1. Estudia la continuidad de la siguiente función: (1 Punto)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-5} & si\ x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & si\quad 0 < x \leq 3 \\ \frac{x-1}{2x-6} & si\ x > 3 \end{cases}$$

2. Averiguar a,b para que la función f(x) sea continua: (1 Punto)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 10 + b & si\ x < 2 \\ x^2 - 3x + a & si\quad 2 \leq x \leq 6 \\ 5x - b & si\ x > 6 \end{cases}$$

3. Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones: (2 Puntos)
   a. $f(x) = \frac{3+x-x^2}{x^2-1}$
   b. $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-3}$
4. Calcula los siguientes límites:
   a. $\lim\limits_{X\to\infty} \frac{X}{1-\sqrt{X+1}}$ b. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{7x^2-5x}{7x^2+2x-3}\right)^{\frac{x^2-5}{3x-8}}$ c. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^2+7x+10}{6x^2+3x}$
   d. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x+5}-3}$ e. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2-5x}{2x+3} - \frac{x^2+7}{3x-5}\right)$
5. El precio en euros de x litros de aceite comprados en una almazara viene dado por la función:

$$P(x) = \begin{cases} 3x & si\quad 0 \leq x \leq 20 \\ \sqrt{ax^2 + 2000} & si\ x > 20 \end{cases}$$

   a) Determina el valor de la constante a para que la función P(x) sea continua.
   b) Si se comprasen muchísimos litros de aceite, ¿A cuánto saldría aproximadamente el precio de cada litro? Tener en cuenta que la función es el precio para x litros.

CONTROL T.6 1ºB (1) 2020-21

① (1)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{x-5} & \text{si } x\le 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0<x\le 3 \\ \dfrac{x-1}{2x-6} & \text{si } x>3 \end{cases}$$

Cont por ser polinómica en su int. def. pq $5 \notin$ Dom

$x+1\ge 0 \rightarrow$ Dom: $x\ge -1$ Cont.

Cont pq $3 \notin$ Dom

En $x=0$

$f(0)=\frac{5}{-5}=-1$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{5}{x-5}=-1$ $\neq$

$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x+1}=1$

Disc. inevitable de salto finito

En $x=3$

$f(3)=\sqrt{3+1}=2$

$\lim_{x\to 3^-} \sqrt{x+1}=2$ $\neq$

$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-1}{2x-6}=\frac{2}{0}=\pm\infty$

Disc inevitable de salto infinito

② (1)

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+10+b & \text{si } x<2 \\ x^2-3x+a & \text{si } 2\le x\le 6 \\ 5x-b & \text{si } x>6 \end{cases}$$

Cont. por ser polinómicas en su intervalo de definición

En $x=2$

$f(2)=4-6+a=-2+a$

$\lim_{x\to 2^-} 2x^2+10+b=18+b$

$\qquad\qquad\qquad\qquad ||$

$\lim_{x\to 2^+} x^2-3x+a=-2+a$

$18+b=-2+a$

$\boxed{a-b=20}$

En $x=6$

$f(6)=36-18+a$

$\lim_{x\to 6^-} x^2-3x+a=18+a$

$\qquad\qquad\qquad\qquad ||$

$\lim_{x\to 6^+} 5x-b=30-b$

$18+a=30-b \rightarrow \boxed{a+b=12}$

$\left.\begin{array}{l} a-b=20 \\ a+b=12 \end{array}\right\}\ 2a=32 \rightarrow \boxed{a=16}$

$\boxed{b=-4}$

③ (2)

a) $f(x)=\frac{3+x-x^2}{x^2-1}$

Dom $\mathbb{R}-\{1,-1\}$

AV $\lim_{x\to -1} \frac{3+x-x^2}{x^2-1}=\frac{-3}{0}=\pm\infty \rightarrow \boxed{x=-1}$

$\lim_{x\to 1} \frac{3+x-x^2}{x^2-1}=\frac{3}{0}=\pm\infty \rightarrow \boxed{x=1}$

AH $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{3+x-x^2}{x^2-1}=-1 \rightarrow \boxed{y=-1}$

AO no tiene porque hay AO

b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-3}$ Dom: $\mathbb{R}-\{3\}$

AV $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-2}{x-3}=\dfrac{10}{0}=\pm\infty \to \boxed{x=3}$

AH $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x-3}=\pm\infty$ No hay

AO $m=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x}=1$ $n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^2+x-2}{x-3}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x-2}{x-3}=4$

$\boxed{y=x+4}$

(4) a) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{0-0}=+\infty$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x^2-5x}{7x^2+2x-3}\right)^{\frac{x^2-5}{3x-8}}=[1^\infty]=e^{\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{7x^2-5x}{7x^2+2x-3}-1\right]\frac{x^2-5}{3x-8}}=$

$=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-7x+3}{7x^2+2x-3}\cdot\frac{x^2-5}{3x-8}}=e^{-7/21}=e^{-1/3}$

c) $\lim_{x\to-2}\dfrac{x^2+7x+10}{6x^2+3x}=\dfrac{0}{18}=0$

d) $\lim_{x\to 4}\dfrac{2x-8}{\sqrt{x+5}-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\dfrac{2(x-4)\left[\sqrt{x+5}+3\right]}{x+5-9}=\lim_{x\to 4}2\left[\sqrt{x+5}+3\right]=12$

e) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-5x}{2x+3}-\dfrac{x^2+7}{3x-5}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{9x^3-15x^2-15x^2+25x-2x^3-3x^2-14x-21}{6x^2-10x-9x-15}=$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-33x^2+11x-21}{6x^2-19x-15}=+\infty$

(5) $P(x)=\begin{cases}3x & \text{si } 0\le x\le 20\\ \sqrt{ax^2+2000} & \text{si } x>20\end{cases}$

a) $\lim_{x\to 20^-}3x=60$

$\lim_{x\to 20^+}\sqrt{ax^2+2000}=\sqrt{400a+2000}$

$\sqrt{400a+2000}=60$
$400a+2000=3600$
$400a=1600\to a=\dfrac{1600}{400}=4$

Para que sea continua $a=4$

b) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2000}}{x}=2$ Saldrá a 2€ el litro.