Problema 1:

APARTADO 1 (Bloque A+D) [2,5 PUNTOS]

Resuelva una de las siguientes cuestiones (1A o 1B):

1A) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1A.a) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa. En caso afirmativo, calcúlela.

1A.b) [0,5 PUNTOS] Calcule $C - 3B$.

1A.c) [1 PUNTO] Resuelve la ecuación $AX + 3B = C$.

Solución:

1A.a) Para que la matriz tenga inversa su determinante no debe ser nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0-1+2-0-0 = 1 \neq 0$$

El determinante de A es distinto de cero y esta matriz tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1A.b) Calculamos la matriz $C - 3B$.

$$C-3B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-6 & 0+6 & 2-0 \\ -1-0 & 2+3 & 1-6 \\ 0-3 & -2+3 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1A.c) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX+3B = C \Rightarrow AX = C-3B \Rightarrow X = A^{-1}(C-3B)$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X = A^{-1}(C-3B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3 & 5+1 & -5+2 \\ -2-3 & 10+1 & -10+2 \\ 9+1 & -6-5 & -2+5 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -5 & 11 & -8 \\ 10 & -11 & 3 \end{pmatrix}$.

Problema 2:

1B) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Determine si este sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado en el caso en que:

1B.a) [1,25 PUNTOS] $a = 2$. Resuélvalo si es compatible.

1B.b) [1,25 PUNTOS] $a = 8$. Resuélvalo si es compatible.

Solución:

1B.a) Para $a=2$ el sistema queda $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ -2x+2z=0 \\ -x-3y+3z=2 \end{cases}$.

Este sistema tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Utilizamos el método de Gauss para transformar la matriz ampliada y obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -1 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -6 & 4 & 4 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2\cdot\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 4 \\ \hline 0 & -6 & 4 & 4 \end{array} \to \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 0 \end{array}}^{A/B} \right)$$

Los rangos de la matriz A y de A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos partiendo del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & -3 & 1 \end{matrix}}^{A/B} & 2 \\ 0 \quad -6 \quad 4 & 4 \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3y+z=2 \\ -6y+4z=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3y+z=2 \\ -3y+2z=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3y+z=2 \\ -3y=2-2z \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2-2z+z=2 \Rightarrow x-z=0 \Rightarrow x=z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\alpha \\ -3y=2-2\alpha \rightarrow y=\dfrac{-2}{3}+\dfrac{2}{3}\alpha \\ z=\alpha \end{cases}}$$

Para $a=2$ las soluciones del sistema son $x=\alpha;\ y=\dfrac{-2}{3}+\dfrac{2}{3}\alpha;\ z=\alpha$ para cualquier valor $\alpha \in \mathbb{R}$.

1B.b) Para $a=8$ el sistema queda $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ -2x+2z=0 \\ -x-3y+3z=8 \end{cases}$.

Este sistema tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Utilizamos el método de Gauss para transformar la matriz ampliada y obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Fila 3ª + Fila 1ª} \\ -1 \quad -3 \quad 3 \quad 8 \\ 1 \quad -3 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 0 \quad -6 \quad 4 \quad 10 \rightarrow \text{Nueva fila 3ª} \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} \text{Fila 2ª} + 2\cdot\text{Fila 1ª} \\ -2 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ 2 \quad -6 \quad 2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad -6 \quad 4 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila 2ª} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \text{Fila 3ª} - \text{Fila 2ª} \\ 0 \quad -6 \quad 4 \quad 10 \\ 0 \quad 6 \quad -4 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \rightarrow \text{Nueva fila 3ª} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & -3 & 1 \end{matrix}}^{A/B} & 2 \\ 0 \quad -6 \quad 4 & 4 \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & 6 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Problema 3:

APARTADO 2 (Bloque B) [2,5 PUNTOS]

Resuelva una de las siguientes cuestiones (2A o 2B):

2A) Considere la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x, & \text{si } x \leq 3 \\ \ln(x^2 - 9), & \text{si } x > 3, \end{cases}$$

donde ln denota al logaritmo neperiano.

2A.a) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.

2A.b) [0,75 PUNTOS] Determine los intervalos de continuidad de $f(x)$.

2A.c) [0,5 PUNTOS] Halle los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX de abscisas.

2A.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la(s) asíntota(s) de $f(x)$ y diga de que tipo(s) es(son), si la(s) tiene.

Solución:

2A.a) El único problema se puede plantear al calcular el logaritmo neperiano, pero si $x>3$ entonces $x^2-9>9-9=0$ y el logaritmo neperiano $\ln\left(x^2-9\right)$ existe.

El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$.

2A.b) En el intervalo $(-\infty,3)$ la función es $f(x)=x^3-6x^2+9x$ que es una función polinómica y por tanto continua.

En el intervalo $(3,+\infty)$ la función es $f(x)=\ln\left(x^2-9\right)$ que es una función logarítmica que es continua pues $x^2-9>0$.

Comprobamos la continuidad en *x = 3*.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^3-6x^2+9x=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \ln\left(x^2-9\right)=\ln(9-9)=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)\neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

La función no es continua en *x = 3*. La función es continua en $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

2A.c) Hallamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+9x & si\ x\leq 3 \\ \ln\left(x^2-9\right) & si\ x>3 \end{cases} \\ \qquad eje\ OX \to y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^3-6x^2+9x=0 \to x\left(x^2-6x+9\right)=0 \to \\ \quad \to \begin{cases} \boxed{x=0} \in (-\infty,3) \\ x^2-6x+9=0 \to \boxed{x=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-36}}{2}=3} \end{cases} \\ \ln\left(x^2-9\right)=0 \to x^2-9=1 \to x^2=10 \to \\ \quad \to \boxed{x=\sqrt{10}} \simeq 3.16 \in (3,+\infty) \end{cases}$$

Los puntos de corte de *f(x)* con el eje OX de abscisas son $(0,0)$, $(3,0)$ y $\left(\sqrt{10},0\right)$.

2A.d) **Asíntotas verticales**. $x = a$.

$x = 3$ es asíntota vertical por la derecha pues $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \ln(x^2 - 9) = \ln(9-9) = -\infty$.

Asíntota horizontal. $y = b$.

Buscamos en $-\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 - 6x^2 + 9x = -\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Buscamos en $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 9) = +\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x} = \lim_{x \to -\infty} x^2 - 6x + 9 = +\infty \\ = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 - 9)}{x} = \dfrac{\infty}{\infty} = \{L'Hôpital\} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{2x}{x^2 - 9}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2 - 9} = 0 \end{cases}$$

Como el valor obtenido es $+\infty$ y 0 la función no tiene asíntota oblicua.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical por la derecha: $x = 3$ y no tiene ni asíntota horizontal ni oblicua.

Problema 4:

2B) Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

2B.a) [0,5 PUNTOS] Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es decreciente.

2B.b) [1 PUNTO] Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es cóncava.

2B.c) [1 PUNTO] Determine los puntos de inflexión de $f(x)$.

Solución:

2B.a) El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$, pues el denominador nunca se anula. Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+1\right)-2x\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos: $x=-1$ y $x=1$

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=\frac{1-(-2)^2}{\left((-2)^2+1\right)^2}=\frac{-3}{25}<0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\frac{1-0^2}{\left(0^2+1\right)^2}=1>0$. La función crece en $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{1-2^2}{\left(2^2+1\right)^2}=\frac{-3}{25}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2B.b) Buscamos los valores que anulan la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{-2x\left(x^2+1\right)^2-2\left(1+x^2\right)2x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$=\frac{-2x\left(x^2+1\right)-4x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}=0 \Rightarrow 2x^3-6x=0 \Rightarrow 2x\left(x^2-3\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^2-3=0 \to \boxed{x=\pm\sqrt{3}} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes, entre y después de estos tres valores.

- En el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ tomamos $x=-2$ y la segunda derivada vale

  $f''(-2)=\frac{2(-2)^3-6(-2)}{\left((-2)^2+1\right)^3}=\frac{-4}{125}<0$. La función es cóncava (∩) en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(-\sqrt{3},0\right)$ tomamos $x=-1$ y la segunda derivada vale

  $f''(-1)=\frac{2(-1)^3-6(-1)}{\left((-1)^2+1\right)^3}=\frac{4}{8}>0$. La función es convexa (∪) en $\left(-\sqrt{3},0\right)$.

- En el intervalo $\left(0,+\sqrt{3}\right)$ tomamos $x=1$ y la segunda derivada vale

  $f''(1)=\frac{2(1)^3-6(1)}{\left(1^2+1\right)^3}=\frac{-4}{8}<0$. La función es cóncava (∩) en $\left(0,+\sqrt{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$ tomamos $x=2$ y la segunda derivada vale

  $f''(2)=\frac{2(2)^3-6(2)}{\left(2^2+1\right)^3}=\frac{4}{125}>0$. La función es convexa (∪) en $\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$.

La función es cóncava en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,+\sqrt{3}\right)$.

2B.c) La función cambia de concavidad a convexidad o viceversa en $x=0$, $x=+\sqrt{3}$ y $x=-\sqrt{3}$.

$$f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{-\sqrt{3}}{4} \to A\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$f(0)=\frac{0}{(0)^2+1}=0 \longrightarrow B(0,0)$$

$$f\left(+\sqrt{3}\right)=\frac{+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{+\sqrt{3}}{4} \longrightarrow C\left(+\sqrt{3},\frac{+\sqrt{3}}{4}\right)$$

Sus puntos de inflexión son $A\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$, $B(0,0)$ y $C\left(+\sqrt{3},\frac{+\sqrt{3}}{4}\right)$.

Problema 5:

APARTADO 3 (Bloque C) [2,5 PUNTOS]

Considere el punto $P = (1, 5, 0)$ y la recta $r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$

3.a) [0,75 PUNTOS] Obtenga la ecuación de la recta paralela a r que pase por el punto P.

3.b) [1,25 PUNTOS] Considere un punto P' en r y un vector dirección de r. Calcule el área del paralelogramo determinado por $\vec{P'P}$ y el vector dirección de r elegido.

3.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y r.

Solución:

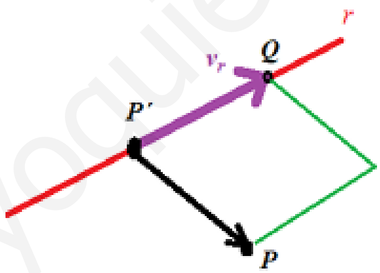
3.a) Hallamos un vector director y un punto de la recta r.

$$r:\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-x \\ 2x-1=z \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\alpha \\ y=2-\alpha \\ z=-1+2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,2,-1) \\ \vec{v_r}=(1,-1,2) \end{cases}$$

La recta s paralela a r tiene como vector director el vector director de r.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,5,0)\in s \\ \vec{u_s}=\vec{v_r}=(1,-1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=5-\lambda \, ; \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2\lambda \end{cases}$$

3.b) Dibujamos el paralelogramo.



Consideramos el punto $P'=P_r(0,2,-1)$ y el vector director $\vec{v_r}=(1,-1,2)$. Hallamos las coordenadas del punto Q sumando al punto P´ el vector $\vec{v_r}$.

$$Q=P'+\vec{v_r}=(0,2,-1)+(1,-1,2)=(1,1,1)$$

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{P'P}\times\vec{v_r}$.

$$\overrightarrow{P'P}=(1,5,0)-(0,2,-1)=(1,3,1)$$

$$\overrightarrow{P'P}\times\vec{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=6i+j-k-3k-2j+i=7i-j-4k=(7,-1,-4)$$

$$Área=\left|\overrightarrow{P'P}\times\vec{v_r}\right|=\sqrt{7^2+(-1)^2+(-4)^2}=\boxed{\sqrt{66}\simeq 8.124\ u^2}$$

El área del paralelogramo tiene un valor de $\sqrt{66} \simeq 8.124$ unidades cuadradas.

3.c) La distancia del punto P a la recta r es el valor del área del paralelogramo dividida por el módulo del vector $\overrightarrow{v_r}$ (base del paralelogramo).

$$\overrightarrow{v_r} = (1,-1,2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$d(P,r) = \frac{\text{Área paralelogramo}}{base = \left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{6}} = \sqrt{11} \simeq 3.32\, unidades$$

Problema 6:

APARTADO 4 (Bloque E) [2,5 PUNTOS]

Resuelva una de las siguientes cuestiones (4A o 4B):

4A) Determinada enfermedad es curable si se trata antes de que aparezcan sus síntomas. Para poder tratar a los pacientes a tiempo, se pasa un test a la mayor parte de la población. El $1,5\%$ de la población sufre esta enfermedad. La probabilidad de que, no sufriendo la enfermedad, el test de positivo es $0,021$ y la de que si estas enfermo de negativo también es $0,021$.

4A.a) [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de no sufrir la enfermedad?

4A.b) [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que el test de positivo si la persona está enferma?

4A.c) [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo?

Solución:

Llamamos M al suceso "sufrir la enfermedad" y T a "el test da positivo".
Tenemos que $P(M)=0.015$, $P\left(T/\overline{M}\right)=0.021$ y $P\left(\overline{T}/M\right)=0.021$.

4A.a) Nos piden calcular $P\left(\overline{M}\right)$. Como es el suceso contrario de sufrir la enfermedad tenemos que $P\left(\overline{M}\right)=1-P(M)=1-0.015=0.985$.

4A.b) Nos piden calcular $P(T/M)$. Como es el suceso contrario de dar negativo si tienes la enfermedad tenemos que $P(T/M)=1-P\left(\overline{T}/M\right)=1-0.021=0.979$.

4A.c) Nos piden calcular $P(M/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/T)=\frac{P(M\cap T)}{P(T)}=\frac{P(M)P(T/M)}{P(M)P(T/M)+P\left(\overline{M}\right)P\left(T/\overline{M}\right)}=$$

$$=\frac{0.015\cdot 0.979}{0.015\cdot 0.979+0.985\cdot 0.021}=\boxed{\frac{979}{2358}\simeq 0.415}$$

La probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo tiene un valor aproximado de 0.415.

Problema 7:

4B) Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 1$.

4B.a) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(A \cap B)$.

4B.b) [0,75 PUNTOS] Razone si A y B son independientes.

4B.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(B^c)$, con B^c el suceso contrario a B.

4B.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la $P(A^c \cap B^c)$, con A^c el suceso contrario a A.

Solución:

4B.a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cup B) = 1 \\ P(A) = 0.8 \\ P(B) = 0.5 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 0.8 + 0.5 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 1.3 - 1 = 0.3}$$

Hemos obtenido que $P(A \cap B) = 0.3$.

4B.b) Para que A y B sean independientes debe cumplirse que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Averiguamos si se cumple la igualdad o no.

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A)P(B) = 0.8 \cdot 0.5 = 0.4 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.3 \neq 0.4 = P(A)P(B)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos A y B no son independientes.

4B.c) $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0.5 = 0.5$

4B.d) Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(A^c \cap B^c) = P\left((A \cup B)^c\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 1 = \boxed{0}$$