1. Gravitación:

   a) En torno al **Sol** giran **dos planetas** cuyos **períodos** de revolución son $T_1 = 3{,}66 \cdot 10^2$ *días* y $T_2 = 4{,}32 \cdot 10^2$ *días* respectivamente. Si el radio de la órbita del **primero** es $r_1 = 1{,}49.10^{11}\ m$, calcula el **radio de la órbita** del **segundo** planeta. (0,75 pt.)

   b) Si un cuerpo orbitando en un campo gravitatorio posee una **energía cinética menor que su energía potencial (en valor absoluto)**, justifica si se **mantiene** en órbita o si se **escapará** al infinito. (0,75 pt.)

a) Vamos a calcular el radio del segundo planeta a partir de los datos del primero utilizando la 3ª ley de Kepler ya que ambos satélites orbitan a Neptuno.

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = cte} \Rightarrow \frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow r_2 = \sqrt[3]{r_1^3 \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2}} = r_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}}$$

$$r_2 = 1{,}49 \cdot 10^{11}\ m \cdot \sqrt{\frac{(4{,}32 \cdot 10^2\ \text{día})^2}{(3{,}66 \cdot 10^2\ \text{día})^2}} \simeq 1{,}664 \cdot 10^{11}\ m > r_1$$ (esperábamos un radio mayor)

b) Se nos dice que $E_c < |E_p|$. Para saber si se mantiene o se escapa de la órbita, vamos a analizar la energía mecánica.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M \cdot m}{r^2} < 0$$ (gana la parte negativa).

$E_m < 0$, luego tiene que estar en órbita. Sabemos que se cumple la condición de órbita.

Repaso: Si un cuerpo está atrapado gravitatoriamente, se cumple la condición de órbita:

$$F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^{\cancel{2}}} = m \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow m v^2 = G \frac{M \cdot m}{r}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía mecánica: $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} = -G \frac{M \cdot m}{2r} \Rightarrow$$

$$\boxed{E_m = -G \frac{M \cdot m}{2r}}$$ Energía de enlace orbital ; $E_m < 0$

2. Un **electroscopio** consiste en **dos** esferas de $5\ g$ colgadas de **dos hilos** de $30\ cm$ desde un mismo punto. Si se transfiere a ambas esferas la **misma carga**, se **separarán** de modo que **los hilos formen entre sí un ángulo** de $60°$.

   a) Dibuja el **diagrama de fuerzas que actúan** sobre las esferas. (0,25 pt.)

   b) Calcula el valor de la **carga** que tiene cada esfera y la **tensión** de los hilos. (1,25 pt.)

   Datos: $g_0 = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$ , $K = 9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2/C^2$

- Datos:

$m = 5\,g = 5 \cdot 10^{-3}\ kg$

$L = 30\ cm = 0{,}3\ m$

$\alpha = 60°/2 = 30°$

$g_0 = 9{,}81\ m/s^2$

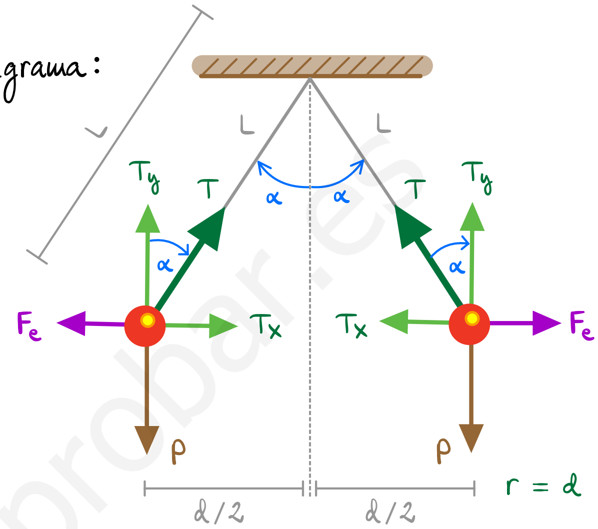
$K = 9 \cdot 10^9\ (S.I.)$

2ª ley de Newton:

$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\left.\begin{array}{l} \text{Eje } x:\ \sum F_x = 0 \\ \text{Eje } y:\ \sum F_y = 0 \end{array}\right\}$

a) Diagrama:



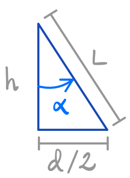

b) Calcula $q$ y $T$. 2ª ley Newton: $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\left.\begin{array}{l} \text{Eje } x:\ F_e - T_x = 0 \\ \text{Eje } y:\ P - T_y = 0 \end{array}\right\}$ Ley de Coulomb cargas iguales $F = K \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = K \cdot \dfrac{q^2}{d^2}$

Este dispositivo es un electroscopio. Nos permite calcular la carga a partir de ángulos y distancias.

$$\left.\begin{array}{l} K \cdot \dfrac{q^2}{d^2} = T \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ m \cdot g = T \cdot \cos \alpha \end{array}\right\} \div \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{K \cdot \dfrac{q^2}{d^2}}{m \cdot g}$$

$$\Rightarrow K \cdot \frac{q^2}{d^2} = m g \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \boxed{|q| = \sqrt{\frac{d^2 m g \operatorname{tg} \alpha}{K}}}$$




$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{d/2}{L} \Rightarrow d = 2L \cdot \operatorname{sen} \alpha = 2 \cdot 0{,}3\,m \cdot \operatorname{sen} 30° = 0{,}3\,m$$

$$|q| = \sqrt{\frac{0{,}3^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81 \cdot \operatorname{tg} 30°}{9 \cdot 10^9}} \simeq 5{,}32 \cdot 10^{-7}\ C$$

Es solución $q^+$ (2 cargas positivas) y $q^-$ (2 cargas negativas)

La tensión $m \cdot g = T \cdot \cos \alpha \Rightarrow T = \dfrac{m \cdot g}{\cos \alpha} = \dfrac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81}{\cos 30°} \simeq 5{,}7 \cdot 10^{-2}\ N$

3. Un conductor compuesto de $10$ **espiras cuadradas** de $3\ cm$ de **lado** se encuentra situado en una región en la que hay un **campo magnético uniforme** de $0{,}2\ T$. Inicialmente, el plano de las espiras es perpendicular al campo magnético. En $t = 0$, la espira comienza a **rotar uniformemente** con respecto a uno de sus diámetros, de manera que el **período** de la **rotación** es de $0{,}5\ s$.

   a) Expresa matemáticamente la **ecuación de la fuerza electromotriz inducida**. (1 pt.)

   b) Calcula simbólicamente la **autoinducción** de una **espira circular** en función de su radio $r$ y de la permeabilidad magnética $\mu_0$. (0,5 pt.)

a) $\Phi_m = B \cdot S \cdot \cos\alpha$ , $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}5\,s} = 4\pi \frac{rad}{s}$ , $\alpha = \omega t = 4\pi t$

$B = 0{,}2\,T$ , $S = 10 \cdot l \cdot l = 10 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2\, m^2 = 9 \cdot 10^{-3}\, m^2$

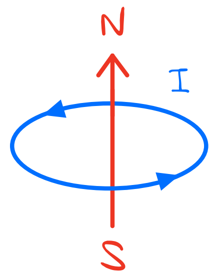
$\Phi_m = 0{,}2 \cdot 9 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(4\pi t) = 1{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(4\pi t)\ [T \cdot m^2 = Wb]$ No hay fase inicial.

$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}} = \cancel{-} B \cdot S \cdot \omega (\cancel{-} \operatorname{sen} \omega t) = B S \omega \operatorname{sen} \omega t$

$\varepsilon = 1{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi \cdot \operatorname{sen}(4\pi t)\ [V]$

b) Autoinducción de una espira circular. Vamos a calcular la f.e.m.

$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}}$ en un conductor circular de campo magnético $\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2r}}$




$\Phi_m = B \cdot S \cdot \cos\alpha$ donde $\vec{B}$ es el propio campo magnético.

$\Phi_m = \frac{\mu_0 I}{2 \cancel{r}} \cdot \pi r^{\cancel{2}} \cdot \cos 0^\circ = \frac{\mu_0 \pi r}{2} \cdot I = L \cdot I \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 \pi r}{2}}$ Autoinducción de una espira

4. Una **onda armónica** tiene una **velocidad** de **propagación** de $100\ m \cdot s^{-1}$ hacia la derecha y $200\ Hz$ de **frecuencia**. Su **amplitud** es de $20\ cm$ y en el instante inicial, en $x = 0\ m$, la elongación es igual a la amplitud .

a) Expresa matemáticamente la **ecuación de la onda**. (0,75 pt.)

b) Calcula el primer **instante** en el que la **velocidad** de oscilación es **nula** a una distancia de $5\ m$ del foco emisor. (0,75 pt.)

a) $\boxed{y = A \cdot \text{sen}(\omega t - Kx + \varphi_0)}$ Ecuación general de la onda

Sentido del eje X (signo menos)

$A = 20\ cm = 0{,}2\ m$ , $f = 200\ Hz\ (s^{-1})$ , $V_p = 100\ m/s$

frecuencia angular $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 200\ Hz = 400\ \pi\ rad/s$

nº de onda $V_p = \lambda \cdot f = \dfrac{\omega}{K} \Rightarrow K = \dfrac{\omega}{V_p} = \dfrac{400\ \pi}{100} = 4\pi\ m^{-1}$

Condiciones iniciales $y(0,0) = \cancel{A} = \cancel{A} \cdot \text{sen}(0 - 0 + \varphi_0) \Rightarrow$

Fase inicial $\text{sen}\ \varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \text{arc sen}\ 1 = \dfrac{\pi}{2}\ rad$

Ecuación general de la onda $y(x,t) = 0{,}2 \cdot \text{sen}\left(400\ \pi \cdot t - 4\pi \cdot x + \dfrac{\pi}{2}\right) m$

b) Calculamos la velocidad de vibración :

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 0{,}2 \cdot 400\ \pi \cdot \cos\left(400\ \pi \cdot t - 4\pi \cdot x + \frac{\pi}{2}\right) m$$

$v(x,t) = 0$ en $x = 5\ m \Rightarrow \cos\left(400\ \pi \cdot t - 4\pi \cdot 5 + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (1ª solución)

$$400\ \pi \cdot t - 4\pi \cdot 5 + \cancel{\frac{\pi}{2}} = \cancel{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$400\ \cancel{\pi} \cdot t = 4\cancel{\pi} \cdot 5 \Rightarrow t = \frac{5}{100} = 0{,}05\ s$$

💡 **CUESTIONES JUSTIFICADAS:**

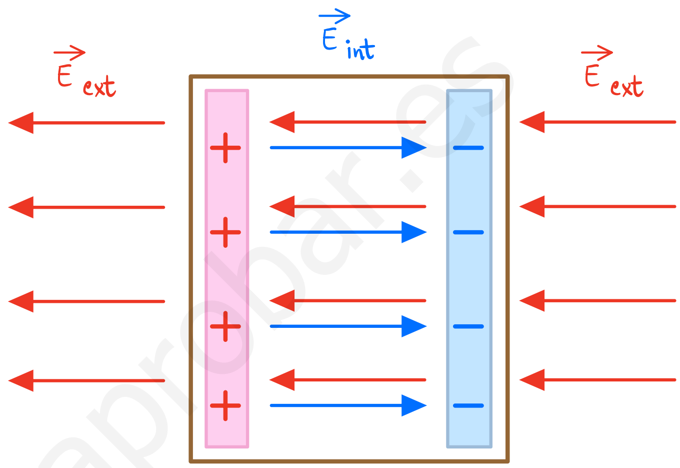
I. Justifica con un **pequeño texto** y un **esquema** cuál de las siguientes afirmaciones es correcta acerca de una **jaula de Faraday inmersa en un campo eléctrico externo**.
El **campo eléctrico total** dentro de la jaula:

a. tiene la misma magnitud, dirección y sentido que el externo.

b. tiene la misma magnitud, dirección y sentido opuesto que el externo. (0,5 pt.)

c. es nulo e igual a la suma de los campos interno y externo que son opuestos.

En una jaula de Faraday, un campo externo mueve las cargas libres (electrones) de una jaula metálica, de modo que se genera un campo eléctrico interno igual y opuesto al externo, produciendo en el interior un campo total nulo:




$$\vec{E}_{int} + \vec{E}_{ext} = 0$$

La respuesta correcta es la c

II. Un **ciclotrón** para acelerar protones tiene un campo magnético de intensidad $0{,}4\ T$ y una diferencia de potencial (en módulo) $\Delta V = 5 \cdot 10^6\ V$. Calcula la **frecuencia angular** del ciclotrón y la **velocidad** que adquieren los protones después de la **primera vuelta completa**:

a. $3{,}8 \cdot 10^7\ rad \cdot s^{-1}$ , $4{,}38 \cdot 10^7\ m \cdot s^{-1}$

b. $3{,}8 \cdot 10^7\ rad \cdot s^{-1}$ , $3{,}1 \cdot 10^7\ m \cdot s^{-1}$ (1,5 pt.)

c. $1{,}9 \cdot 10^7\ rad \cdot s^{-1}$ , $4{,}38 \cdot 10^7\ m \cdot s^{-1}$

Datos: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg$ , $q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$

$$\vec{B} \perp \vec{v} \Rightarrow \boxed{F_m = F_c} \Rightarrow |q| \cdot \cancel{v} \cdot B = m \cdot \frac{v^{\cancel{2}}}{r} \Rightarrow |q| \cdot B = m \cdot \frac{v}{r}$$

$$v = \omega \cdot r \Rightarrow |q| \cdot B = m \cdot \frac{\omega \cdot \cancel{r}}{\cancel{r}} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{|q| \cdot B}{m}}$$ Frecuencia angular

$$\omega = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} C \cdot 0{,}4 T}{1{,}67 \cdot 10^{-27} Kg} \simeq 3{,}8 \cdot 10^7 \ rad/s$$ ; descartamos la respuesta c.

Una carga que parte del reposo se acelera en la franja con campo eléctrico:

$W = q \cdot \Delta V = \Delta E_C = \frac{1}{2} m v_1^2 - 0 \Rightarrow \Delta E_C = q \cdot \Delta V$

La $\Delta V$ alterna (cambia de signo) y la carga se vuelve a acelerar: $q \cdot \Delta V = \Delta E_C = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$

$q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow 2 q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} m v_2^2$ y así sucesivamente.

La Energía cinética (tras dos pasos) es: $E_C = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot \frac{4 \cdot q \cdot \Delta V}{\cancel{m}} = 2 q \cdot \Delta V$

Despejamos la velocidad: $v_2^2 = \frac{4 \cdot q \cdot \Delta V}{m} \Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot q \cdot \Delta V}{m}}}$ Velocidad después de una vuelta

$v_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} C \cdot 5 \cdot 10^6 V}{1{,}67 \cdot 10^{-27} Kg}} \simeq 4{,}38 \cdot 10^7 \ m/s$ ; La respuesta correcta es la a

III. ¿Cuál debería ser la **distancia entre dos puntos** de un medio por el que se propaga una onda armónica, con velocidad de fase de $100\ m/s$ y $200\ Hz$ de frecuencia, para que estén en el **mismo estado de vibración** (en fase) ? :

a. $2 \cdot n$

b. $0{,}5 \cdot n$ (0,75 pt.)

c. $n$

siendo $n = 0{,}1{,}2{,}3...$ y la distancia medida en el sistema internacional

Para dos puntos en fase $\boxed{\Delta \varphi = n \cdot 2\pi}$ , $n \in \mathbb{N}\ (0, 1, \ldots)$

$\boxed{\Delta \varphi = K \cdot \Delta x}$ Diferencia de fase espacial, luego $K \cdot \Delta x = n \cdot 2\pi \Rightarrow$

$\frac{\cancel{2}\pi}{\lambda} \cdot \Delta x = n \cdot \cancel{2}\pi \Rightarrow \boxed{\Delta x = n \cdot \lambda}$ diferencia entre dos puntos

En nuestro caso: La velocidad de propagación $v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{100}{200} = 0{,}5 m$

$\Delta x = n \cdot \lambda = n \cdot 0{,}5 m$ ; La respuesta correcta es la b

IV. En un medio homogéneo e isótropo, una fuente sonora produce, a una distancia $r$, un sonido de $30\ dB$. Si la intensidad del sonido se hace $10.000$ veces mayor, la **nueva sonoridad**, a la misma distancia será:

a. $300\ dB$

b. $70\ dB$ (1,25 pt.)

c. $60\ dB$

Estudiemos la intensidad sonora : $\boxed{\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}}$ Sensación sonora escala decibélica

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 = 30\ dB\ ;\ r\ ;\ I_1 \\ I_2 = 10^4 \cdot I_1 \Rightarrow \beta_2 = ?\ \text{desconocida} \end{array}\right\}$$

$$\beta_1 = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0} = 30 \Rightarrow \log \frac{I_1}{I_0} = 3 \Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 10^3 \Rightarrow I_1 = 10^3 \cdot I_0$$

$$\beta_2 = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{10^4 \cdot I_1}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{10^4 \cdot 10^3 \cdot \cancel{I_0}}{\cancel{I_0}} \Rightarrow$$

$\beta_2 = 10 \cdot \log 10^7 = 10 \cdot 7 = 70\ dB$ ; La respuesta correcta es la b