1. Queremos trasladar un satélite terrestre de $500\ kg$ desde una **órbita circular** de radio $r_0 = 2 \cdot R_T$ **hasta otra** de radio $r_1 = 3 \cdot R_T$ . Calcula el **trabajo necesario** para trasladar el satélite en este **salto (o transferencia) orbital**. Justifica las fórmulas que emplees. Datos: $R_T = 6370\ km$ , $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$ (1,5 pt.)

a) TRANSFERENCIA ENTRE ÓRBITAS

$$E_{m_A} + E_{necesaria} = E_{m_B}$$

$$\boxed{E_{necesaria} = E_{m_B} - E_{m_A}}$$ Energía de transferencia orbital

$$E_{necesaria} = \left(\frac{1}{2} m v_B^2 - G\frac{Mm}{r_B}\right) - \left(\frac{1}{2} m v_A^2 - G\frac{Mm}{r_A}\right)$$

$$F_{c_B} = F_{g_B} \Rightarrow G\frac{M}{r_B} = v_B^2 \quad , \quad F_{c_A} = F_{g_A} \Rightarrow G\frac{M}{r_A} = v_A^2$$

$$E_{necesaria} = \left(\frac{1}{2} G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_B}\right) - \left(\frac{1}{2} G\frac{Mm}{r_A} - G\frac{Mm}{r_A}\right)$$

$$E_{necesaria} = -\frac{1}{2} G\frac{Mm}{r_B} + \frac{1}{2} G\frac{Mm}{r_A}$$

$$\boxed{E_{necesaria} = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$

Energía de transferencia orbital

$$\boxed{g_0 = G\frac{M}{R_T^2} \Rightarrow GM = g_0 R_T^2}$$ ; sustituyendo

$$\boxed{E_{necesaria} = \frac{g_0 R_T^2 m}{2}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$

Como $r_A = 2R_T$ y $r_B = 3R_T$ resulta:

$$E_{necesaria} = \frac{g_0 R_T^2 m}{2}\left(\frac{1}{2R_T} - \frac{1}{3R_T}\right) = \frac{g_0 R_T^{\cancel{2}} m}{2} \cdot \frac{1}{6\cancel{R_T}} = \frac{g_0 R_T m}{12} = \frac{9{,}8 \times 6370 \times 10^3 \times 500}{12} \approx 2601083333.333333\ J$$

$E_{necesaria} = 2{,}6 \cdot 10^9\ J$ ; La energía es positiva porque tenemos que gastar energía para ir a una órbita más lejana.

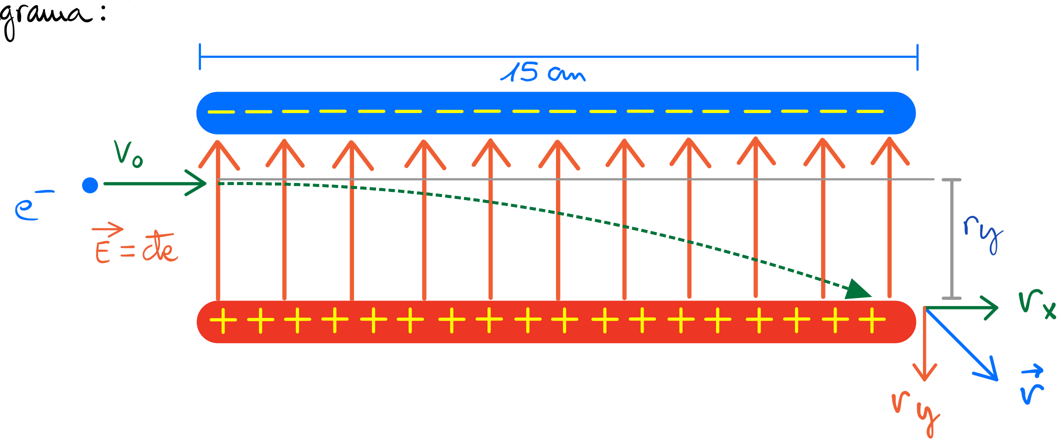
2. En un **tubo de rayos catódicos**, un **electrón** penetra con una **velocidad inicial horizontal** $\vec{v_0} = 2{,}5 \cdot 10^6\ \vec{i}\ m/s$ en una región $R$ en la que hay un **campo eléctrico uniforme** vertical $\vec{E} = 150\ \vec{j}\ \frac{N}{C}$. La longitud de las placas metálicas que crean el campo eléctrico, es decir, la longitud de la región $R$ es $L = 15\ cm$.

   a) Dibuja un **diagrama** y calcula el **vector aceleración** que experimenta el electrón. (0,5 pt.)

   b) Calcula el **aumento** de **energía cinética** del electrón después de atravesar la región $R$. (1 pt.)

   Datos: $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19} C$ , $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$

a) Diagrama:



Aceleración:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = q \cdot \vec{E}} = m \cdot \vec{a} \quad ; \quad q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a} \qquad \boxed{\vec{a} = \frac{q \cdot \vec{E}}{m}}$$

$$\vec{a} = \frac{q \cdot \vec{E}}{m} \Rightarrow a = \frac{-1{,}6 \cdot 10^{-19} C \cdot 150 \frac{N}{C}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} kg} = \frac{-1{,}6 \times 10^{-19} \times 150}{9{,}1 \times 10^{-31}} \approx -2.63736 \times 10^{13} \frac{m}{s^2} \simeq -2{,}6 \cdot 10^{13} \frac{m}{s^2}$$

$\vec{a} = -2{,}6 \cdot 10^{13} \vec{j} \ \frac{m}{s^2}$ ; En horizontal recorre la distancia L con m.r.u. ($v = cte = v_0$)

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Espacio}}{\text{Tiempo}} \Rightarrow v_0 = \frac{L}{t} \Rightarrow t = \frac{L}{v_0} = \frac{15 \cdot 10^{-2} m}{2{,}5 \cdot 10^6 m/s} = 6 \cdot 10^{-8} s$$

Velocidad

$v_x = v_0$

$v_y = a \cdot t = \frac{q \cdot E}{m} \cdot t$

$\vec{v} = v_0 \vec{i} + \frac{q \cdot E}{m} \cdot t \ \vec{j}$

$v_y = -2{,}6 \cdot 10^{13} \frac{m}{s^2} \cdot 6 \cdot 10^{-8} s$

$v_y = -1{,}56 \cdot 10^6 \ m/s$

La velocidad de salida

$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = 2{,}5 \cdot 10^6 \vec{i} - 1{,}56 \cdot 10^6 \vec{j} \ m/s$

$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2{,}5 \times 10^6)^2 + (1{,}56 \times 10^6)^2} \approx 2946794.86901 \frac{m}{s}$

$|\vec{v}| \simeq 2{,}95 \cdot 10^6 \ m/s$

El incremento de energía cinética: $\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m_e (v_f^2 - v_0^2)$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg \cdot \left[ (2{,}95 \cdot 10^6)^2 - (2{,}5 \cdot 10^6)^2 \right] \simeq 1{,}115 \cdot 10^{-18} J$$

3. Un protón se acelera desde el reposo mediante una **diferencia de potencial** de $10^3\ V$, penetrando a continuación, **perpendicularmente**, en un **campo magnético uniforme** de $0{,}2\ T$.

a) Calcula la **velocidad** del protón al entrar en el campo magnético y el **radio** de su trayectoria. (Demuestra la fórmula) (1,25 pt.)

b) Calcula la **fuerza magnética** que actúa sobre el protón. (0,25 pt.)

Datos: $q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$ , $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg$

a) El trabajo eléctrico es igual al incremento de energía cinética.

$$W = \underbrace{-q \cdot \Delta V}_{\text{Positivo ; aumenta la velocidad}} = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 - 0 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} C \cdot 1000 \ V}{1{,}67 \cdot 10^{-27} kg}} \simeq 437741 \ m/s \simeq 4{,}38 \cdot 10^5 \ m/s$$

$\vec{B} \perp \vec{v} \Rightarrow \text{sen}(\vec{v},\vec{B}) = \text{sen}\,90^\circ = 1 \Rightarrow$ se cumple la condición de órbita.

$$\boxed{F_m = F_c} \Rightarrow |q|\cdot \cancel{v} \cdot B = m \cdot \frac{v^{\cancel{2}}}{r} \Rightarrow \boxed{r = \frac{m\cdot v}{|q|\cdot B}}$$

$$r = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\,kg \cdot 4{,}38\cdot 10^{5}\,m/s}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,C \cdot 0{,}2\,T} \simeq 0{,}0229\,m = 2{,}29\cdot 10^{-2}\,m = 2{,}29\,cm$$

b) $\boxed{\vec{F}_m = q\cdot(\vec{v}\times\vec{B})}$ Fuerza magnética que actúa sobre el protón.

$$\Rightarrow F_m = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C \cdot 4{,}38\cdot 10^{5}\,m/s \cdot 0{,}2\,T \cdot \text{sen}\,90^\circ = 1{,}4\cdot 10^{-14}\,N$$

4. Una onda armónica transversal de **frecuencia** $2\ Hz$, **longitud de onda** $20\ cm$ y **amplitud** $4\ cm$, se propaga por una cuerda en el sentido positivo del eje $X$. En el instante $t = 0$, la **elongación** en el punto $x = 0$ es $y = 2{,}83\ cm$.

   a) Expresa matemáticamente la **ecuación de la onda** (trabaja en $cm$). (1 pt.)

   b) Calcula la **velocidad de propagación** de la onda y determina, en función del tiempo (en general), la **velocidad de oscilación transversal** de la partícula situada en $x = 5\ cm$ (0,5 pt.)

$\boxed{y = A\cdot \text{sen}(\omega t - Kx + \varphi_0)}$ Ecuación general de la onda

Sentido del eje X (signo menos) $A = 4\,cm$, $f = 2\,Hz\ (s^{-1})$

nº de onda $K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{20\,cm} = \frac{\pi}{10}\,cm^{-1} = 0{,}1\pi\,cm^{-1} = 10\pi\,m^{-1}$ (pero nos piden trabajar en cm).

frecuencia angular $\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 2\,Hz = 4\pi\,rad/s \Rightarrow$

Condiciones iniciales $y(0,0) = 2{,}83 = A\cdot \text{sen}(0 - 0 + \varphi_0) \Rightarrow 2{,}83 = 4\cdot \text{sen}\,\varphi_0 \Rightarrow$

Fase inicial $\text{sen}\,\varphi_0 = \frac{2{,}83}{4} \Rightarrow \varphi_0 \simeq 45^\circ = \frac{\pi}{4}\,rad$ o bien $\varphi_0 \simeq 0{,}79\,rad$

Ecuación general de la onda $y(x,t) = 4\cdot \text{sen}\left(4\pi\cdot t - 0{,}1\pi\cdot x + \frac{\pi}{4}\right)\,m$

b) La velocidad de propagación $v_p = \lambda\cdot f = 20\,cm \cdot 2\,Hz = 40\,cm/s = 0{,}4\,m/s$

Calculamos ahora la velocidad de vibración:

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 4\cdot 4\pi\cos\left(4\pi\cdot t - 0{,}1\pi\cdot x + \frac{\pi}{4}\right)\,cm/s$$

$$v(x = 5\,cm, t) = 16\pi\cos\left(4\pi\cdot t - 0{,}1\pi\cdot 5 + \frac{\pi}{4}\right)\,cm/s = 16\pi\cos\left(4\pi\cdot t - \frac{\pi}{4}\right)\,cm/s$$

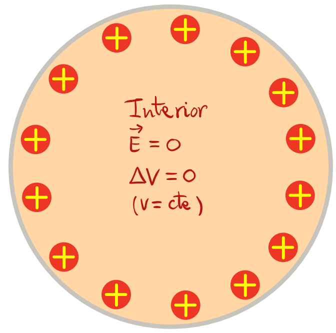
💡 **CUESTIONES JUSTIFICADAS:**

I. A una esfera metálica se le comunica una carga positiva. El **campo eléctrico**:

a. aumenta linealmente desde el centro de la esfera hasta la superficie.

b. es nulo en el interior y constante en el exterior de la esfera.

c. es máximo en la superficie de la esfera y nulo en el interior.



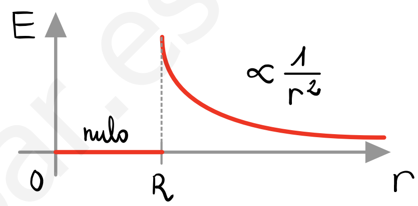

Esfera conductora en equilibrio electrostático

Según el teorema de Gauss: $\boxed{\Phi = \frac{\sum Q}{\varepsilon} = E \cdot S}$

Como en el interior no hay carga, el campo eléctrico es nulo.

En el exterior, el campo eléctrico creado por una esfera conductora:

$$\Phi = \frac{\sum Q}{\varepsilon} = E \cdot S \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q}{S \cdot \varepsilon}} \quad \text{Campo eléctrico} \begin{cases} \boxed{K = \frac{1}{4\pi\varepsilon}} \\ \boxed{S = 4\pi r^2} \end{cases}$$




$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \Rightarrow \boxed{E = K \cdot \frac{Q}{r^2}}$$ Campo eléctrico de una esfera

En el exterior el campo $E \propto \frac{1}{r^2}$ es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Será máximo cuando $r = R$ (el radio de la esfera). La opción correcta es la c

II. Calcula **teóricamente** el **incremento de energía cinética** de una carga $q$ que parte del reposo dentro de un **ciclotrón** después de describir **1 vuelta completa**:

a. $q \cdot \Delta V$

b. $2 \cdot q \cdot \Delta V$ (1 pt.)

c. $4 \cdot q \cdot \Delta V$

Una carga que parte del reposo se acelera en la franja con campo eléctrico:

$$W = q \cdot \Delta V = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_1^2 - 0 \Rightarrow \Delta E_c = q \cdot \Delta V$$

La $\Delta V$ alterna (cambia de signo) y la carga se vuelve a acelerar:

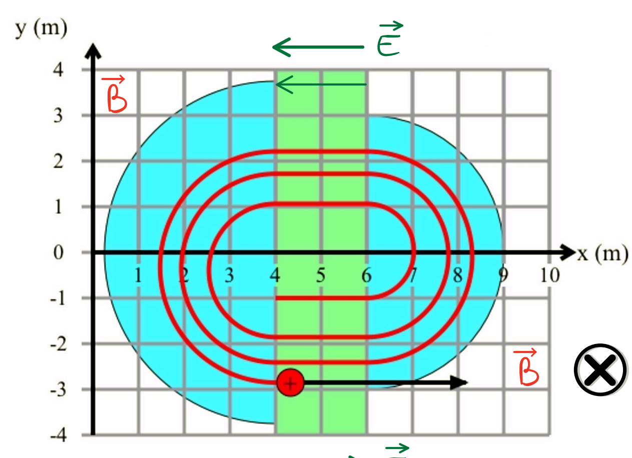
$$q \cdot \Delta V = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow 2 q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} m v_2^2$$ y así sucesivamente.

La Energía cinética (tras dos pasos) es:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot \frac{4 \cdot q \cdot \Delta V}{\cancel{m}} = 2 q \cdot \Delta V$$

que representa el $\Delta E_c$ desde el inicio. La opción correcta es la b




$\Delta V = -E \cdot d$

III. Una onda transversal se propaga en el sentido positivo del eje $X$ con una **velocidad** de $300\ m \cdot s^{-1}$, siendo el **período** de oscilación de $2 \cdot 10^{-2}\ s$. Dos puntos que se encuentran, respectivamente, a **distancias** de $20\ m$ y $38\ m$ del foco emisor de la vibración estarán:

a. en **fase**

b. en **oposición de fase** (1 pt.)

c. en una **situación distinta** de las anteriores

La velocidad de propagación $v_p = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v_p \cdot T = 300\ \frac{m}{s} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ s = 6\ m$

La distancia entre los puntos $\Delta x = |38 - 20| = 18\ m$

Exploremos la posibilidad de que estén en fase, es decir, si $\boxed{\Delta\varphi = n \cdot 2\pi}$, $n \in \mathbb{N}\ (0, 1, \dots)$

$\boxed{\Delta\varphi = K \cdot \Delta x}$ Diferencia de fase espacial

$\Delta\varphi = K \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{6\ m} \cdot 18\ m = 6\pi\ rad = 3 \cdot 2\pi\ rad$,

es decir, un múltiplo entero de $2\pi$, luego están en fase. La opción correcta es la a

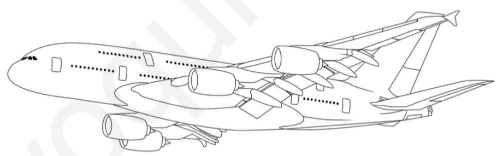
Si no se verificase esta condición habría que comprobar si $\Delta\varphi = (2n+1) \cdot \pi$ (Oposición de fase)

IV. Un avión emite un sonido de $8.000\ Hz$ de **frecuencia** y $120\ dB$ de **sensación sonora** cuando vuela a una **velocidad** de $900\ km/h$ **acercándose** a una persona situada en reposo en un aeropuerto. Esta persona percibirá respectivamente una frecuencia y una intensidad sonora de:

a. $22.222\ Hz$ y $1\ \frac{W}{m^2}$

b. $30.222\ Hz$ y $1\ \frac{W}{m^2}$ (1,5 pt.)

c. $30.222\ Hz$ y $12\ \frac{W}{m^2}$



Datos: **Velocidad del sonido** $v_{sonido} = 340\ m/s$ ; **Intensidad umbral** $I_0 = 1 \cdot 10^{-12}\ \frac{W}{m^2}$.

La fuente de sonido (el avión) está en movimiento, por lo que se va a producir un efecto Doppler.

La ecuación del efecto Doppler, si el observador está en reposo, es:

Si se acercan: $\boxed{f' = f \cdot \left(\frac{V}{V - V_F}\right)}$

Si se alejan: $\boxed{f' = f \cdot \left(\frac{V}{V + V_F}\right)}$

$V = 900\ \frac{km}{h} \cdot \frac{1h}{3600s} \cdot \frac{10^3 m}{1 km} = 250\ m/s$

$f' = 8000\ Hz \cdot \frac{340\ m/s}{(340 - 250)\ m/s} \simeq 30.222\ Hz$ (más agudo)

Estudiemos ahora la intensidad sonora: $\beta = 120\ dB$ ; $\boxed{\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}}$ Sensación sonora escala decibélica

$\Rightarrow \frac{\beta}{10} = \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^{\beta/10} \Rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\beta/10} = 10^{-12}\ \frac{W}{m^2} \cdot 10^{120/10} = 1\ \frac{W}{m^2}$

La opción correcta es la b