(4,23,6)$$

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=\vec{n}=(4,23,6) \\ P(3,-1,-1)\in r \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=3+4\lambda \\ y=-1+23\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=-1+6\lambda \end{cases} \text{ Ecuaciones paramétricas}$$

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=\vec{n}=(4,23,6) \\ P(3,-1,-1)\in r \end{cases} \Rightarrow r: \frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{23}=\frac{z+1}{6} \text{ Ecuación continua}$$

PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Sabiendo que $P(A)=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{1}{2}$.

a) Suponiendo que A y B son sucesos independientes, calcule $P(A\cup B)$ y $P\left(\overline{A}/\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)$.

b) Suponiendo que A y B son sucesos incompatibles, calcule $P(A\cup B)$ y $P\left(\overline{A}/\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)$.

(Nota: $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son los sucesos contrarios o complementarios de *A* y *B*, respectivamente).

a) Si A y B son sucesos independientes entonces $P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=\frac{1}{3}\\ P(B)=\frac{1}{2}\\ P(A\cap B)=\frac{1}{6}\\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

Utilizamos el teorema de Bayes y las leyes de Morgan.

$$P\left(\overline{A}/\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)}{P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)}=\left\{\overline{A}\subset\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\to\overline{A}\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\overline{A}\right\}=$$

$$=\frac{P\left(\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)}=\left\{\begin{array}{l}\text{Ley de Morgan}\\ P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)\end{array}\right\}=\frac{1-P(A)}{P\left(\overline{A\cap B}\right)}=$$

$$=\frac{1-P(A)}{1-P(A\cap B)}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}=\frac{12}{15}=\boxed{\frac{4}{5}}$$

b) Si A y B son sucesos incompatibles entonces $A\cap B=\varnothing \rightarrow P(A\cap B)=0$.

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=\frac{1}{3}\\ P(B)=\frac{1}{2}\\ P(A\cap B)=0\\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-0=\boxed{\frac{5}{6}}$$

Utilizamos el teorema de Bayes y las leyes de Morgan.

$$P\left(\overline{A}/\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)}{P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)}=\left\{\overline{A}\subset\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\rightarrow\overline{A}\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\overline{A}\right\}=$$

$$=\frac{P\left(\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)}=\begin{Bmatrix}\text{Ley de Morgan}\\ P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)\end{Bmatrix}=\frac{1-P(A)}{P\left(\overline{A\cap B}\right)}=$$

$$=\frac{1-P(A)}{1-P(A\cap B)}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1-0}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)
Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.
a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?
b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5% de estas botellas?

X es la cantidad de agua que echa una máquina en una botella (en mililitros). X = N(500, 4)

a) Nos piden calcular $P(499 < X < 502)$.

$$P(499 < X < 502) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(\frac{499-500}{4} < Z < \frac{502-500}{4} \right) =$$

$$= P(-0.25 < Z < 0.5) = P(Z < 0.5) - P(Z < -0.25) =$$

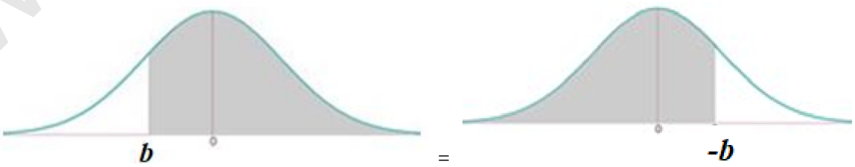
$$= P(Z < 0.5) - P(Z > 0.25) = P(Z < 0.5) - \left[1 - P(Z < 0.25)\right] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{array} \right\} = 0.6915 - 1 + 0.5987 = \boxed{0.2902}$$

b) Nos piden hallar “a” tal que $P(X \geq a) = 0.975$.

$$P(X \geq a) = 0.975 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-500}{4} \right) = 0.975 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Probabilidad mayor que } 0.5 \rightarrow \\ \dfrac{a-500}{4} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ldots$$



$$\ldots \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a-500}{4} \right) = 0.975 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a-500}{4} = 1.96 \Rightarrow -a + 500 = 1.96 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 500 - 1.96 \cdot 4 = a \Rightarrow \boxed{a = 492.16}$$

La cantidad de agua excedida por el 97,5% de estas botellas es 492.16 mililitros.