PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
Y PRUEBA DE ADMISIÓN

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS

CURSO 2024–2025

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.

c) Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.

d) Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.

e) En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.

f) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.

g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

h) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

i) Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Juan ha gastado 80€ por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón. Sabemos que el precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos.

a) **[1,25 puntos]** ¿Es posible determinar de forma única el precio del jersey? ¿Y el de la camisa? Razona la respuesta.

b) **[1,25 puntos]** Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57€, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del $30\,\%$, del $40\,\%$ y del $20\,\%$, respectivamente. Calcula el precio de cada prenda antes de las rebajas.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - ax + 2 - 2\cos(x)}{e^x - x\cos(x) - 1}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Sea la función $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a + \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

a) **[1 punto]** Calcula a para que $y = 1$ sea una asíntota horizontal de la gráfica de f.

b) **[1,5 puntos]** Para $a = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Estudia y halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Sean los puntos $O(0,0,0)$, $A(0,2,-2)$, $B(1,2,m)$ y $C(2,3,2)$.

a) **[1,25 puntos]** Halla los valores de m para que el tetraedro determinado por los puntos O, A, B y C tenga un volumen de 3 unidades cúbicas.

b) **[1,25 puntos]** Para $m=0$, calcula la distancia del punto O al plano que pasa por los puntos A, B y C.

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Considera el punto $P(1,1,1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{2}$.

a) **[1 punto]** Halla el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

b) **[1,5 puntos]** Halla la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Halla la función $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ que pasa por los puntos $(2, e-2-2\ln(2))$ y $(1,0)$, y verifica que $f''(x) = e^{x-1} - \dfrac{1}{x}$.

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

En la tabla siguiente se recoge el número de coches y motos que se presentaron a la ITV en el año 2023:

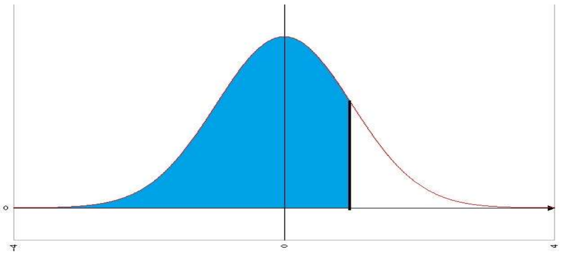
	Coches	Motos
Aptos	116.383	160.667
No aptos	2.679	3.447

Se elige un vehículo al azar de entre los coches y motos que se presentaron a dicha inspección.

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el vehículo elegido sea una moto o haya resultado apto?

b) **[1,25 puntos]** Si el vehículo elegido es un coche, ¿cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $N(0,1)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z .

JUNIO 2025 - ANDALUCÍA

① a) x = precio de un jersey
y = " de una camisa
z = precio de un pantalón

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=80 \\ x=\dfrac{y+z}{3}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y+z=80 \\ 3x-y-z=0\end{array}\right\}$$

Llamamos $z=\lambda$ y resolvemos

$$\begin{array}{rl} x+y+\lambda &= 80 \\ 3x-y-\lambda &= 0 \\ \hline 4x &= 80 \end{array} \Rightarrow x=\frac{80}{4}=20$$

Como $x+y+\lambda=80 \Rightarrow y=80-20-\lambda=60-\lambda$

Como el precio de una camisa depende del parámetro, podemos calcular el precio del jersey, que es 20 €, pero no el precio de una camisa.

b) Teniendo en cuenta los descuentos, tenemos la siguiente ecuación:

$$0{,}7\cdot 20+0{,}6\cdot(60-\lambda)+0{,}8\cdot\lambda=57 \Rightarrow 14+36+0{,}20\lambda=57 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{57-14-36}{0{,}2}=35$$

Solución: el jersey cuesta 20 €, la camisa $60-35=25$ € y el pantalón 35 €.

② $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-ax+2-2\cos x}{e^x-x\cos x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-a+2\operatorname{sen}x}{e^x-\cos x+x\operatorname{sen}x}=$$

$$=\left[\frac{1-a}{0}\right]$$

• Si $a=1 \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+2\operatorname{sen}x}{e^x-\cos x+x\operatorname{sen}x}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x+2\cos x}{e^x+\operatorname{sen}x+x\operatorname{sen}x+x\cos x}=$

$=2$

• Si $a\neq 1 \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-ax+2-2\cos x}{e^x-x\cos x-1}=\infty$

Donde en (1) hemos aplicado la regla de L'Hôpital.

③ $f:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = a + \frac{\ln x}{x^2}$$

a) Para que $y=1$ sea una A.H., $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{\ln x}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+\ln x}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{①}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2ax+\frac{1}{x}}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{①}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2a-\frac{1}{x^2}}{2} = \frac{2a}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

b) $a=0 \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x\cdot 2x}{x^4} = \frac{x-2x\ln x}{x^4}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x-2x\ln x = 0 \Rightarrow x(1-2\ln x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ No vale} \\ 1-2\ln x = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{e}$$

$+$ $-$ signo de f'

0 ① $\sqrt{e}$ ②

$\nearrow$ $\searrow$

$$\boxed{f \text{ es estrictamente } \begin{cases} \text{creciente en } (0,\sqrt{e}) \\ \text{decreciente en } (\sqrt{e},+\infty) \end{cases}}$$

Como f es continua en $(0,+\infty)$ por ser cociente de funciones continuas en $(0,+\infty)$, se tiene que $x=\sqrt{e}$ es un máximo relativo de coordenadas

$$\left(\sqrt{e}, f(\sqrt{e})\right) = \left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e^2}\right)$$

$$\boxed{f \text{ tiene un máximo relativo en } \left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e^2}\right)}$$

④ $O(0,0,0)$, $A(0,2,-2)$, $B(1,2,m)$, $C(2,3,2)$

a) $V_{\substack{\text{Tetraedro} \\ O,A,B,C}} = 3\ u^3$

Sabemos que $V_{\text{Tetraedro}} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]\right|$, donde

$$[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}] = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 4m-2$$

Así, $\frac{1}{6}|4m-2| = 3 \Rightarrow |4m-2| = 18 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4m-2 = 18 \Rightarrow m = \frac{18+2}{4} = 5 \\ 4m-2 = -18 \Rightarrow m = \frac{-18+2}{4} = -4 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Para } a=5 \text{ y para } a=-4,\ V_{Tetraedro} = 3\ u^3}$$

b) $m=0$, ¿$d(O,\pi)$, donde π es el plano determinado por A, B y C?

$\pi \equiv \{A, \vec{AB}, \vec{AC}\}$, $A(0,2,-2)$, $B(1,2,0)$, $C(2,3,2)$

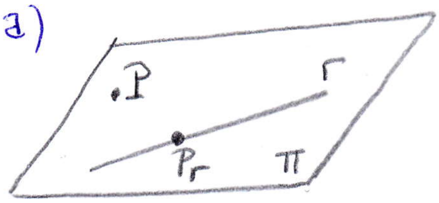
$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB} = (1,0,2) \\ \vec{AC} = (2,1,4) \end{array}\right\} \pi \equiv \det\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z-2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -2x+z-2=0$$

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \text{donde } \begin{array}{l} P(p_1,p_2,p_3) \\ \pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \end{array}$$

En nuestro caso:

$$\boxed{d(O,\pi) = \frac{|-2\cdot 0+0-2|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\ u}$$

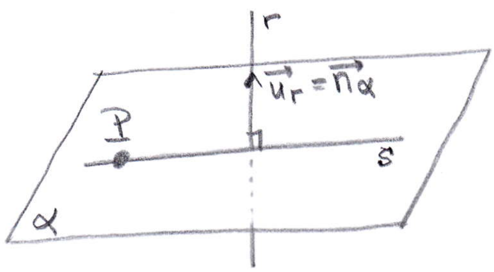
5 a)



$\pi \equiv \{P, \vec{u_r}, \vec{PP_r}\}$ donde $P(1,1,1)$, $\vec{u_r} =$
$= (1,2,2)$ es el vector director de r y
$\vec{PP_r} = (1,2,3)-(1,1,1) = (0,1,2)$

$$\pi \equiv \det\begin{pmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 2 & 1 \\ z-1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x-2y+z-1=0}$$

b) s (recta) tal que $\begin{cases} P \in s \\ s \perp r \end{cases}$



Calculamos un plano $\alpha \equiv \{P, \vec{n_\alpha} = \vec{u_r}\}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x+2y+2z+D=0 \\ P(1,1,1) \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow 1+2+2+D=0 \Rightarrow D=-5$$

$$\Rightarrow \alpha \equiv x+2y+2z-5=0$$

Calculamos la intersección de r y α:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituimos las ecs. de r en la ecuación de α:

$$1 + \lambda + 2(2 + 2\lambda) + 2(3 + 2\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow 9\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$$

El punto de intersección es:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + \left(-\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{3} \\ y &= 2 + 2\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{2}{3} \\ z &= 3 + 2\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{5}{3} \end{aligned}\right\} Q\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{3}\right)$$

La recta pedida es $s \equiv \{P, \overrightarrow{PQ}\}$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{3}\right) - (1,1,1) = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)$$

$$\boxed{s \equiv \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3}\mu \\ y = 1 - \frac{1}{3}\mu \\ z = 1 + \frac{2}{3}\mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R} \equiv \frac{x-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{y-1}{-\frac{1}{3}} = \frac{z-1}{\frac{2}{3}}}$$

6 $f:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\begin{cases} f \text{ pasa por } (2, e-2-2\ln 2) \text{ y por } (1,0) \\ f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} \end{cases}$

- Como $f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int \left(e^{x-1} - \tfrac{1}{x}\right)dx = e^{x-1} - \ln|x| + C_1$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(e^{x-1} - \ln|x| + C_1\right)dx = e^{x-1} - (x\ln x - x) +$$

$$+ C_1 x + C_2$$

ya que $\int \ln x\,dx = \left[\begin{matrix} u = \ln x \longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \longrightarrow v = x \end{matrix}\right] =$

$$= x\ln x - \int x \tfrac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C_3$$

- Como f pasa por $(1,0)$: $f(1) = 0$

$$f(1) = e^0 - (1\cdot 0 - 1) + C_1 + C_2 = \boxed{2 + C_1 + C_2 = 0}$$

- Como f pasa por $(2, e-2-\ln 2)$: $f(2) = e - 2 - \ln 2$

$$f(2) = e^{2-1} - (2\ln 2 - 2) + 2C_1 + C_2 =$$

$$= \cancel{e} - 2\cancel{\ln 2} + 2 + 2C_1 + C_2 = \cancel{e} - 2 - 2\cancel{\ln 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{2C_1 + C_2 = -4}$$

• Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 2+C_1+C_2=0 \\ 2C_1+C_2=-4 \end{cases} \Rightarrow (C_1, C_2) = (-2, 0)$$

$$\boxed{\text{La función pedida es } f(x) = e^{x-1} - (x\ln x - x) - 2x = = e^{x-1} - x\ln x - x}$$

7

	Coches	Motos	Total
Aptos	116 383	160 667	277 000
No aptos	2 679	3 447	6 126
	119 062	164 114	283 176

C = el vehículo elegido es un coche
M = " " " es una moto
A = " " ha resultado apto

a)

$$\boxed{P(M \cup A)} = P(M) + P(A) - P(M \cap A) =$$

$$= \frac{164\,114}{283\,176} + \frac{277\,000}{283\,176} - \frac{160\,667}{283\,176} = \boxed{\frac{280\,447}{283\,176} \simeq 0{,}99}$$

b)

$$\boxed{P(\overline{A}/C)} = \frac{P(\overline{A} \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2679}{283\,176}}{\frac{119\,067}{283\,176}} = \boxed{\frac{893}{39\,689} \simeq 0{,}022}$$