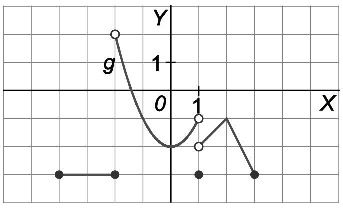
Dada la gráfica de $g(x)$ calcula los límites pedidos.



a) $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

a) $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)=2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)=-3$ $\qquad$ No existe $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$

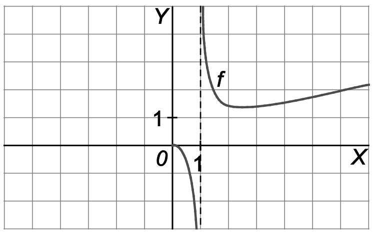
b) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=-2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=-1$ $\qquad$ No existe $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=-1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=-1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=-1$

Dada la gráfica de $f(x)$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$



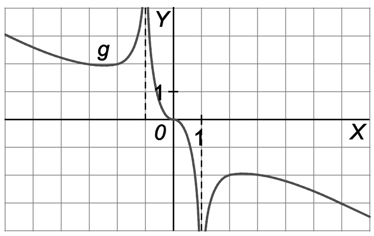
a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

Dada la gráfica de $g(x)$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$



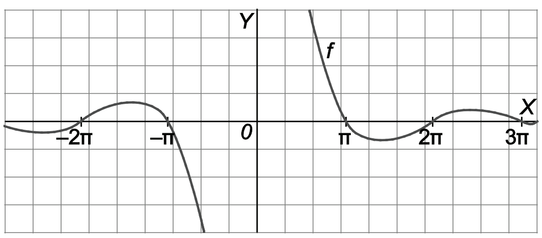
a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} g(x)=+\infty$

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} g(x)=-\infty$

Dada la gráfica de $f(x)$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

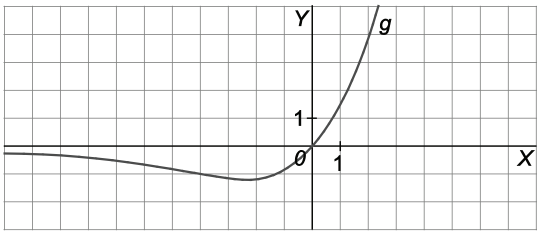
b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$



a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

Dada la gráfica $g(x)$, calcula:



a) $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

a) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$

123. Dada la sucesión por recurrencia $a_1 = 1$ $a_n = \dfrac{1}{1+a_{n-1}}$:

a) Calcula sus primeros términos.

b) Sabiendo que es convergente, calcula su límite.

a) $a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2},\ a_3 = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{3},\ a_4 = \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{3}} = \dfrac{3}{5},\ a_5 = \dfrac{1}{1+\dfrac{3}{5}} = \dfrac{5}{8},\ a_6 = \dfrac{1}{1+\dfrac{5}{8}} = \dfrac{8}{13}$

b) Como la sucesión es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = L$. Por tanto:

$$L = \frac{1}{1+L} \Rightarrow L^2 + L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, L = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

La sucesión a_n es de términos positivos entonces la solución válida es $L = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Autoevaluación

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula el dominio de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{(x-5)^2\left(4x^4+1\right)}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2-9}}$

c) $f(x) = \log_3 \sqrt{x^2-x}$

a) $(x-5)^2\left(4x^4+1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ 4x^4+1=0 \end{cases} \Rightarrow$ La única solución real es $x = 5$. Por tanto, la función existe en todo el conjunto de los números reales excepto en $x = 5$. Luego $D(f) = (-\infty,5)\cup(5,+\infty)$.

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-9} \geq 0 \\ x^2-9 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-3,0] \cup (3,+\infty)$. Luego $D(f) = (-3,0]\cup(3,+\infty)$.

c) Para que exista $\log_3\sqrt{x^2-x}$ debe ocurrir que $x^2 - x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,0)\cup(1,+\infty)$. Luego $D(f) = (-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

2. Halla el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^4-3x+5}{-3x^3+x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt[5]{x^2-5}}{-\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[10]{x^4+x}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{-2x^2+4x}$

e) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{4x^2}{(x+3)^2}$

f) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

g) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\dfrac{4x^3+16x^2+21x+9}{4x^3+20x^2+33x+18}$

h) $\lim\limits_{x\to3^-}\left[\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-9}\right]$

i) $\lim\limits_{x\to-4}\left(\dfrac{2x-3}{-11}\right)^{\frac{x+4}{3}}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-3}{2x^2+3}\right)^{\frac{-x^3}{x^3+1}}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^4-3x+5}{-3x^3+x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^4}{-3x^3}=\dfrac{-\infty}{+\infty}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt[5]{x^2-5}}{-\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[10]{x^4+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt[5]{x^2}}{-\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[10]{x^4+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt[5]{x^2}}{2\sqrt[5]{x^2}}=1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2-x}\right)}{2x+\sqrt{4x^2-x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-\left(4x^2-x\right)}{2x+\sqrt{4x^2-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x+\sqrt{4x^2+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{4x}=\dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{-2x^2+4x}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{-2x^2+4x}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(2-\sqrt{x+2}\right)\left(2+\sqrt{x+2}\right)}{2x(-x+2)\left(2+\sqrt{x+2}\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4-x-2}{2x(-x+2)\left(2+\sqrt{x+2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-x+2}{2x(-x+2)\left(2+\sqrt{x+2}\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{2x\left(2+\sqrt{x+2}\right)}=\dfrac{1}{16}$

e) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{4x^2}{(x+3)^2}=\dfrac{36}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{4x^2}{(x+3)^2}=\dfrac{36}{0^+}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{4x^2}{(x+3)^2}=\dfrac{36}{0^+}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{4x^2}{(x+3)^2}=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\dfrac{1}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\Rightarrow$ No existe límite.

g) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\dfrac{4x^3+16x^2+21x+9}{4x^3+20x^2+33x+18}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\dfrac{4x^3+16x^2+21x+9}{4x^3+20x^2+33x+18}=\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\dfrac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2(4x+4)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2(4x+8)}=\dfrac{-6+4}{-6+8}=-1$

h) $\lim\limits_{x\to3^-}\left[\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-9}\right]=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to3^-}\left[\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-9}\right]=\lim\limits_{x\to3^-}\left[\dfrac{x+3-3}{x^2-9}\right]=\lim\limits_{x\to3^-}\left[\dfrac{x}{x^2-9}\right]=\dfrac{3}{0^-}=-\infty$

i) $\lim\limits_{x\to-4}\left(\dfrac{2x-3}{-11}\right)^{\frac{x+4}{3}}=1^0=1$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-3}{2x^2+3}\right)^{\frac{-x^3}{x^3+1}}=1^{-1}=1$

3. **a)** Demuestra que la sucesión $a_n = \dfrac{2n-3}{n+5}$ es monótona creciente y acotada superiormente.

b) Calcula su límite.

a) Monótona creciente. Se debe demostrar que $a_{n+1} - a_n \geq 0$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-3}{n+1+5} - \frac{2n-3}{n+5} = \frac{2n^2+10n-n-5+2n^2-12n+3n+18}{(n+6)(n+5)} = \frac{13}{(n+6)(n+5)} > 0$$

Acotada superiormente por 2. Se debe demostrar que $a_n - 2 \leq 0$.

$$a_n - 2 = \frac{2n-3}{n+5} - 2 = \frac{2n-3-2n-10}{n+5} = -\frac{13}{n+5} < 0$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2n-3}{n+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2n}{n} = 2$

4. **Calcula el valor de *a* para que el siguiente límite valga e^2.**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2-1}\right)^{ax+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2-1}\right)^{ax+1} = 1^{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2-1}\right)^{ax+1} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+1)\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2-1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+1)\left(\frac{2x+2}{3x^2-1}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2ax^2}{3x^2}} = e^{\frac{2a}{3}} \Rightarrow \frac{2a}{3} = 2 \Rightarrow a = 3$$

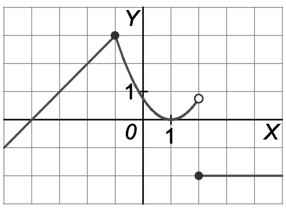
5. **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x < -1 \\ a(x-1)^2 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ -2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **:**

a) Calcula el valor de *a* para que sea continua en el punto $x = -1$.

b) Para este valor de *a* hallado, dibuja la función e indica el tipo de discontinuidad que presenta en $x = 2$.

a) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-}(x+4) = 3$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\left(a(x-1)^2\right) = 4a = f(-1)$. Luego $4a = 3 \Rightarrow a = \dfrac{3}{4}$

b)



Como $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{3}{4}(x-1)^2\right) = \dfrac{3}{4}$ y $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+}(-2) = -2$,la función presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

6. *Con la ayuda del teorema de Bolzano y de forma razonada, indica tres intervalos, sin puntos comunes entre ellos, en los que la ecuación $-2x^3+3x^2+x-1=0$ tenga una solución.**

$f(x)=-2x^3+3x^2+x-1$ Es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, en cualquier intervalo cerrado.

$$\begin{cases} f(-1)=2+3-1-1=3>0 \\ f(0)=-1<0 \end{cases} \Rightarrow \exists c_1 \in (-1,0) \text{ tal que } f(c_1)=0$$

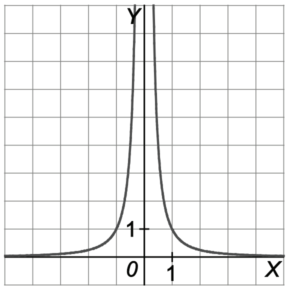
$$\begin{cases} f(0)=-1<0 \\ f(1)=-2+3+1-1=1>0 \end{cases} \Rightarrow \exists c_2 \in (0,1) \text{ tal que } f(c_2)=0$$

$$\begin{cases} f(1)=1>0 \\ f(2)=-16+12+2-1=-3<0 \end{cases} \Rightarrow \exists c_3 \in (1,2) \text{ tal que } f(c_3)=0$$

7. Estudia si la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ es acotada e indica, si existe, su supremo, ínfimo, máximo y mínimo en:

a) Toda la recta real $\mathbb{R}$.

b) El intervalo $[-2,-1]$.



a) En $\mathbb{R}$, la función es acotada inferiormente, pero no superiormente.

El ínfimo es $m=0$, pero no tiene mínimo. No tiene ni máximo ni supremo.

b) En el intervalo cerrado $[-2,-1]$ la función es acotada superiormente e inferiormente.

El máximo absoluto (y supremo) lo alcanza en $x=-1$ y vale 1 y el mínimo absoluto (e ínfimo) lo alcanza en $x=-2$ y vale 0,25.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. El valor de $\lim\limits_{x\to-\infty} \log_2\left(\dfrac{2-2^x}{2}\right)$ vale:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 1 **D.** 0

La solución es D. Calculando el límite: $\lim\limits_{x\to-\infty} \log_2\left(\dfrac{2-2^x}{2}\right)=\log_2\left(\dfrac{2-0}{2}\right)=\log_2 1=0$

2. Calcula a y b para que $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-x^2+ax+b}{x^3-7x^2+16x-12}=-5$

A. $a=8$, $b=-12$ **B.** $a=-8$, $b=12$ **C.** $a=8$, $b=12$ **D.** $a=-8$, $b=-12$

La solución es B. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-x^2+ax+b}{x^3-7x^2+16x-12}=\dfrac{8-4+2a+b}{0}$. Para que este límite sea finito, es necesario que $4+2a+b=0$.

En este caso, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-x^2+ax+b}{x^3-7x^2+16x-12}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^2+x+a+2)}{(x-2)(x^2-5x+6)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x+a+2}{x^2-5x+6}=\dfrac{8+a}{0}\Rightarrow a=-8, b=12$

Se comprueba que para estos valores el límite vale: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-7x^2+16x-12}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{6x-2}{6x-14}=\dfrac{10}{-2}=-5$

3. **La función $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$:**

A. Es continua en $x=3$

B. Presenta una discontinuidad evitable en $x=3$.

C. Presenta una discontinuidad de salto finito en $x=3$.

D. Presenta una discontinuidad de salto infinito en $x=3$.

La solución es B. En x = 3, la función no está definida pero tomando límites se tiene:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}(x+2)=5$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(x+2)=5$$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **La ecuación $x^5+ax^3+b=0$:**

A. Tiene al menos una solución.

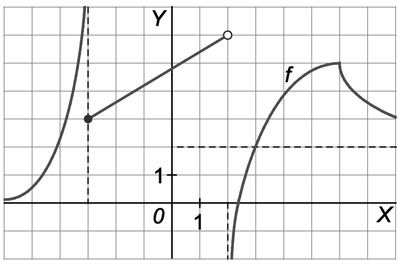
B. Tiene al menos dos soluciones.

C. Puede no tener solución.

D. Puede tener más de una solución.

Las soluciones son A y D. Por tener grado impar sus límites en $\pm\infty$ son $\pm\infty$, respectivamente, y por ser además continua, la función debe cortar al menos una vez al eje de abscisas, es decir, tener al menos una solución. Puede que solo corte una vez o puede que lo corte hasta 5 veces, dependerá de si las soluciones son reales o complejas.

5. **Dada la gráfica de $f(x)$:**



A. $\lim_{x\to +\infty} f(x)=2$

B. $\lim_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$

C. $\lim_{x\to -3^+} f(x)=3$

D. $\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$

Las soluciones son A, C y D. Observando la gráfica, se aprecia que B no es cierta porque $\lim_{x\to 3^-} f(x)=2$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **El dominio de la función f es el intervalo $[3,7]$ y es continua en dicho dominio.**

1. $f(x)=0$ tiene una raíz en $(3,7)$.

2. $f(3)f(7)<0$

A. 1 $\Leftrightarrow$ 2

B. 1 $\Rightarrow$ 2 pero 2 $\not\Rightarrow$ 1

C. 2 $\Rightarrow$ 1 pero 1 $\not\Rightarrow$ 2.

D. 1 y 2 no se pueden dar a la vez.

La solución es C. Esta relación es clara por el teorema de Bolzano, que asegura al menos una raíz si hay cambio de signo en los extremos. Las respuestas A y B no son correctas, porque por ejemplo la función constante cero verifica 1, pero no 2. Finalmente, la respuesta D sería un contraejemplo del teorema de Bolzano.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Se desea estudiar si la ecuación $f(x)=6$ tiene o no solución en el intervalo $[-3,3]$. ¿Qué dato es innecesario?**

A. $D(f)=\mathbb{R}$ **B.** $f(x)$ es continua en $[-3,3]$ **C.** $2<f(-3)<4$ **D.** $8<f(3)<10$

No es necesario conocer que el dominio de la función sea $\mathbb{R}$, porque es suficiente conocer el comportamiento de la función definida por esa ecuación $h(x)=f(x)-6$ en el intervalo $[-3,3]$. Por tanto, el dato innecesario es A.