Problema 1:

PROBLEMA 1 [[$2,5\ puntos$]]

La elaboración de tapices es un arte que se transmite de generación en generación, por lo que la mayoría de los maestros tejedores tienen experiencia en tapicería tradicional y están capacitados para aprender las técnicas y procesos.

Con el fin de planificar la producción de estas pequeñas obras de arte, un fabricante egipcio organiza las necesidades de materia prima por meses y las unidades producidas por metro lineal. En un determinado mes dispone de 50 kg de hilo de seda, 40 kg de hilo de plata y 22,5 kg de hilo de oro.

Para crear algunos tapices se suelen necesitar días y emplear materiales más económicos (tipo A); otros, en cambio, se suelen tardar semanas y requerir de materiales de mayor calidad y coste para su creación (tipo B); pero todos ellos necesitan la paciencia y la atención de los expertos en los detalles para convertirse en una pieza de artesanía.

Para fabricar un metro lineal de tapiz del tipo A se necesitan 100 g de hilo de seda y 200 g de hilo de plata; y para cada metro lineal del tipo B, 200 g de hilo de seda, 100 g de hilo de plata y 100 g de hilo de oro.

El metro lineal de tapiz del tipo A se vende a 2.000 €, y en el caso del tipo B a 3.000 €.

Si se vende todo lo que se fabrica:

a) [[$1,6\ puntos$]]¿Cuántos metros lineales de cada tipo de tapiz deben elaborarse ese mes para maximizar los ingresos?

b) [[$0,3\ puntos$]] ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

c) [[$0,6\ puntos$]] ¿Qué cantidades de hilo de seda, plata y oro quedarán cuando se fabriquen los metros lineales de cada tipo de tapiz que generan el ingreso máximo?

Solución:

"PLANIFICACIÓN EN LA FABRICACIÓN DE TAPICES: PROGRAMACIÓN LINEAL"

a) Metros lineales que hay que realizar de cada tipo de tapiz para maximizar los ingresos:

	Seda	Plata	Oro	Precio	Variables
A	100 g	200g	0	2.000 €	x
B	200 g	100 g	100 g	3.000 €	y
Disponibilidad	50 kg	40 kg	22,5 kg		

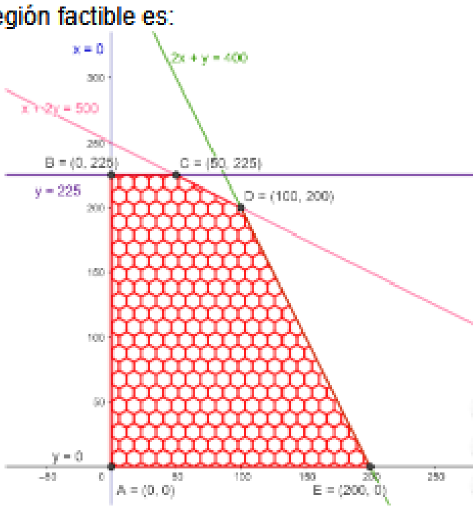
- La función objetivo es:

$$f(x,y) = 2.000x + 3.000\,y$$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 100x + 200y \leq 50.000 \\ 200x + 100y \leq 40.000 \\ 100\,y \leq 22.500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \end{cases}$$

- En el plano XY, la región factible es:



- Los vértices son:

$$A(0,0),\quad B(0,225),\quad C(50,225),\quad D(100,200),\quad E(200,0)$$

- Calculamos los valores que toma la función objetivo en los vértices:

$$f(A)=f(0,0)=0$$

$$f(B)=f(0,225)=675.000$$

$$f(C)=f(50,225)=775.000$$

$$f(D)=f(100,200)=800.000$$

$$f(E)=f(200,0)=400.000$$

El valor máximo de la función se obtiene en el punto **D (100,200)**, por lo que para obtener el ingreso máximo hay que realizar **100 m lineales de tapiz tipo A y 200 m lineales de tapiz tipo B.**

b) El ingreso máximo:

$$f(x,y)=f(D)=f(100,200)=800.000$$

Así, **el ingreso máximo es 800.000 €.**

c) Cuando se fabrican los metros lineales de cada tipo de tapiz que proporcionan el máximo ingreso, calculamos qué cantidad queda de cada tipo de hilo:

- La cantidad de hilo de seda usada es $=100\cdot 100+200\cdot 200=50.000$, por lo tanto, **nos quedarán 0 kg de hilo de seda.**

- La cantidad de hilo de plata usada es $=200\cdot 100+100\cdot 200=40.000$, por lo tanto, **nos quedarán 0 kg de hilo de plata.**

- La cantidad de hilo de oro usada es$=100\cdot 200=20.000$, **esto es, 20 kg,** por lo tanto, **nos quedarán 2,5 kg de hilo de oro.**

PROBLEMA 2

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 2.1 o APARTADO 2.2

APARTADO 2.1 $[\![2,5\ \boldsymbol{puntos}]\!]$

Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C.

El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Dichas latas de tomate se venden a 1, 1,8 y 3,3 €, respectivamente.

Compramos 20 latas que tienen un peso total de 10 kg y un valor total de 35,6 €. Queremos saber cuántas latas hemos comprado de cada fabricante.

a) $[\![1\ \boldsymbol{punto}]\!]$ Plantea el sistema de ecuaciones que resuelve el problema.

b) $[\![1,5\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Resuelve el problema.

Solución:

PROBLEMA 2

APARTADO 2.1

"COMPRA DE LATAS DE TOMATE: SISTEMA DE ECUACIONES Y RESOLUCIÓN"

a) Planteamos el sistema de ecuaciones que resuelve el problema:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + 2y + 4z = 40 \\ x + 1{,}8y + 3{,}3z = 35{,}6 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema mediante el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 2 & 4 & 40 \\ 1 & 1{,}8 & 3{,}3 & 35{,}6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{c} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \\ 0 & 0{,}8 & 2{,}3 & 15{,}6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 0{,}8 \cdot F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & -0{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ y + 3z = 20 \\ -0{,}1z = -0{,}4 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{z = 4}\ ;\ \boldsymbol{y = 8}\ ;\ \boldsymbol{x = 8}$$

APARTADO 2.2 $[\![2,5\ puntos]\!]$

Dada la matriz $A(a)$:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $[\![0,6\ punto]\!]$ Calcula, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A^2(a)$ valga 4.

b) $[\![1\ punto]\!]$ Comprueba si la matriz $A(a)$ es regular (invertible) para los valores de a obtenidos en el apartado anterior. Si es regular para el caso $a = 2$, calcula $A^{-1}(a)$.

c) $[\![0,9\ puntos]\!]$ Determina la siguiente matriz M y el valor de su determinante:

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2)$$

Solución:

PROBLEMA 2

APARTADO 2.2

"PROPIEDADES Y CÁLCULOS DE MATRICES: DETERMINANTE E INVERSIBILIDAD"

Dada la matriz $A(a)$:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculamos el valor del parámetro a para que el valor del determinante de la matriz $A^2(a)$ sea 4.

- $4 = |A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = (|A|)^2 \Rightarrow 4 = (|A|)^2 \Rightarrow |A| = \pm 2$

  Hemos utilizado la propiedad de los determinantes:

  $$\boldsymbol{|A \cdot B| = |A| \cdot |B|}$$

- $|A| = a$

Luego, $\boldsymbol{a} = \pm 2$

b) Comprobamos que la matriz $A(a)$ es regular para los valores $\boldsymbol{a} = \pm 2$

- ¿Es regular?

  La matriz A es regular $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

  - En el apartado a), hemos obtenido que $|A| = \pm 2$ cuando $\boldsymbol{a} = \pm 2$, luego es **regular** y por lo tanto $\exists\, A^{-1}$.
  - Otra forma de razonarlo es:

    $|A| = a \neq 0 \ \Leftrightarrow a \neq 0$

Entonces, como $a = \pm 2$ se obtiene que $\exists\, A^{-1}$.

- Calcularemos la matriz $A^{-1}(a)$, cuando $a = 2$:
  - $|A| = 2$
  - $Adj\,(A)^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1-a & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\,\big(A(2)\big)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
  - $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj\,(A)^t \Rightarrow \mathbf{A^{-1}(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1/2} & \mathbf{1/2} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1/2} & -\mathbf{1/2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

c) Calculamos la matriz M y el valor de su determinante:

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2)$$

- $M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{3/2} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1/2} & -\mathbf{1/2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- $|M| = |A^t(2) \cdot A^{-1}(2)| = |A^t(2)| \cdot |A^{-1}(2)| = |A(2)| \cdot \frac{1}{|A(2)|} = 1 \Rightarrow \mathbf{|M| = 1}$

Hemos utilizado las propiedades de los determinantes:

$\mathbf{|A \cdot B| = |A| \cdot |B|}$	$\mathbf{|A^t| = |A|}$	$\mathbf{|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}}$

PROBLEMA 3

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 3.1 o APARTADO 3.2

APARTADO 3.1 $[\![2,5\ \boldsymbol{puntos}]\!]$

Las funciones $E(x)$ y $D(x)$ representan, respectivamente, el rendimiento de dos pintores, Eneko y Deiene un determinado día que trabajan durante 8 horas.

Ambas funciones miden los metros cuadrados pintados por hora y se pueden determinar mediante las expresiones:

$$E(x) = -x^2 + 19x + 66 \quad 0 \leq x \leq 8$$

$$D(x) = -x^2 + 5x + 150 \quad 0 \leq x \leq 8$$

a) $[\![0,3\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ ¿Qué pintor tiene mejor rendimiento inicial?

b) $[\![0,6\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ ¿Cuál es el mayor rendimiento de Eneko? ¿Cuándo se da?

c) $[\![0,5\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ ¿Cuál es el mayor rendimiento de Deiene? ¿Cuándo se da?

d) $[\![0,3\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ ¿Cuándo tienen ambos el mismo rendimiento?

e) $[\![0,8\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Al final de la jornada laboral de ese día, ¿cuántos m^2 ha pintado Deiene en total?

Solución:

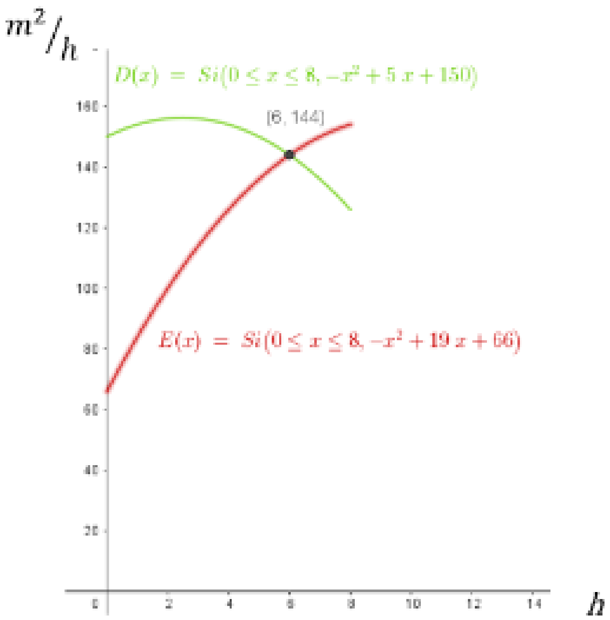
PROBLEMA 3

APARTADO 3.1

"ANÁLISIS Y COMPARACIÓN DEL RENDIMIENTO DE DOS PINTORES"

$$Eneko \equiv E(x) = -x^2 + 19x + 66 \quad 0 \leq x \leq 8$$

$$Deiene \equiv D(x) = -x^2 + 5x + 150 \quad 0 \leq x \leq 8$$



a) ¿Qué pintor tiene mejor rendimiento inicial?

El rendimiento inicial es el rendimiento al inicio del día, es decir, cuando la incógnita $x = 0$:

$$\begin{cases} E(0) = 66 \\ D(0) = 150 \end{cases}$$

Por lo tanto, **Deiene tiene un rendimiento inicial mejor, concretamente, 150 $\boldsymbol{m^2/h}$.**

b) ¿Cuál es el mayor rendimiento de Eneko? ¿Cuándo se da?

- Calculamos $E'(x)$:

$$E'(x) = -2x + 19$$

- Calculamos cuándo se anula la primera derivada:

$$E'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -2x + 19 = 0 \;\Rightarrow\; x = 9{,}5$$

- Analizamos la segunda derivada de la función en ese punto:

$$E''(x) = -2 \;\Rightarrow\; E''(9{,}5) = -2 < 0\ ,$$

Por lo tanto, la función tiene un máximo en ese punto.

Concluimos que el momento en el que ocurre el mayor rendimiento es transcurridas 9,5 horas que está fuera del dominio de definición, luego no alcanza su mayor rendimiento dentro de la jornada laboral de 8 horas.

- Analizamos el máximo dentro de su jornada laboral:

Estudiamos el crecimiento de la función y para ello analizamos el signo de la primera derivada:

$$E'(x) = -2x + 19 > 0 \;\Rightarrow\; x < 9{,}5$$

Luego la función es creciente en todo su dominio de definición, por lo tanto, el mayor rendimiento (dentro de su jornada laboral) lo tiene al de **8 horas**, siendo éste:

$$E(8) = \mathbf{154}\ {}^{\boldsymbol{m^2}}\!/_{\boldsymbol{h}}$$

c) ¿Cuál es el mayor rendimiento de Deiene? ¿Cuándo se da?

$$D'(x) = -2x + 5 \;\Rightarrow$$

$$D'(x) = -2x + 5 = 0 \;\Rightarrow x = 2{,}5$$

$$D''(x) = -2 \;\Rightarrow D''(2{,}5) = -2\ < 0$$

Por lo tanto, Deiene tiene el máximo rendimiento al cabo de **2,5 horas**, siendo este:

$$\boldsymbol{D(2,5) = 156,25\ {}^{m^2}/_{h}}$$

Esto significa que, después de 2 horas y 30 minutos de trabajo Deiene alcanza su mayor rendimiento, cubriendo 156,25 ${}^{m^2}/_{h}$.

d) ¿Cuándo tienen ambos el mismo rendimiento?

$$E(x) = D(x) \;\Rightarrow\; -x^2 + 19x + 66 = -x^2 + 5x + 150 \;\Rightarrow 14x = 84 \;\Rightarrow x = 6$$

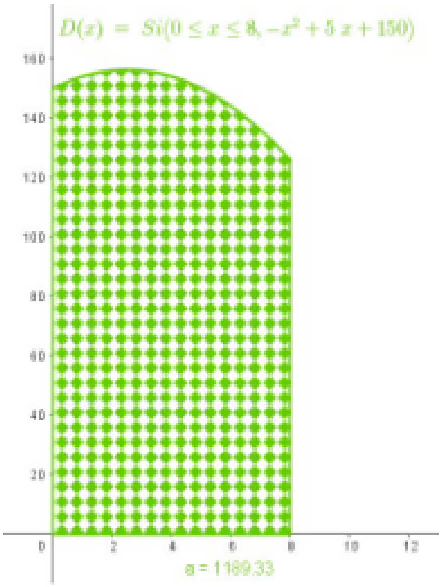
Por lo tanto, **en la sexta hora** tendrán el mismo rendimiento

e) Al final de la jornada laboral del día, ¿cuánto ha pintado Deiene en total?

$$\int_0^8 (-x^2 + 5x + 150)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 5\cdot\frac{x^2}{2} + 150x\right]_0^8 = -\frac{1}{3}\cdot 8^3 + \frac{5}{2}\cdot 8^2 + 150\cdot 8 =$$

$$= 1.189,33$$

Por lo tanto, al final de la jornada laboral del día Deiene ha pintado $\mathbf{1.189,33\ m^2}$.



APARTADO 3.2 $[\![2,5 \; puntos]\!]$

Sea la función $f(x): (0, \;\; \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \frac{a\,x^2 + b}{x}$$

Sabemos que la recta $y = -2$ es la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 1$.

a) $[\![1,25 \; puntos]\!]$ Calcula el valor de los parámetros a y b.

b) $[\![0,75 \; puntos]\!]$ Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, cuando $a = b = -1$.

c) $[\![0,5 \; puntos]\!]$ Para los valores $a = b = -1$, ¿tiene la función, $f(x)$, algún máximo o mínimo relativo? En caso afirmativo, determínalo.

Solución:

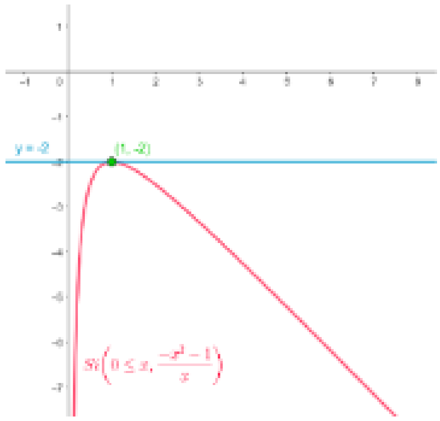
PROBLEMA 3

APARTADO 3.2

"CÁLCULO DE PARÁMETROS Y ANÁLISIS DE LA MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN"

a) Calculamos los valores de los parámetros a y b en la función:

$$f(x) = \frac{a\,x^2 + b}{x}$$



- Calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2ax \cdot x - 1 \cdot (ax^2 + b)}{x^2} = \frac{ax^2 - b}{x^2} \Rightarrow f'(1) = a - b$$

- La ecuación de la recta tangente en el punto $x = 1$ es:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

- $f(1) = a + b$

  Sustituyendo:

$$y - (a + b) = (a - b)(x - 1) \Rightarrow y = (a - b)x + 2b$$

- Por otro lado, sabemos que la recta $y = -2$ es la recta tangente de la función en el punto $x = 1$

Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{r} a - b = 0 \\ 2b = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{a = -1 \, ; b = -1}$$

b) Determinamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ cuando $a = b = -1$:

$$f(x) = \frac{-x^2 - 1}{x} \quad \wedge \quad f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^2}$$

- Analizamos qué valores anulan la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

- Como el dominio de definición de la función es $(0, \quad \infty)$, analizaremos el punto $x = 1$:

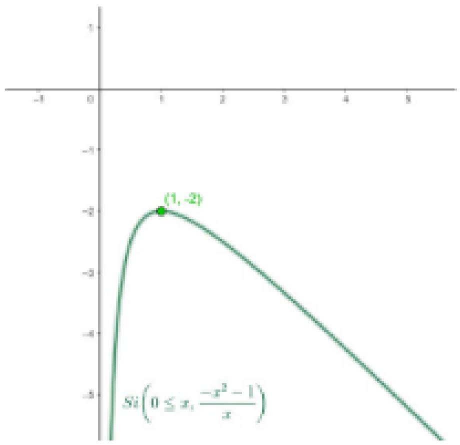
	$(0, \quad 1)$	$(1, \quad \infty)$
Signo de $f'(x)$ -	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f(x)$	↗	↘

Por lo tanto la función $f(x)$ es **creciente en el intervalo $(0, \quad 1)$ y es decreciente en el intervalo $(1, \quad \infty)$.**

c) Para los valores $a = b = -1$, ¿la función $f(x)$ tiene máximos o mínimos relativos?

- En el intervalo $(0, \quad 1)$ la función es creciente y en el intervalo $(1, \quad \infty)$ decreciente.
- La función $f(x)$ es continua en su dominio de definición $(0, \quad \infty)$.

Por lo tanto, la función tiene un máximo relativo en el punto $(1, \quad -2)$.



PROBLEMA 4

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 4.1 o APARTADO 4.2

APARTADO 4.1 $[\![2,5\ puntos]\!]$

Una bolsa contiene tres cartas del mismo tamaño con caras de diferentes colores.

Una carta es roja por las dos caras, otra tiene una cara blanca y otra roja, y la tercera tiene una cara negra y otra blanca.

Se saca una carta al azar y se muestra, también al azar, una de sus caras.

a) $[\![1\ puntos]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea roja?

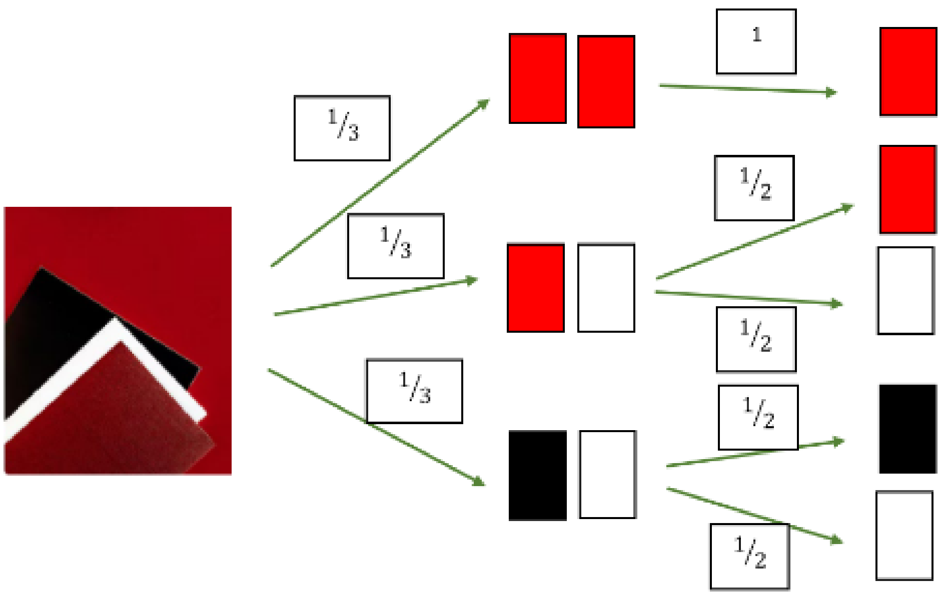
b) $[\![1,5\ puntos]\!]$ Si la cara mostrada es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja?

Solución:

PROBLEMA 4

APARTADO 4.1

"CARTAS DE COLORES Y PROBABILIDADES"



Sean los siguientes sucesos

$C_1 = \{la\ primera\ carta\ (Roja\ Roja)\}$ $\qquad R = \{cara\ Roja\}$

$C_2 = \{la\ segunda\ carta\ (Roja\ Blanca)\}$ $\qquad B = \{cara\ Blanca\}$

$C_3 = \{la\ tercera\ carta\ (Negra\ Blanca)\}$ $\qquad N = \{cara\ Negra\}$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea roja?

$$P(R) = P(C_1) \cdot P(R \mid C_1) + P(C_2) \cdot P(R \mid C_2) + P(C_3) \cdot P(R \mid C_3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{P(R) = \frac{1}{2}}$$

b) Si la cara mostrada es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja?

- Calculamos la probabilidad de que la cara sea blanca:

$$P(B) = P(C_1)\,P(B \mid C_1) + P(C_2)\,P(B \mid C_2) + P(C_3)P(B \mid C_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{0}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \boldsymbol{P(B) = \frac{1}{3}}$$

- Calculamos la probabilidad a posteriori:

$$P(R \mid B) = P(C_2 \mid B) = \frac{P(C_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C_2)\cdot P(B|C_2)}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(R \mid B) = \frac{1}{2}}$$

APARTADO 4.2 $[\![2,5\ puntos]\!]$

Iker dispone de dos días para preparar un examen. La probabilidad de estudiar solamente el primer día es del 10 %, la de estudiar los dos días es del 10 % y la de no hacerlo ningún día es del 25 %.

Calcular la probabilidad de que Iker estudie para el examen en cada uno de los siguientes casos:

a) $[\![0,75\ puntos]\!]$ El segundo día.

b) $[\![1\ punto]\!]$ Solamente el segundo día.

c) $[\![0,75\ puntos]\!]$ El segundo día sabiendo que no ha estudiado el primero.

Solución:

PROBLEMA 4

APARTADO 4.2

"ANÁLISIS DE LA PROBABILIDAD DE QUE IKER PREPARE EL EXAMEN"

Sean los siguientes sucesos:

$$1 = \{estudiar\ el\ primer\ día\}$$

$$2 = \{estudiar\ el\ segundo\ día\}$$

Entonces:

- La probabilidad de estudiar solo el primer día es el10 % $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{P(1 \cap 2^c) = 0,1}$$

- La probabilidad de estudiar los dos días es el 10 % $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{P(1 \cap 2) = 0,1}$$

- La probabilidad de no estudiar ninguno de los dos días es el 25 % $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{P(1^c \cap 2^c) = 0,25}$$

- Con estos datos calculamos las probabilidades: $P(1 \cup 2)$ y $P(1)$:
  - $P(1^c \cap 2^c) = 0{,}25 = P(1 \cup 2)^c = 1 - P(1 \cup 2) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{P(1 \cup 2) = 0,75}$
  - $P(1 \cap 2^c) = 0{,}1 = P(1) - P(1 \cap 2) = P(1) - 0{,}1 \Rightarrow \boldsymbol{P(1) = 0,2} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{P(1^c) = 0,8}$

Ahora calculamos las probabilidades pedidas en el enunciado del problema:

a) La probabilidad de que Iker estudie el examen el segundo día, esto es, $P(2)$:

$$P(1 \cup 2) = 0{,}75 = P(1) + P(2) - P(1 \cap 2) \Rightarrow \; P(2) = 0{,}75 - 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}65 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(2) = 0,65}$$

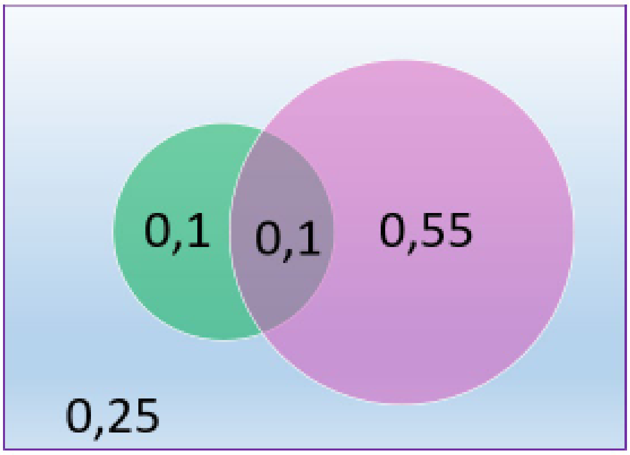
b) La probabilidad de que Iker estudie el examen solo el segundo día, esto es, $P(1^c \cap 2)$:

$$P(1^c \cap 2) = P(2) - P(1 \cap 2) = 0{,}65 - 0{,}1 = 0{,}55 \quad \Rightarrow \boldsymbol{P(1^c \cap 2) = 0,55}$$

c) La probabilidad de que Iker estudie el examen el segundo día sabiendo que no ha estudiado el primer día:

$$P(2 \mid 1^c) = \frac{P(1^c \cap 2)}{P(1^c)} = \frac{0{,}55}{0{,}8} = 0{,}6875 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(2 \mid 1^c) = 0,6875}$$

OTRA MANERA



La probabilidad de estudiar el primer día $\equiv P(1)$

La probabilidad de estudiar el segundo día $\equiv P(2)$

a) $P(2) = P(1 \cap 2) + P(1^c \cap 2) = 0{,}1 + 0{,}55$

b) Se puede comprobar el resultado en el diagrama de Venn.

PROBLEMA 5

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 5.1 o APARTADO 5.2

APARTADO 5.1 $[\![2,5 \ \boldsymbol{puntos}]\!]$

En un determinado año, la nota de la Prueba para el Acceso a la Universidad, PAU, del alumnado que se ha preinscrito en el *Grado en Arquitectura Técnica* sigue una distribución normal de media 6,8 puntos y desviación típica 0,6 puntos.

Por otro lado, la nota del alumnado que se ha preinscrito en el *Grado en Biomedical Engineering* sigue una distribución normal de media 7 puntos y desviación típica 0,5 puntos.

En ambos casos solo se puede admitir al 25 % del alumnado preinscrito que tiene las mejores calificaciones. Si Yolanda ha obtenido una nota de 7,25 puntos y Teresa de 7,45 puntos, ¿a qué grados tendrán opción de acceso?

APARTADO 5.2 $[\![2,5 \ \boldsymbol{puntos}]\!]$

La estatura (en centímetros) del personal del servicio foral de extinción de incendios y salvamento es una variable aleatoria, X, que sigue una distribución normal de media μ y varianza 169 cm^2.

A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 81 se estima que la media es 175 cm.

Solución:

PROBLEMA 5

APARTADO 5.1

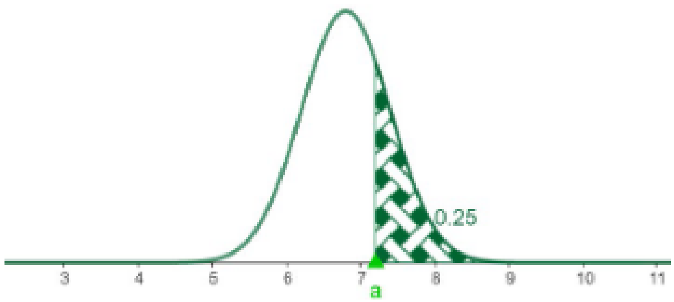
"PROBLEMA SOBRE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL DE LAS NOTAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD"

Llamamos:

$$Grado\ A \equiv Grado\ en\ Arquitectura\ Técnica$$
$$Grado\ B \equiv Grado\ en\ Biomedical\ Engineering$$

Calculamos la nota mínima de acceso en cada grado:

- **Grado A:** $X \equiv N(\mu, \ \sigma) = N(6{,}8\ ,\ 0{,}6)$



$P(X > a) = 0{,}25 \ \Rightarrow$

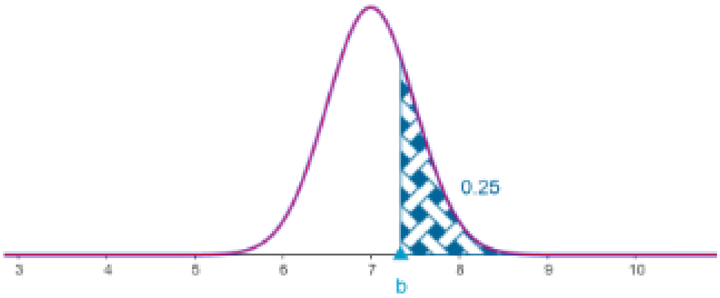
$$P\left(\frac{X-6{,}8}{0{,}6} > \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}25 \ \Rightarrow P\left(Z > \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}25$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \le \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}25 \ \Rightarrow \ P\left(Z \le \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}75$$

$$\Rightarrow \frac{a-6{,}8}{0{,}6} = 0{,}675 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{a = 7{,}205}$$

Por lo tanto, **la nota mínima que se pedirá para entrar en el grado A será 7,205 puntos.**

Grado B: $Y \equiv N(\mu', \ \sigma') = N(7\ ,\ 0{,}5)$



$$P(Y > b) = 0{,}25 \ \Rightarrow P\left(\frac{Y-7}{0{,}5} > \frac{b-7}{0{,}5}\right) = 0{,}25 \Rightarrow \left(Z \leq \frac{b-7}{0{,}5}\right) = 0{,}75$$

$$\Rightarrow \frac{b-7}{0{,}5} = 0{,}675 \ \Rightarrow \boldsymbol{b = 7{,}3375}$$

Por lo tanto, **la nota mínima que se pedirá para entrar en el grado B será 7,3375 puntos.**

Como Yolanda tiene una nota de 7,25 puntos tendrá posibilidad de acceso sólo al grado en *Grado en Arquitectura Técnica (A)*; en cambio, Teresa que tiene una nota de 7,45 puntos tendrá posibilidad de acceso tanto al *Grado en Arquitectura Técnica (A)* como al *Grado en Biomedical Engineering (B)*.

APARTADO 5.2 [[$2,5$ *puntos*]]

La estatura (en centímetros) del personal del servicio foral de extinción de incendios y salvamento es una variable aleatoria, X, que sigue una distribución normal de media μ y varianza 169 cm^2.

A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 81 se estima que la media es 175 cm.

a) [[$0,4$ *puntos*]] Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$.

b) [[$0,75$ *puntos*]] ¿Cuál es la probabilidad de que la estatura media esté entre 172 y 182 cm?

c) [[$0,75$ *puntos*]] En la distribución de la media muestral, $\bar{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %.

d) [[$0,6$ *puntos*]] Si se quiere estimar la estatura media del personal de dicho servicio de forma que el error máximo admisible no sobrepase los 2 cm, con un nivel de confianza del 94 %, ¿cuántas personas se tendrán que escoger para formar parte de la muestra?

Solución:

PROBLEMA 5

APARTADO 5.2

"ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA MEDIA MUESTRAL DE LA ESTATURA DEL PERSONAL DE UN SERVICIO"

a) Determinamos la distribución de la media muestral $\bar{X}$.

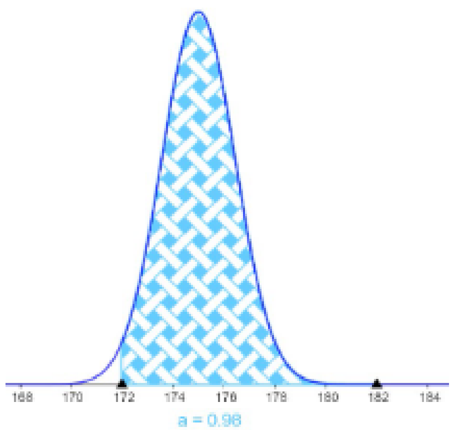
Altura $\equiv X \equiv \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, tal que μ ; $\sigma^2 = 169 \Rightarrow \sigma = 13\ cm.$

- $X \equiv \mathcal{N}(\mu, \ 13)$
- Muestra aleatoria simple de tamaño 81 y $\mu = 175\ cm.$
- La distribución de la media muestral $\bar{X}$ es:

$$\bar{X} \equiv \mathcal{N}\left(\mu, \ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(175, \ \frac{13}{\sqrt{81}}\right) = \mathcal{N}(175, \ 1{,}44) \Rightarrow \boldsymbol{\bar{X} \equiv \mathcal{N}(175, \ 1{,}44)}$$

b) Calculamos $P(172 \leq \bar{X} \leq 182)$:

$P(172 \leq \bar{X} \leq 182) = P(\bar{X} \leq 182) - P(\bar{X} \leq 172)$



- Tipificación de la variable $\bar{X}$:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - 175}{1{,}44} \Rightarrow \bar{X} = 1{,}44\,Z + 175$$

- $P(\bar{X} \leq 182) = P(1{,}44\,Z + 175 \leq 182) = P(Z \leq 4{,}86) = 1$
- $P(\bar{X} \leq 172) = P(1{,}44\,Z + 175 \leq 172) = P(Z \leq -2{,}08) = P(Z \geq 2{,}08) =$

$$= 1 - P(Z \leq 2{,}08) = 1 - 0{,}9812 = 0{,}0188$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{P(172 \leq \bar{X} \leq 182)} = P(\bar{X} \leq 182) - P(\bar{X} \leq 172) = 1 - 0{,}0188 = \boldsymbol{0{,}9812} = \ \mathbf{98{,}12}\ \%$$

c) Determinamos el intervalo característico para el 99 % de $\bar{X}$:

- Sabemos que $\bar{X} \equiv \mathcal{N}\,(175, \quad 1{,}44\,)$

$(175 - e\,, \quad 175 + e)$ *es el intervalo característico para el* 99 %, *si* $P(175 - e \;\leq \bar{X} \;\leq\; 175 \;+\; e\,) = \;0{,}99$

$$\mathrm{P}(\,175 - \mathrm{e} \leq \;\bar{X} \leq 175 \;+\; \mathrm{e}\,) = 0{,}99 \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(\,\bar{X} \;\leq 175 + \mathrm{e}\,) - \mathrm{P}(\,\bar{X} \leq 175 - \mathrm{e}\,) = \;0{,}99$$

- Tipificación:

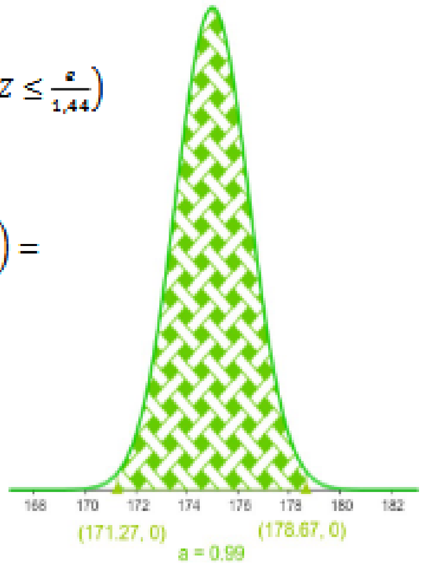
$\bar{X} = 1{,}44\,Z + 175$

- $P(\,\bar{X} \;\leq\; 175 + e\,) = P(\,1{,}44\,Z + 175 \leq 175 + e\,) = P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right)$

- $P(\,\bar{X} \;\leq\; 175 - e\,) = P(\,1{,}44\,Z + 175 \leq\; 175 - e\,) =$

$$= P(\,0{,}45\,Z \;\leq -e\,) \;\; = P\left(Z \leq \frac{-e}{1{,}44}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right)$$



Por lo tanto:

$$\mathrm{P}(\,175 - \mathrm{e} \;\leq\; \bar{X} \;\leq\; 175 \;+\; \mathrm{e}\,) = P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right)\right] \; = 0{,}99$$

$$\Rightarrow 2\,P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right) - 1 = 0{,}99 \;\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right) = 0{,}995$$

Luego mirando a la tabla de la distribución normal:

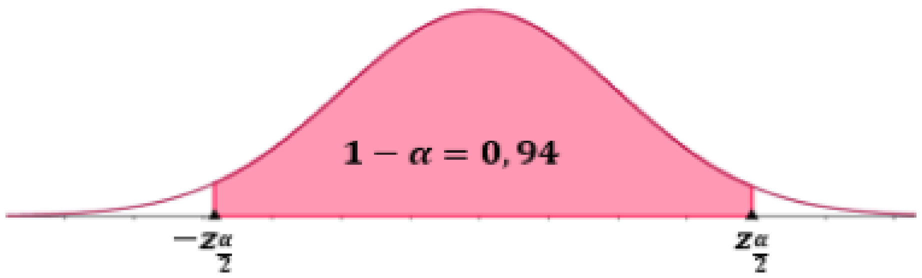
$$\frac{e}{1{,}44} = 2{,}575 \;\Rightarrow\; e = \mathbf{3{,}705}$$

Por lo tanto, el intervalo característico para el 99 % es:

$$(175 - \mathrm{e}\,, \quad 175 + e) = (\mathbf{171{,}3}\,, \quad \mathbf{178{,}7})$$

d) Calculamos cuántas personas se tendrán que elegir de manera que el máximo error admisible no sea mayor que 2 cm con un nivel de confianza del 94 %.

- Calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$:



El nivel de confianza: $n_c = 0{,}94 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0{,}06 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}03 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}885$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}03 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}03 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}97 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}885$$

- La fórmula del error máximo admisible para la distribución muestral de la media es:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$e_m = 2 = 1{,}885 \cdot \frac{13}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 12{,}2525 \Rightarrow n = 150{,}123 \cong 151 \Rightarrow \boldsymbol{n = 151}$$

Por lo tanto, deberíamos de tomar una muestra de 151 personas para que el máximo error admisible no sea superior a 2 cm con un nivel de confianza del 94 %.